



HAL
open science

Tetraedrisation automatique et respect de la frontiere

Paul-Louis George, Frédéric Hecht, Eric Saltel

► **To cite this version:**

Paul-Louis George, Frédéric Hecht, Eric Saltel. Tetraedrisation automatique et respect de la frontiere. [Rapport de recherche] RR-0835, INRIA. 1988. inria-00075718

HAL Id: inria-00075718

<https://inria.hal.science/inria-00075718>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP105
78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 835

TETRAEDRISATION AUTOMATIQUE ET RESPECT DE LA FRONTIERE

Paul-Louis GEORGE
Frédéric HECHT
Eric SALTEL

AVRIL 1988



TETRAEDRISATION AUTOMATIQUE

ET

RESPECT DE LA FRONTIERE

Paul-Louis GEORGE Frédéric HECHT Eric SALTEL

I.N.R.I.A.

RESUME :

La résolution par la méthode des Eléments Finis de problèmes formulés en terme d'équations aux dérivées partielles nécessite la création d'un maillage du domaine considéré.

La méthode des "polyèdres" de Voronoï s'avère très puissante pour générer le maillage de l'enveloppe d'un nuage de points, tant en dimension 2 qu'en dimension 3.

De ce maillage on peut, sous certaines conditions, déduire le maillage du domaine étudié.

Cet article se propose de rappeler les étapes d'un tel processus, de mettre en évidence le problème posé par la nécessité de respecter exactement la frontière du domaine, puis d'apporter une solution à cette dernière question.

CONSTRAINT OF BOUNDARY AND AUTOMATIC MESH GENERATION

Abstract :

The solution of E.D.P. problems using the Finite Element Method needs the creation of a mesh of the domain under consideration.

Voronoi's method is powerful to generate the mesh due to a set of points in dimension 2 or 3.

From this mesh, it is possible to derive an appropriate mesh of the domain under some constraints.

The aim of this paper is, after a survey of the different steps of such process, to point out the problem of the exact fitting of the boundary of the domain and to suggest a solution to this constraint.



I/ RAPPEL SUR LES "TRIANGULATIONS" DE VORONOÏ

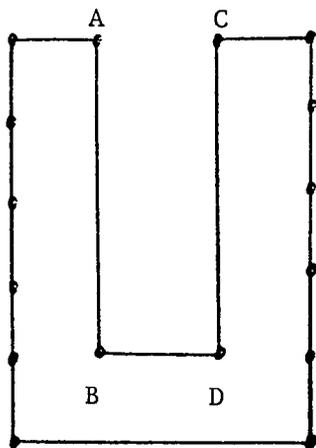
De nombreux auteurs [1] [2] [3] se sont penchés, tant sur le plan théorique que sur le plan pratique, sur les techniques de maillages automatiques basées sur la méthode de Voronoï.

Il est démontré qu'elles permettent toujours de mailler le polygone (polyèdre en dimension 3) convexe engendré par un nuage de points. Partant de ce résultat plusieurs méthodes se proposent de générer le maillage de tout domaine quelconque à partir, non plus de ses seuls points descriptifs, mais de son contour.

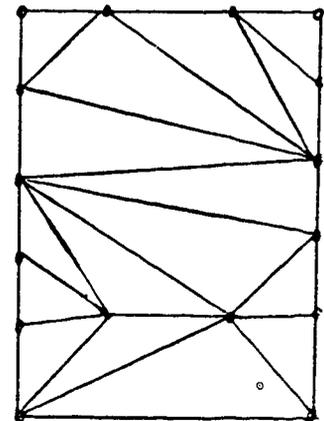
Les différentes étapes d'un tel processus sont, à quelques variantes près, les suivantes :

- (1) extraire de la donnée du contour (c'est à dire de la liste de ses arêtes (faces triangulaires) orientées) le nuage de points descriptifs du domaine.
- (2) générer un quadrangle (un parallélépipède) englobant ce nuage.
- (3) mailler cette boîte en 2 triangles (5 tétraèdres).
- (4) actualiser ce maillage par prise en compte, un à un, des points du nuage donné par la technique de Voronoï.
- (5) éliminer tous les éléments dont un sommet est l'un des points de la boîte de manière à obtenir le maillage de l'enveloppe du domaine.
- (6) retrouver le contour (arêtes ou faces de la frontière) dans ce dernier maillage puis éliminer les éléments extérieurs de façon à obtenir le maillage frontalier du domaine.
- (7) générer, le cas échéant, des points internes de manière à créer, par une méthode appropriée, des éléments de qualité acceptable (du point de vue Eléments Finis).

L'étape 6 de ce processus implique la reconnaissance de la frontière donc de toutes ses arêtes (faces triangulaires) dans le maillage résultant des étapes précédentes. Il est trivial d'exhiber un exemple pour lequel cette frontière n'existe pas, à ce stade du calcul (figure 1).



arêtes du contour
données



maillage de l'enveloppe

figure 1

Les arêtes AB et CD ne sont pas des arêtes du maillage crée : le contour initial n'existe donc plus. Le maillage ne respecte pas le contour donné au sens de la définition suivante :

Définition 1.1 : Etant donnée un contour défini par la liste de ses arêtes (faces), une "triangulation" respecte géométriquement ce contour si toutes les arêtes (faces) du contour donné y sont retrouvées telles quelles ou partitionnées.

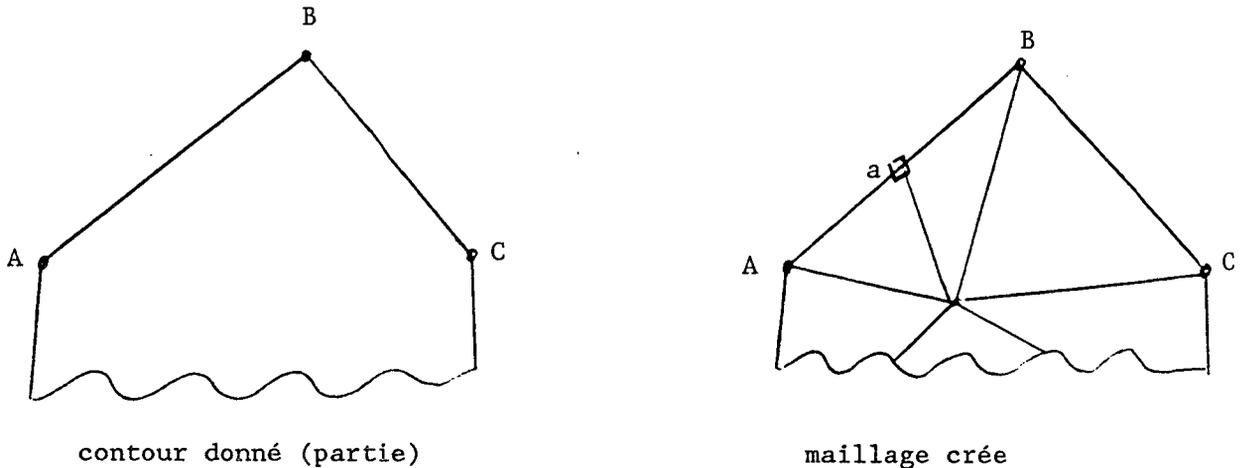


figure 2

L'arête AB est retrouvée sous la forme : $AB = Aa \cup aB$!

Plus contraignante est la définition suivante :

Définition 1.2 : Une "triangulation" respecte exactement un contour donné si elle contient parmi ses arêtes (faces) toutes les arêtes (faces) du contour de manière exacte.

Suite au contre-exemple de la figure 1 on peut énoncer le résultat :

Théorème 1.1 : La "triangulation" d'un polygone (polyèdre) quelconque par des techniques de Voronoi n'est pas en général réalisable au sens de la définition 1.2.

La réalisabilité d'un tel maillage est liée aux propriétés de régularité du contour [1] que nous ne voulons pas imposer à l'utilisateur.

Par exemple, dans le cas de la figure 1, une discrétisation plus fine des arêtes AB et CD nous permettrait de réaliser un maillage respectant exactement le contour donné.

Nous pouvons alors poser le problème suivant :

Problème 1.1 : Est-il possible de réaliser, à partir d'une "triangulation" de Voronoi d'un domaine quelconque une triangulation de celui-ci respectant exactement son contour sans hypothèses supplémentaires sur sa régularité.

Dans les paragraphes suivants nous allons nous efforcer de montrer qu'une réponse positive peut être apportée à cette question.

Un corollaire important sera en possibilité de construire automatiquement un maillage de tout domaine 2D ou 3D, à partir de la donnée de son contour, respectant exactement sa frontière.

La **contrainte** de ce travail est que nous nous interdisons de modifier (par exemple par création de points sur la frontière) les données fournies par l'utilisateur.

Remarque : le fait que la "triangulation" de départ soit de Voronoï n'a pas d'importance en soi, nous partons actuellement de celle-ci uniquement car elle permet de créer un maillage respectant les points de la frontière de tout domaine.

II/ MODIFICATIONS TOPOLOGIQUES D'UN MAILLAGE

Nous allons, dans ce paragraphe, définir certaines transformations dont nous aurons besoin par la suite. Pour ce faire nous introduisons les définitions suivantes :

Définition 2.1 : Soient : T_i : un élément défini par la liste orientée de ses sommets.

$\mathcal{T} = \{T_i\}$ un ensemble d'éléments.

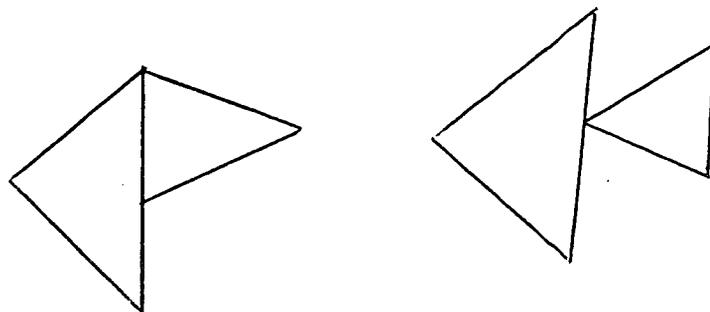
$\bar{\Omega}$ un domaine polygonal (polyédrique)

Nous dirons que \mathcal{T} est une triangulation acceptable ou un maillage de $\bar{\Omega}$ si :

$$i) \bar{\Omega} = \bigcup_{T_i \in \mathcal{T}} T_i$$

ii) l'ensemble $T_i \cap T_j$ pour $i \neq j$ est l'ensemble vide, est réduit à un point, une arête ou une face.

Cette définition classique implique que $\bar{\Omega}$ est recouvert exactement, sans chevauchement, par l'ensemble des T_i avec des propriétés de continuité :



Situations non continues

figure 3

Remarque : Les éléments possibles sont des triangles (en 2D) et des tétraèdres (en 3D) à l'exclusion de toutes les autres possibilités.

Définition 2.2 : Soient : \mathcal{T}_1 un maillage d'un domaine $\tilde{\Omega}_1$

\mathcal{T}_2 un maillage d'un domaine $\tilde{\Omega}_2$

Nous dirons que \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont deux maillages équivalents si et seulement si :

i) $\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\Omega}_2$

ii) les contours de $\tilde{\Omega}_1$ et de $\tilde{\Omega}_2$ sont discrétisés de manière identique.

De même :

\mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 seront dit sous-équivalents si et seulement si

i) $\tilde{\Omega}_1 = \tilde{\Omega}_2$

Cette définition naturelle de "l'égalité" de deux maillages ne préjuge pas de leurs qualités respectives.

Les transformations que nous allons construire vont nous permettre de construire des maillages équivalents (ou sous-équivalents).

Lemme 2.1 : Soit \mathcal{T}_1 un maillage réduit aux 2 triangles ABC et BDC d'arête commune BC, si le segment AD coupe l'arête BC entre B et C, le maillage \mathcal{T}_2 formé des 2 triangles ABD et ADC est équivalent à \mathcal{T}_1 .

Ce résultat évident peut être interprété comme :

i) la création d'une arête (AD).

ii) la suppression d'une arête (BC).

par inversion de diagonale dans un quadrangle quand cette opération est réalisable.

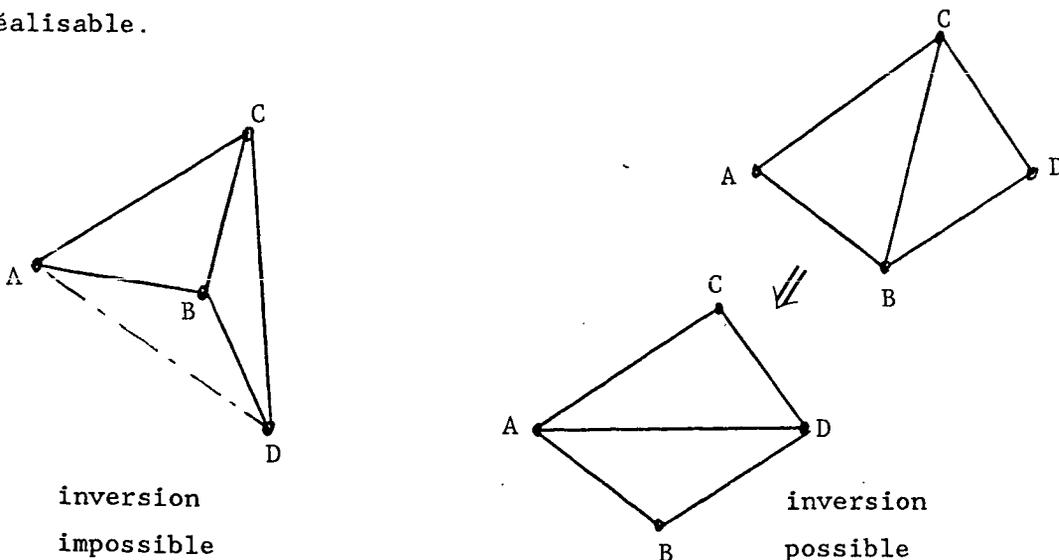


figure 4

Le lecteur vérifiera que \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont équivalents, en particulier les contours de $\bar{\Omega}_1$ et $\bar{\Omega}_2$ sont identiques (liste d'arêtes : AB, BD, DC, CA).

Lemme 2.2. : Soit \mathcal{T}_1 un maillage réduit aux 2 tétraèdres $A\alpha\beta\gamma$ et $\beta B\gamma\alpha$ de face commune $\alpha\beta\gamma$, si le segment AB coupe la face $\alpha\beta\gamma$, le maillage \mathcal{T}_2 formé des 3 tétraèdres $A\alpha B\gamma$, $AB\beta\gamma$ et $AB\alpha\beta$ est équivalent à \mathcal{T}_1 .

On vérifiera ce résultat qui peut s'interpréter comme :

- i) la création d'une arête (AB).
- ii) la suppression d'une face ($\alpha\beta\gamma$).

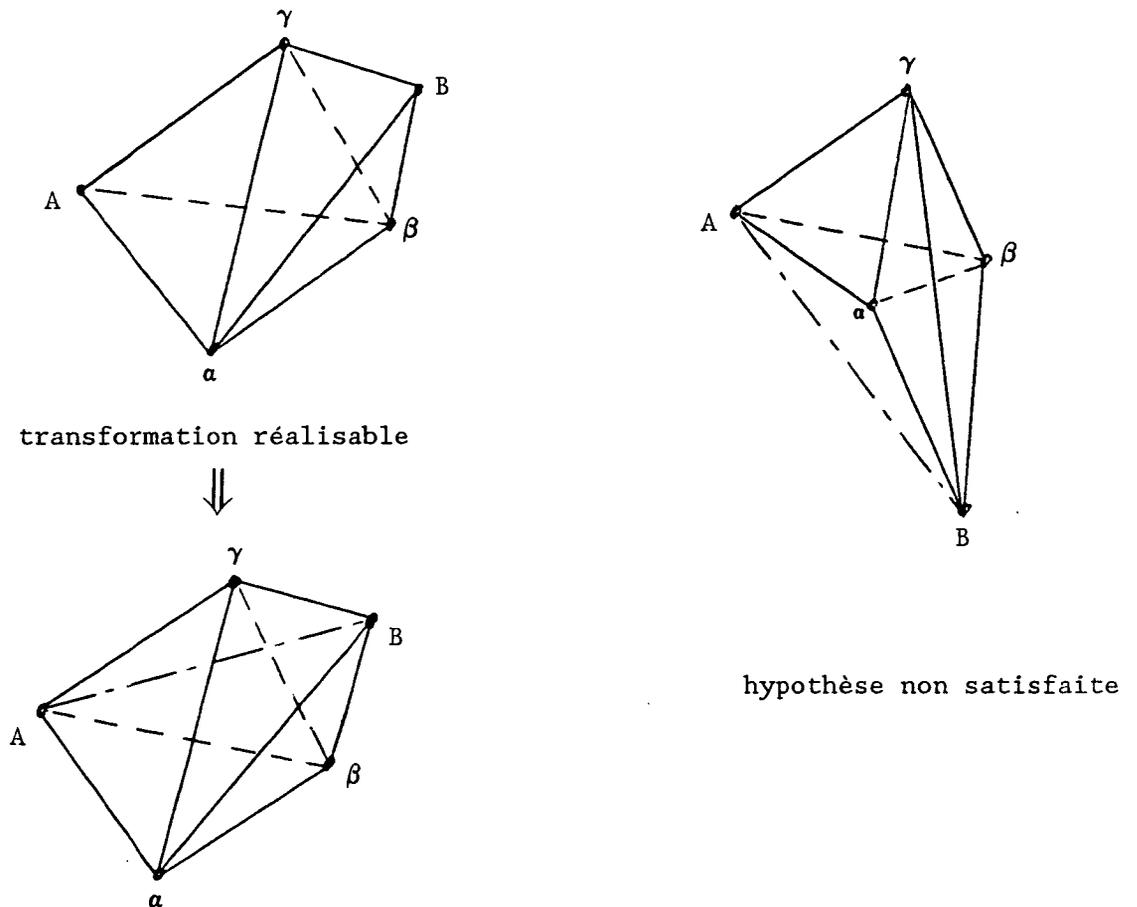


figure 5

Comme corollaire de ce lemme, le résultat inverse s'énonce comme suit :

Lemme 2.3. : Soit \mathcal{T}_1 un maillage réduit aux 3 tétraèdres $\alpha AB\beta$, $\beta AB\gamma$ et $\gamma AB\alpha$ d'arête commune AB, si l'arête AB coupe le triangle formé par les 3 points α , β et γ , le maillage \mathcal{T}_2 formé des 2 tétraèdres $\alpha A\gamma\beta$ et $\alpha\gamma B\beta$ est équivalent à \mathcal{T}_1 .

L'interprétation d'un tel résultat est :

- i) la suppression d'une arête (AB).
- ii) la création d'une face ($\alpha\beta\gamma$).

Permettant de passer de 3 tétraèdres à 2 éléments nous appellerons ce résultat le lemme de réduction.

Une dernière opération utile est énoncée sous la forme :

Lemme 2.4. : Soit \mathcal{T}_1 un maillage réduit aux 2 tétraèdres ABCD et EACD de face commune ADC, si les points A B C et E sont coplanaires et tels que le segment EB coupe l'arête AC alors le maillage \mathcal{T}_2 forme des 2 tétraèdres ABED et EBCD est sous-équivalent à \mathcal{T}_1 .

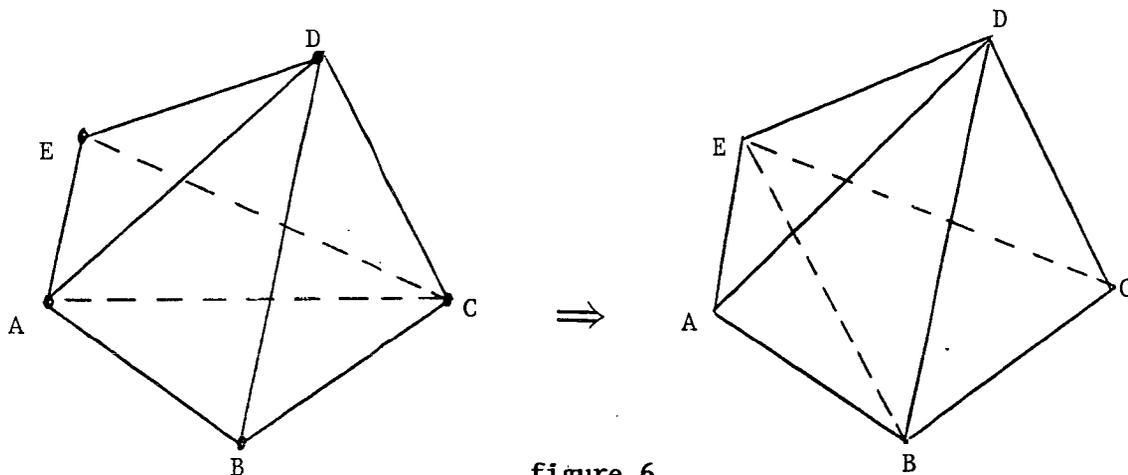


figure 6

A côté de ces opérations laissant invariant le nombre de sommets d'un maillage existent d'autres opérations consistant en l'ajout d'un ou plusieurs points à l'intérieur ou sur la frontière d'un maillage.

Citons celles que nous utiliserons par la suite :

Lemme 2.5. :

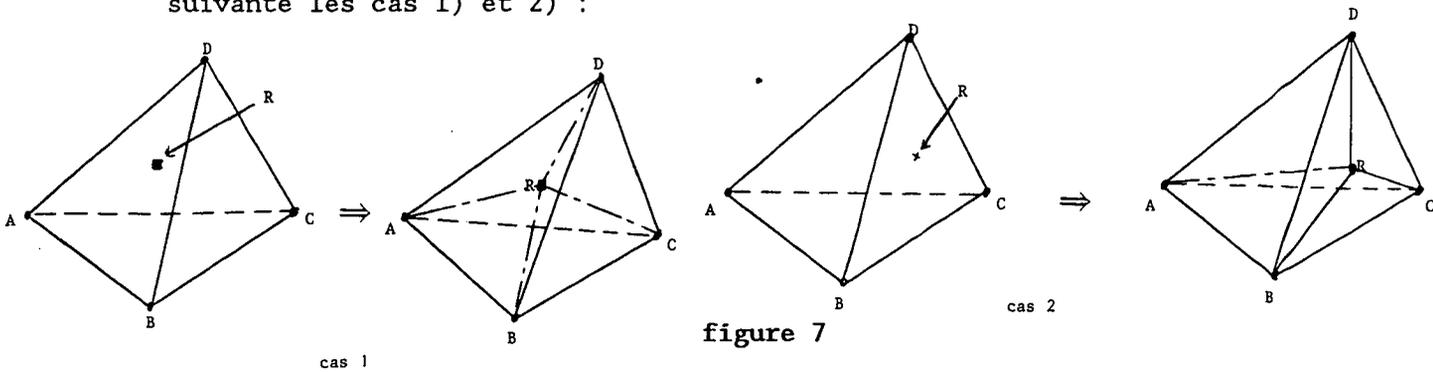
1) Le maillage $\mathcal{T}_1 = T = \{ABCD\}$ est équivalent au maillage \mathcal{T}_2 composé des 4 éléments : ARCD, ABRD, ABCR et RBCD où R est un point interne à T.

2) Le maillage $\mathcal{T}_1 = T = \{ABCD\}$ est sous-équivalent au maillage \mathcal{T}_2 composé des 3 éléments : ABCR, ABRD et ARCD où R est un point de la face BCD.

3) Appliquant la découpe 2) pour 2 tétraèdres de face commune BCD on crée un maillage équivalent composé de 6 tétraèdres.

4) Appliquant la découpe 2) pour 2 points R et S appartenant à 2 faces de T on crée un maillage sous-équivalent composé de 5 éléments.

Le lecteur vérifiera ces résultat dont nous illustrons sur la figure suivante les cas 1) et 2) :



Utilisant les outils définis dans ce paragraphe et utilisés dans [4] à des fins de régularisation de maillage, nous allons démontrer que le problème 1.1 admet une solution en dimension 2 et en dimension 3.

III/ FORCAGE DE LA FRONTIERE EN DIMENSION 2

Le problème dans ce cas est celui évoqué par la figure 1 : nous disposons d'un maillage respectant les points de la frontière mais ne respectant pas ses arêtes. Nous allons montrer qu'il est possible de recréer une arête n'existant pas puis étendre ce résultat à toutes les arêtes manquantes pour assurer le résultat.

Proposition 3.1. : Soit \mathcal{T} un maillage d'un domaine 2D quelconque et deux de ses points A et B tels que l'arête AB n'existe pas dans \mathcal{T} . Il est toujours possible de réaliser \mathcal{T}' un maillage équivalent à \mathcal{T} garantissant l'existence de l'arête AB .

Cette opération s'interprète comme le forçage d'une arête dans une triangulation acceptable quelconque en dimension 2.

Démonstration : De \mathcal{T} on extrait le sous-ensemble \mathcal{T}_{AB} des éléments traversés par le segment AB

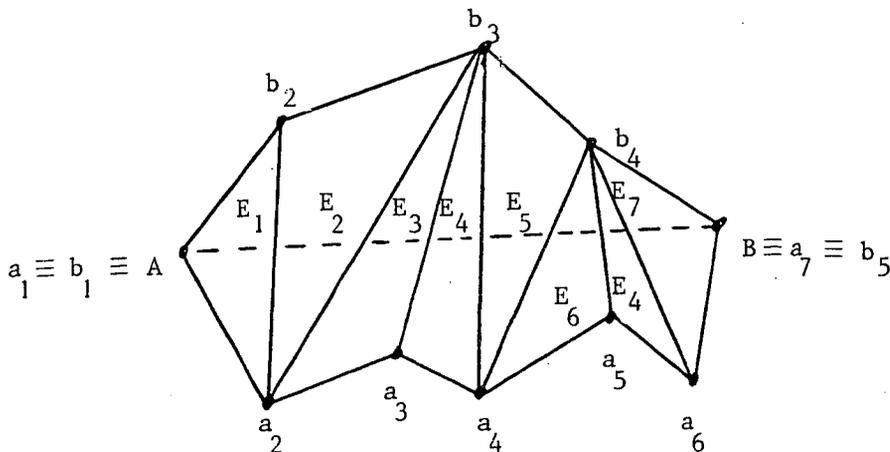


figure 8

Le polygone quelconque, frontière de $\mathcal{C}_{O,AB}$ est séparé en 2 polygones (P_0^1) (P_0^2) de sommets respectifs :

$$P_0^1 : A, a_2, a_3, \dots B \text{ ou } (a_i)_{i=1, n_1}$$

$$P_0^2 : A, b_2, b_3, \dots B \text{ ou } (b_i)_{i=1, n_2}$$

En posant : $A = a_1 = b_1$ et $B = a_{n_1} = b_{n_2}$

Considérant P_0^1 et l'ensemble $(a_i)_{i=1, n_1}$ on définit a_k le point le plus proche du segment AB. A partir de ce point on construit le triangle ABa_k qui est tel que :

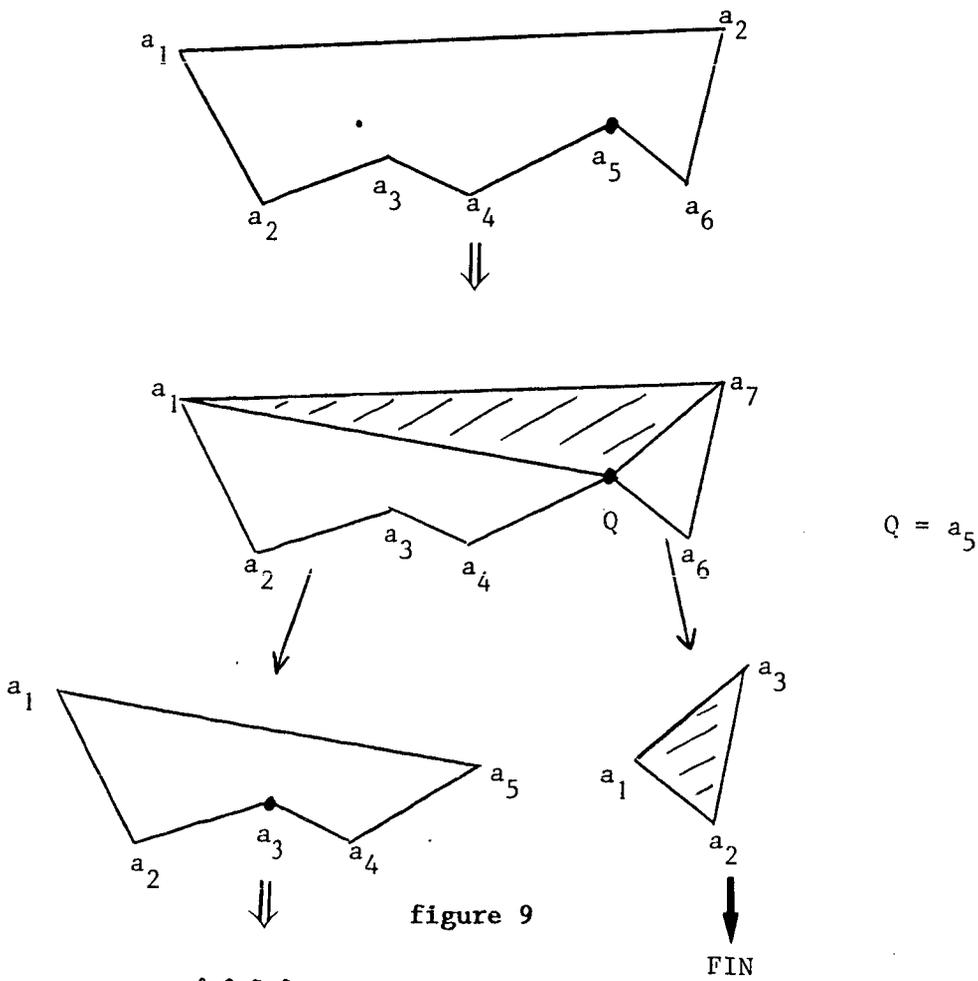
- i) AB existe en tant qu'arête.
- ii) aucun points de l'ensemble de départ n'est contenu dans ce triangle.

Pour construire le triangle ABa_k on est ramené aux deux problèmes suivants :

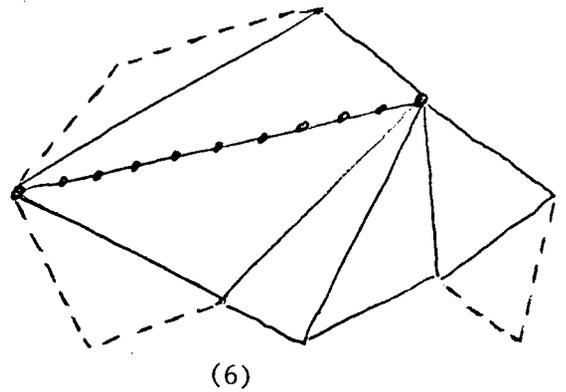
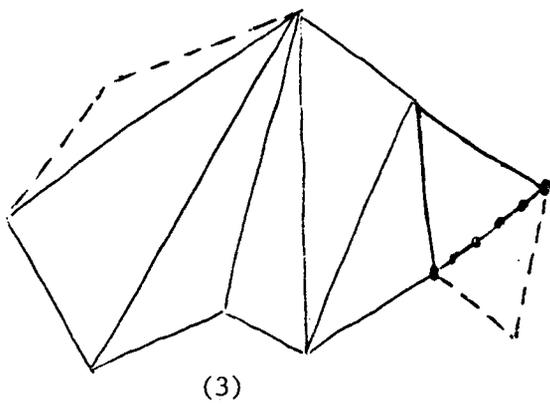
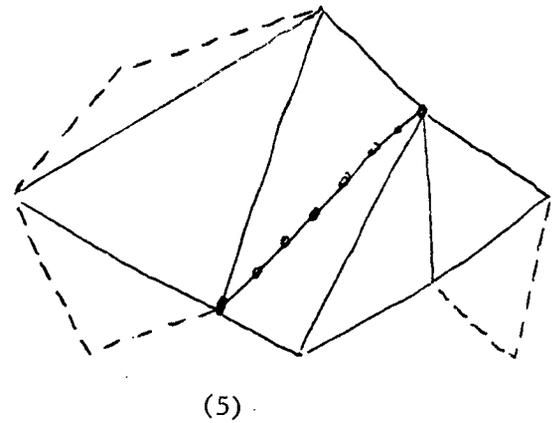
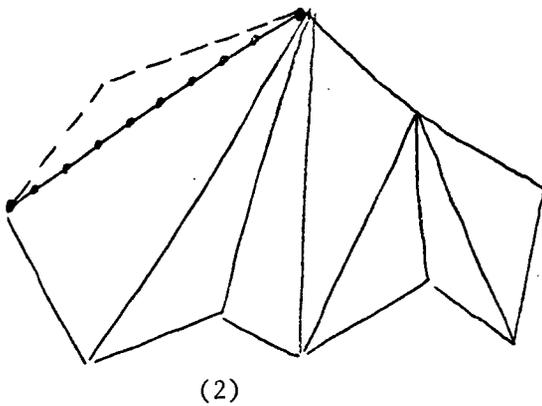
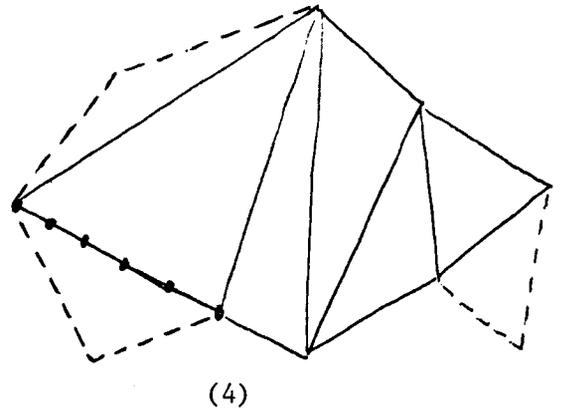
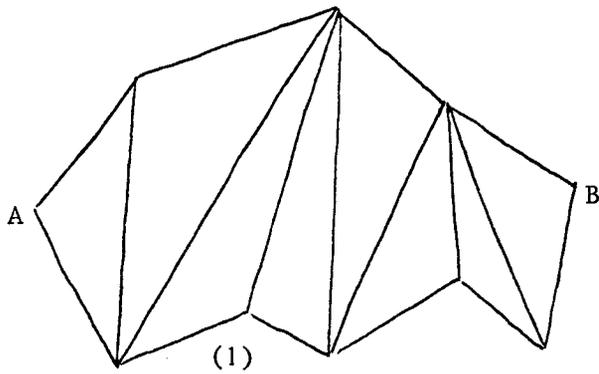
- i) forcer Aa_k pour le polygone A, a_2, a_3, \dots, a_k
- ii) forcer $a_k B$ pour le polygone a_k, a_{k+1}, \dots, B

Ces 2 problèmes sont de complexité strictement inférieure à celle du problème initial, propriété qui assure la convergence de la méthode et démontre la proposition.

La figure 9 montre de façon géométrique la construction correspondante :



Remarque : Pour démontrer ce théorème nous avons décrit une méthode constructive permettant le forçage d'une arête, à travers n'importe quel polygone. Du point de vue pratique il existe une variante [5] consistant à utiliser le lemme 2.1. (inversion de diagonale) qui permet d'obtenir un résultat mieux équilibré mais dont la convergence est moins simple à prouver. Pour donner une idée de cette méthode nous reprenons le même exemple.



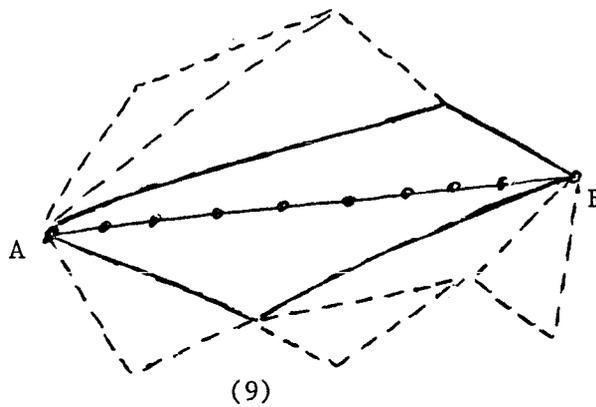
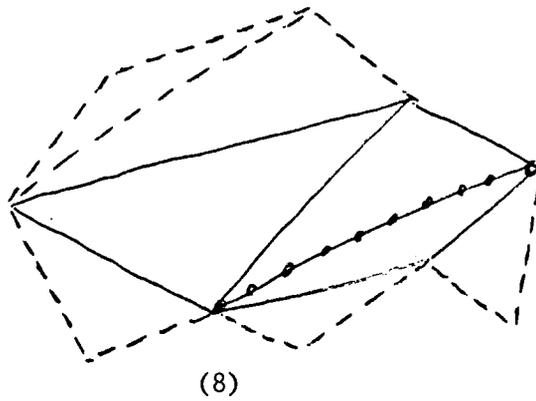
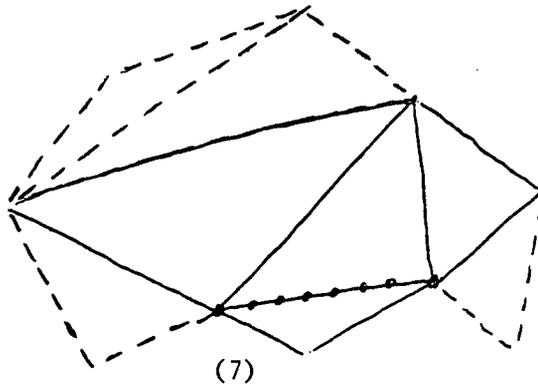


figure 10

Appliquant la proposition 3.1 à toutes les arêtes frontières absentes d'un maillage on démontre le résultat suivant :

Théorème 3.2 : Soit \mathcal{T} une triangulation acceptable d'un domaine quelconque 2D de frontière non croisée on peut construire \mathcal{T}' un maillage équivalent respectant exactement la frontière.

Le résultat est acquis car la frontière est non croisée : il est impossible de détruire une arête frontière précédemment créée ou existante.

IV/ FORCAGE DE LA FRONTIERE EN DIMENSION 3.

Nous disposons d'un maillage respectant les points de la frontière mais ne respectant pas ses faces. L'extension au cas tridimensionnel du forçage de la frontière conduit à considérer les 2 étapes suivantes :

- i) forçage des arêtes
- ii) forçage des faces, en remarquant que le forçage des arêtes est une condition nécessaire mais non suffisante permettant d'envisager le cas des faces.

IV - 1/ FORCAGE DES ARETES FRONTIERES.

Considérons un maillage \mathcal{T} respectant les points de la frontière et tel que :

- i) A et B sont 2 sommets de ce maillage.
- ii) AB n'est pas une arête de \mathcal{T} et, en tant qu'arête frontière donnée, est à créer.

Soit \mathcal{T}_{AB} le sous-ensemble de \mathcal{T} formé des tétraèdres traversés par le segment AB : résoudre le problème du forçage de l'arête AB revient à trouver \mathcal{T}' équivalent à \mathcal{T} tel que AB existe en tant qu'arête.

Les seuls points de \mathcal{T} étant des points frontières on établit aisément le résultat suivant :

Lemme 4.1 : Les éléments de \mathcal{T}_{AB} ne comprenant pas comme sommets A ou B sont nécessairement de l'un des types suivants :

- type (1) : le segment AB perce deux faces de l'élément.
- type (2) : le segment AB perce une face et coupe une arête opposée à cette face.
- type (3) : le segment AB coupe 2 arêtes de l'élément avec les 2 configurations possibles suivantes :
 - (3a) : les 2 arêtes ne sont pas dans une même face.
 - (3b) : les 2 arêtes sont dans une même face.

La figure ci-dessous illustre ces possibilités :

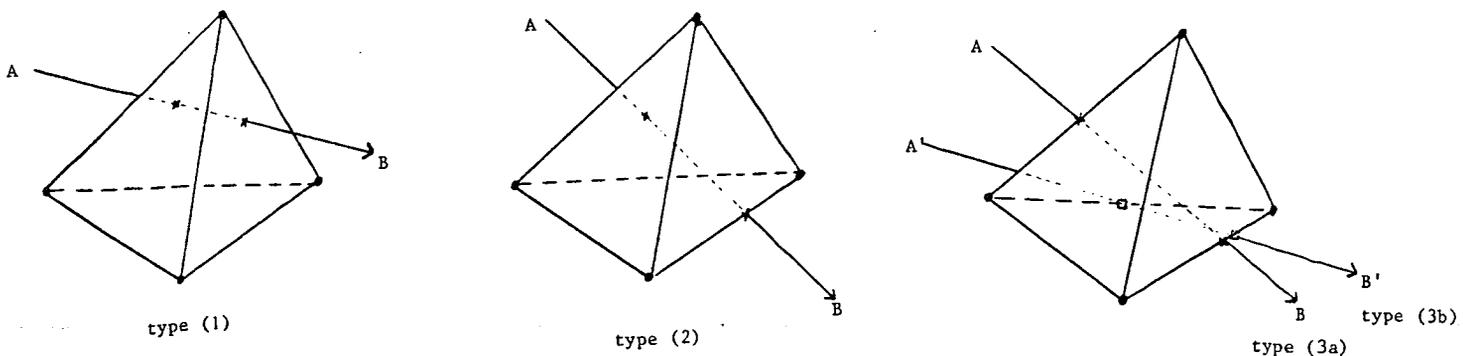


figure 11

Par extension nous dirons qu'un élément est du type (1) ou (2) s'il contient A (ou B) et :

- i) AB perce la face opposée à A (ou B) (type (1)).
- ii) AB coupe une arête opposée à A (ou B) (type (2)).

A partir de ces configurations géométriques possibles nous introduisons les définitions possibles suivantes :

Définition 4.2. : \mathcal{C}_{AB} est un tuyau vis à vis de AB si et seulement si tous ses éléments sont du type (1).

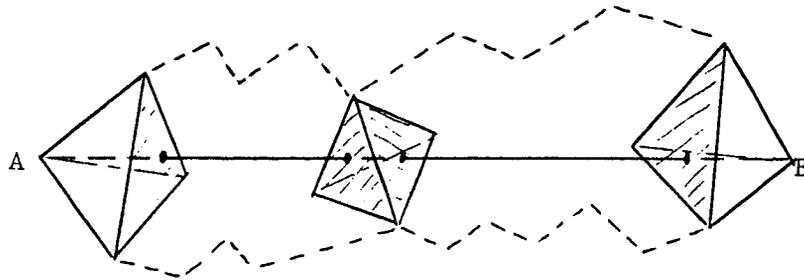


figure 12 : exemple schématique d'un tuyau

Définition 4.3. : $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ est une coquille locale pour l'arête $\alpha\beta$ vis à vis du segment AB si et seulement si :

- i) tout ses éléments contiennent l'arête $\alpha\beta$.
- ii) le segment AB coupe l'arête $\alpha\beta$.
- iii) les éléments de $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ traversés par AB sont du type (2) ou du type (3a).

Remarque : On peut toujours se ramener à une coquille locale fermée (il suffit dans le schéma général de I de placer l'étape 5 après celle de recherche de la frontière).

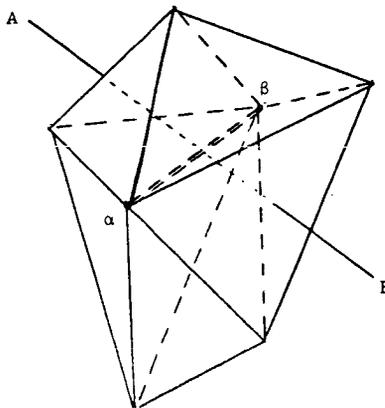


figure 13 : schéma pour une coquille locale fermée.

A partir de cette définition on introduit :

Définition 4.4. : \mathcal{C}_{AB} est une coquille globale si et seulement si il contient une coquille locale pour au moins une arête.

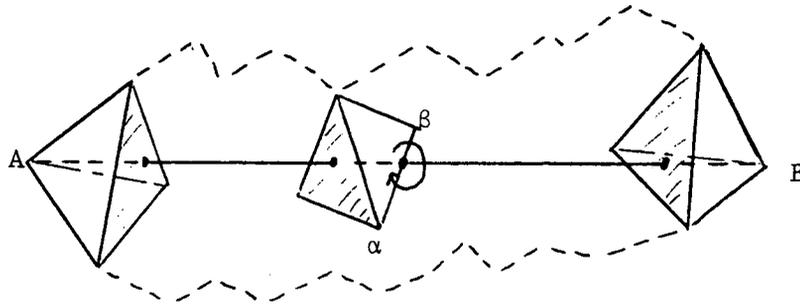


figure 14 : schéma d'une coquille globale.

Parallelement aux définitions 4.3 et 4.4 on introduit la notion de coquille locale planaire pour les arêtes $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ et de coquille globale planaire pour un ensemble \mathcal{C}_{AB} .

Définition 4.5.: $\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}$ est une coquille locale planaire par les arêtes $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ vis à vis du segment AB si et seulement si :

- i) $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ 2 arêtes d'une face d'un élément introduisent deux coquilles locales, l'une pour l'arête $\alpha\beta$, l'autre pour l'arête $\alpha\gamma$.
- ii) le segment AB coupe $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$.
- iii) les éléments de $\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}$ traversés par AB sont du type (2) ou (3b).

Définition 4.6.: \mathcal{C}_{AB} est une coquille globale planaire si et seulement si il contient une coquille locale planaire.

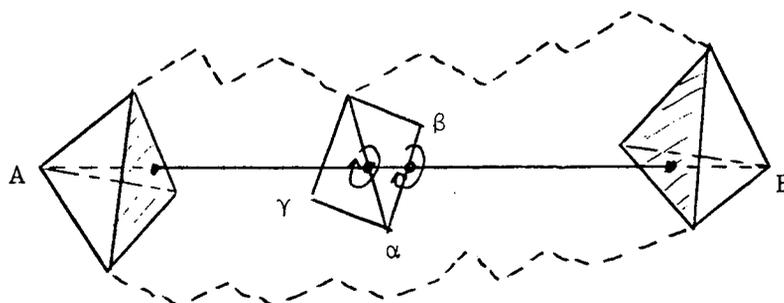


figure 15 : schéma d'une coquille globale planaire

Comme conséquence du lemme 4.1 un ensemble \mathcal{T}_{AB} est nécessairement de l'un des 3 types définis ci-dessus. Nous allons montrer successivement qu'il est possible de construire un ensemble \mathcal{T}^* , à partir de \mathcal{T}_{AB} , tel que :

- i) \mathcal{T}^* est équivalent à \mathcal{T}_{AB} .
- ii) AB existe en tant qu'arête de \mathcal{T}^* .

Ainsi le résultat suivant sera acquis :

Proposition 4.7.: Soit \mathcal{T} un maillage d'un polyèdre quelconque et 2 de ses points A et B tels que l'arête AB n'existe pas dans \mathcal{T} .

Il est possible de réaliser un nouveau maillage \mathcal{T}' équivalent à \mathcal{T} contenant l'arête AB.

Démonstration :

De l'ensemble \mathcal{T} on extrait le sous-ensemble \mathcal{T}_{AB} tel que :

- i) A est sommet d'un élément de \mathcal{T}_{AB} .
- ii) B est sommet d'un élément de \mathcal{T}_{AB} .
- iii) les éléments de \mathcal{T}_{AB} sont, vis à vis de AB, du type (1) (2) (3a) ou (3b).

La démonstration va comprendre 2 parties, selon la nature de \mathcal{T}_{AB} .

Partie 1 : \mathcal{T}_{AB} est un tuyau vis à vis de AB.

Proposition 4.8. : Etant donné \mathcal{T}_{AB} un tuyau vis à vis de AB, il est possible de construire \mathcal{T}^* maillage équivalent contenant l'arête AB.

Remarquant que pour un tuyau ne comprenant que 2 tétraèdres le lemme 2.2 s'applique nécessairement, nous allons proposer une démonstration faisant décroître le cardinal d'une suite \mathcal{T}_{AB}^k construite à partir de \mathcal{T}_{AB} .

Démonstration :

Initialisation :

$$k = 0$$

$$\mathcal{T}_{AB}^0 = \mathcal{T}_{AB}$$

$$\mathcal{R}^0 = \emptyset$$

$$n(0) \text{ le cardinal de } \mathcal{T}_{AB}^0.$$

Algorithme :

Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ faire :

A1 si $n(k) = 2$ appliquer le lemme 2.2 à \mathcal{T}_{AB}^k

$\mathcal{T}_{AB}^k = \{T_1, T_2\}$ permet d'obtenir le maillage équivalent

$\{E_1, E_2, E_3\}$ contenant l'arête AB.

ainsi : $\mathcal{T}_{AB}^{k+1} = \mathcal{T}_{AB}^k - T_1 - T_2 = 0$

$\mathcal{R}^{k+1} = \mathcal{R}^k \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$

et : $\mathcal{T}^* = \mathcal{R}^{k+1} \cup \mathcal{T}_{AB}^{k+1}$ donne le résultat.

A2 sinon, $n(k) \geq 3$ on considère les 3 premiers tétraèdres de \mathcal{T}_{AB}^k : T_1 , T_2 et T_3 . ($A \in T_1$).

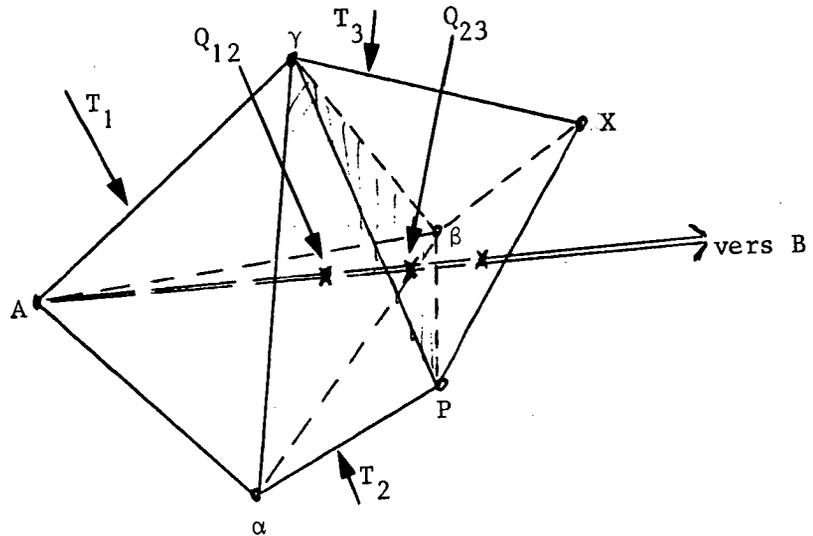


figure 16

(la configuration générale des 3 premiers éléments de \mathcal{T}_{AB}^k).

Notons : Q_{IJ} le point de perçage par AB de la face commune à T_I et T_J .

P le point opposé à la face commune à T_1 et T_2 .

Appliquons le lemme 2.2 pour forcer l'arête AP entre les éléments T_1 et T_2 :

A21 T_1 et T_2 vérifient l'hypothèse du lemme 2.2; ainsi T_1 et T_2 sont remplacés par E_1 , E_2 et E_3 (contenant AP) dont seul un élément est traversé par le segment AB, soit E_1 cet élément : on construit :

$$\mathcal{T}_{AB}^{k+1} = \mathcal{T}_{AB}^k - T_1 - T_2 + E_1$$

$$\mathcal{R}^{k+1} = \mathcal{R}^k + E_2 + E_3$$

Il est clair que l'on a la relation :

$$(1) \quad n(k+1) = n(k) - 1$$

A22 T1 et T2 ne vérifient pas l'hypothèse du lemme 2.2; on construit l'ensemble $\mathcal{C}_P = \{T2, T3, \dots\}$ tel que :
 $TI \in \mathcal{C}_P$ si et seulement si :
 i) $TI \in \mathcal{T}_{AB}^k$
 ii) $P \in TI$

A221 si \mathcal{C}_P ne contient que 2 éléments :

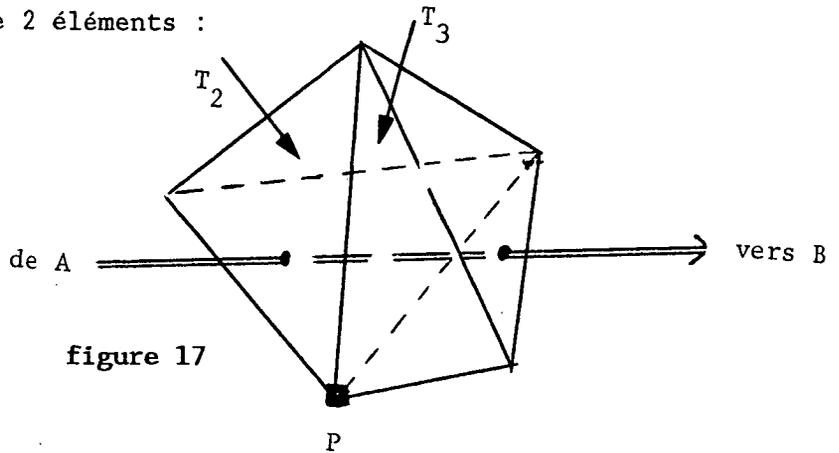


figure 17

on définit $R23 = \omega P + (1-\omega) Q23$ ($0 < \omega < 1$)
 avec $R23 \in$ face fermée frontière
 $T2$ est remplacée par $E1, E2, E3$ (lemme 2.5 cas 3)
 par prise en compte du point $R23$
 $T3$ est remplacé par $E4, E5, E6$ (même opération)
 Dans chaque cas seul l'un des EI est traversé par le segment
 AB , (soient $E1$ et $E4$ ces éléments) on construit :

$$\mathcal{T}_{AB}^{k+1} = \mathcal{T}_{AB}^k - T2 - T3 + E1 + E4$$

$$\mathcal{R}^{k+1} = \mathcal{R}^k + E2 + E3 + E5 + E6$$

et on a le résultat :

$$(2) \quad n(k+1) = n(k)$$

A222 si \mathcal{C}_P contient au moins 3 éléments :

On considère l'ensemble des points QIJ intersection du segment AB avec les faces communes aux éléments TI et TJ et on construit la suite de points RIJ :

$$RIJ = \omega P + (1 - \omega) QIJ \quad I \geq 2 \quad J > I$$

de telle sorte que :

- i) $\text{dist}(RIJ, AB)$ décroît quand on s'éloigne de A.
- ii) $RIJ \in$ face fermée frontière.

$T2$ est remplacé par 3 éléments EI (lemme 2.5 cas 3) par prise en compte du point $R23$.

$T3$ est remplacé par 5 éléments EJ (lemme 2.5 cas 4) par prise en compte des points $R23$ et $R34$.

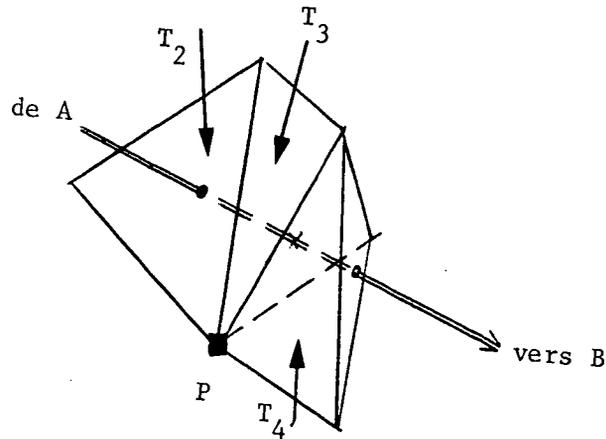


figure 18

le "dernier" élément de \mathcal{C}_p (T4 dans l'exemple de la figure 18) est remplacé par 3 éléments EK (lemme 2.5 cas 3) par prise en compte du point R^{**} correspondant, on redéfinit :

$$\mathcal{C}_{AB}^{k*} = \mathcal{C}_{AB}^k - \{\text{les éléments de } \mathcal{C}_p\} + \{\text{les éléments EI, EJ, EK traversés par AB}\}.$$

$\mathcal{R}^{k*} = \mathcal{R}^k + \{\text{les éléments EI, EJ, EK non retenus}\}$ et on applique le lemme 2.2 pour forcer l'arête AR^{**} (R^{**} est le dernier point de la suite RIJ) :

Le lemme s'applique nécessairement par le choix effectué pour créer la suite RIJ et on construit :

$$\mathcal{C}_{AB}^{k+1} = \mathcal{C}_{AB}^{k*} - \{\text{les éléments EI, EJ, EK traversés par AB}\} + \text{EL}$$

En effet un seul élément (noté EL) est traversé par AB lors de cette opération :

$$\mathcal{R}^{k+1} = \mathcal{R}^{k*} + \{\text{les éléments non retenus}\}$$

Il est facile de vérifier que :

$$n(k+1) = n(k) - \text{card}(\mathcal{C}_p) + 1$$

ainsi on a :

$$(3) \quad n(k+1) < n(k).$$

Faire $k = k+1$ et redémarrer l'algorithme (en A1 ou A2).

Comme $n(k)$ décroît l'étape (A1) de l'algorithme est atteinte et la proposition est démontrée (\mathcal{C}^* est construit, équivalent à \mathcal{C}_{AB} tel que AB existe).

PARTIE 2 : \mathcal{C}_{AB} est une coquille globale vis à vis de AB.

Nous allons démontré le résultat suivant :

Proposition 4.9.: Etant donné \mathcal{C}_{AB} une coquille globale vis à vis de AB, il est possible d'en déduire un maillage équivalent contenant un tuyau vis à vis de AB.

Cette propriété permettra d'appliquer la proposition 4.8 et d'obtenir la création de l'arête AB.

Selon la définition 4.4 \mathcal{C}_{AB} contient au moins une coquille locale pour une arête $\alpha\beta$, démontrer la proposition 4.9 revient à prouver le résultat suivant :

Proposition 4.10.: Etant donnée $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ une coquille locale pour l'arête $\alpha\beta$ vis à vis du segment AB il est possible de construire \mathcal{C}^* maillage équivalent ne contenant pas l'arête $\alpha\beta$.

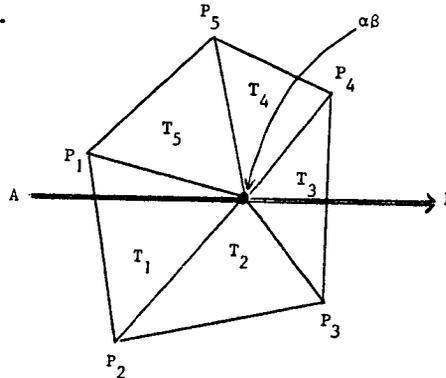


figure 19 : une coquille locale pour l'arête $\alpha\beta$

La coquille locale est formée des éléments T_i notés sous la forme $(P_i \alpha \beta P_{i+1})$.

Démonstration : On considère la boule \mathcal{B} inscrite dans le polyèdre défini comme intersection des angles trièdres θ définis par $P_i \alpha P_{i+1}$, $P_i \beta P_{i+1}$, $\forall i$, cette boule est non vide [6] :

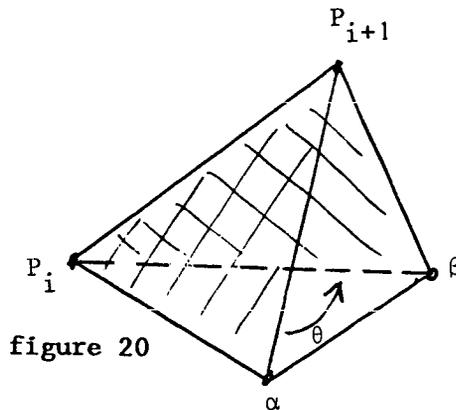


figure 20

Soit Q un point de cette boule satisfaisant aux contraintes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} AB \cap \alpha Q = \emptyset \\ AB \cap \beta Q = \emptyset \\ AB \cap P_i Q = \emptyset \quad \forall i \\ Q \notin \text{face fermée frontière} \end{array} \right.$$

Alors la coquille locale $\mathcal{C}_{\alpha\beta} = \{P_i\alpha\beta P_{i+1}\}$ est remplacé par le maillage $\mathcal{C} = \{P_i\alpha Q P_{i+1}\}_i \cup \{P_i Q \beta P_{i+1}\}_i$ équivalent à $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ et ne contenant pas l'arête $\alpha\beta$.

La proposition 4.9 est démontrée en appliquant ce résultat à chaque coquille locale existante.

Remarque :

Si \mathcal{C}_{AB} est une coquille globale planaire vis à vis de AB le même raisonnement appliqué à toutes les arêtes causant cette particularité permet de démontrer le même résultat.

Ainsi sous la seule hypothèse que la frontière n'est pas croisée on a le résultat :

Théorème 4.11.: Etant donné \mathcal{C} un maillage d'un domaine tridimensionnel quelconque de frontière non croisée, on peut construire \mathcal{C}' un maillage équivalent respectant exactement les arêtes frontières.

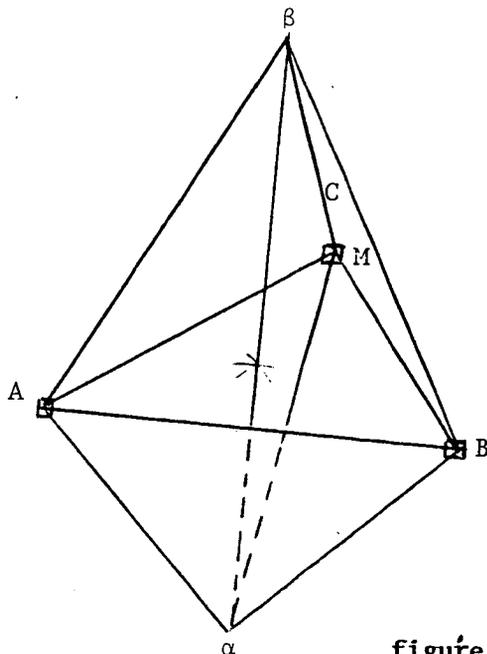
Il suffit d'appliquer, pour chaque arête manquante, la proposition 4.7.

IV-2/ FORCAGE DES FACES FRONTIERES

Nous pouvons considérer maintenant un maillage \mathcal{C} respectant les arêtes de la frontière.

Cette propriété ne garantit pas l'existence des faces frontières .

Afin de préciser ce problème nous donnons le schéma suivant :



les arêtes AB BC et CA, arêtes frontières existent.

les 3 tétraèdres $A\alpha\beta B, B\alpha\beta C$ et $C\alpha\beta A$ existent.

la face ABC n'existe pas or ABC est une face frontière donnée.

figure 21

Des configurations plus complexes sont à priori possibles : non plus une seule arête ($\alpha\beta$) perce le plan ABC à l'intérieur du triangle formé par les 3 arêtes AB, BC et CA mais plusieurs présentent cette propriété.

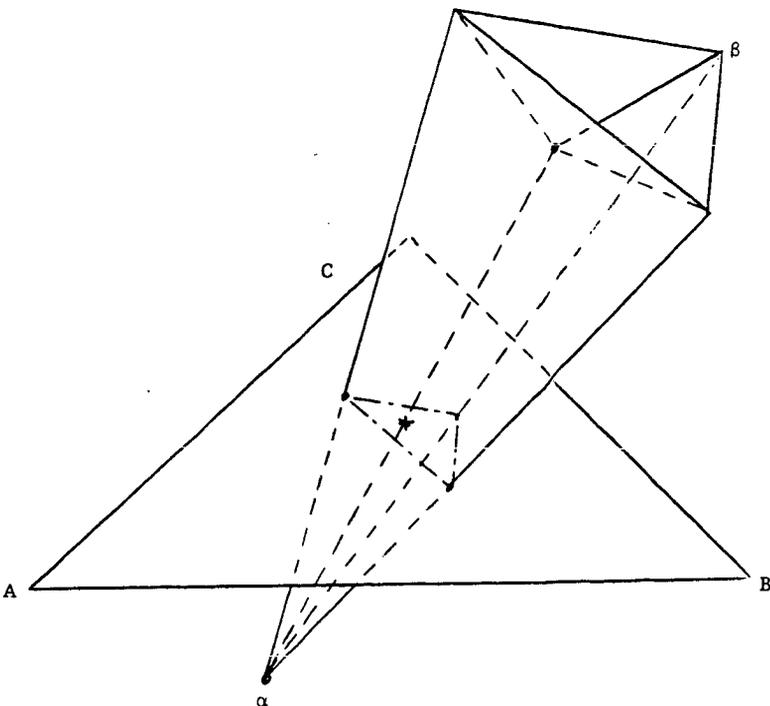
Il convient de distinguer 2 cas :

- i) la configuration ne comprend qu'une seule arête : nécessairement le lemme de réduction (lemme 2.3) s'applique qui donne le résultat.
- ii) la configuration comprend plusieurs arêtes perçantes et les coquilles correspondantes.

Nous allons montrer que ce dernier cas est réductible au cas précédent (lemme 2.3) en prouvant le résultat suivant :

Lemme 4.12.: D'une coquille réduite à 3 éléments il est possible de créer un maillage équivalent contenant une coquille à 3 éléments pour laquelle le lemme 2.3 s'applique nécessairement.

Autrement dit de pouvoir supprimer l'arête de la coquille perçant ABC : une des arêtes perçantes de la configuration étudiée.



Configuration à 3 éléments
d'arête commune $\alpha\beta$: le point M
intersection de $\alpha\beta$ avec le
triangle A,B,C n'est pas un
point interne à l'arête $\alpha\beta$.
(le lemme 2.3 ne s'applique pas)

figure 22

- soit $\alpha\beta$ l'arête commune aux 3 éléments
 - et $T_i = \{P_i, \alpha\beta, P_{i+1}\}$ l'élément générique de l'ensemble initial
- $$(P_4 \equiv P_1 = A \quad P_2 = B \quad P_3 = C)$$

On définit le plan (\mathcal{P}) orthogonal à $\alpha\beta$ passant par le point $Q = \omega\alpha + (1-\omega)\beta$
 On crée la suite de points N_i intersection de l'arête αP_i avec ce plan (\mathcal{P}) .
 On en déduit la suite de points R_i telle que :

$R_i = \omega Q + (1-\omega)N_i$ (ω est choisi pour que R_i ne soit pas sur une face fermée frontière).

Le lemme 2.5 cas 4 permet de générer un maillage équivalent aux 3 éléments de départ, composé des éléments :

$$\{R_i, \alpha\beta, R_{i+1}\} \quad \{P_i, \alpha R_i, P_{i+1}\} \quad \{P_i, R_i, \beta P_{i+1}\}$$

$$\{R_i, R_{i+1}, \beta P_{i+1}\} \text{ et } \{R_i, \alpha R_{i+1}, P_{i+1}\} \quad i=1,3$$

dont seul le premier contient l'arête $\alpha\beta$.

On considère l'ensemble formé par ces 3 seuls éléments : de part la méthode de création des points R_i , le lemme 2.3 s'applique nécessairement et le résultat est obtenu.

Remarque : Le lemme peut s'interpréter en termes de la vie courante comme le fait de "raboter" par un plan l'ensemble des éléments de la coquille considérée.

Appliqué à toutes les coquilles de la configuration, ce lemme permet de réduire le nombre d'arêtes perçantes et de se ramener à des coquilles réductibles de 3 éléments. De proche en proche on obtient une configuration à une seule arête donc le résultat est obtenu.

Remarque : Ce résultat peut faire penser aux algorithmes de type "glouton".

Il reste à démontrer le résultat suivant :

Lemme 4.13 : Soit \mathcal{T}_1 un maillage ne contenant pas une face imposée et soit n le nombre d'arêtes perçant cette face, il est possible de créer \mathcal{T}_2 maillage équivalent à \mathcal{T}_1 tel que le nombre d'arêtes perçant la face imposée soit inférieure strictement.

Par suite, appliquant le lemme 4.13 pour chaque face manquante on obtient le résultat suivant :

lemme 4.14 : Etant donné \mathcal{T} un maillage d'un domaine tridimensionnel quelconque de frontière non croisée et respectant les arêtes de la frontière donnée, on peut construire \mathcal{T}' un maillage équivalent respectant exactement les faces frontières.

Remarque : Ainsi \mathcal{T}' respecte exactement la frontière donnée : au sens des points, arêtes et faces.

V / EXEMPLES :

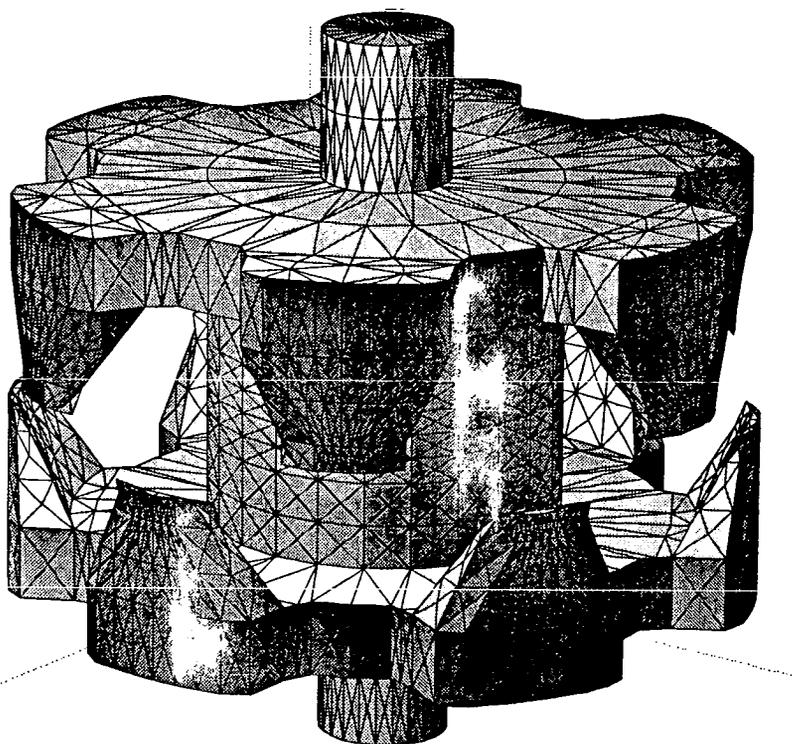
En Dimension 2 : des maillages basés sur les idées présentées dans ce papier sont opérationnels depuis plus de 2 ans. Nous renvoyons à [3] [5] [7] et [8] pour leur présentation détaillée et leur utilisation.

A côté de cette application pour construire des maillages on peut utiliser cette méthode pour définir l'enveloppe d'un objet (dans certains cas il s'agira de l'enveloppe convexe) de laquelle on peut déduire la surface correspondante.

En Dimension 3 : Les applications de la méthode sont de même nature :

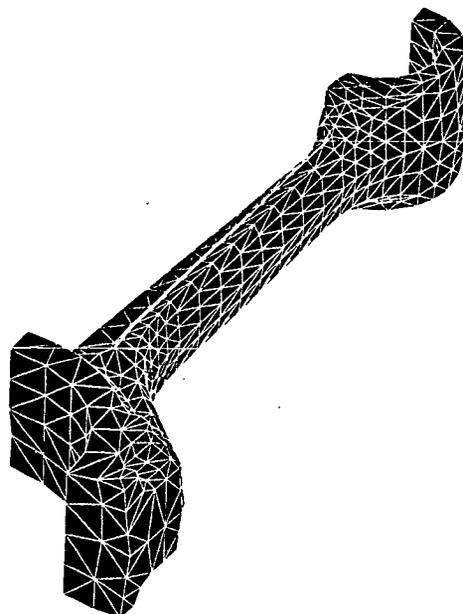
- i) construire l'enveloppe d'un objet et calculer son volume.
- ii) construire un maillage automatique de tout objet défini par sa peau.
- iii) construire un maillage automatique de l'extérieur de tout objet défini par sa peau.

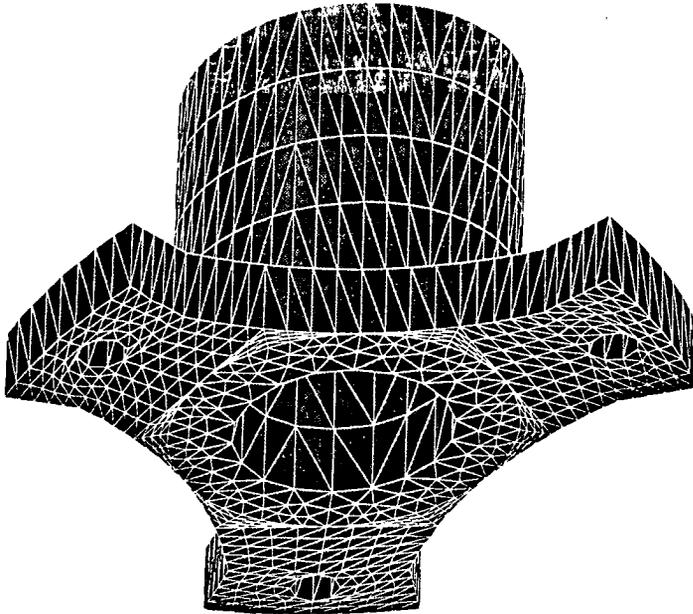
Les exemples donnés ci-dessous illustrent l'application ii) ci-dessus : utilisant la méthode décrite dans ce papier nous sommes en train de développer un maillage général tridimensionnel qui reprend les étapes introduites au chapitre I et dont le prototype a été testé sur les objets présentés maintenant.



Rotor d'alternateur

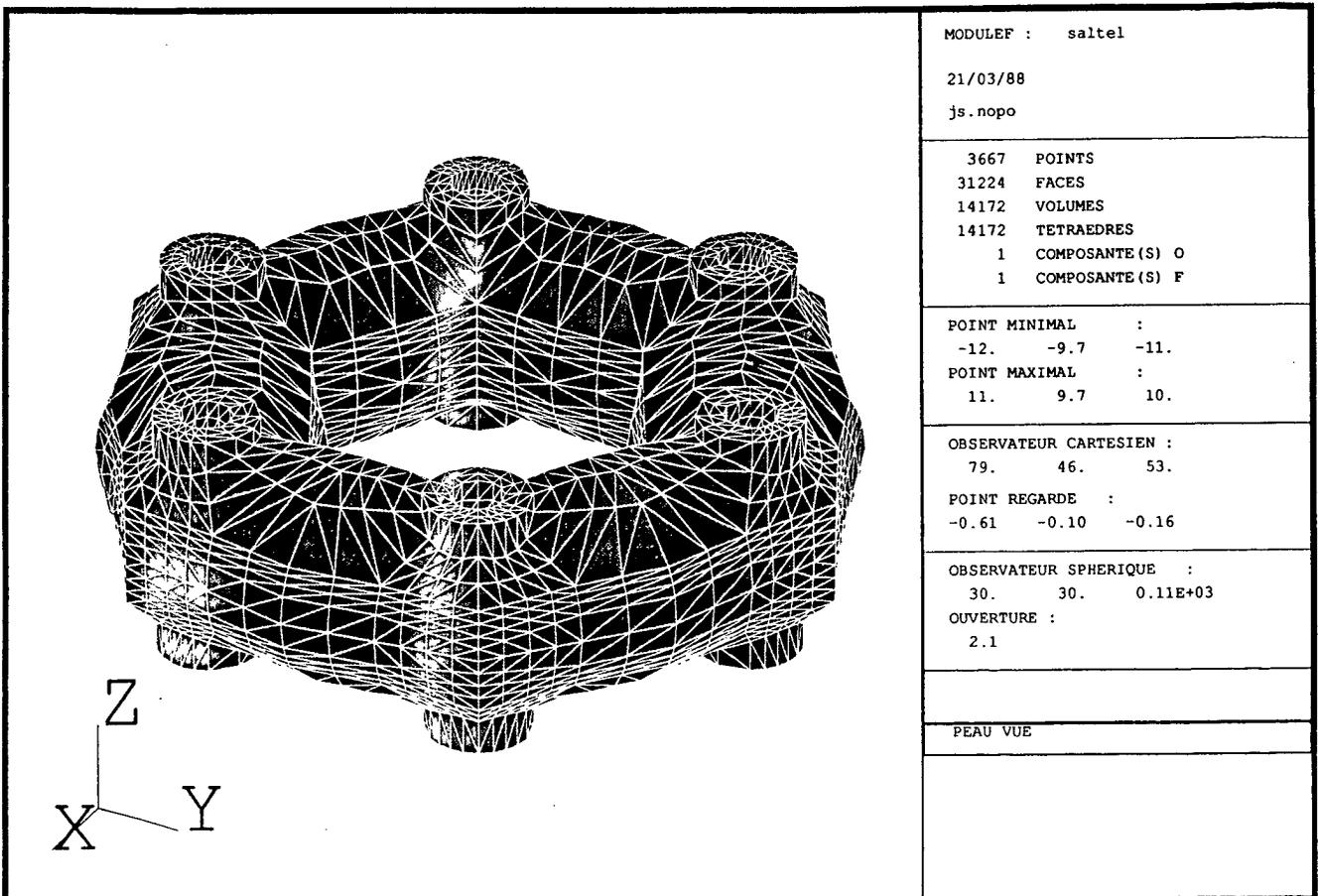
demi bielle





joint réducteur (partie)

boudin caoutchouc



REMERCIEMENTS :

Ce travail a bénéficié du support de la D.R.E.T que nous remercions ici.

Il convient également de remercier J.D. BOISSONNAT et F. HERMELINE pour de passionnantes et fructueuses conversations.

La frappe de ce papier a été réalisée par F. JOSSEAUME.

Bibliographie :

- [1] F. HERMELINE Une méthode automatique de maillage en dimension N.
Thèse de 3ème cycle - PARIS VI - 1981
F. HERMELINE Triangulation automatique d'un polyèdre en dimension N.
Rairo - Numerical Analysis 16 1981.
- [2] J.D. BOISSONNAT Géometric Structures for three-dimensional shape
representation.
ACM transactions on graphics - 3 n°4, 1984.
- [3] A. PERRONNET Tétraédrisation d'un objet multimatériaux ou de
l'extérieur d'un objet.
publication du LAN 169 - PARIS VI.1988.
- [4] J.Y. TALON Algorithmes de génération et d'amélioration de maillage en
2 dimensions.
IMAG RT 20 - Grenoble 1987.
J.Y. TALON Algorithmes d'amélioration de maillages tétraédriques en 3
dimensions.
IMAG RT 25 - Grenoble 1987.
- [5] F. HECHT E. SALTEL EMC2
Editeur de maillages bidimensionnels
INRIA - 1986.
- [6] M. SHAMOS Computational geometry
Yale University - 1978.
- [7] P.L. GEORGE Modulef : génération automatique de maillage.
Seconde édition, INRIA éditeur, 1988.
P.L. GEORGE Mailleur bidimensionnel du Club Modulef.
RT n°47 - INRIA 1985.
- [8] MODULEF et all Modulef : Une bibliothèque modulaire d'éléments finis.
INRIA éditeur 1985.

