



HAL
open science

Simulation d'écoulements turbulents a moyenne instationnaire

C. Begue, B. Cardot, Olivier Pironneau

► **To cite this version:**

C. Begue, B. Cardot, Olivier Pironneau. Simulation d'écoulements turbulents a moyenne instationnaire. RR-0914, INRIA. 1988. inria-00075642

HAL Id: inria-00075642

<https://inria.hal.science/inria-00075642>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

UNITE DE RECHERCHE
IRIA-ROCOUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105

78153 Le Chesnay Cedex
France

Tel. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 914

SIMULATION D'ECOULEMENTS TURBULENTS A MOYENNE INSTATIONNAIRE

Programme 7

**Catherine BEGUE
Bernard CARDOT
Olivier PIRONNEAU**

Octobre 1988



★ RR - 8914 ★

SIMULATION D'ÉCOULEMENTS TURBULENTS A MOYENNE INSTATIONNAIRE.

Catherine Bègue (AMD-BA)
Bernard Cardot (INRIA 78153 Le Chesnay, France)
Olivier Pironneau (Université Paris 6 et INRIA)

Résumé:

Ce rapport a pour objet l'étude d'un modèle de turbulence obtenu par combinaison d'un modèle basé sur l'homogénéisation des micro-structures tourbillonnaires dénommé dans la suite modèle MPP et du modèle $k - \epsilon$.

Une analyse détaillée nous a permis de mettre au point un algorithme robuste pour le modèle $k - \epsilon$ en utilisant la variable auxiliaire k/ϵ lors de la phase de convection. Nous présentons aussi un modèle déduit du modèle $k - \epsilon$ dans lequel les deux inconnues fondamentales sont k et le rapport k/ϵ dont le comportement numérique est sensiblement meilleur que celui du modèle initial.

Enfin il s'est avéré que la force du modèle MPP réside surtout dans la modélisation des interactions transitoires, mais que la modélisation des interactions visqueuses est moins fine que dans le modèle $k - \epsilon$. On propose donc un modèle mixte qui part du modèle MPP mais qui emprunte au modèle $k - \epsilon$ la modélisation de la fonction ϵ .

Des essais numériques détaillés sont donnés pour des écoulements instationnaires autour d'un cylindre ainsi que pour des écoulements stationnaires dans une cavité avec jet et pour l'écoulement de Poiseuille.

NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT FLOWS WITH TRANSIENT MEAN.

Abstract:

In this paper we study a turbulence model which combines the asymptotic techniques of homogenization (MPP Model), with the so-called $k - \epsilon$ model.

A detailed analysis leads us to construct a robust algorithm for the $k - \epsilon$ model, using the auxiliary variable k/ϵ for the convection step. We present also a model, arising from the $k - \epsilon$ model, in which the two fundamental unknowns are k and the rate k/ϵ , whose numerical performance is appreciably better than the first one.

It appears that the MPP model is good to model transient interactions. However, the modeling of viscous interactions is better with the $k - \epsilon$ model. For this reason, we propose a mixed model based on the MPP model where the dissipation function comes from the $k - \epsilon$ model.

Finally, we describe some numerical results for transient flows past a cylinder, for stationary flows in a cavity and for the plane Poiseuille flow.

Plan

1. Introduction	4
2. Modélisation de la turbulence.....	6
2.1 Tension de Reynolds.	
2.2 Hypothèse de Reynolds.	
3. Le modèle $k - \epsilon$	9
3.1 L'hypothèse $k - \epsilon$.	
3.2 Les conditions aux limites du modèle $k - \epsilon$	
3.3 Résultats théoriques sur le modèle $k - \epsilon$	
3.3.1 Existence de solutions.	
3.3.2 Positivité de k et ϵ .	
3.4 Généralités sur les méthodes numériques employées.	
3.5 Traitement numérique des conditions aux limites de paroi.	
3.6 Discrétisation du modèle $k - \epsilon$	
3.6.1 Premier algorithme de calcul.	
3.6.2 Résultats numériques.	
3.6.3 Deuxième algorithme de calcul.	
3.6.4 Résultats numériques.	
4. Un modèle $k - \frac{k}{\epsilon}$	24
4.1 Propriétés.	
4.2 Algorithme de calcul.	
4.3 Résultats numériques.	
5. Le modèle MPP	29
5.1 Intégration analytique de l'équation (99).	
5.2 Méthodes et résultats numériques.	
5.2.1 Méthodes numériques.	
5.2.2 Résultats numériques.	
6. Un modèle mixte MPP- $k - \epsilon$	37
6.1 Propriétés du modèle mixte.	
6.2 Discrétisation en temps du modèle mixte.	
6.3 Résultats numériques.	
6.4 Un modèle MPP- $k - \frac{k}{\epsilon}$	
6.5 Résultats numériques.	
6.6 Comparaison des tenseurs de Reynolds.	
6.7 Simulation de l'écoulement derrière un cylindre à l'aide du modèle $k - k/\epsilon - MPP$ par une méthode couplée éléments finis-particules.	
Références	44
Figures	46

Notations:

Ω : Domaine de \mathbf{R}^n .

$\Gamma = \partial\Omega$: frontière de Ω .

n : vecteur normal unitaire extérieur à Ω .

$x = (x_1, x_2)$ variable d'espace ($x \in \Omega$).

t : variable de temps.

$u(x, t)$ vitesse du fluide au point x et au temps t .

$p(x, t)$ pression.

$\nu(x, t)$: viscosité cinématique du fluide.

$\nu_t(x, t)$: viscosité turbulente.

Re : nombre de Reynolds de l'écoulement.

R : tenseur de Reynolds.

ϵ taux de dissipation visqueuse.

k énergie cinétique turbulente.

ϵ : rapport des petites aux grandes structures turbulentes.

q énergie cinétique turbulente du modèle MPP.

$a(x, t)$: coordonnées lagrangiennes inverses.

$$i = \sum_{ij} a_{i,j}^2$$

$\langle w \rangle$: moyenne en $y \in Y =]-\pi, \pi[$ de la quantité $w(y, x)$.

∇u = tenseur de composante $(\nabla u)_{ij} = \partial u_j / \partial x_i$

$$u_{,t} = \partial u / \partial t$$

$\nabla \cdot u = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 =$ divergence du champ $u = (u_1, u_2)$

$$u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$$

$$A : B = \text{produit scalaire de deux tenseurs} = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}$$

$|A|$ = norme du tenseur A .

$\nabla \cdot R$ = champ de vecteurs dont la $i^{\text{ème}}$ composante est $\sum_j R_{ij,j}$

$Vect_k(E)$ = espace vectoriel engendré sur le corps K par les éléments de l'ensemble E .

$$\text{tr}(A) = \text{trace de la matrice } A = \sum A_{ii}$$

$L^2(\Omega)$: Espace des fonctions de carré intégrable sur Ω .

$H^1(\Omega)$: Espace des fonctions $\in L^2(\Omega)$ dont les dérivées sont dans $L^2(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$: Espace des fonctions $\in H^1(\Omega)$ de trace nulle.

$(u, v) = L^2$ produit scalaire des fonctions u et v .

$\|u\|_0$ Norme L^2 de la fonction u .

$\|u\|_1$ Norme H^1 de la fonction u .

$L^2(0, T; V)$: Espace des fonctions $v(t, x)$ de carré intégrable sur $]0, T[$ telles que $\forall t \in]0, T[\quad v(t, \cdot) \in V$.

$C^0(0, T; V)$: Espace des fonctions $v(\cdot, x)$ continues de $]0, T[$ dans $V \quad \forall x \in V$.

Remarque:

Ici et dans toute la suite on utilise la convention de sommation d'Einstein.

1. INTRODUCTION.

Les équations de Navier-Stokes décrivent les mouvements des fluides newtoniens incompressibles:

$$u_{,t} + u \nabla u + \nabla p - \nu \Delta u = f, \quad \nabla \cdot u = 0. \quad (1)$$

Avec un système de conditions aux limites appropriées (1) définit u et p de façon unique dans $L^2(0, T; H^1(\Omega)^2)$ et $L^2(]0, T[\times \Omega) / R$ en 2D; en 3D (1) a toujours une solution; on a seulement unicité de solution régulière. Le problème pratique de cette équation est que u oscille de plus en plus lorsque ν est très petit; elle devient donc difficile à intégrer sur ordinateur.

Il y a deux approches à ce problème:

1. chercher les comportements lorsque $t \rightarrow \infty$ de u et p : Existe-t-il des attracteurs et, si oui, peut-on caractériser certaines de leurs propriétés? (dimension de Hausdorff, variétés inertielles les contenant ...cf. Ghidaglia[15], Foias et al.[14] ou Bergé et al [4] et la bibliographie de ces ouvrages);

2. abandonner l'espoir de calculer $u(x, t)$ entièrement et chercher seulement quelques quantités moyennes (moments) de u . On suppose que $u(x, t)$ se comporte comme un processus stochastique et on cherche des équations pour les espérances de u , $|u|^2$, $|\nabla \times u|^2$... c'est le problème de la modélisation de la turbulence que nous aborderons dans cette étude. (cf Lesieur [20], par exemple, et la bibliographie de l'ouvrage). Avant d'abandonner le point 1 donnons en les principaux résultats et la raison qui oblige à lui préférer l'approche 2 encore pour quelques générations d'ordinateurs.

On considère (1) dans Ω avec $u_\Gamma = 0$, f indépendant de t et $u(x, 0)$ donné, et Ω inclus dans R^2 ce système a un attracteur de dimension de Hausdorff finie comprise entre $cRe^{4/3}$ et CRe^2 où $Re = \sqrt{f \text{ diam}(\Omega) / \nu}$ (cf. Constantin et al.[12], Ruelle[25][26]). Ces résultats sont intéressants car ils donnent une borne supérieure du nombre de points qu'il faut pour calculer un tel écoulement (ce nombre est proportionnel à $\nu^{-9/4}$).

En dimension 3 on ne sait pas démontrer que (1) avec les mêmes conditions aux limites a un attracteur mais on sait démontrer que s'il existe un attracteur borné par M dans $W^{1, \infty}$ (en gros) alors il est de dimension finie inférieure à $CM^{3/4} \nu^{-9/4}$ (cf.[12]).

Ces résultats sont d'un grand intérêt théorique mais les bornes trouvées sont très grandes: $Re^{9/4}$ pour un avion par exemple est incompatible avec la mémoire du CRAY II!

Ce problème se retrouve dans les théorèmes de convergence des méthodes numériques. Pour illustrer ce point rappelons par exemple un théorème de Bernardi-Raugel [5] pour une méthode en éléments finis pour (1).

On part de la formulation variationnelle de (1):

Trouver $u \in J(\Omega)$ tel que

$$(u_{,t}, v) + (u \nabla u, v) + \nu (\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in J_o(\Omega) \quad (2)$$

$$u(0) = u^0 \quad u - u_\Gamma \in J_o(\Omega), \quad (3)$$

où

$$J(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)^n : \nabla \cdot u = 0\}, \quad J_0(\Omega) = \{u \in J(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0\}. \quad (4)$$

On discrétise en espace en remplaçant $J_0(\Omega)$ par J_{oh} dans (2)-(3):

Trouver $u_h \in J_h$ tel que

$$(u_{h,t}, v_h) + (u_h \nabla u_h, v_h) + \nu(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in J_{oh} \quad (5)$$

$$u_h(0) = u_h^0 \quad u_h - u_{\Gamma_h} \in J_{oh}; \quad (6)$$

$J(\Omega)$ est approché par

$$J_h = \{v_h \in V_h : (\nabla \cdot v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\} \quad (7)$$

et $J_0(\Omega)$ est approché par $J_{oh} = J_h \cap H_0^1(\Omega)^n$. On pose:

$$V_{oh} = \{v_h \in V_h : v_h|_{\Gamma_h} = 0\}. \quad (8)$$

On suppose que $\{V_{oh}, Q_h\}$ est soit l'élément $P^1 + \text{bulle}/P^1$ soit l'élément $P^1 \text{iso}$ P^2/P^1 (on utilisera aussi le Q^2/P^1 non conforme, il faut alors remplacer h par h^2 dans (9), voir Pironneau[36], Girault-Raviart[37] par exemple).

On a le résultat suivant:

a) $n=2$. Si la solution de (1) est dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^2) \cap C^0(0, T; L^q(\Omega)^2)$, $q > 2$, alors le problème (5)-(6) admet une solution et une seule pour h assez petit et

$$\|u - u_h\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C\nu^{-1}h \|u \nabla u\|_0 \quad (9)$$

$$\|u - u_h\|_{L^2(0, T; \times \Omega)} \leq C\nu^{-1}h^2 \|u \nabla u\|_0$$

b) $n=3$. Si la norme de $\nu^{-1}u$ dans $C^0(0, T; L^3(\Omega)^3)$ est assez petite et si $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)^3) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)^3)$ alors (5)-(6) admet une solution unique avec la même estimation d'erreur qu'en a).

Une estimation de $\|u \nabla u\|_0$ dans les couches limites et dans les zones inertielles de la turbulence donne:

$$\|u \nabla u\|_0 = O(\nu^{-\frac{1}{4}})$$

donc pour avoir convergence de la méthode numérique pour le calcul de u il faut que h soit petit devant $\nu^{5/8}$ et pour la pression $\nu^{5/4}$. Ces nombres sont plus optimistes que ceux donnés par la théorie des attracteurs (car ici on peut négliger les modes d'amplitude inférieure à h) mais ils sont encore trop grands pour simuler directement les équations de Navier-Stokes autour d'un avion sur le CRAY II.

2 MODELISATION DE LA TURBULENCE.

2.1. Tension de Reynolds.

On pose le problème suivant (problème de Reynolds) :

Soit u_w^ν la solution (aléatoire) de

$$u_{,t} + u \nabla u + \nabla p - \nu \Delta u = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \text{ dans } \Omega \times]0, T[\quad (10)$$

$$u(x, 0) = u^o(x) + w(x, \omega), \quad u|_{\Gamma} = u_{\Gamma} \quad (11)$$

où $w(x, \cdot)$ est une variable aléatoire donnée de moyenne nulle.

Soit $\langle \rangle$ l'opérateur moyenne par rapport à la loi de u induite par w .

Peut-on calculer $\langle u \rangle$, $\langle u \otimes u \rangle \dots$?

Ce problème correspond assez bien à ce qu'on attend d'une simulation numérique des équations de Navier-Stokes à grand nombre de Reynolds ; en effet, lorsque $\nu \ll 1$, u est instable par rapport aux conditions initiales et les détails de l'écoulement sont non reproductibles d'une expérience à l'autre, c'est donc bien $\langle u \rangle$ qu'on cherche. De même, lorsqu'on s'intéresse aux phénomènes énergétiques de l'écoulement, c'est $\langle u^2 \rangle$ et $\nu \langle |\nabla u|^2 \rangle$ qu'on cherche.

On connaît seulement quelques solutions heuristiques au problème de Reynolds (Lesieur [20] par exemple) mais on fait le raisonnement général ci-dessous :

Si on note encore par u la moyenne $\langle u_w^\nu \rangle$ et par u' la différence $u_w^\nu - \langle u_w^\nu \rangle$, alors (10) devient :

$$u_{,t} + u \nabla u + \nabla p - \nu \Delta u + \nabla \cdot u' \otimes u' = - (u'_{,t} + u' \nabla u + u \nabla u' + \nabla p' - \nu \Delta u'). \quad (12)$$

$$\nabla \cdot u' + \nabla \cdot u = 0 \quad (13)$$

car $u \nabla u = \nabla \cdot (u \otimes u)$ lorsque $\nabla \cdot u = 0$.

Si on applique l'opérateur $\langle \rangle$ à (12) et (13), on trouve

$$u_{,t} + u \nabla u + \nabla p - \nu \Delta u + \nabla \cdot \langle u' \otimes u' \rangle = 0 \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (14)$$

c'est l'équation de Reynolds et

$$R = \langle u' \otimes u' \rangle \quad (15)$$

est le tenseur de Reynolds. Comme il n'est pas possible de trouver une équation pour R en fonction de u , on fait des hypothèses (dites de fermeture) pour relier R à u .

2.2 L'hypothèse de Reynolds

Il est assez raisonnable de relier R à ∇u car les zones de turbulence sont souvent dans les régions de fort gradient de l'écoulement. Mais alors $R(\nabla u)$ ne peut pas être n'importe quoi car il faut conserver l'invariance de (14) par changement de repère ; il serait, en effet, absurde de proposer une équation pour u qui ne donne pas la même solution suivant le système d'axes choisi.

On démontre (Chacon-Pironneau[7]) alors que:

la seule forme possible pour R est

$$R = aI + b(\nabla u + \nabla u^T). \quad (16)$$

en 2D. En 3D

$$R = aI + b(\nabla u + \nabla u^T) + c(\nabla u + \nabla u^T)^2 \quad (17)$$

où a , b et c sont fonctions des invariants non triviaux de $(\nabla u + \nabla u^T)$, c'est-à-dire $|\nabla u + \nabla u^T|$ en 2D et $|\nabla u + \nabla u^T|$, $\det(\nabla u + \nabla u^T)$ en 3D.

La démonstration repose sur l'argument suivant:

Soit M une matrice de rotation ($M^{-1} = M^T$), si $U = Mu$ et $X = Mx$ alors on peut réécrire (14) comme suit:

$$U_{,i} + U \nabla_X U + \nabla_X p - \nu \Delta_X U + \nabla_X M R M^T = 0, \dots \nabla_X U = 0$$

or $\nabla u = M^T \nabla_X U M$ donc on doit avoir pour tout U et tout M :

$$M R (M^T (\nabla_X U + \nabla_X U^T) M) M^T = R (\nabla_X U + \nabla_X U^T)$$

Or ceci implique que R et $\nabla_X U + \nabla_X U^T$ sont alors diagonalisables dans la même base ce qui implique à son tour (16) et (17). Donnons une démonstration rapide de cette propriété: (Pour plus de détails voir Ciarlet [8] par exemple)

Posons $B = \nabla_X U + \nabla_X U^T$ et soit Q une matrice diagonalisant B :

$$Q^t B Q = \text{diag} \lambda_i$$

Considérons une matrice diagonale $P = \text{diag} \gamma_i$ avec $\gamma_i = +1$ ou -1 , donc P est une matrice orthogonale et

$$(QP)^t B (QP) = P^t \text{diag} \lambda_i P = \text{diag} \lambda_i = Q^t B Q$$

d'où

$$\begin{aligned} P^t (Q^t R(B) Q) P &= (QP)^t R(B) (QP) \\ &= R((QP)^t B Q P) = R(Q^t B Q) = Q^t R(B) Q \end{aligned}$$

on obtient donc que la matrice $S = Q^t R(B) Q$ vérifie:

$$P^t S P = S \quad \forall P \text{ définie plus haut.} \quad (18)$$

En prenant d'abord:

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = -1$$

puis

$$\gamma_2 = 1, \quad \gamma_1 = \gamma_3 = -1$$

on constate par un rapide calcul algébrique que (18) ne peut être vérifiée que si $s_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ ce qui prouve que $Q^t R(B) Q$ est diagonale.

On obtient donc

$$\nabla \cdot R = \nabla a + \nabla \cdot [b(\nabla u + \nabla u^T)] + \nabla \cdot [c(\nabla u + \nabla u^T)^2] \quad (19)$$

mais ∇a est absorbé par la pression (on change p en $p + a$) et donc une loi du type

$$R = b(\nabla u + \nabla u^T) + c(\nabla u + \nabla u^T)^2 \quad (20)$$

a le même effet. En 2D, $c = 0$, il n'y a donc plus qu'à spécifier une fonction d'une variable, $b(s)$ et en 3D deux fonctions de 2 variables $b(s, s')$, $c(s, s')$ où s et s' sont les deux invariants de $\nabla u + \nabla u^T$.

3. LE MODELE $k - \epsilon$

3.1. L'hypothèse $k - \epsilon$ (Launder-Spalding [19]) :

Soit k et ϵ l'énergie cinétique moyenne et le taux moyen d'énergie dissipée de u' :

$$k = \frac{1}{2} \langle |u'|^2 \rangle \quad (21)$$

$$\epsilon = \frac{\nu}{2} \langle |\nabla u' + \nabla u'^T|^2 \rangle; \quad (22)$$

on note que k^2/ϵ est homogène à une longueur au carré, et on pose

$$R = \frac{2}{3}kI - c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} (\nabla u + \nabla u^T) \quad (23)$$

Pour obtenir une équation sur k , on multiplie (12) par u' et on moyenne (on rappelle que $A : B = A_{ij}B_{ij}$) :

$$\frac{1}{2} \langle u'^2 \rangle_{,t} + \langle u' \otimes u' \rangle : \nabla u + \frac{1}{2} u \nabla \langle u'^2 \rangle + \nabla \cdot \langle p' u' \rangle \quad (24)$$

$$- \nu \langle u' \Delta u' \rangle + \frac{1}{2} \nabla \cdot \langle u'^2 u' \rangle = 0;$$

c'est-à-dire d'après (23)

$$\begin{aligned} k_{,t} - c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} (\nabla u + \nabla u^T) : \nabla u + u \nabla k - \nu \langle u' \Delta u' \rangle & \quad (25) \\ = - \langle u' \nabla \frac{u'^2}{2} \rangle - \nabla \cdot \langle p' u' \rangle & \end{aligned}$$

Comme les 3 derniers termes ne peuvent être exprimés en fonction de u, k et ϵ , on les modélise. Pour le premier on fait une hypothèse d'ergodicité en remplaçant le filtre stochastique par un opérateur de moyenne sur une boule $B(x,r)$:

$$- \langle u' \Delta u' \rangle = \langle |\nabla u'|^2 \rangle + \int_{\partial B(x,r)} u' \cdot \frac{\partial u'}{\partial n} d\gamma.$$

Pour des raison de symétrie (turbulence quasi-homogène) l'intégrale de bord est petite.

Le deuxième terme est modélisé par une diffusion:

$$\langle u' \nabla \frac{u'^2}{2} \rangle \cong - \nabla \cdot \langle u' \otimes u' \rangle \nabla k;$$

si u'^2 et u' étaient stochastiquement indépendants et si l'équation sur u'^2 était linéaire ce serait exact, à un facteur multiplicatif près, le temps caractéristique de u' .

Pour le troisième terme on fait le même raisonnement que pour le premier ce qui donne zéro.

On obtient donc, compte tenu de (23), l'équation:

$$k_{,t} + u \nabla k - \frac{c_\mu}{2} \frac{k^2}{\epsilon} |\nabla u + \nabla u^T|^2 - \nabla \cdot (c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \nabla k) + \epsilon = 0 \quad (26)$$

Pour obtenir l'équation de ϵ il faut prendre le rotationnel de (12), multiplier par $\nabla \times u'$ et utiliser une identité de la turbulence homogène:

$$\epsilon = \nu \langle |\nabla \times u'|^2 \rangle$$

Après avoir posé $\omega' = \nabla \times u'$, on obtient:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\nu \langle \omega' \cdot (\omega'_{,t} + (u + u') \nabla (\omega + \omega') - (\omega + \omega') \nabla (u + u') - \nu \Delta \omega') \rangle \\ &\cong \epsilon_{,t} + u \nabla \epsilon + \langle u' \nabla \nu \omega'^2 \rangle - 2\nu \langle \omega' \nabla \times (u' \times \omega) \rangle \\ &\quad - 2\nu \langle \omega' \otimes \omega' \rangle : \nabla u + \nabla \cdot \langle (\omega' s \omega') u' \rangle + 2\nu^2 \langle |\nabla \omega'|^2 \rangle \end{aligned}$$

car

$$\nabla \times (u' \times \omega) = \omega \nabla u' - u' \nabla \omega.$$

On néglige $\langle \omega' \nabla \times (u' \times \omega) \rangle$ pour des raisons de symétrie; on modélise $\langle u' \nabla \omega'^2 \rangle$ par une diffusion comme dans l'équation en k ; on invoque l'invariance de l'équation finale pour dire que si $\langle \omega' \otimes \omega' \rangle$ ne dépend que de $\nabla u + \nabla u^T$, k et ϵ alors en 2D il ne peut être que proportionnel à $\nabla u + \nabla u^T$ et pour des raisons de dimension le facteur de proportionnalité doit être homogène à k . Le troisième terme est négligé car de moyenne spatiale petite et le dernier terme est modélisé, pour des raisons de dimension par un facteur proportionnel à ϵ^2/k . On obtient finalement:

$$\epsilon_{,t} + u \nabla \epsilon - c_1 k |\nabla u + \nabla u^T|^2 - \nabla \cdot (c_\epsilon \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \epsilon) + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \quad (27)$$

Habituellement la constante c_μ est prise égale à:

$$c_\mu = 0.09$$

et $c_1 = 0.0648$, $c_2 = 1.92$, $c_\epsilon = 0.07$.

Nous utiliserons parfois, par commodité d'écriture, une autre notation des constantes du modèle $k - \epsilon$:

$$c_{\epsilon 1} = 2 \frac{c_1}{c_\mu} = 1.44$$

$$c_{\epsilon 2} = c_2 = 1.92$$

$$\sigma_\epsilon = \frac{c_\mu}{c_\epsilon} = 1.3, \quad \sigma_k = 1$$

Exposons maintenant rapidement sur quelles bases sont fixées les différentes constantes intervenant dans le modèle (Y. Coëffé [10] par exemple).

La constante c_μ est fixée par comparaison avec les résultats de Comte-Bellot[11], de manière à représenter les effets de la turbulence dans une zone de cisaillement pur dans laquelle la turbulence est localement en équilibre, c'est à dire que dans ce cas les termes de dissipation équilibrent les termes de production:

$$\frac{c_\mu k^2}{2 \epsilon} |\nabla u + \nabla u^T|^2 = \epsilon$$

La constante c_2 est calculée de manière à respecter le taux de décroissance de l'énergie cinétique turbulente k derrière une grille. Dans cette expérience la turbulence qui est isotrope et générée par la grille diminue plus l'on s'éloigne de la grille selon la loi de puissance:

$$k = cx^{\frac{1}{(1-c_2)}}$$

où x est la distance à la grille et c une constante.

La constante c_1 est fixée en se plaçant dans le cadre d'une turbulence en équilibre de façon que la loi logarithmique qui existe près d'une paroi soit une solution du système.

Le système proposé par le modèle $k - \epsilon$ s'écrit donc:

$$u_{,t} + u \nabla u + \nabla p - \nabla \cdot \left((\nu + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}) \nabla u \right) = 0 \quad (28)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (29)$$

$$k_{,t} + u \nabla k - \frac{c_\mu k^2}{2 \epsilon} |\nabla u + \nabla u^T|^2 - \nabla \cdot \left(c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \nabla k \right) + \epsilon = 0 \quad (30)$$

$$\epsilon_{,t} + u \nabla \epsilon - c_1 k |\nabla u + \nabla u^T|^2 - \nabla \cdot \left(c_\epsilon \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \epsilon \right) + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \quad (31)$$

auquel il faut adjoindre des conditions initiales et aux limites.

On notera qu'il est d'usage au niveau numérique d'ajouter dans (30) et (31) la viscosité cinématique ν dans les termes de diffusion, celle-ci étant théoriquement négligeable face à la viscosité turbulente en dehors de la couche limite.

3.2. Les conditions aux limites du modèle $k - \epsilon$ et leur traitement.

Trois types de conditions aux limites peuvent être envisagés. Tout d'abord celles correspondant à une entrée de fluide:

$$k, \epsilon, u \text{ donnés sur la frontière} \quad (32)$$

puis celles correspondant au cas d'une sortie libre où l'on considère les conditions de Neumann suivantes:

$$\left(\nu + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial n} - pn = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial n} = 0 \quad (33)$$

Enfin dans le cas d'une paroi les conditions aux limites naturelles correspondant aux définitions de k et ϵ sont: (cf. [19] pour ϵ)

$$k|_\Gamma = 0, \quad \epsilon|_\Gamma = \epsilon_\Gamma, \quad u|_\Gamma = 0 \quad (34)$$

où ϵ_Γ est une valeur finie. Cependant le calcul de la couche limite turbulente nécessite un nombre de points élevé dans cette zone d'où un coût de calcul prohibitif. Afin de contourner cette difficulté il est d'usage de décaler le domaine de calcul vers l'intérieur et de simuler l'action de la couche limite sur l'écoulement interne (Viollet [27] par exemple), on introduit les notations suivantes:

$$u^* = \left(\nu \frac{\partial u_\tau}{\partial n}\right)_{y=0}^{\frac{1}{2}} \text{ la vitesse de frottement au bord} \quad (35)$$

$$y^+ = \frac{yu^*}{\nu} \quad (36)$$

$$u^+ = \frac{u_\tau}{u^*} \quad (37)$$

où y est la distance d'un point à la paroi et τ la tangente au point considéré. La couche limite peut alors être décomposée en trois zones fondamentales (Comte-Bellot [30]) :

a) une sous-couche visqueuse dans laquelle on a :

$$u^+ = y^+, \quad 0 < y^+ < 5 \quad (38)$$

b) une zone de transition dans laquelle u^+ vérifie une loi universelle du type:

$$u^+ = f(y^+), \quad 5 < y^+ < 30 \quad (39)$$

c) la sous-couche logarithmique dans laquelle u^+ vérifie la loi:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \text{Log}(y^+ E), \quad 30 < y^+ < 100 \quad (40)$$

où κ est la constante de von Karman, $\kappa = 0.41$ et $E=9$ dans le cas d'une paroi lisse. On suppose donc que la frontière du domaine de calcul appartient à la sous-couche logarithmique et une rapide manipulation algébrique (Goussebaïle [16]) permet d'obtenir les conditions aux limites à imposer :

$$k|_\Gamma = u^{*2} c_\mu^{-\frac{1}{2}}, \quad \epsilon|_\Gamma = \frac{u^{*3}}{\kappa \delta} \quad (41)$$

$$u.n = 0, \quad \alpha u_\tau + \beta \frac{\partial u_\tau}{\partial n} = \gamma \quad (42)$$

$$\beta = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

$\gamma = 0$ (paroi rugueuse)

ou bien $\gamma = -u^*|u^*|$ (paroi lisse)

$$\alpha = \frac{c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}}{\kappa \delta [B + \kappa^{-1} \log(\frac{\delta}{D})]} \text{ (paroi rugueuse)}$$

ou bien $\alpha = 0$ (paroi lisse)

où D est la constante de rugosité de la paroi (hauteur des rugosités) et B est déterminé par le raccord avec la sous-couche visqueuse et δ est la distance à la paroi physique.

Pour calculer $u^*(x, t)$ il faut résoudre une équation non-linéaire en chaque point (cf 3.5).

Il est toutefois avantageux de remplacer (40) par la loi de Reichard qui présente l'intérêt de résumer (38),(39) et (40) en une seule formule (donc pour tout y^+ positif) et qui s'écrit :

$$u^* = u_\tau / f(u^*); \quad f(u^*) = 2.5 \log(1 + 0.4y^+) + 7.8(1 - e^{-\frac{y^+}{11}} - \frac{y^+}{11} e^{-0.33y^+})$$

3.3. Résultats théoriques sur le modèle $k - \epsilon$

3.3.1. Existence de solutions.

On utilise dans ce chapitre les techniques et résultats concernant les opérateurs sectoriels développés dans D.Henry [18] (théorèmes 3.3.3 et 5.1.1).

On s'intéresse ici à l'existence et à l'unicité d'une solution au problème modèle suivant (problème (P)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + u \cdot \nabla k - \nu \Delta k + \epsilon - \frac{ak^2}{(|\epsilon| + \mu)} &= 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u \cdot \nabla \epsilon - \nu \Delta \epsilon - bk + \frac{c\epsilon^2}{(|k| + \mu)} &= 0 \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites:

$$k|_\Gamma = 0, \quad \epsilon|_\Gamma = 0$$

et les conditions initiales:

$$k(0, x) = k^0 \quad \epsilon(0, x) = \epsilon^0$$

On fait les hypothèses suivantes:

Ω est un ouvert borné de R^n , ($n=2$ ou 3), à frontière régulière.

$a, b, c \in C^0(0, T, L^\infty(\Omega))$ et sont positifs.

ν et μ sont des paramètres positifs.

$u \in C^0(0, T, L^\infty(\Omega))$ vérifiant $\nabla \cdot u = 0$

Remarque:

Ce système est le modèle $k-\epsilon$ dans lequel la diffusion turbulente est supposée constante et où les dénominateurs sont pénalisés par μ de manière à éviter leur nullité.

On a alors les résultats suivants:

Théorème:

Il existe $T = T(k^0, \epsilon^0) > 0$ tel que le problème (P) admette une solution unique sur $]0, T[$, soit $k, \epsilon \in C^0(0, T, H_0^1(\Omega))$

Remarque:

Le résultat obtenu ici est local au sens où la solution existe sur $]0, T[$ mais peut exploser au bout d'un temps fini.

On peut également prouver le résultat de stabilité suivant, en supposant de plus que $u = 0$, c'est à dire en supprimant le phénomène de convection:

Théorème:

Si la condition initiale du problème (P) vérifie:

$$\|(k^0, \epsilon^0)\|_1 \leq \tau$$

pour τ assez petit,

le problème (P) admet une solution unique sur $(0, +\infty)$, de plus cette solution tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

3.3.2. Positivité de k et ϵ .

Proposition

Le système d'équation (28)-(31) pour $k-\epsilon$ est bien posé et k et ϵ ne peuvent devenir négatifs s'il sont positifs à l'instant initial et aux parois dans le cas où l'on suppose que :

$$c_\mu = c_\epsilon$$

c'est à dire que les coefficients de diffusion pour k et ϵ sont égaux.

Démonstration : On forme une équation pour

$$\theta = \frac{k}{\epsilon}. \tag{43}$$

Si D_t noté ailleurs $\frac{D}{D_t}$ désigne l'opérateur de dérivation totale $\partial/\partial t + u\nabla$, et E désigne $\frac{1}{2}|\nabla u + \nabla u^T|^2$, on a

$$D_t \theta = \frac{1}{\epsilon} D_t k - \frac{k}{\epsilon^2} D_t \epsilon \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta^2 E(c_\mu - 2c_1) + \frac{c_\mu}{\epsilon} \nabla \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \nabla k - c_\epsilon \frac{k}{\epsilon^2} \nabla \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \epsilon - 1 + c_2 \\
&= \theta^2 E(c_\mu - 2c_1) - 1 + c_2 + c_\mu \nabla \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \theta + 2c_\mu \theta^2 \nabla \theta \cdot \nabla \left(\frac{k}{\theta} \right) + (c_\mu - c_\epsilon) \frac{k}{\epsilon^2} \nabla \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \epsilon \\
&= \theta^2 E(c_\mu - 2c_1) - 1 + c_2 + c_\mu (3\theta \nabla \theta \nabla k - k |\nabla \theta|^2 + k\theta \Delta \theta) \\
&\quad + (c_\mu - c_\epsilon) \left(\frac{\theta^2}{k} |\nabla k|^2 + \theta^2 \Delta k - 2\theta \nabla k \nabla \theta + k |\nabla \theta|^2 - \theta k \Delta \theta \right)
\end{aligned}$$

Si on suppose que $c_\mu = c_\epsilon$, il reste:

$$D_t \theta = \theta^2 E(c_\mu - 2c_1) - 1 + c_2 + c_\mu (3\theta \nabla \theta \nabla k - k |\nabla \theta|^2 + k\theta \Delta \theta)$$

Sur cette équation on voit que les termes d'ordre zéro ont le bon signe car $c_\mu < 2c_1$ et $c_2 > 1$ donc θ serait borné s'il n'y avait pas les termes de diffusion. En effet l'équation :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + a\theta^2 - b = 0$$

avec a et $b \in \mathbb{R}^+$ admet pour solution:

$$\theta(t) = \frac{\psi(e^{-\mu t}(\theta_0 - \psi) + \theta_0 + \psi)}{\theta_0 + \psi - e^{-\mu t}(\theta_0 - \psi)}$$

avec

$$\begin{aligned}
\psi &= \sqrt{\frac{b}{a}} \\
\mu &= \sqrt{a \cdot b}
\end{aligned}$$

Par ailleurs θ ne peut pas devenir nul ou négatif car le premier instant où le minimum de θ est nul on aurait en ce point (x, t) :

$$\begin{aligned}
\nabla \theta &= 0, \quad \theta = 0 \\
\Delta \theta &< 0
\end{aligned} \tag{45}$$

l'équation (44) écrite en ce point devient:

$$\theta_{,t} - c_2 + 1 = 0 \tag{46}$$

ce qui est impossible puisque pour que θ devienne négatif il faut que $\theta_{,t} \leq 0$.

Si l'on fait la même analyse pour k on obtient:

$$D_t k = c_\mu k \theta E - \frac{k}{\theta} + c_\mu (\theta |\nabla k|^2 + k \nabla \theta \cdot \nabla k + k\theta \Delta k)$$

Au premier instant où le minimum de k est atteint, on obtient:

$$D_t k = 0$$

donc k devient stationnaire et égal à zéro.

Remarque : L'hypothèse $c_\mu = c_\epsilon$ permet d'éliminer le terme $\frac{\theta^2}{k} |\nabla k|^2$ qui a priori peut ne pas rester borné.

3.4. Généralités sur les méthodes numériques utilisées.

Notons que (42) contient comme cas particulier les conditions de Dirichlet pour u ($\beta = 0$) et considérons le problème modèle suivant :

$$u_{,t} + u \nabla u + \nabla p - \nabla \cdot [\nu (|\nabla u + \nabla u^T|) (\nabla u + \nabla u^T)] = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (47)$$

$$u \cdot n = 0, \quad au \cdot \tau + \nu \frac{\partial u \cdot \tau}{\partial n} = b \quad (48)$$

où a, b sont constants et ν est une fonction positive croissante de $|\nabla u + \nabla u^T|$.

Ce problème est plutôt mieux posé que le problème de Navier-Stokes car il y a aussi unicité de la solution en 3D sous des hypothèses raisonnables sur ν (cf. Lions [21], Parès [23]).

La formulation variationnelle peut être faite dans l'espace des fonctions à divergence nulle et de trace normale nulle :

$$(u_{,t}, v) + (u \nabla u, v) + \frac{1}{2} (\nu (|\nabla u + \nabla u^T|) (\nabla u + \nabla u^T), \nabla v + \nabla v^T) \quad (49)$$

$$+ \int_{\Gamma} [au \cdot v - bv] d\gamma = 0$$

$$\forall v \in J_{on}(\Omega); \quad u \in J_{on}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega)^2 : \nabla \cdot v = 0, v \cdot n|_{\Gamma} = 0\} \quad (50)$$

En discrétisant la dérivée totale, on peut considérer le schéma semi-implicite (Pironneau [24], Benqué [3], Douglas [13]):

$$\frac{1}{k} (u_h^{n+1} - u_h^n \circ X_h^n, v_h) + \frac{1}{2} (v_h^n (\nabla u_h^{n+1} + (\nabla u_h^{n+1})^T), \nabla v_h + (\nabla v_h)^T) \quad (51)$$

$$+ \int_{\Gamma} (au_h^{n+1} - b)v_h d\gamma = 0, \quad \forall v_h \in J_{onh}$$

$$u_h^{n+1} \in J_{onh} = \{v_h \in V_h : (\nabla \cdot v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h; \quad v_h \cdot n_h|_{\Gamma} = 0\} \quad (52)$$

Où X_h^n est la position au pas de temps précédent de la particule qui se trouve en x à l'instant considéré. X_h^n est calculée en utilisant une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2. Les intégrales intervenants dans (51) sont évaluées à l'aide d'une formule de quadrature de Gauss à 9 points et les systèmes linéaires sont résolus à l'aide d'une méthode de Cholesky,

et où V_h et Q_h sont définis par:

$$V_h = \{v_h \in (C^0(\Omega))^2 : v_h|_Q \in (Q_2)^2 \quad \forall Q \in T_h\}$$

$$Q_h = \{p_h : p_h|_Q \in P_1 \forall Q \in T_h\}$$

où T_h est une triangulation composée de quadrangles, et où :

$$\nu_h^n = \nu(|\nabla u_h^n + \nabla u_h^{nT}|) \quad (53)$$

En ce qui concerne la construction de l'espace $J_{on}(\Omega)$ pour ce cas d'espaces d'interpolation, on se reportera à Hecht[17].

Les techniques développées pour les équations de Navier-Stokes (Bègue et al [2], Bristeau et al[6], Glowinsky[15]) peuvent s'adapter à ce cadre, on notera toutefois qu'il faut reconstruire les matrices à chaque itération puisque ν dépend de n .

3.5. Traitement numérique des conditions aux limites de paroi.

Une fois la vitesse de frottement u^* connue aux noeuds de la paroi, la prise en compte des conditions aux limites ne pose plus de problème.

Nous donnons ici l'algorithme de calcul de u^* en un point de la frontière numérique. Le problème consiste à trouver u^* vérifiant :

$$\frac{u \cdot \tau}{u^*} = g\left(\frac{y u^*}{\nu}\right) \text{ où } g \text{ est la loi de Reichard.}$$

On suppose connue u^n la vitesse en tous les noeuds du maillage à l'étape de temps n .dt. Soit $u \cdot \tau = u^n \cdot \tau$ où τ est la tangente au point considéré. L'algorithme s'applique en:

$$y = d$$

avec d la distance paroi-maillage pour l'initialisation.

a) Résolution de l'équation non linéaire en r :

$$r = \frac{u \cdot \tau}{g\left(\frac{y r}{\nu}\right)} \quad (54)$$

b) Calcul de

$$y^+ = \frac{y r}{\nu} \quad (55)$$

Si $y^+ > 11.63$ (y appartient donc à la sous-couche logarithmique) alors:

$$u^* = r \text{ et fin}$$

sinon

$$y = \frac{11.63\nu}{r} \text{ et aller en a) jusqu'à convergence.} \quad (56)$$

La méthode de résolution de l'équation non linéaire est une méthode de surrelaxation d'ordre 4:

i) r_0 fixé,

ii) Calcul de r_i pour $i=1, \dots, 5$

$$y_i = \frac{y r_{i-1}}{\nu} \quad (57)$$

$$r_i = \frac{u \cdot \tau}{g(y_i)} \quad (58)$$

Si :

$$\frac{|r_5 - r_4|}{|r_4|} < \epsilon \text{ alors } r = r_5 \text{ et fin.}$$

sinon:

$$r^0 = (1 - \alpha)^4 r + 4\alpha(1 - \alpha)^3 r_2 + 6\alpha^2(1 - \alpha)^2 r_3 + 4\alpha^3(1 - \alpha)r_4 + \alpha^4 r_5 \text{ et aller en ii).} \quad (59)$$

Le paramètre de relaxation α a été fixé à sa valeur optimale soit $\alpha = 0.5$ dans les calculs.

L'algorithme précédent revient à modifier virtuellement la paroi numérique à chaque pas de temps, autrement dit la distance entre la paroi physique et la paroi numérique varie localement au cours du calcul et l'on conserve toujours la même triangulation, cette distance étant théoriquement négligeable face aux dimensions caractéristiques de l'écoulement.

3.6. Discrétisation du modèle $k - \epsilon$.

Construire un schéma numérique possédant de bonnes propriétés de stabilité et respectant la positivité des quantités turbulentes pour le modèle $k - \epsilon$ est encore aujourd'hui une difficulté. D'autre part, nous verrons que plusieurs des modèles détaillés par la suite sont construits à partir du modèle $k - \epsilon$ et nécessitent un schéma numérique proche de celui-ci. Il nous est donc impératif de définir un algorithme de qualité pour ce modèle.

Nous discutons ici deux algorithmes de calcul pour le modèle $k - \epsilon$.

Nous commençons par rappeler un algorithme développé au L.N.H (Laboratoire National d'Hydraulique de EDF), pour la résolution d'une équation de convection diffusion:

Soit le problème:

$$\theta_{,t} + u \cdot \nabla \theta - \nu \Delta \theta = f(t, x) \quad (60)$$

+ conditions aux limites et initiales.

L'algorithme est aussi basé sur une discrétisation de la dérivée totale de θ , il peut s'écrire sous forme de pas fractionnaires:

θ^n étant connu

on calcule $\theta^{n+\frac{1}{2}}$ tel que:

Etape de Convection:

$$\theta^{n+\frac{1}{2}} - \theta^n \circ X^n(t^n) = \int_{nk}^{(n+1)k} f(t, X^n(\tau)) d\tau \quad (61)$$

on calcule θ^{n+1} tel que:

Etape de diffusion:

$$\theta^{n+1} - \theta^{n+\frac{1}{2}} - \nu \Delta \theta^{n+1} = 0 \quad (62)$$

où X^n est la caractéristique issue du point x à l'instant $t^n = n.dt$, c'est à dire que X^n est solution du système différentiel:

$$\frac{d}{d\tau} X^n(\tau) = u(t, X^n(\tau)), \quad X^n(t^{n+1}) = x \quad (63)$$

Le second membre de (60) étant intégré le long de la courbe caractéristique durant l'étape de convection (61) (Goussebaïle-Jacomy[16]), on utilise une formule de quadrature de Gauss à 9 points.

3.6.1 Un premier algorithme de calcul pour le modèle $k - \epsilon$ (SCHKE1). Cf [16]

Pour plus de clarté on expose l'algorithme avant sa discrétisation en espace.

Pour $n > 0$, on suppose k^n, u^n, ϵ^n connus et on calcule:

$$\nu_t^n = c_\mu \frac{(k^n)^2}{\epsilon^n} \quad (64)$$

$$P^n = \frac{\nu_t^n}{2} |\nabla u^n + \nabla u^{nT}|^2 \quad (65)$$

Phase de convection:

$$k^{n+\frac{1}{2}} - k^n \circ X^n(t^n) = \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_k(t, X^n(\tau)) d\tau \quad (66)$$

$$\epsilon^{n+\frac{1}{2}} - \epsilon^n \circ X^n(t^n) = \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_\epsilon(t, X^n(\tau)) d\tau \quad (67)$$

avec:

$$S_k = P^n - \epsilon^n$$

$$S_\epsilon = \frac{\epsilon^n}{k^n} (c_{\epsilon 1} P^n - c_{\epsilon 2} \epsilon^n)$$

Phase de diffusion:

$$k^{n+1} - dt \nabla \cdot \left(\frac{\nu + \nu_t}{\sigma_k} \nabla k^{n+1} \right) = k^{n+\frac{1}{2}} \quad (68)$$

$$\epsilon^{n+1} - dt \nabla \cdot \left(\frac{\nu + \nu_t}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon^{n+1} \right) = \epsilon^{n+1/2} \quad (69)$$

+ conditions aux limites sur k^{n+1} et ϵ^{n+1}

Résolution du problème en u^{n+1}, p^{n+1} à l'instant $(n+1)dt$:

$$u^{n+1} - u^n \circ X^n(t^n) + dt \nabla p^{n+1} - dt \nabla \cdot ((\nu + \nu_t) \nabla u^{n+1}) = 0 \quad (70)$$

$$\nabla \cdot u^{n+1} = 0$$

+ conditions aux limites sur u^{n+1}

Remarque : Tous les calculs précédents sont effectués au sens faible c'est à dire projetés sur l'espace d'interpolation en utilisant le produit scalaire L^2 , ainsi la résolution de :

$$u_h = f$$

revient à inverser le système linéaire correspondant à :

$$(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Malheureusement des valeurs négatives sur k et ϵ peuvent apparaître, celles-ci doivent être éliminées de manière à éviter une dégénérescence du calcul due à des coefficients de diffusion négatifs (matrices non définies positives...). Pour cela on prend donc le maximum entre la valeur calculée et une valeur minimale imposée. Il est à noter que l'ordre de grandeur de cette valeur minimale a malheureusement une influence sur la convergence de l'algorithme.

Par ailleurs, on constate que l'algorithme exposé nécessite, pour chaque itération en temps, l'inversion de 7 systèmes linéaires et la reconstruction de 3 matrices (une pour chaque problème de diffusion soit en (68),(69),(70)).

3.6.2 Résultats numériques (SCHKE1):

1 Ecoulement entre deux plaques planes (Ecoulement de Poiseuille).

Les caractéristiques physiques de l'écoulement sont les suivantes:

- $Re=57000$,
- conditions en entrée issues de l'expérience de Comte-Bellot,
- conditions de Neumann homogènes en sortie,
- lois de parois logarithmiques.
- Conditions initiales constantes, $u = 0$, $k = 0.5$, $\epsilon = 1$. Le pas de temps utilisé correspond à un nombre de Courant voisin de 2.

Le maillage est composé de 200 quadrangles Q^2 .

Nous donnons sur les figures 1,2,3,4 les sections d'énergie, de dissipation et de la première composante de la vitesse ainsi que l'évolution en temps des

normes relatives L^2 pour k et ϵ qui permettent de juger de l'aspect très perturbé de la phase transitoire du calcul.

2 Ecoulement dans une cavité avec un jet.

- $Re=100000$
- Conditions d'entrées données par les mesures expérimentales,
- conditions aux limites logarithmiques sur les parois,
- conditions de Neumann homogènes en sortie.

Le maillage utilisé est composé de 368 quadrangles.

Sur les figures 5-8 on donne le champs de vitesse, les lignes de niveau de k , ϵ , ν_t à $t=0.8$ ce qui correspond à peu près à l'état stationnaire.

3 Ecoulement instationnaire derrière un cylindre.

Nous avons ensuite essayé de calculer l'écoulement derrière un cylindre à un nombre de Reynolds de l'ordre de 500. Le champ de vitesse initial est obtenu en ayant imposé une rotation du cylindre puis en ayant résolu les équations de Navier-Stokes durant 100 étapes de temps de manière à dissymétriser l'écoulement.

Le maillage utilisé est présenté sur la figure 9 ainsi que le champ de vitesse initialisant le calcul (fig.10).

Or il s'avère que nous nous heurtons à des problèmes de stabilité numérique, le calcul explosant en moyenne au bout de quelques dizaines d'itérations en temps.

3.6.3 Deuxième algorithme de calcul pour le modèle $k - \epsilon$ (SCHKE2).

Afin de conserver les propriétés de positivité de k et ϵ , nous avons donc construit un nouvel algorithme qui utilise la variable auxiliaire $\theta = k/\epsilon$ pour le traitement de l'étape de convection:

Si l'on oublie les termes de diffusion dans le modèle $k - \epsilon$, celui-ci s'écrit:

$$k_{,t} + u \nabla k - \frac{c_\mu}{2} \frac{k^2}{\epsilon} |\nabla u + \nabla u^T|^2 + \epsilon = 0 \quad (71)$$

$$\epsilon_{,t} + u \nabla \epsilon - c_1 k |\nabla u + \nabla u^T|^2 + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \quad (72)$$

il est alors aisé de construire l'équation vérifiée par θ (Voir 3.3.2) :

$$\theta_{,t} + u \nabla \theta + \left(\frac{c_\mu}{2} - c_1\right) \theta^2 |\nabla u + \nabla u^T|^2 + 1 - c_2 = 0 \quad (73)$$

L'idée est alors de remplacer dans l'algorithme précédent les étapes de convection sur k et ϵ par des étapes de convection sur k et θ car comme ceci a été vu en 3.3.2, l'équation (73) implique:

$$0 < \theta < c(\nabla u)$$

Cependant, l'équation vérifiée par k , soit (67) montre que k n'est pas nécessairement borné, son comportement numérique dépendant de l'équilibre entre les termes de production et ceux de dissipation.

Pour $n > 0$, on suppose k^n, u^n, ϵ^n connus et on calcule:

$$\nu_i^n = c_\mu \frac{(k^n)^2}{\epsilon^n} \quad (74)$$

$$\theta^n = \frac{k^n}{\epsilon^n} \quad (75)$$

$$Q^n = \frac{c_\mu}{2} \theta^n |\nabla u^n + \nabla u^{nT}|^2 \quad (76)$$

Phase de convection:

$$k^{n+\frac{1}{2}} - k^n \circ X^n(t^n) = \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_k(t, X^n(\tau)) d\tau \quad (77)$$

$$\theta^{n+\frac{1}{2}} - \theta^n \circ X^n(t^n) = \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_\theta(t, X^n(\tau)) d\tau \quad (78)$$

avec:

$$\begin{aligned} S_k &= k^n Q^n - \epsilon^n \\ S_\theta &= c_\mu (1 - c_{e1}) (\theta^n)^2 + c_{e2} - 1 \\ \epsilon^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{k^{n+\frac{1}{2}}}{\theta^{n+\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (79)$$

ou bien (alternative semi-implicite):

$$\left(1 + \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_r(t, X^n(\tau)) d\tau \right) k^{n+\frac{1}{2}} - k^n \circ X^n(t^n) \quad (77')$$

$$= \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_k(t, X^n(\tau)) d\tau$$

$$\left(1 + \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_r(t, X^n(\tau)) d\tau \right) \theta^{n+\frac{1}{2}} - \theta^n \circ X^n(t^n) \quad (78')$$

$$= \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_\theta(t, X^n(\tau)) d\tau$$

avec:

$$S_k = 2 \frac{c_1}{c_\mu} k^n Q^n - \frac{k^n}{\theta^n}$$

$$S_\theta = c_2 - 1$$

$$S_r = \left(2 \frac{c_1}{c_\mu} - 1 \right) Q^n$$

Phase de diffusion:

$$k^{n+1} - k^{n+\frac{1}{2}} - dt \nabla \cdot \left(\frac{\nu + \nu_t}{\sigma_k} \nabla k^{n+1} \right) = 0 \quad (80)$$

$$\epsilon^{n+1} - \epsilon^{n+\frac{1}{2}} - dt \nabla \cdot \left(\frac{\nu + \nu_t}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon^{n+1} \right) = 0 \quad (81)$$

+ conditions aux limites sur k^{n+1} et ϵ^{n+1}

Résolution du problème en u^{n+1}, p^{n+1} :

$$u^{n+1} - u^n \circ X^n + dt \nabla p^{n+1} - dt \nabla \cdot ((\nu + \nu_t) \nabla u^{n+1}) = 0 \quad (82)$$

$$\nabla \cdot u^{n+1} = 0$$

+ conditions aux limites sur u^{n+1}

Bien que légèrement plus coûteux que le premier algorithme (il nécessite l'inversion de deux systèmes linéaires supplémentaires liés à la matrice de masse par étape de temps soit (75) et (79)) ce nouvel algorithme a permis de s'affranchir des problèmes de stabilité évoqués précédemment.

Malheureusement à l'exception de cas simples comme celui de l'écoulement de Poiseuille, pour lequel on retrouve les mêmes résultats qu'avec la méthode précédente, cet algorithme semble mal adapté au calcul d'écoulements stationnaires, l'erreur relative au cours du temps ne parvenant pas à se stabiliser même en prenant de petits pas de temps. Il est d'ailleurs à noter qu'un traitement semi-implicite tel que celui présenté en (77')(78') ne permet pas de résoudre le problème. Ce fait peut-être s'expliquer par le nombre important de projections sur l'espace d'interpolation utilisées dans le but d'éliminer les problèmes d'explosion, à moins que le système d'équations proposé n'admette pas de solutions stationnaires ?

Notons cependant que l'alternative (77')(78') permet de conserver la positivité de l'énergie turbulente $k^{n+\frac{1}{2}}$ en prenant un pas de temps suffisamment petit, nous reviendrons plus en détails sur ce point au paragraphe 4.2.

Nous présentons les résultats obtenus dans le cas de l'écoulement derrière un cylindre:

3.6.4. Résultats numériques (SCHKE2):

Écoulement derrière un cylindre.

- Re=500
- $u=(1,0)$ à l'infini,
- $k = \epsilon = 10^{-7}$ à l'infini
- Conditions de paroi lisse sur le cylindre (loi de Reichard).
- Les conditions initiales de k et ϵ sont prises constantes et respectivement égales à 0.5 et 1. de manière à obtenir un démarrage assez régulier du calcul.

A l'instant initial la vitesse est prise égale à la solution des équations de Navier-Stokes instationnaires.

Sur les figures 11 et 12 on trouvera la solution obtenue avec (SCHKE2) à $t=30''$ (lignes iso-rotationnel et iso-énergie cinétique turbulente)

Le choix du schéma de calcul est donc assez simple:

- Dans le cas d'un calcul stationnaire seul le schéma SCHKE1 semble donner des résultats satisfaisants correspondants à une convergence du schéma.
- En ce qui concerne un calcul instationnaire tel que celui derrière un cylindre examiné ici seul SCHKE2 possède une stabilité suffisante.

4. UN MODELE $k - \frac{k}{\epsilon}$

Les difficultés numériques rencontrées lors de la simulation du modèle $k - \epsilon$ ainsi que le comportement relativement stable du schéma utilisant la variable auxiliaire k/ϵ pour le traitement de l'étape de convection nous a conduit à construire et à étudier un modèle dérivé du modèle $k - \epsilon$ dans lequel est conservée l'équation sur k tandis que l'équation sur la dissipation visqueuse ϵ est remplacée par une équation sur le rapport θ :

$$\theta = \frac{k}{\epsilon} \quad (83)$$

qui est homogène à un temps.

Remarque:

Dans Coakley[9], on notera un modèle (q, ω) , décrit dans le cas compressible, où:

$$q = \sqrt{k} \quad \omega = \frac{\epsilon}{k}$$

dont le comportement numérique est sensiblement meilleur que celui du modèle $k - \epsilon$ standard.

L'équation gouvernant θ est donnée par (73), cependant nous l'avons remplacée par:

$$D_t \theta = \theta |\theta| E(c_\mu - 2c_1) + c_\theta \nabla \cdot (k \theta \nabla \theta) - 1 + c_2 \quad (84)$$

Nous avons remplacé θ^2 par $\theta |\theta|$ puisque θ est une quantité positive.

La constante $c_\theta = \frac{c_\mu}{\sigma_\theta}$ a été fixée à 0.9 (soit $\sigma_\theta = 0.1$) de manière à simuler correctement l'écoulement de Poiseuille. Les figures 13, 14 et 15 permettent de comparer les résultats obtenus par ce modèle aux résultats expérimentaux et à ceux obtenus par le modèle $k - \epsilon$. A noter également que ce modèle converge sur ce cas en 15 itérations soit environ deux fois plus rapidement que le modèle $k - \epsilon$.

Les conditions aux limites pour θ sont simplement dérivées de celles de k et de ϵ . En particulier, dans le cas d'une paroi lisse la condition sur θ s'écrit :

$$\theta = \frac{K \delta}{u^* \sqrt{c_\mu}}$$

avec δ la distance à la paroi (voir le paragraphe 3.2).

D'autre part ce modèle dénommé par la suite modèle $k - \theta$, présente l'intérêt de faire disparaître une partie des quotients existants dans le modèle $k - \epsilon$, ainsi la viscosité turbulente s'écrit:

$$\nu_t = c_\mu k \theta \quad (85)$$

Le modèle $k - \theta$ s'écrit donc:

$$u_{,t} + u \nabla u + \nabla p - \nabla \cdot ((\nu + c_\mu k \theta) \nabla u) = 0 \quad (86)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (87)$$

$$k_{,t} + u \nabla k - \frac{c_\mu}{2} k \theta |\nabla u + \nabla u^T|^2 - \nabla \cdot (c_\mu k \theta \nabla k) + \frac{k}{\theta} = 0 \quad (88)$$

$$D_t \theta = \theta |\theta| E(c_\mu - 2c_1) + c_\theta \nabla \cdot (k \theta \nabla \theta) - 1 + c_2 \quad (89)$$

4.1. Propriétés du modèle $k - \theta$.

On remplace (84) par (90):

$$D_t \theta = \theta |\theta| E(c_\mu - 2c_1) + c_\theta \nabla \cdot \nu_t \nabla \theta - 1 + c_2 \quad (90)$$

où ν_t est une fonction de x et t vérifiant:

$$\nu_t \in L^2(0, T, L^\infty(\Omega)) \text{ et } \nu_t(x, t) \geq \nu > 0.$$

On suppose de plus que:

$$u \in L^2(0, T, L^\infty(\Omega)) \quad \nabla \cdot u = 0$$

$$E \in L^2(0, T, L^\infty(\Omega)) \quad E(x, t) \geq 0$$

Proposition 4.1

Le problème (90) avec la condition initiale $\theta = \theta_0$ et des conditions aux limites de type dirichlet homogènes admet une solution unique dans $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$.

Démonstration:

Elle est basée sur le fait que l'opérateur A :

$$A(\theta) = u \cdot \nabla \theta - \theta |\theta| E(c_\mu - 2c_1) - c_\theta \nabla \cdot \nu_t \nabla \theta$$

est hémicontinu, monotone et coercif de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, (voir Lions[21]).

Proposition 4.2

Si θ est positif à l'instant initial alors il ne peut devenir négatif.

Démonstration:

Identique à celle de la proposition du paragraphe 3.3.2 .

4.2. Algorithme de calcul pour le modèle $k - \theta$.

Cet algorithme a été construit de manière à préserver la propriété de positivité de θ exposée dans la proposition 6.2. Pour ce faire le traitement du terme quadratique $\theta |\theta| E(c_\mu - c_1)$ est effectué de manière semi-implicite. De même le terme de production de l'équation sur k est partiellement implicite. La discrétisation en temps prend donc la forme suivante:

Pour $n > 0$, on suppose k^n, u^n, θ^n connus et on calcule:

$$\nu_t^n = c_\mu k^n \theta^n \quad (91)$$

$$Q^n = \frac{\theta^n}{2} |\nabla u^n + \nabla u^{nT}|^2 \quad (92)$$

Phase de convection:

$$\left(1 + \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_r(t, X^n(\tau)) d\tau\right) k^{n+\frac{1}{2}} - k^n oX^n(t^n) \quad (93)$$

$$= \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_k(t, X^n(\tau)) d\tau$$

$$\left(1 + \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_r(t, X^n(\tau)) d\tau\right) \theta^{n+\frac{1}{2}} - \theta^n oX^n(t^n) \quad (94)$$

$$= \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_\theta(t, X^n(\tau)) d\tau$$

avec:

$$S_k = 2c_1 k^n Q^n - \frac{k^n}{\theta^n}$$

$$S_\theta = c_2 - 1$$

$$S_r = (2c_1 - c_\mu) Q^n$$

Phase de diffusion:

$$k^{n+1} - k^{n+\frac{1}{2}} - dt \nabla \cdot \left(\frac{(\nu + \nu_t)}{\sigma_k} \nabla k^{n+1} \right) = 0 \quad (95)$$

$$\theta^{n+1} - \theta^{n+\frac{1}{2}} - dt \nabla \cdot \left(\frac{(\nu + \nu_t)}{\sigma_\theta} \nabla \theta^{n+1} \right) = 0 \quad (96)$$

+ conditions aux limites sur k^{n+1} et θ^{n+1}

Résolution du problème en u^{n+1}, p^{n+1} :

$$u^{n+1} - u^n oX^n + dt \nabla p^{n+1} - dt \nabla \cdot ((\nu + \nu_t) \nabla u^{n+1}) = 0 \quad (97)$$

$$\nabla \cdot u^{n+1} = 0$$

+ conditions aux limites sur u^{n+1}

Remarque : De (94) et (96) on déduit que:

$$\theta^n > 0 \implies \theta^{n+1} > 0$$

Pour déduire de (93) la même propriété sur k il faut que dt soit assez petit si $S_k < 0$. On a donc un critère de réglage du pas de temps. Une façon de préserver la positivité de k serait d'appliquer (93) à $\text{Log}k$ (en divisant l'équation par k) mais les essais numériques n'ont pas révélé la nécessité d'une telle opération.

4.3. Résultats numériques.

1. Ecoulement dans une cavité avec un jet.

Les caractéristiques physiques sont données en 3.6.2. On présente le champs de vitesse, les lignes de niveaux de k , θ et ν_t à $t=0.8$ sur les figures 13 à 16.

La comparaison avec les figures 5-8 montre une diffusion plus importante du modèle $k - \theta$, le niveau d'énergie de k étant plus élevé.

2. Ecoulement derrière un cylindre. Modèle $k - \theta$.

Les conditions aux limites et initiales sont identiques à celles données en 3.6.4. et le nombre de Reynolds est égal à 10000.

On présente sur les figures 17, 18, 19 les lignes iso-rotationnelles et les lignes de niveaux de k et de la viscosité turbulente.

Contrairement aux résultats obtenus par le modèle $k - \epsilon$ où les phénomènes de dissipation détruisaient l'énergie turbulente dans le sillage, ceux-ci présentent un sillage important. Il s'en suit un net étirement des tourbillons à l'arrière du cylindre.

5. LE MODELE MPP DERIVE DE L'HOMOGENEISATION.

Le modèle de turbulence MPP proposé par MacLaughlin-Papanicolaou-Pironneau [28] dérive d'une tentative de démontrer l'hypothèse de Reynolds.

Ce modèle de turbulence repose sur l'hypothèse de séparation des échelles L de l'écoulement moyen u et des échelles l de la turbulence. Un développement asymptotique basé sur le rapport $\varepsilon = l/L$ a été proposé pour les équations d'Euler. Une extension aux équations de Navier-Stokes a été étudiée ultérieurement et les correcteurs d'ordre 1 ont été obtenus par Chacon [29], et Ortegon [22]. Il est démontré que dans le cas de la turbulence à deux échelles l'hypothèse de Reynolds est partiellement correcte: *le tenseur de Reynolds dépend de $\nabla u + \nabla u^T$ mais aussi de $\nabla a \nabla a^T$ où a est la coordonnée lagrangienne de l'écoulement.*

On rappelle brièvement le modèle et sa dérivation.

On part des équations de Navier-Stokes avec des conditions initiales à 2 échelles :

$$u_{,t}^e + (u^e \cdot \nabla) u^e + \nabla p^e - \mu \varepsilon^2 \Delta u^e = 0, \quad \nabla \cdot u^e = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[$$

$$u^e(x, 0) = u^o(x) + \varepsilon^{1/3} w^o\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right)$$

On suppose que $w^o(y, x)$ est périodique en $y \in Y =]-\pi, \pi[$ et de moyenne nulle, i.e.

$$\langle w \rangle = \int_Y w(y, x) dy = 0$$

On considère le développement asymptotique suivant:

$$\begin{aligned} u^e(x, t) &= u^0(x, t) + \varepsilon^{1/3} w\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \varepsilon^{2/3} u^{(1)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \\ &\quad \varepsilon u^{(2)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \dots \\ p^e(x, t) &= p(x, t) + \varepsilon^{2/3} \pi\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \varepsilon p^{(1)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \\ &\quad \varepsilon^{4/3} p^{(2)}\left(\frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^{2/3}}; x, t\right) + \dots \end{aligned}$$

Dans ces équations $a(x, t)$ représente l'inverse de la coordonnée Lagrangienne par rapport à $u(x, t)$, i.e.

$$a_{,t} + (u \cdot \nabla) a = 0, \quad a(x, 0) = x$$

Les fonctions $w(y, \tau; x, t)$, $u^{(1)}(y, \tau; x, t)$, $u^{(2)}(y, \tau; x, t)$, ..., $\pi(y, \tau; x, t)$, $p^{(1)}(y, \tau; x, t)$, ... sont périodiques en y , de moyennes nulles et sous linéaires en τ ; on pose:

$$\langle v(\dots, x, t) \rangle = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3 \theta} \int_0^\theta \int_Y v(y, \tau; x, t) dy d\tau$$

L'incorporation de ce développement dans les équations de Navier-Stokes permet après identification des puissances en $\varepsilon^{1/3}$ et utilisation de relations de compatibilité d'obtenir le système suivant:

$$u_{,t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p + \nabla \cdot qR = 0 \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\quad (98)$$

$$q_{,t} + u \nabla q + q(R : \nabla u + \mu \psi_q) = 0 \quad (99)$$

$$a_{,t} + (u \cdot \nabla)a = 0, \quad a(x, 0) = x \quad (100)$$

où R et ψ_q sont des fonctions de $C = \nabla a^T \nabla a$.

Les essais numériques effectués (Bègue[1], Chacon[29], Ortegon[22]) permettent de suggérer les formules suivantes:

$$R = \beta q \nabla a \nabla a^T \quad (101)$$

$$\beta = \frac{\beta_0}{(1+i)^2}, \quad \beta_0 = \frac{2}{3}, \quad \psi_q = \psi_0 + \psi_1 i^2 \quad (102)$$

$$i = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 \quad (103)$$

Notons dès maintenant que les simulations du modèle sur l'écoulement derrière un cylindre ont révélé une grande sensibilité par rapport aux valeurs de ψ_0 et ψ_1 . En effet l'équilibre entre les termes $R : \nabla u$ et $\mu \psi_q$ est actuellement un des problèmes posé par ce modèle. Notons aussi que les effets de viscosité turbulente ($R = \nu_t (\nabla u + \nabla u^t)$) n'apparaissent pas. Pour les faire apparaître il faut pousser le développement asymptotique à l'ordre supérieur, on obtient alors:

$$R = q\beta \nabla a \nabla a^T - \varepsilon^{\frac{2}{3}} \sqrt{q} (\nabla u + \nabla u^t) \quad (104)$$

5.1. Intégration analytique de l'équation (99).

Si on prend $\psi = 0$, (98) (99) devient:

$$u_{,t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p + \nabla \cdot \left(q \frac{\beta_0}{(1+i)^2} \nabla a \nabla a^T \right) = 0 \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\quad (105)$$

$$q_{,t} + u \nabla q + q \frac{\beta_0}{(1+i)^2} \nabla a \nabla a^T : \nabla u = 0 \quad (106)$$

En effet la dérivation par rapport à x de l'équation (100) gouvernant la coordonnée lagrangienne inverse a donne:

$$a_{i,kt} + u_{j,k} a_{i,j} + u_j a_{i,jk} = 0 \quad (107)$$

En multipliant (107) par $a_{i,k}$ et en sommant sur les indices i et k on obtient l'équation vérifiée par i :

$$\frac{1}{2}i_{,t} + \frac{1}{2}u\nabla i = -\nabla a \nabla a^T : \nabla u \quad (108)$$

Le report de (108) dans (107) permet d'obtenir:

$$q_{,t} + u\nabla q + q \frac{\beta_0}{(1+i)^2} \left(-\frac{1}{2}i_{,t} - \frac{1}{2}u\nabla i\right) = 0 \quad (109)$$

soit

$$\frac{1}{q} D_t q = \frac{1}{2} \frac{\beta_0}{(1+i)^2} D_t i \quad (110)$$

où $D_t r$ représente la dérivée particulaire de la quantité r .

En intégrant (110) le long des lignes de courant on obtient:

$$q(x, t) = q(a(x, t), 0) e^{\frac{2\beta_0}{(n+1)} - \frac{2\beta_0}{(1+i)}} \quad (111)$$

puisque $i=n$, la dimension de l'espace, à l'instant initial. Notons que de (111) on déduit:

$$q^0(a(x, t)) e^{\frac{2n\beta_0}{(n+1)}} \leq q(x, t) \leq q^0(a(x, t)) e^{\frac{2\beta_0}{(n+1)}} \quad (112)$$

5.2. Méthodes et résultats numériques.

5.2.1 Méthodes numériques .

• Pour intégrer le système (98)-(100) au cours du temps, les inconnues u, q, a sont découplées par un algorithme à pas fractionnaires. La vitesse $u(\cdot, (n+1)dt) = u^{n+1}$ est calculée en fonction de q^n et a^n , eux-mêmes calculés en fonction de u^{n+1} .

1. initialisation:

$$n = 0$$

u^0 solution de Navier - Stokes

$$a^0(x) = x, \quad q^0 \text{ donné}$$

(*) à partir de a^n, u^n, q^n on calcule :

2. calcul des coordonnées lagrangiennes inverses a^{n+1} :

$$a_{,t}^{n+1} + u^n \cdot \nabla a^{n+1} = 0$$

3. calcul du tenseur de Reynolds:

$$\text{calcul de } R^{n+1} = f(\nabla a^{n+1})$$

4. calcul de l'énergie turbulente q^{n+1} :

$$q_{,i}^{n+1} + u^n \cdot \nabla q^{n+1} + q^{n+1} [R^{n+1} : \nabla u^n] = 0$$

$$\text{calcul de } f^{n+1} = -\epsilon^{2/3} \nabla \cdot [q^{n+1} R^{n+1} + \beta^2 \sqrt{q^{n+1}} \nabla u^{nT}]$$

5. calcul de la vitesse u^{n+1} :

$$u_{,i}^{n+1} + u^{n+1} \cdot \nabla u^{n+1} + \nabla p^{n+1} - \nu \Delta u^{n+1} - \epsilon^{5/3} \beta^2 \nabla \cdot (\sqrt{q^{n+1}} \nabla u^{n+1}) = f^{n+1}$$

$$\nabla \cdot u^{n+1} = 0$$

faire $n = n + 1$

aller en (*)

Le tenseur R défini en (85) est décomposé en deux parties traitées de manière différente dans l'algorithme: le premier terme est explicite dans l'équation sur u , i.e. calculé à partir de l'itération précédente dans le second membre de l'équation sur u ; le deuxième terme est implicite, i.e. il introduit une viscosité variable qui est fonction de l'énergie q et de gradient de vitesse et qui nécessite ainsi le calcul de nouvelles matrices à chaque itération.

- L'intégration de l'équation sur a se fait par la méthode des caractéristiques (Pironneau [24]).

- L'intégration de l'équation sur q se fait par la même méthode en faisant intervenir une notion particulière. On cherche q sous la forme $q_p \exp(e)$. D'après le paragraphe 4.1, (111) permet d'écrire $q(x, t)$ sous la forme $q_p(X) \exp(e)$ où X est le pied de la caractéristique issue de $x = x_i, x_i$ étant la position de la i -ième particule. L'interpolation de q dans tout le domaine de calcul se fait par une projection L^2 .

- Dans les essais qui vont suivre l'intégration de l'équation sur u se fait par un Θ -schéma qui permet de découpler la résolution de Navier-Stokes en problème linéaire de Stokes (contrainte d'incompressibilité) et problème non linéaire de convection (cf[2]).

Soit l'équation de Navier-Stokes:

$$u_{,i} + u \cdot \nabla u + \nabla p - \nu(x, t) \Delta u = f$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

+ conditions aux limites

Le Θ -schéma retenu est:

1. on calcule $u^{n+\Theta}$ à partir de u^n :

$$\frac{(u^{n+\Theta} - u^n)}{\Theta \Delta t} - \alpha \nu \Delta u^{n+\Theta} + \nabla p^{n+\Theta} = f^{n+\Theta} + \beta \nu \Delta u^n - (u^n \cdot \nabla) u^n$$

$$\nabla \cdot u^{n+\Theta} = 0$$

+ conditions aux limites

2. on calcule $u^{n+1-\Theta}$ à partir de $u^{n+\Theta}$:

$$\frac{(u^{n+1-\Theta} - u^{n+\Theta})}{(1-2\Theta)\Delta t} - \beta \nu \Delta u^{n+1-\Theta} + (u^{n+1-\Theta} \cdot \nabla) u^{n+1-\Theta} =$$

$$-\nabla p^{n+\Theta} + f^{n+1-\Theta} + \alpha \nu \Delta u^{n+\Theta}$$

+ conditions aux limites

3. on calcule u^{n+1} à partir de $u^{n+1-\Theta}$:

$$\frac{(u^{n+1} - u^{n+1-\Theta})}{\Theta \Delta t} - \alpha \nu \Delta u^{n+1} + \nabla p^{n+1} =$$

$$f^{n+1} + \beta \nu \Delta u^{n+1-\Theta} - (u^{n+1-\Theta} \cdot \nabla) u^{n+1-\Theta}$$

$$\nabla \cdot u^{n+1} = 0$$

+ conditions aux limites

où:

$$\alpha = \frac{(1-2\Theta)}{(1-\Theta)} ; \beta = \frac{\Theta}{(1-\Theta)} ; \alpha + \beta = 1$$

Pour des raisons de stabilité, Θ vaut $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Les étapes 1 et 3, qui sont des problèmes de Stokes, sont résolues par la méthode itérative de Uzawa préconditionné (Cahouet [35]). L'étape 2 non linéaire est résolue par GMRES (Generalized Minimum Residual), (Saad [34]).

• chaque problème précédent est mis sous forme variationnelle dans l'espace des fonctions suivant:

$$V_h = \{v_h \in (C^0(\Omega))^2 : v_h|_T \in (P_1)^2, \forall T \in \tilde{\mathcal{T}}_h\}$$

$$Q_h = \{p_h \in C^0(\Omega) : p_h|_T \in P_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

où \mathcal{T}_h est une triangulation composée de triangles et $\tilde{\mathcal{T}}_h$ la triangulation générée à partir de \mathcal{T}_h telle que chaque triangle T est découpé en 4 triangles égaux \tilde{T} .

5.2.2. Résultats numériques.

Calcul de l'écoulement autour d'un cylindre.

La triangulation pression possède : 664 noeuds, 1260 éléments.

La triangulation vitesse possède : 2562 noeuds, 5040 éléments
(cf.figure 20 : grille vitesse)

• conditions initiales:

u solution de Navier – Stokes

$$q = q^0 \sum_{i=1}^{np} \delta_{x-x_i}$$

$$a(x, t = 0) = x$$

• conditions aux limites:
sur le cylindre:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = (0, 0) \\ q = 0 \\ a(x, t) = x \end{array} \right\}$$

à l'infini amont de l'écoulement:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\infty} = (1, 0) \\ q = 0 \\ a(x, t) = x - u_{\infty} t \end{array} \right\}$$

à l'infini aval de l'écoulement:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 1 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \end{array} \right\}$$

On remarquera que la fonction Ψ de dissipation dans l'équation d'énergie turbulente q a été provisoirement supprimée car on ne dispose pas encore de formule pour Ψ qui permette d'introduire cette dissipation sans que celle-ci annule totalement l'énergie q , (c'est un des points faibles du modèle MPP révélé par nos essais numériques).

On génère des allées de Karman en déstabilisant au cours du temps une solution de Navier-Stokes instationnaire au nombre de Reynolds 200. Le modèle de turbulence commence au cycle 120 (temps=30.) à partir de la solution déstabilisée.

L'initialisation de l'énergie turbulente q équivaut à donner un terme de production provenant de la couche limite, production qui ne figure pas dans le modèle actuellement. La position initiale des particules $\{x_i, i = 1, np\}$ a donc été choisie très proche du cylindre dans la zone de forts gradients de vitesse.

Afin d'étudier l'influence des différents termes du modèle, on a observé l'influence du terme $R_V = \epsilon^{5/3} \beta^2 \nabla \cdot (\sqrt{q} \nabla u + \nabla u^T)$ par rapport au terme $R_T = q \beta \nabla a \nabla a^T$:

• Influence du niveau initial d'énergie q^0 avec viscosité turbulente

Pour un nombre de Reynolds laminaire Re et un pas de temps Δt

$Re = 500$, $\Delta t = 0.1$ $np =$ nombre de particules initiales
on a étudié le modèle complet pour les différents niveaux d'énergie suivant:

- a. $q^0 = 0.1$ $np = 2$
- b. $q^0 = 1.$ $np = 2$
- c. $q^0 = 10.$ $np = 2$ amortissement vers une solution symétrique

Sur la figure 21, on compare pour Navier-Stokes et le modèle MPP :
- coefficient de trainée du cylindre

On constate l'influence du niveau d'énergie q^0 sur l'amplitude du coefficient de trainée, qui diminue par la viscosité introduite par le modèle MPP. Il y a aussi augmentation de la période du décollement des tourbillons alternés. Cependant si on augmente le niveau q^0 on introduit trop de viscosité et ainsi l'écoulement retrouve la symétrie après la disparition des allées de Karman. La figure 22 représente les lignes d'émission des particules pour un niveau $q^0 = 0.1$.

• Influence du niveau initial d'énergie q^0 sans viscosité turbulente

De même que précédemment, mais sans prendre en compte le terme R_V de viscosité turbulente, on a étudié le modèle avec:

$Re = 500$, $\Delta t = 0.1$ $np =$ nombre de particules initiales

- a. $q^0 = 0.$ (Navier - Stokes)
- b. $q^0 = 0.1$ $np = 2$
- c. $q^0 = 1.$ $np = 2$
- d. $q^0 = 10.$ $np = 20$ explosion

Sur la figure 23 on compare le coefficient de trainée pour Navier-Stokes et le modèle MPP sans viscosité turbulente. La modification n'est pas sensible.

Sur la figure 24 on compare le coefficient de trainée pour le modèle MPP avec et sans viscosité turbulente pour un même niveau q^0 . Ainsi on constate le rôle prépondérant de R_V par rapport à R_T (pour $q^0 \leq 1.$ $R_T \simeq 0.1 R_V$) que l'on retrouve sur les quantités des tableaux 1 et 2. Cependant en augmentant q^0 , on observe une explosion du code de calcul pour MPP sans R_V et un amortissement au cours du temps pour MPP avec R_V .

Le tableau 0 donne une correspondance entre q^0 (niveau d'énergie initiale portée par chaque particule étant de $\epsilon^{2/3} q^0$) et le taux de turbulence i initial 'injectée' qui proviendrait de la couche limite.

Tableau 0.
niveaux d'intensité turbulente i suivant q^0

$\epsilon \simeq 0.05$ (h_{min} de la triangulation)

q^0	0.1	1.	10.
$\sqrt{\epsilon^{2/3} q^0}$	0.12	0.38	1.182
i	8 %	25 %	78 %

Tableau 1.
quantités instantanées

	$\frac{1}{2} \int_{\Omega} q$	$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2$	$\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla u^2$	$\int_{\Omega} \nabla \cdot R_V u$	$\int_{\Omega} \nabla \cdot R_T u$
$q^0 = 0.$	0.0	80.4677	0.408	0.0	0.0
$q^0 = 0.1$	0.08182	80.26738	0.3369	0.03630	0.00127
$q^0 = 1.0$	0.87614	80.19421	0.3119	0.08797	0.01788
$q^0 = 10.$	8.10	79.25	0.359	0.275	0.0204

Tableau 2.
quantités moyennées dans le temps

	$\frac{1}{2} \int_{\Omega} q$	$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2$	$\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nabla u^2$	$\int_{\Omega} \nabla \cdot R_V u$	$\int_{\Omega} \nabla \cdot R_T u$
$q^0 = 0.$	0.0	75.98	0.173	0.0	0.0
$q^0 = 0.1$	0.06	76.02	0.1701	0.01750	-0.0002
$q^0 = 1.0$	0.621	76.14	0.1665	0.0505	0.0021
$q^0 = 10.$	5.02	76.46	0.162	0.159	-0.148

6. UN MODELE MIXTE MPP - $k - \epsilon$ et $k - \frac{k}{\epsilon} - MPP$.

Le modèle MPP démontre donc que l'hypothèse de Reynolds est incomplète:

le tenseur $\langle u' \otimes u' \rangle$ ne dépend pas que de ∇u , il dépend aussi de ∇a !

On a montré, en 2D, que le tenseur de Reynolds est de la forme:

$$\langle u' \otimes u' \rangle = \beta(k, \text{tr} \nabla a \nabla a^T) \nabla a \nabla a^T - \nu_T (\nabla u + \nabla u^T).$$

Comme ∇a est nul en régime stationnaire dans de nombreuses configurations géométriques, on comprend que l'hypothèse de Reynolds puisse-t-être assez bonne dans ces cas mais on peut avoir des doutes sur sa validité dans des écoulements fortement instationnaires comme les sillages. Ceci dit, la modélisation de ν_T obtenu par le modèle MPP est assez grossière (incapacité de prendre le nombre de Reynolds en $\epsilon^{-4/3}$ dans le développement asymptotique) et il faut reconnaître que le modèle $k - \epsilon$ prend mieux en compte les interactions à long terme type dissipation turbulente. On s'est donc orienté vers un modèle hybride en mélangeant le modèle MPP et le modèle $k - \epsilon$:

$$u_{,t} + (u \cdot \nabla)u + \nabla p + \nabla \cdot R = 0 \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\quad (113)$$

$$R = \beta(K, \text{tr} \nabla a \nabla a^T) \nabla a \nabla a^T - c_\mu \frac{K^2}{e} (\nabla u + \nabla u^T)$$

$$K_{,t} + u \nabla K + R : \nabla u - \nabla \cdot (c_\mu \frac{K^2}{e} \nabla K) + e = 0 \quad (114)$$

$$e_{,t} + u \nabla e - c_1 \frac{e}{K} R : \nabla u - \nabla \cdot (c_\epsilon \frac{K^2}{e} \nabla \epsilon) + c_2 \frac{e^2}{K} = 0 \quad (115)$$

avec $c_\mu = 0.09$, $c_1 = 0.0648$, $c_2 = 1.92$, $c_\epsilon = 0.07$ et $\beta(K, i) = \frac{K \beta_0}{(1+i)^2}$.

Moyennant une petite modification du terme de diffusion dans l'équation en K ce modèle mixte peut se réécrire d'une autre façon; on va construire l'énergie cinétique turbulente K comme produit kq de l'énergie cinétique MPP, q , et de l'énergie k responsable des effets de viscosité et de même construire le taux de dissipation visqueuse e comme produit de la dissipation visqueuse du modèle $k - \epsilon$ soit ϵ par l'énergie cinétique MPP q .

On obtient alors:

$$R = kq \frac{\beta_0}{(1+i)^2} \nabla a \nabla a^T - c_\mu \frac{qk^2}{\epsilon} (\nabla u + \nabla u^T)$$

mais maintenant k, ϵ sont donnés par les équations du modèle $k - \epsilon$

$$k_{,t} + u \nabla k - \frac{c_\mu}{2} \frac{k^2}{\epsilon} |\nabla u + \nabla u^T|^2 - \nabla \cdot (c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \nabla k) + \epsilon = 0 \quad (116)$$

$$\epsilon_{,t} + u \nabla \epsilon - c_1 k |\nabla u + \nabla u^T|^2 - \nabla \cdot (c_\epsilon \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \epsilon) + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \quad (117)$$

alors que q est donné par le modèle MPP:

$$q_{,t} + u \nabla q + q \frac{\beta_0}{(1+i)^2} \nabla a \nabla a^T : \nabla u = 0. \quad (118)$$

En effet, il suffit de former l'équation vérifiée par K en multipliant (116) par q et (118) par k et en sommant et celle vérifiée par e en multipliant (117) par q et (118) par ϵ et en sommant.

Si l'on fait rentrer les conditions initiales de $K = kq$ dans k on a vu que q prend la forme:

$$q(x, t) = q^0(a(x, t)) e^{\frac{2\beta_0}{(1+i)} - \frac{2\beta_0}{(1+i)}} \quad (119)$$

On peut choisir par exemple $q^0 = 1$. On résume le résultat obtenu dans la proposition suivante:

Proposition 1:

Au termes de diffusions près, le modèle mixte peut aussi se réécrire:

$$R = k \frac{\beta_0 e^{\frac{2\beta_0}{(1+i)} - \frac{2\beta_0}{(1+i)}}}{(1+i)^2} \nabla a \nabla a^T - c_\mu q \frac{k^2}{\epsilon} (\nabla u + \nabla u^T) \quad (120)$$

$$k_{,t} + u \nabla k - \frac{c_\mu}{2} \frac{k^2}{\epsilon} |\nabla u + \nabla u^T|^2 - \nabla \cdot (c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \nabla k) + \epsilon = 0 \quad (121)$$

$$\epsilon_{,t} + u \nabla \epsilon - c_1 k |\nabla u + \nabla u^T|^2 - \nabla \cdot (c_\epsilon \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \epsilon) + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} = 0 \quad (122)$$

avec

$$i = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 \quad (123)$$

et

$$a_{,t} + u \nabla a = 0, \quad a(x, 0) = x \quad (124)$$

6.1. Quelques propriétés du modèle mixte.

Proposition 2

Avec $c_\mu = c_\epsilon = 0$ et $\epsilon^0 = 0$ le modèle (120)-(124) redonne le modèle MPP.

Démonstration: Avec ces valeurs l'équation sur k se réduit à

$$k_{,t} + u \nabla k = 0 \quad (125)$$

c'est-à-dire au transport des conditions initiales. Le produit kq redonne donc la formule (111)

Proposition 3

Avec $\beta_0 = 0$ le modèle (120)-(124) redonne le modèle $k - \epsilon$.

Démonstration: évident d'après la définition de R.

6.2. Discrétisation en temps du modèle mixte: Principe.

La proposition (120)-(124) montre qu'un schéma numérique pour le modèle $k-\epsilon$ est également un schéma pour le modèle mixte dans la mesure où l'on utilise l'intégrale première de l'énergie q (100), à la différence près qu'il apparaît un second membre aux équations de Navier-Stokes (terme provenant de la partie MPP du tenseur de Reynolds).

Dans le cas où la formulation (113)-(115) est utilisée, on constate que le passage d'un algorithme pour le modèle $k-\epsilon$ à un algorithme pour le modèle mixte se fait en modifiant de plus les termes sources apparaissant dans les équations sur k et ϵ .

Cependant on remarque d'une façon générale qu'un algorithme stable pour le modèle $k-\epsilon$ reste stable dans le cas du modèle mixte, dans la mesure où les niveaux d'énergie initiale de q sont raisonnables.

Un premier schéma a été construit à partir de (SCHKE1) avec lequel nous avons simulé l'écoulement de Poiseuille plan ainsi que l'écoulement dans une cavité carrée avec jet. Il est à noter que dans ces cas d'écoulements stationnaires la différence avec les résultats obtenus à l'aide du modèle $k-\epsilon$ standard est négligeable. Pour la simulation de l'écoulement derrière un cylindre nous avons utilisé la version (SCHKE2). Les résultats obtenus sont détaillés dans la partie suivante.

6.3. Résultats numériques:

1. Ecoulement de Poiseuille.

Les caractéristiques physiques de l'écoulement, le maillage et les conditions aux limites et initiales sont les mêmes qu'en 3.6.2.

On se reportera aux figures 1,2,3 où l'on donne les sections d'énergie, de dissipation et de la première composante de la vitesse.

Ces figures donnant pour chaque quantité les résultats obtenus avec le modèle mixte, le modèle $k-\epsilon$ standard et les conditions en entrée montrent que le modèle mixte permet de retrouver les résultats expérimentaux. Il est à noter que dans ce cas d'écoulement stationnaire l'influence du terme dérivant du modèle MPP est pratiquement nulle.

2. Ecoulement derrière un cylindre.

Les caractéristiques physiques de l'écoulement, le maillage et les conditions aux limites et initiales sont les mêmes qu'en 3.6.4.

Le nombre de Reynolds est égal à 500.

Sur les figures 25 et 26 on trouvera la solution obtenue avec le modèle mixte $MPP/k-\epsilon$ à $t=30''$ (lignes iso-rotationnel et iso-énergie cinétique turbulente).

Une comparaison des figures 12 et 26 montre que le modèle $k-\epsilon$ diffuse plus que le modèle mixte, tandis que les figures 11 et 25 permettent d'observer

un léger décalage des tourbillons dans l'allée de Von-Karman qui avait déjà été observé par Bègue[1].

6.4. Un modèle mixte $k - \theta - MPP$.

De même qu'à partir du modèle $k - \epsilon$, il est possible de construire un modèle mixte $k - \theta - MPP$ à partir du modèle $k - \theta$, le tenseur de Reynolds prenant alors la forme:

$$R = \beta(k, tr \nabla a \nabla a^t) \nabla a \nabla a^t - c_\mu k \theta (\nabla u + \nabla u^t) \quad (126)$$

On notera que dans ce cas l'équation pour θ est inchangée.

6.5. Résultats numériques.

Ecoulement derrière un cylindre. Modèle mixte $k - \theta - MPP$, $Re=10000$

On présente sur les figures 27 et 28 les lignes de niveau du rotationnel et de l'énergie turbulente obtenues par ce modèle. On constate par rapport au modèle $k - \theta$ une légère diminution du niveau de l'énergie k et un retard des tourbillons toutefois moins important que celui observé entre les modèles $k - \epsilon$ et $k - \epsilon - MPP$, le phénomène visqueux étant plus important dans ce cas.

6.6. Comparaison des tenseurs de Reynolds MPP et $k - \epsilon$.

On représente sur la figure 29 les niveaux au cours du temps des tenseurs de Reynolds visqueux et MPP par leur normes $L^2(\Omega)$, dans le cas de l'écoulement derrière un cylindre au nombre de Reynolds de 10000 (voir 6.5.):

$$\|R_{k-\epsilon}\|_0 = \left(\int_{\Omega} |c_\mu k \theta \nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|R_{MPP}\|_0 = \left(\int_{\Omega} |k \frac{\beta_0}{(1+i)^2} \nabla a \nabla a^T|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

On constate en moyenne que :

$$\|R_{k-\epsilon}\|_0 = 5 \|R_{MPP}\|_0$$

ce qui prouve une prédominance des effets visqueux provenant du modèle $k - \epsilon$.

Ceci nous a conduit à envisager une simulation de ce modèle en utilisant une méthode couplée éléments finis - particules que nous détaillons maintenant.

6.7. Simulation de l'écoulement derrière un cylindre à l'aide du modèle $k - \theta - MPP$ par une méthode couplée éléments finis - particules.

Une des particularités du modèle MPP par rapport aux modèles de type viscosité turbulente est la génération de bouffées d'énergie turbulente dans le sillage (Bègue [1]). De ce fait une méthode particulière semble très bien adaptée.

Nous avons donc construit un algorithme basé sur le système d'équations suivant (analogue du système (120)-(124)):

$$R = kq \frac{\beta_0}{(1+i)^2} \nabla a \nabla a^T - c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} (\nabla u + \nabla u^T)$$

$$i = \sum_{ij} a_{i,j}^2$$

$$q(x, t) = q^0(a(x, t)) e^{\frac{2\beta_0}{(n+1)} - \frac{2\theta_0}{(1+i)}} \quad (127)$$

$$k_{,t} + u \nabla k - \frac{c_\mu}{2} k \theta |\nabla u + \nabla u^T|^2 - \nabla \cdot (c_\mu k \theta \nabla k) + \frac{k}{\theta} = 0 \quad (128)$$

$$D_t \theta = \theta |\theta| E(c_\mu - 2c_1) + c_\theta \nabla \cdot (k \theta \nabla \theta) - 1 + c_2 \quad (129)$$

dans lequel la quantité q est représentée par une somme de masse de Dirac (particules):

$$q = \sum_{i=1}^N q_i \delta(x - x_i)$$

où q_i est le poids de la particule i , et x_i sa position, tandis que k et θ sont classiquement discrétisés par une méthode d'éléments finis.

A noter que nous avons préféré transporter les gradients des coordonnées lagrangiennes $a(x, t)$ de manière à augmenter le degré de précision et à pouvoir utiliser l'identité $\det(\nabla a) = 1$, en effet: si on note $J = \det(\nabla a)$,

$$a_t + u \nabla a = 0 \quad a(x, 0) = x$$

entraîne que:

$$J_t + u \nabla J = 0 \quad J(x, 0) = 1$$

d'où $J(x, t) = 1$ puisque $\nabla \cdot u = 0$

Remarque:

Cette identité pouvant être altérée par les erreurs d'interpolation, on est conduit à renormaliser ∇a à chaque pas de temps.

Nous donnons maintenant l'algorithme utilisé: on suppose k^n, u^n, θ^n, q^n connus et on calcule:

$$\nu_t^n = c_\mu k^n \theta^n \quad (130)$$

$$Q^n = \frac{\theta^n}{2} |\nabla u^n + \nabla u^{nT}|^2 \quad (131)$$

Phase de convection:

$$\left(1 + \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_r(t, X^n(\tau)) d\tau\right) k^{n+\frac{1}{2}} - k^n o X^n(t^n) \quad (132)$$

$$= \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_k(t, X^n(\tau)) d\tau$$

$$\left(1 + \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_r(t, X^n(\tau)) d\tau\right) \theta^{n+\frac{1}{2}} - \theta^n o X^n(t^n) \quad (133)$$

$$= \int_{ndt}^{(n+1)dt} S_\theta(t, X^n(\tau)) d\tau$$

avec;

$$S_k = 2c_1 k^n Q^n - \frac{k^n}{\theta^n}$$

$$S_\theta = c_2 - 1$$

$$S_r = (2c_1 - c_\mu) Q^n$$

Phase de diffusion:

$$k^{n+1} - k^{n+\frac{1}{2}} - dt \nabla \cdot \left(\frac{\nu + \nu_t}{\sigma_k} \nabla k^{n+1} \right) = 0 \quad (134)$$

$$\theta^{n+1} - \theta^{n+\frac{1}{2}} - dt \nabla \cdot \left(\frac{\nu + \nu_t}{\sigma_\theta} \nabla \theta^{n+1} \right) = 0 \quad (135)$$

+ conditions aux limites sur k^{n+1} et θ^{n+1}

$$(\nabla a)^{n+1} = (\nabla a^n o X^n) \cdot (I - \nabla u^n dt)$$

. Pour chaque particule de poids q_i^n et de position x_i^n :

$$x_i^{n+1} = X^{n+1}(x_i^n)$$

$$q_i^{n+1} = q_i^n e^{\frac{2\beta_0}{(1+i^{n+1})} - \frac{2\beta_0}{(1+i^n)}}$$

. Projection de l'énergie turbulente MPP sur le maillage :

$$(q, v_h) = \left(\sum_{i=1}^N q_i^{n+1} \delta(x - x_i^{n+1}), v_h \right) \quad \forall v_h \in V_h$$

. Résolution du problème en u^{n+1}, p^{n+1} :

$$u^{n+1} - dt\nu\Delta u^{n+1} + dt\nabla p = -dt\nabla \cdot (kq \frac{\beta_0}{(1+i)^2} \nabla a \nabla a^T) + u^n \circ X^n$$

$$\nabla \cdot u^{n+1} = 0$$

où $X^{n+1}(x)$ est la position à l'instant $(n+1)dt$ de la particule qui à l'instant $n dt$ se trouve en x .

Résultats numériques:

Nous donnons sur les figure 30, 31, 32 les lignes de niveau du rotationnel, de l'énergie cinétique turbulente k et du produit de l'énergie turbulente MPP q par k , dans le cas de l'écoulement derrière un cylindre décrit en 3.6.4. à Reynolds 10000.

Sur la figure 33 on donne les lignes d'émission des particules pondérées par leur poids.

Remerciements

Ce travail a été effectué dans le cadre du contrat DRET 86/032.

Références

- [1] C. Bègue: Thèse de 3^{ième} cycle. Paris 6, 1983.
- [2] C. Bègue et al.: Current progress on the numerical simulation of detached flows around airplanes. Rapport de recherche INRIA 778, 1987.
- [3] J.P. Benqué, O. Daubert, J. Goussebaïle, H. Haugel: Splitting up techniques for computations of industrial flows. In *Vistas in applied mathematics*. A.V. Balakrishnan ed. Optimization Software inc. Springer, 1986.
- [4] P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal: *De l'ordre dans le chaos*. Hermann 1984.
- [5] C. Bernardi, G. Raugel: A conforming finite element method for the time-dependant Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.* **22**, 455-473, 1985.
- [6] M.O. Bristeau-R. Glowinski- O. Pironneau-J. Periaux-P. Perrier: On the numerical solution of nonlinear problems of fluid mech. by least squares. *Comp. Meth. in Appl. Mech.* Vol 17/18 March 1979.
- [7] T. Chacon, O. Pironneau: On the mathematical foundations of the $k - \epsilon$ model. In *Vistas in applied mathematics*. A.V. Balakrishnan ed. Optimization Software inc. Springer, 1986.
- [8] P.G. Ciarlet: Lectures on three dimensional elasticity. Tata Institute lectures in Mathematics. Springer-Verlag, 1983.
- [9] T.J. Coakley: Turbulence modeling methods for the compressible Navier-Stokes equations. *AIAA 16th Fluid and plasma dynamics conference*. 1983, Danvers.
- [10] Y. Coeffe: Application of the $k - \epsilon$ models to the plane poiseuille flow. Rapport EDF-LNH HE 041/80.04, 1980.
- [11] G. Comte-Bellot: Ecoulement turbulent entre deux paroi planes. Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air. 1985.
- [12] P. Constantin, C. Fioas, O. Manley, R. Temam: Determining modes and fractal dimension of turbulent flows. *J. Fluid Mech.* **150**, 427-440, 1985.
- [13] J. Douglas, T.F Russel: Numerical methods for convection dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element method or finite differences method. *SIAM J. Numerical analysis*, **19**, 5 871-885, 1982.
- [14] C. Foias, R. Temam: Determination of the solution of the Navier-Stokes equations by a set of nodal values. *Math. Comput.*, **43**, 167, 117-133, 1984.
- [15] J.M. Ghidaglia: On the fractal dimension of attractors for viscous incompressible fluid flows. *SIAM J. Math. Anal.*, **17**, 1139-1157, 1986.
- [15] R. Glowinski: *Numerical Methods for Nonlinear Variational Methods*. Springer Series in Computational physics. 1984.
- [16] J. Goussebaïle, A. Jacomy: Application à la thermo-hydrolique des méthodes d'éclatement d'opérateur dans le cadre éléments finis: traitement du modèle $k - \epsilon$. Rapport EDF-LNH HE/41/85.11, 1985.
- [17] F. Hecht: Use of divergence free basis in finite elements methods. *RAIRO*. (To appear.)
- [18] D. Henry: Geometric theory of semilinear parabolic equations. *Lectures notes in mathematics*, 840. Springer Verlag.

- [19] B.E. Launder, D.B. Spalding: *Mathematical models of turbulence* . Academic press, 1972.
- [20] M. Lesieur: *Turbulence in fluids* . Martinus Nijhoff publishers, 1987.
- [21] J.L. Lions: *Quelques Methodes de Resolution des Problèmes aux limites Nonlineaires* . Dunod, 1968.
- [22] F. Ortegon Gallego: Tabulations of the closure tensors for the MPP model of turbulence. Rapport de recherche INRIA 757, 1987.
- [23] C. Parès: Un traitement faible en éléments finis de la condition de glissement sur une paroi pour les équations de Navier-Stokes. *CRAS Paris*, t 307 Série I,p 101,106, 1988.
- [24] O. Pironneau: On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.* **38** , 309-332, 1982.
- [25] D. Ruelle: Les attracteurs étranges.*La recherche* , 108, p132 1980.
- [26] D. Ruelle: Characteristic exponents for a viscous fluid subjected to time dependant forces.*Com. Math. Phys.* **93** , 285-300, 1984.
- [27] P.L. Viollet: On the modelling of turbulent heat and mass transfers for computations of buoyancy affected flows. *Proc. Int. Conf. Num. Meth. for Laminar and Turbulent Flows* . Venezia, 1981.
- [28] D. Maclaughin, G. Papanicolaou, O. Pironneau: Convection of Microstructures. *SIAM J. Appl. Math.* **45** , 5, p780-796.
- [29] T. Chacon: Oscillations due to the transport of micro-structures. *SIAM J. Appl. Math.* (to appear).
- [30] G. Comte-Bellot: Cours de turbulence. Ecole centrale de Lyon.
- [31] A.Soulaimani, M.Fortin, Y.Ouellet, G.Dhatt, F.Bertrand: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 62(1987)47-69. North Holland. Simple continuous pressure elements for two- and three-dimensional incompressible flows.
- [32] K.Kuwahara, S.Shiraya: AIAA-87-0461,AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting,Reno,Nevada.Patterns of Three-Dimensional Boundary Layer Separation.
- [33] J.Cahouet: Computational Fluid Dynamics. Lecture Series in Von Karman Institute, 1986-05,March 3,7,Rhodes-St-Genèse (Belgium).
- [34] Y.Saad ,M.H. Schultz: GMRES:a Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems, Research Report YALEU/DCS/RR-254, (1983).
- [35] B.Cantwell, D.Coles: *J.Fluid Mech.*(1983),vol 136 pp.321-374 An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular cylinder.
- [36] O. Pironneau: Méthodes des éléments finis pour les fluides. *Collection RMA*. MASSON (1988).
- [37] V. Girault, P.A. Raviart: Finite element methods for Navier-Stokes equations. Springer-Verlag.

Figure 1.
Ecoulement de Poiseuille $Re=57000$
Energie turbulente k

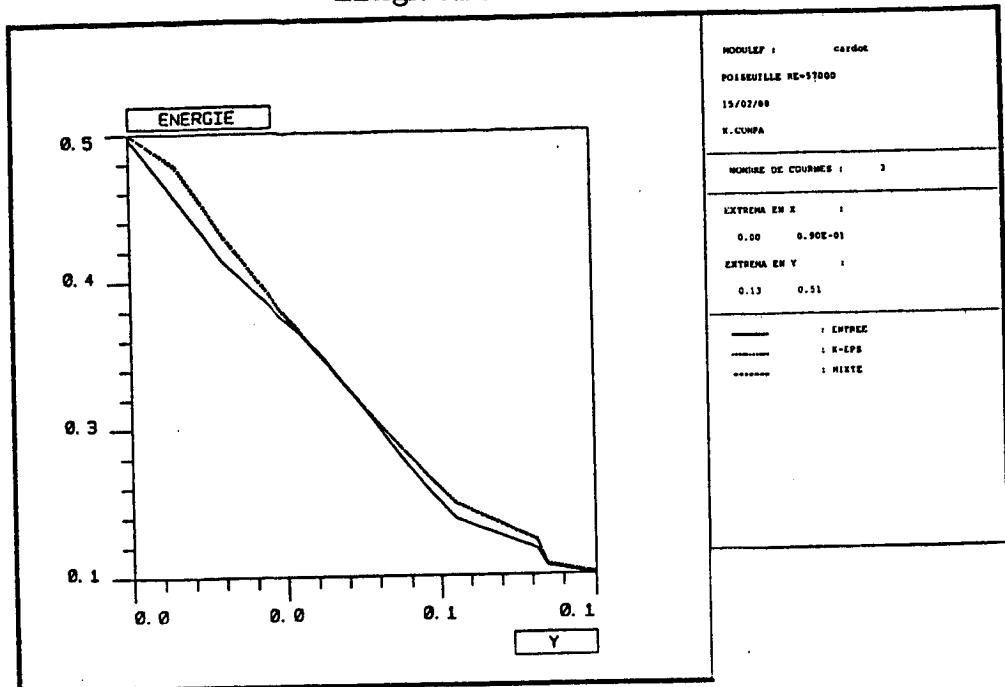


Figure 2.
Ecoulement de Poiseuille $Re=57000$
Dissipation ϵ

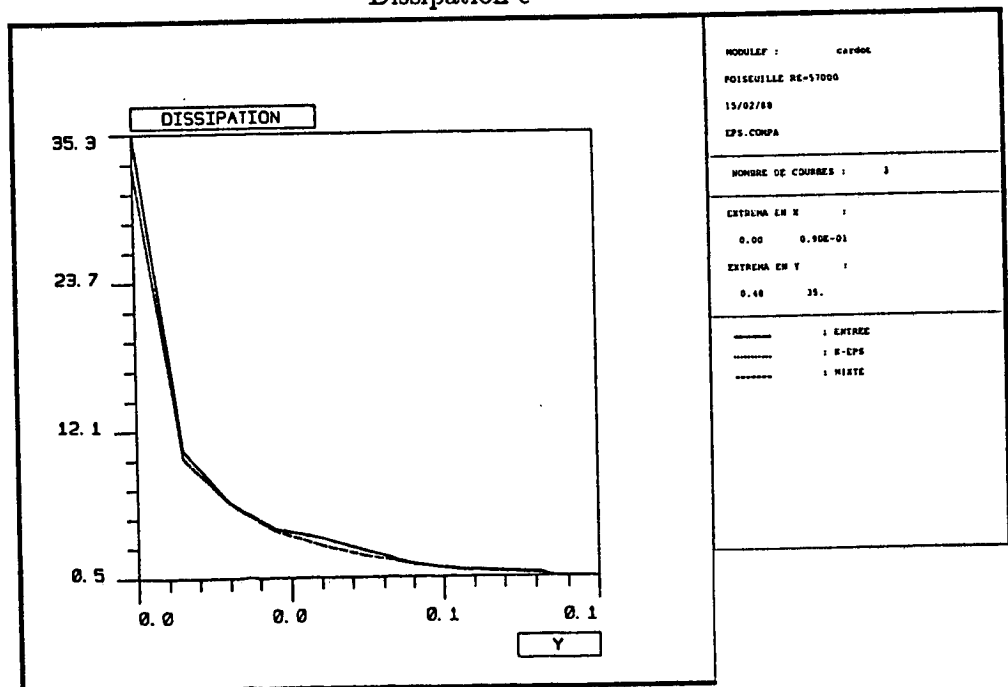


Figure 3.
Ecoulement de Poiseuille $Re=57000$
Vitesse U_1

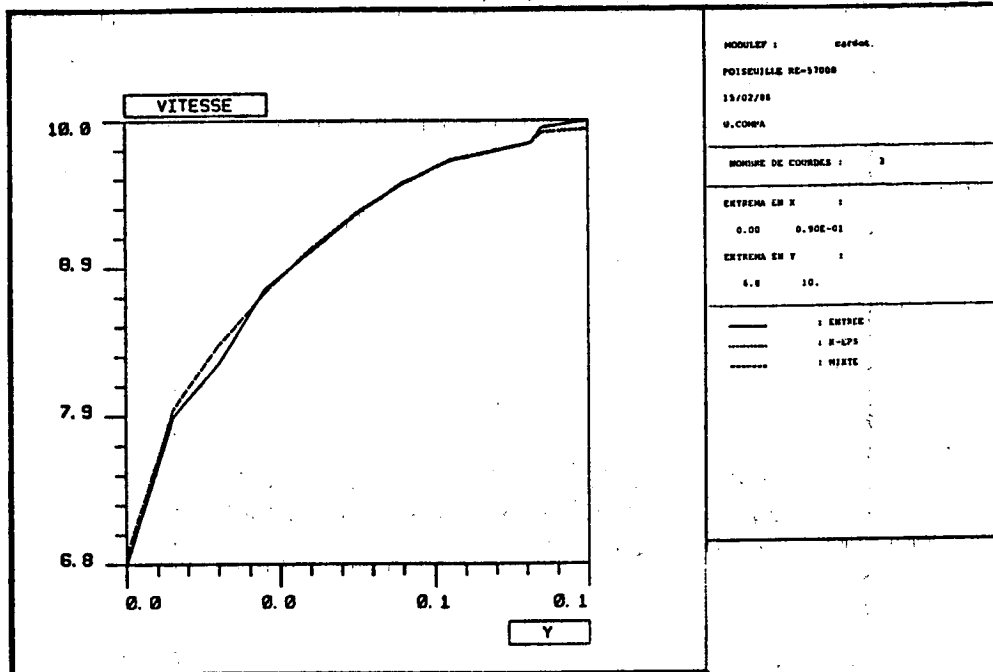


Figure 4.
Ecoulement de Poiseuille $Re=57000$
Courbes de convergence des itérations en temps

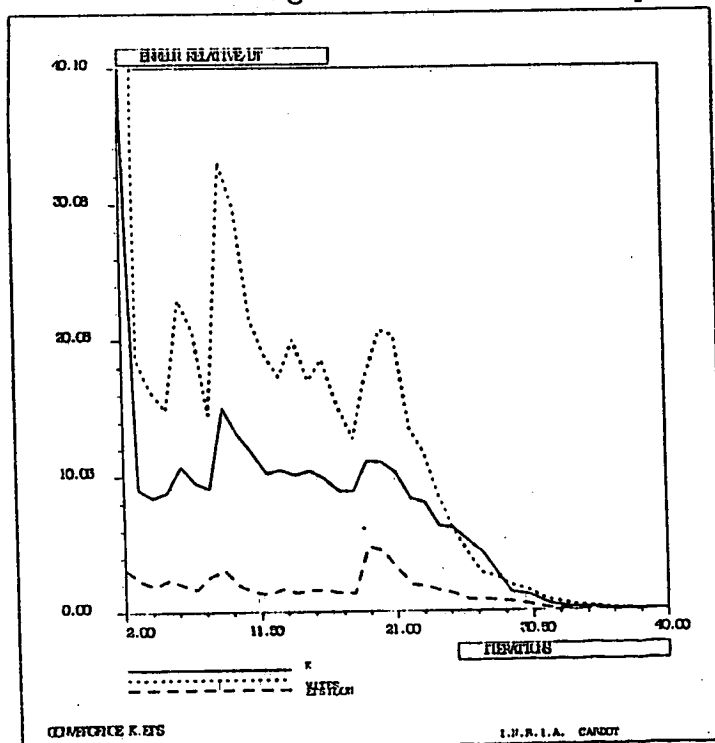


Figure 5.
 Cavité carrée avec jet $Re=100000$
 Vitesse U

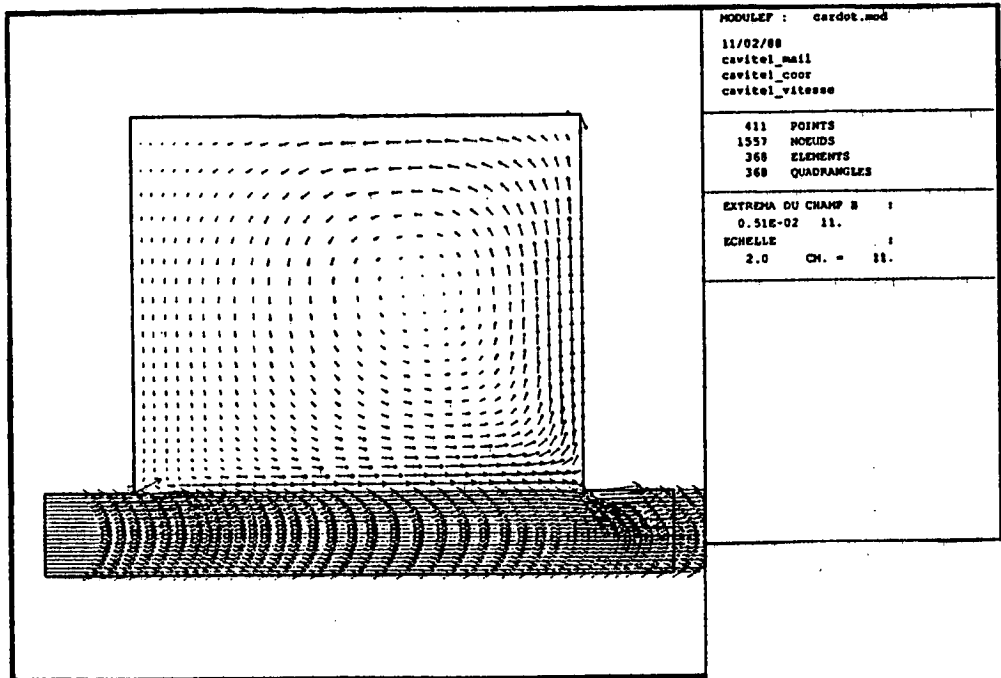


Figure 6.
 Cavité carrée avec jet $Re=100000$
 Dissipation ϵ

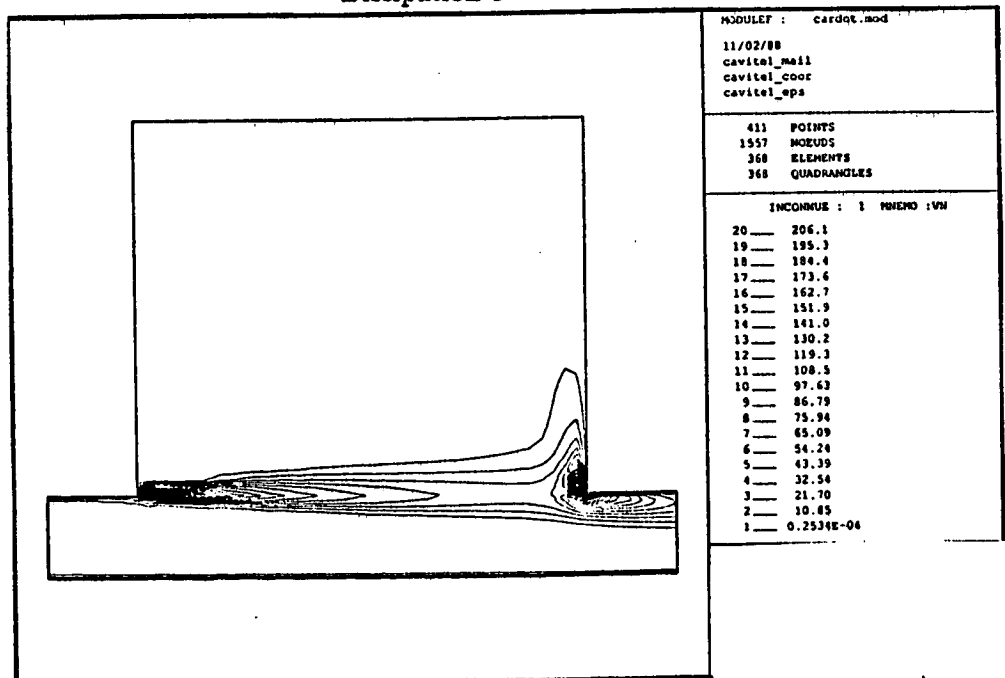


Figure 7.
Cavité carrée avec jet $Re=100000$
Energie turbulente k

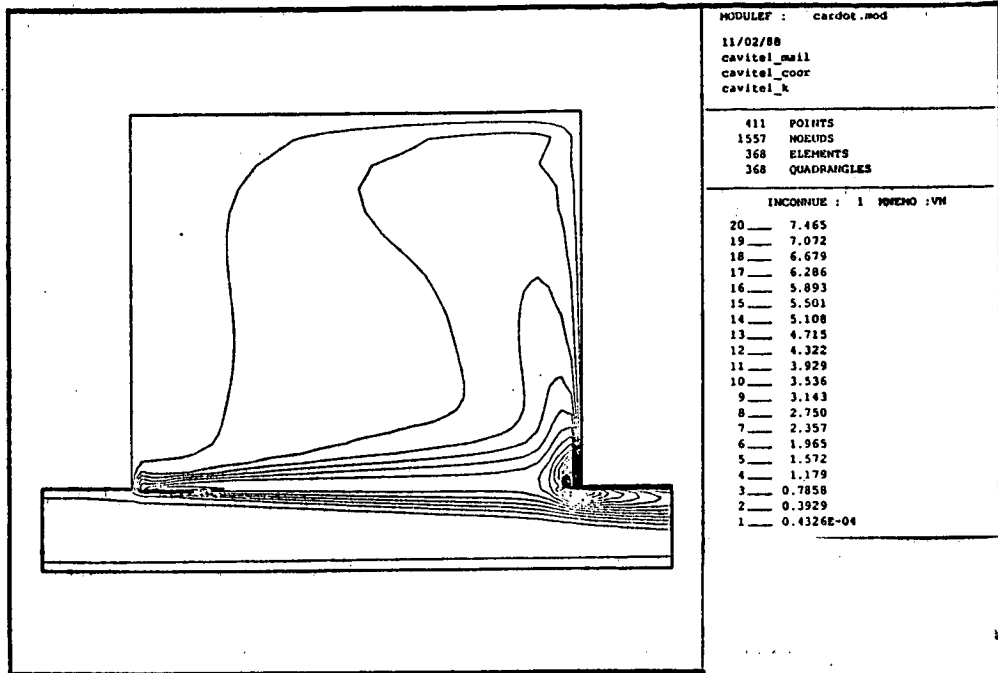


Figure 8.
Cavité carrée avec jet $Re=100000$
Viscosité turbulente ν_t

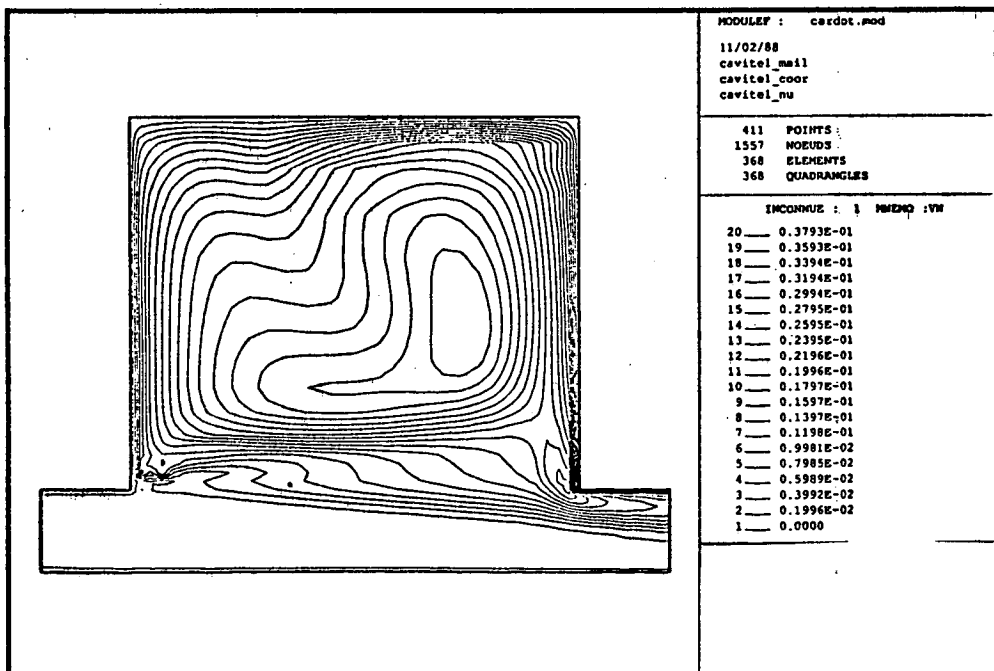


Figure 9.

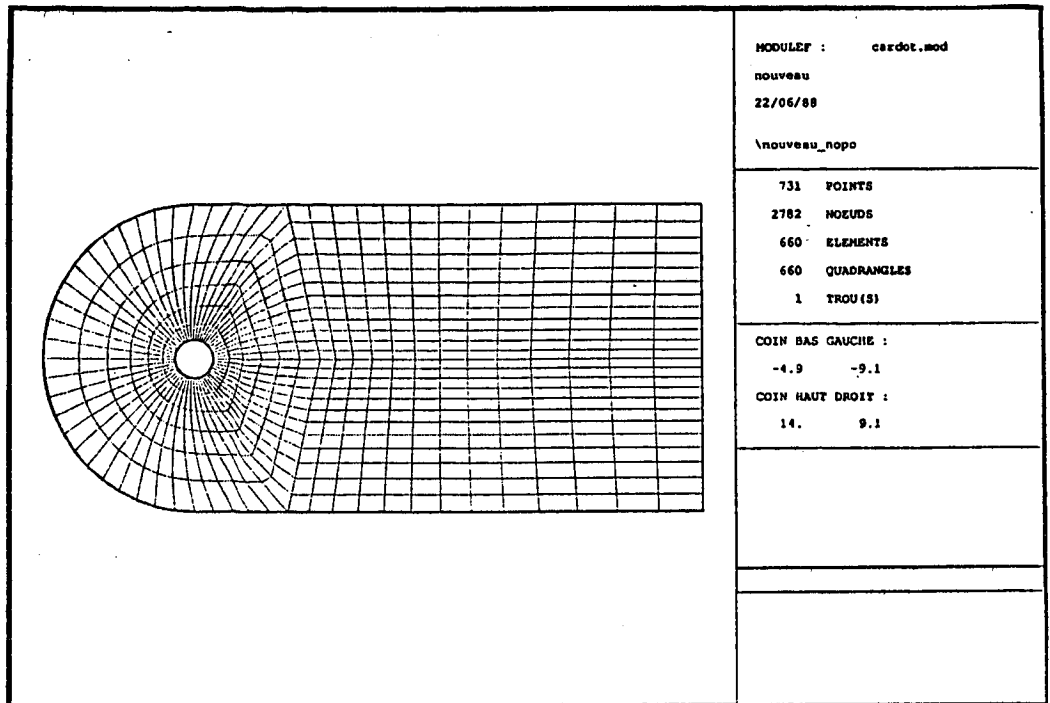


Figure 10.
Champ de vitesses initial.

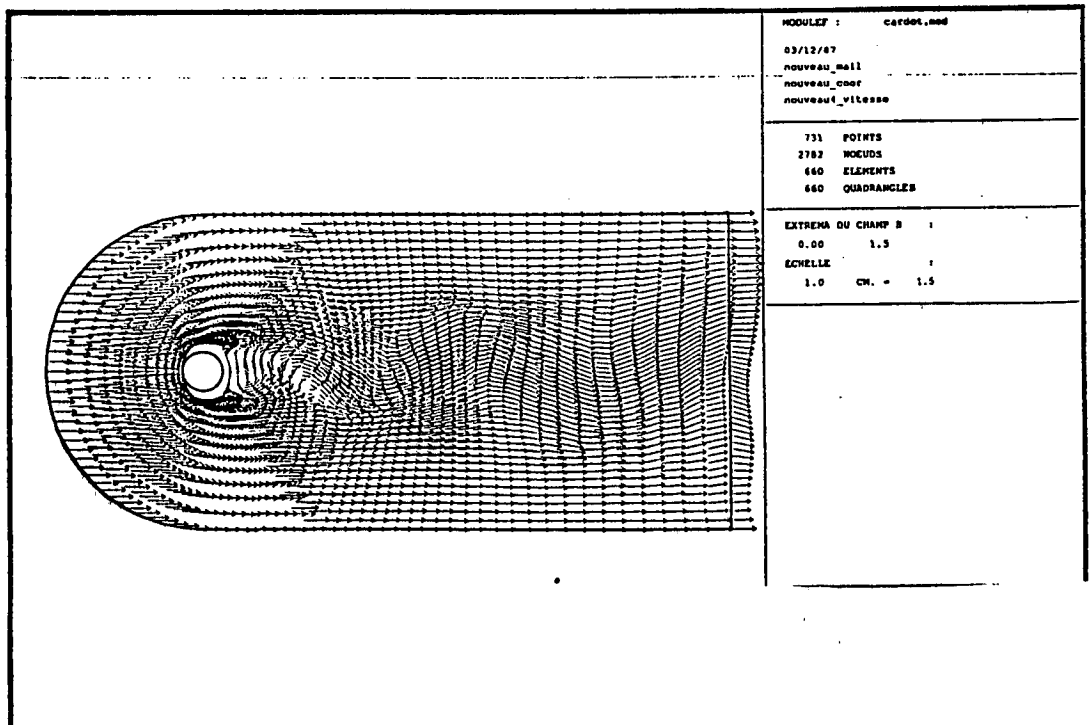


Figure 11.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=500$
 Lignes iso-rotationnel

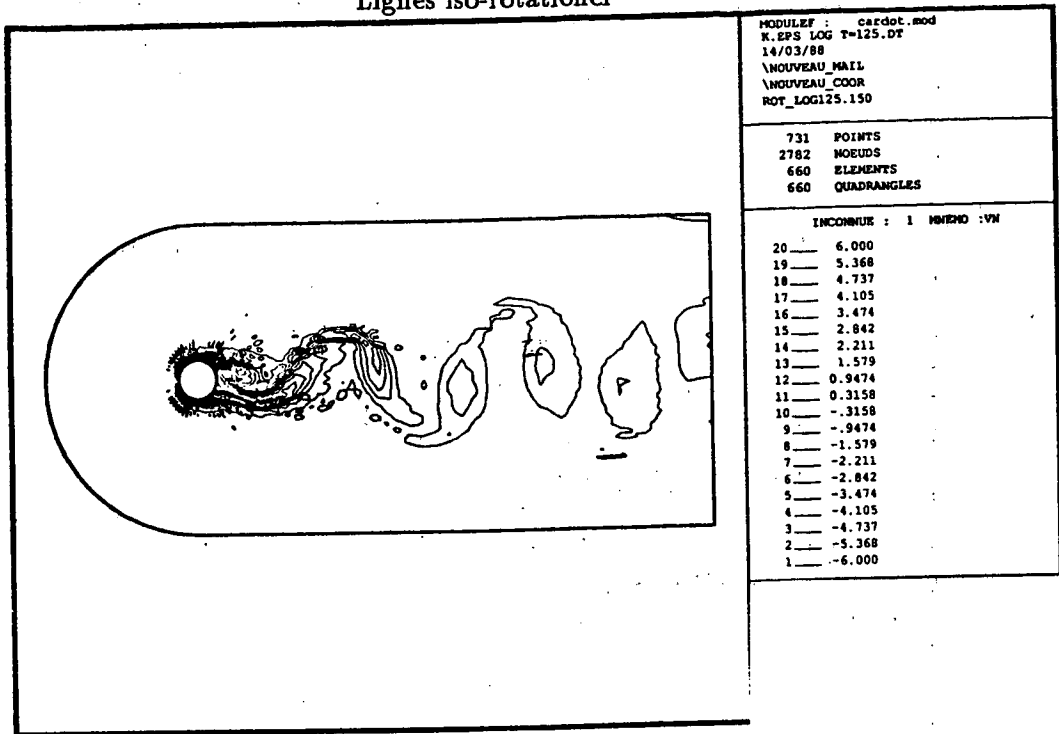


Figure 12.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=500$
 Energie turbulente k

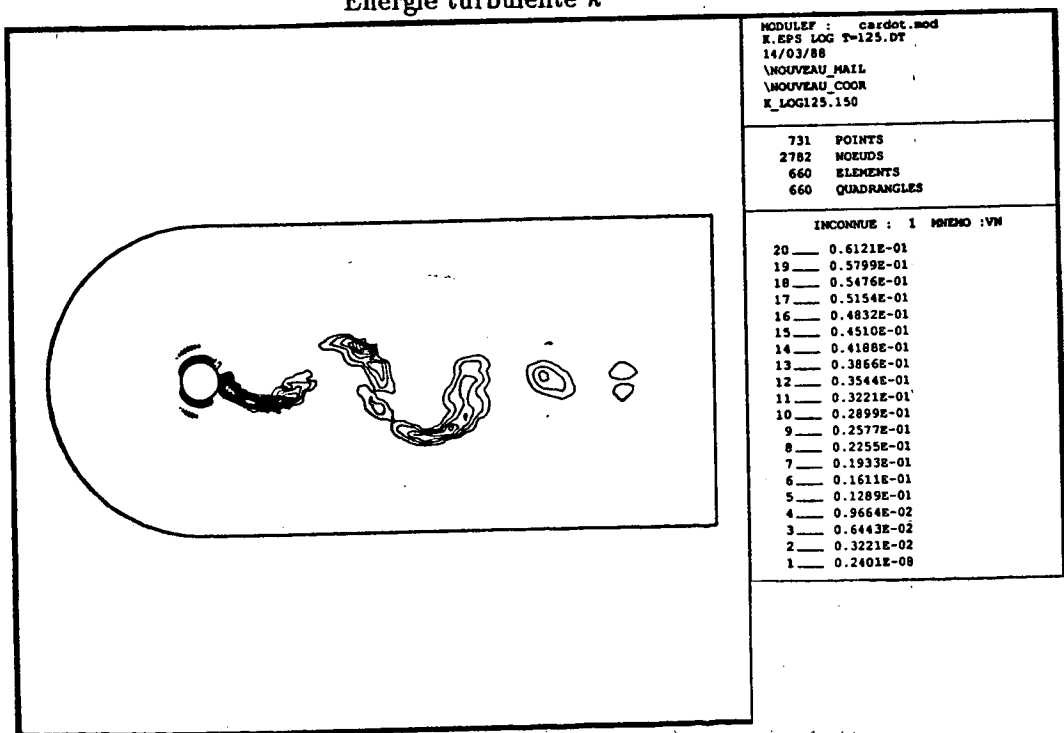


Figure 13.
 Cavité carrée avec jet $Re=100000$
 Champ de vitesse, Modèle $k - \theta$

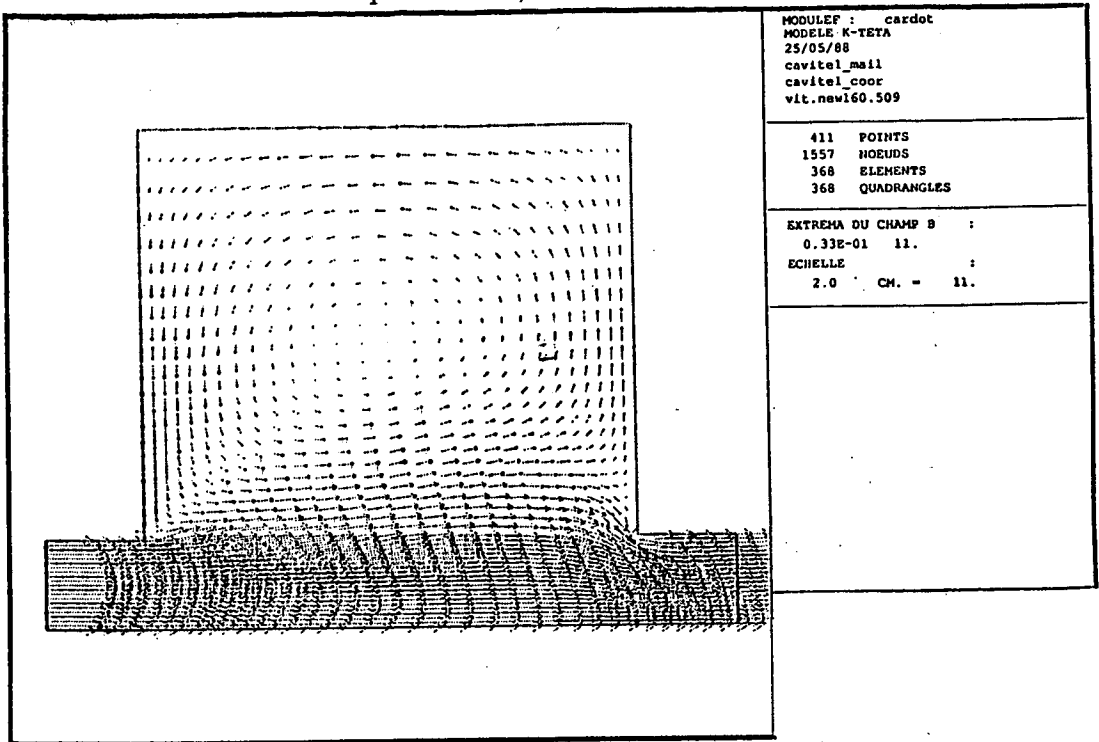


Figure 14.
 Cavité carrée avec jet $Re=100000$
 Energie turbulente k , Modèle $k - \theta$

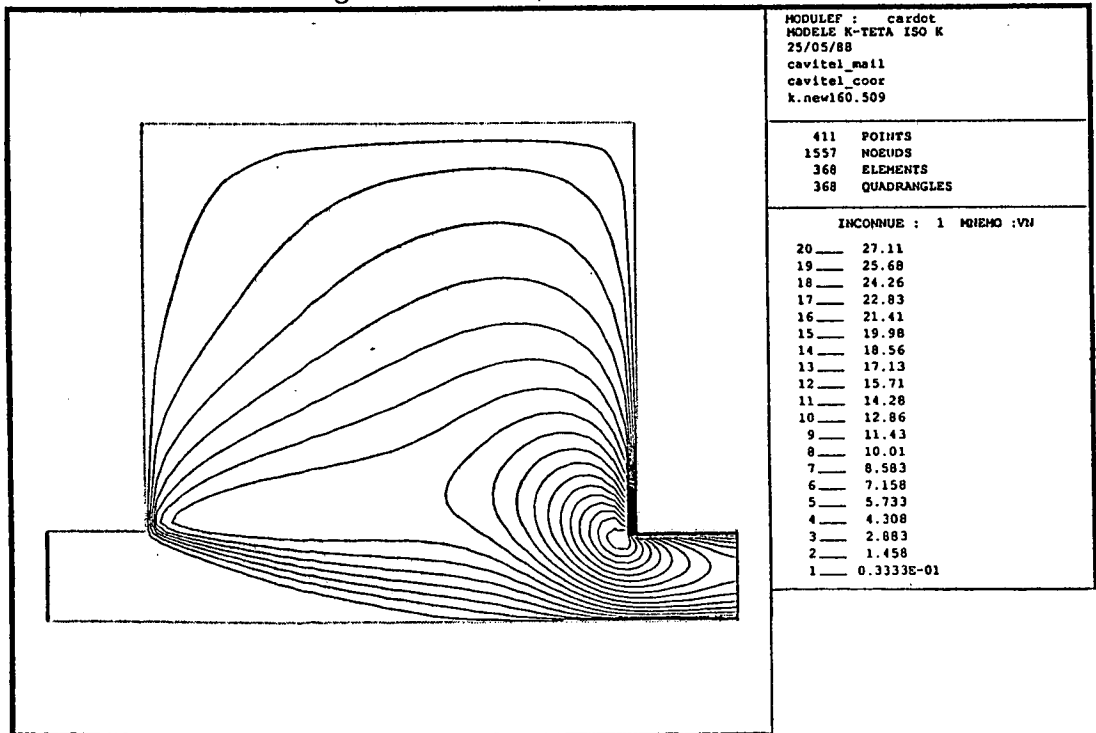


Figure 15.
Cavité carrée avec jet $Re=100000$
Isovaleurs de θ , Modèle $k - \theta$

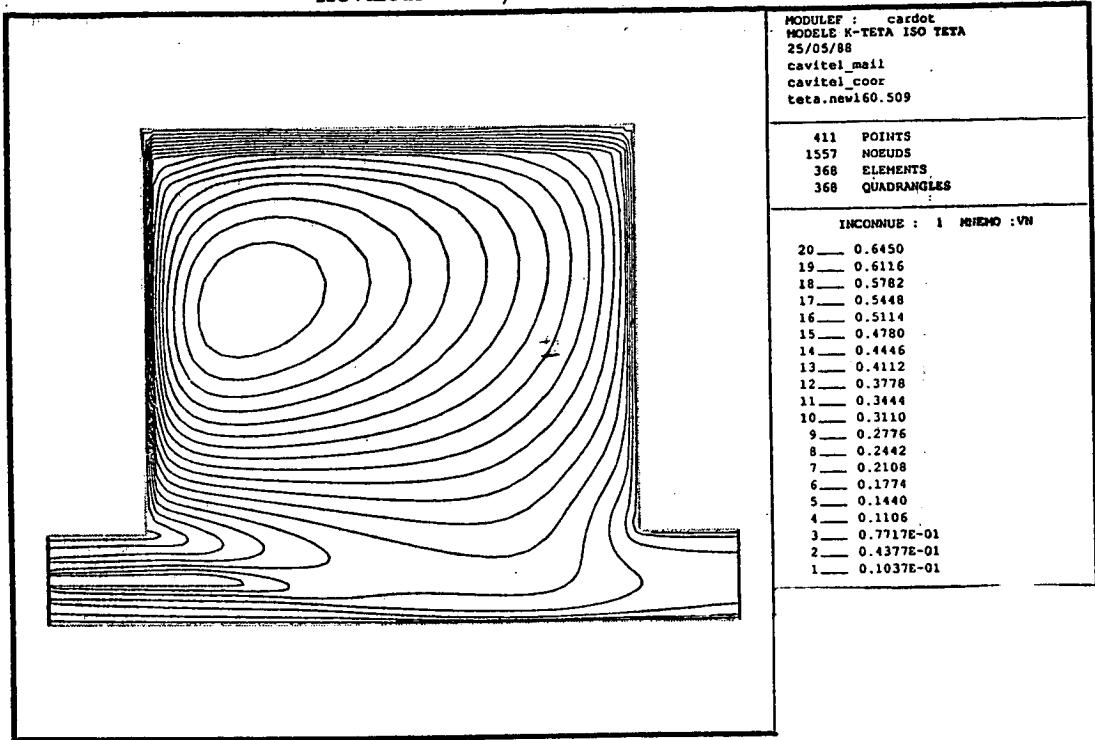


Figure 16.
Cavité carrée avec jet $Re=100000$
Viscosité turbulente, Modèle $k - \theta$

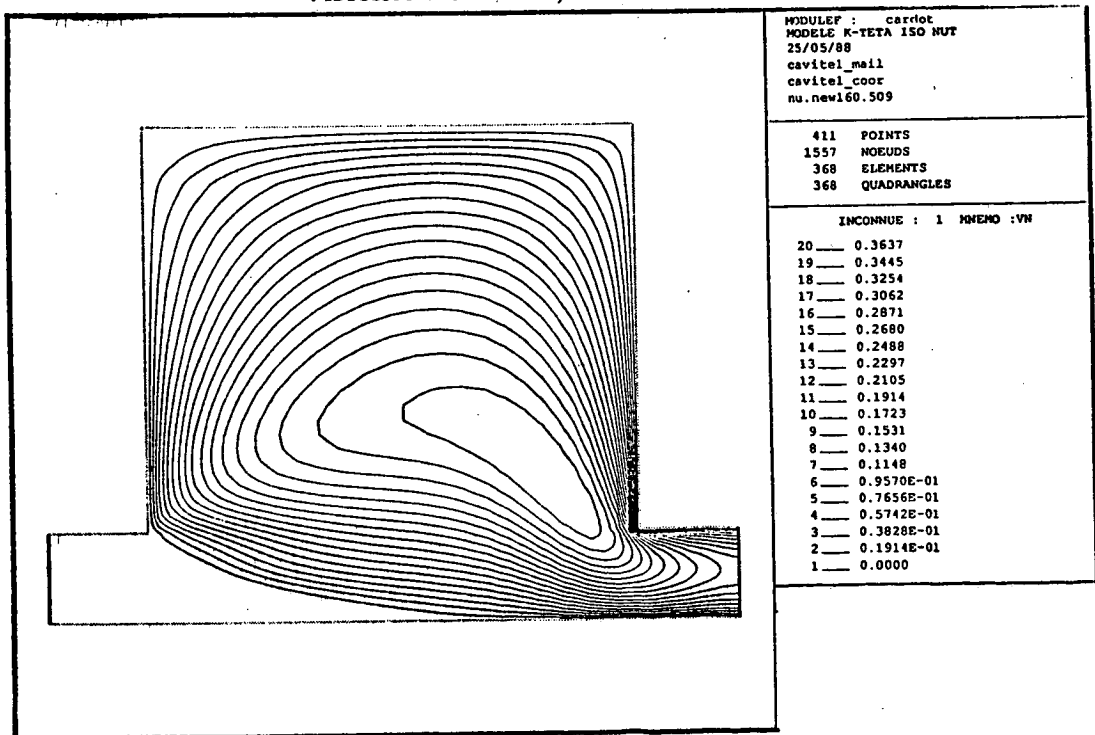


Figure 17.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=10000$
 Lignes iso-rotationnel, Modèle $k - \theta$

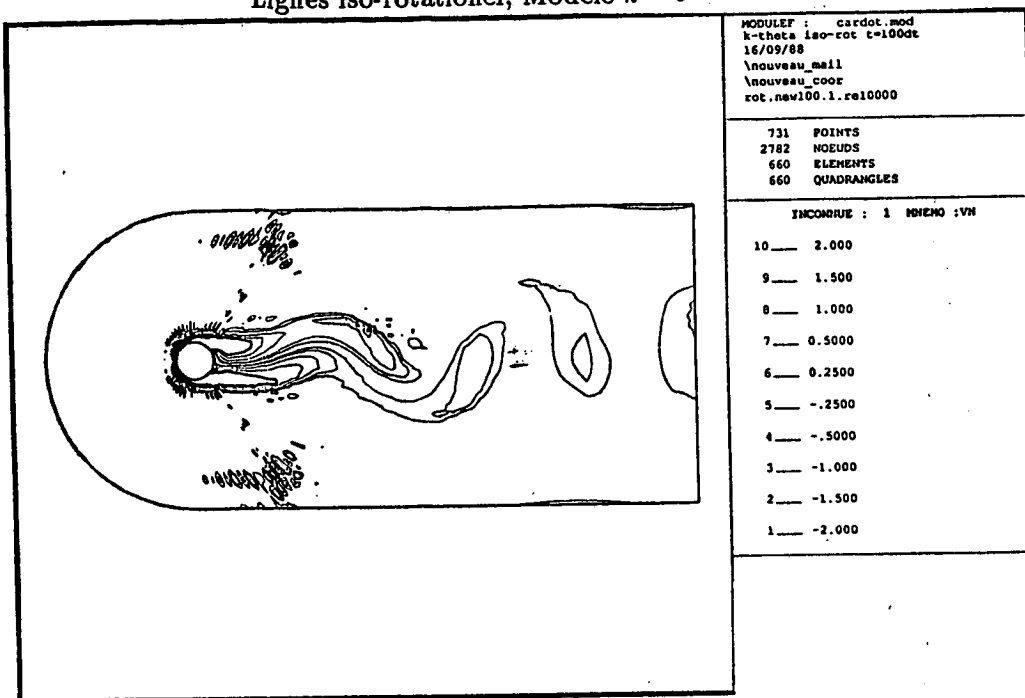


Figure 18.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=10000$
 Energie turbulente k , Modèle $k - \theta$

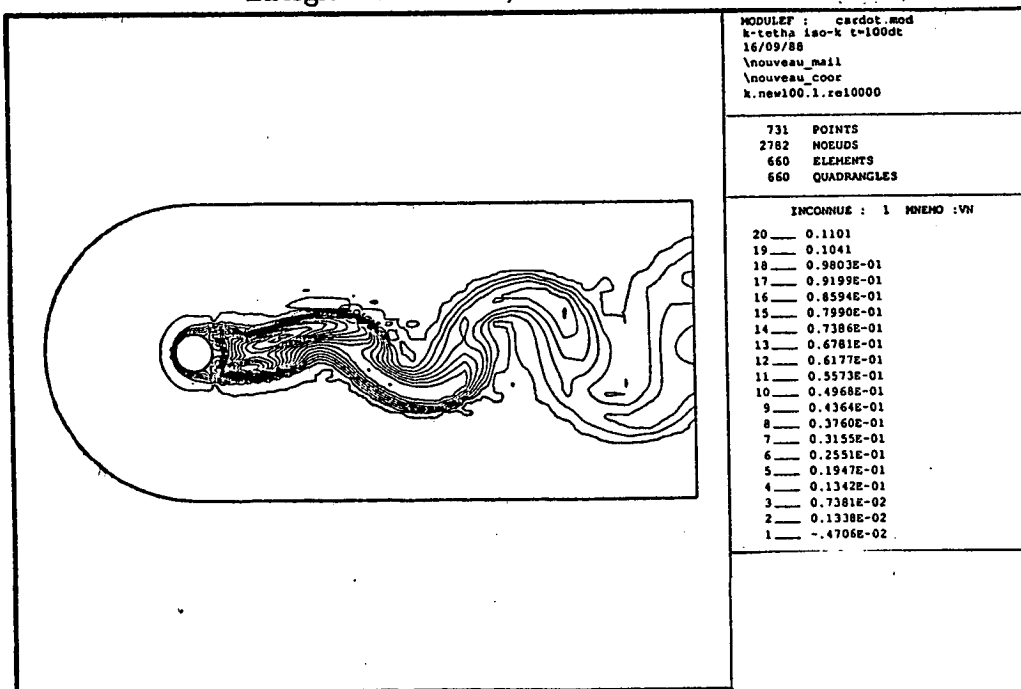


Figure 19.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=10000$
 Viscosité turbulente, Modèle $k - \theta$

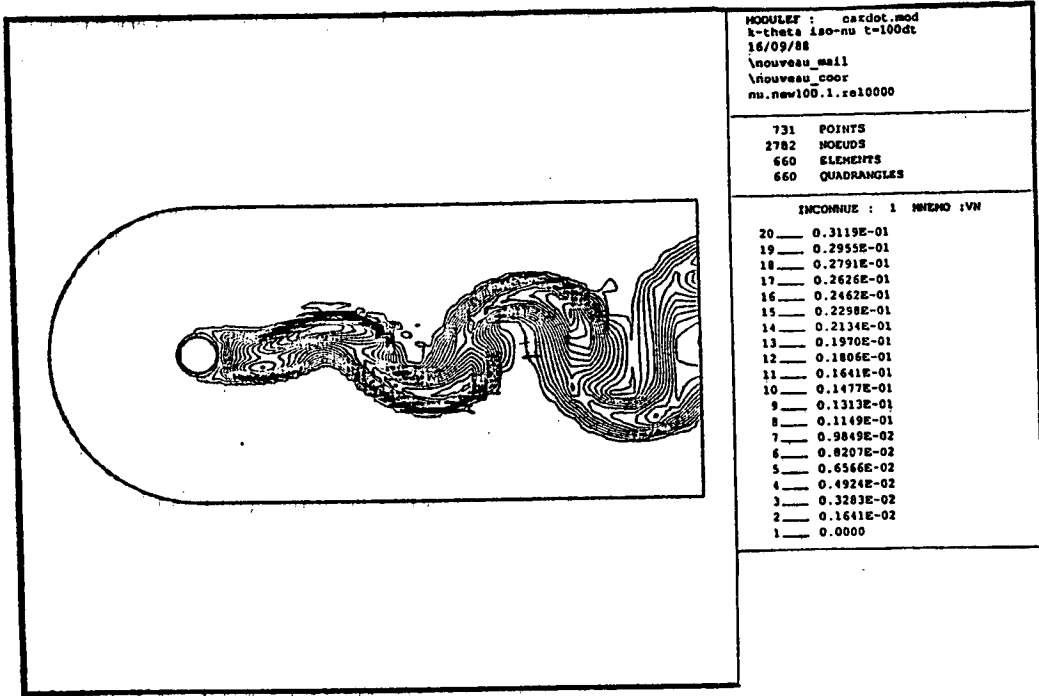


Figure 20.
Triangulation vitesse MPP.

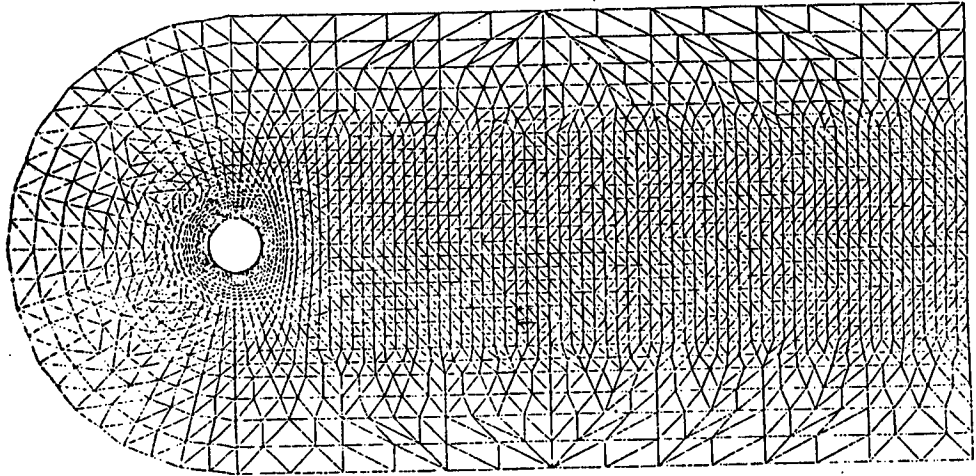


Figure 21.
Evolution du coefficient de traînée du cylindre en fonction du temps
pour différents niveaux d'énergie EP

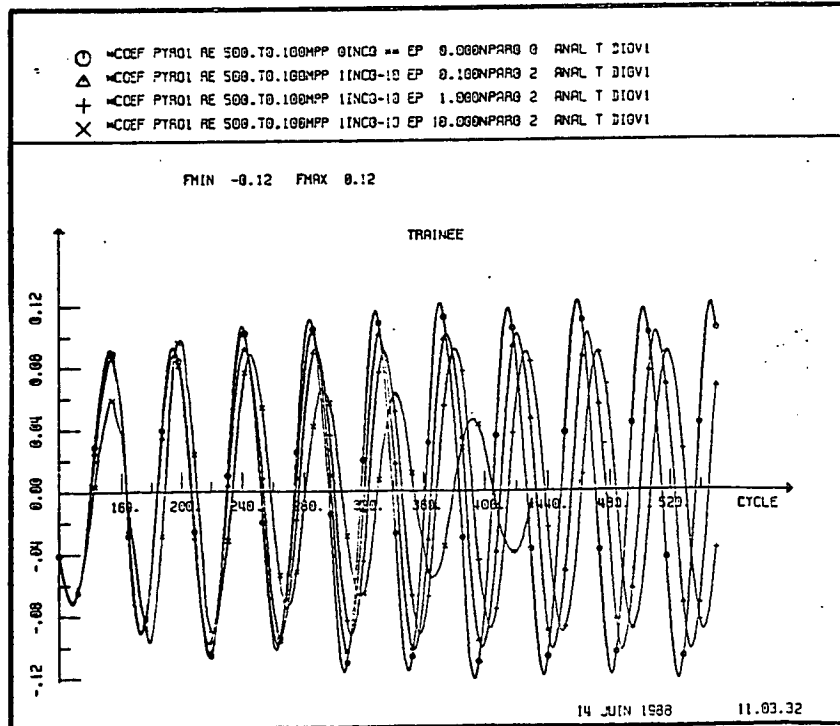


Figure 22.
Lignes d'émission. $q^0 = 0.1$

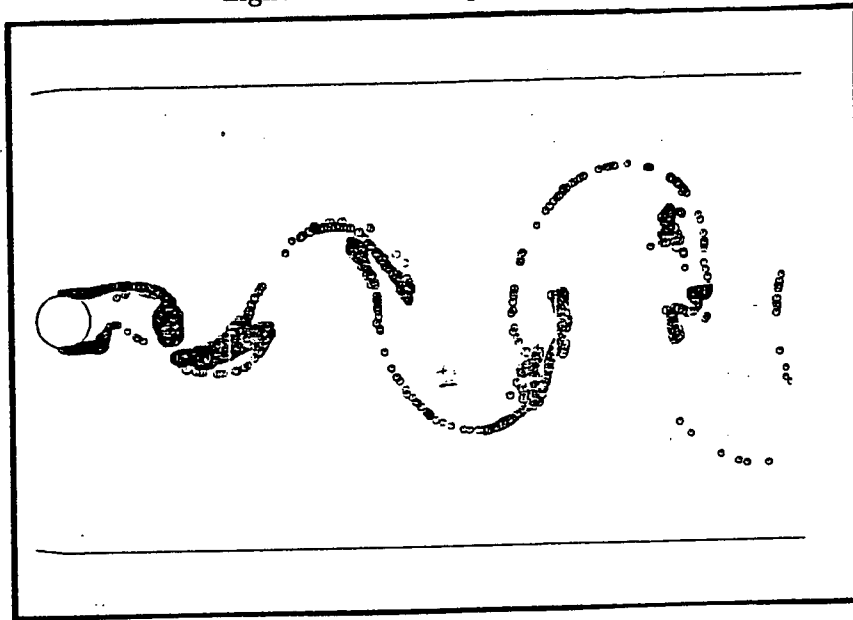


Figure 23.
Evolution du coefficient de traînée du cylindre en fonction du temps
pour différents niveaux d'énergie EP
sans viscosité turbulente.

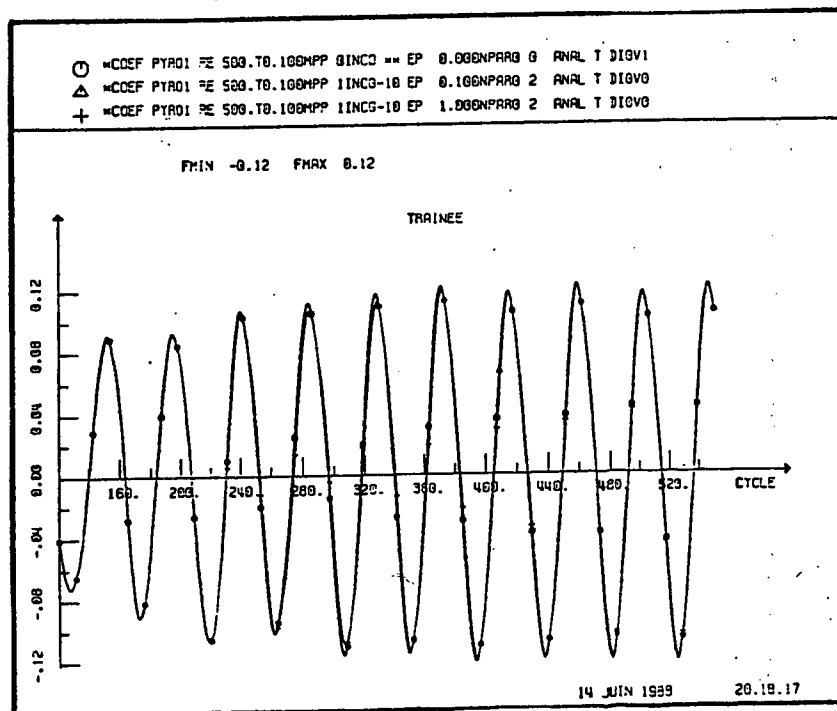


Figure 24.
 Evolution du coefficient de trainée du cylindre en fonction du temps
 pour $EP=1.$,
 avec ou sans viscosité turbulente.

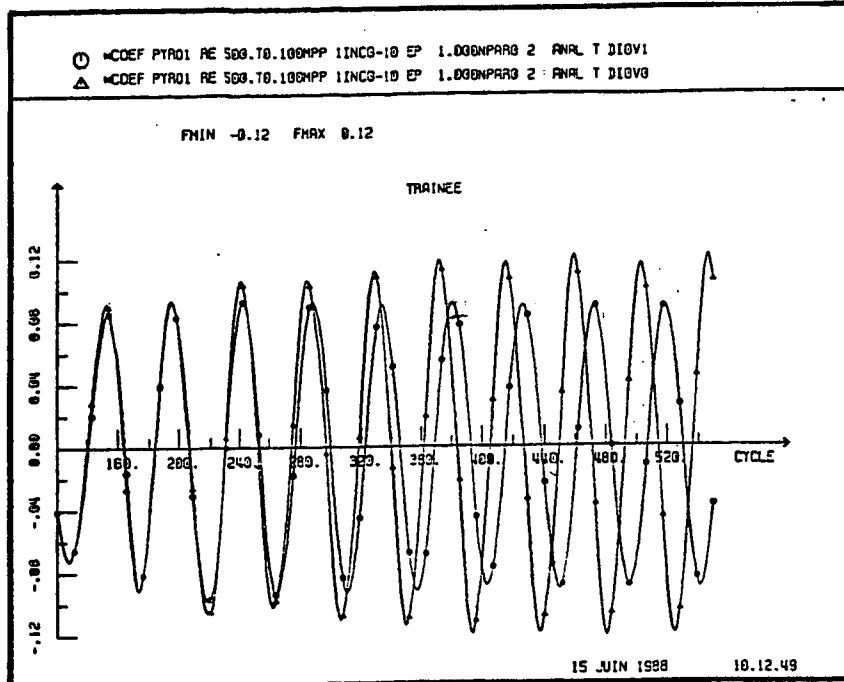


Figure 25.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=500$
 Lignes iso-rotationnel, Modèle mixte $k - \epsilon - MPP$

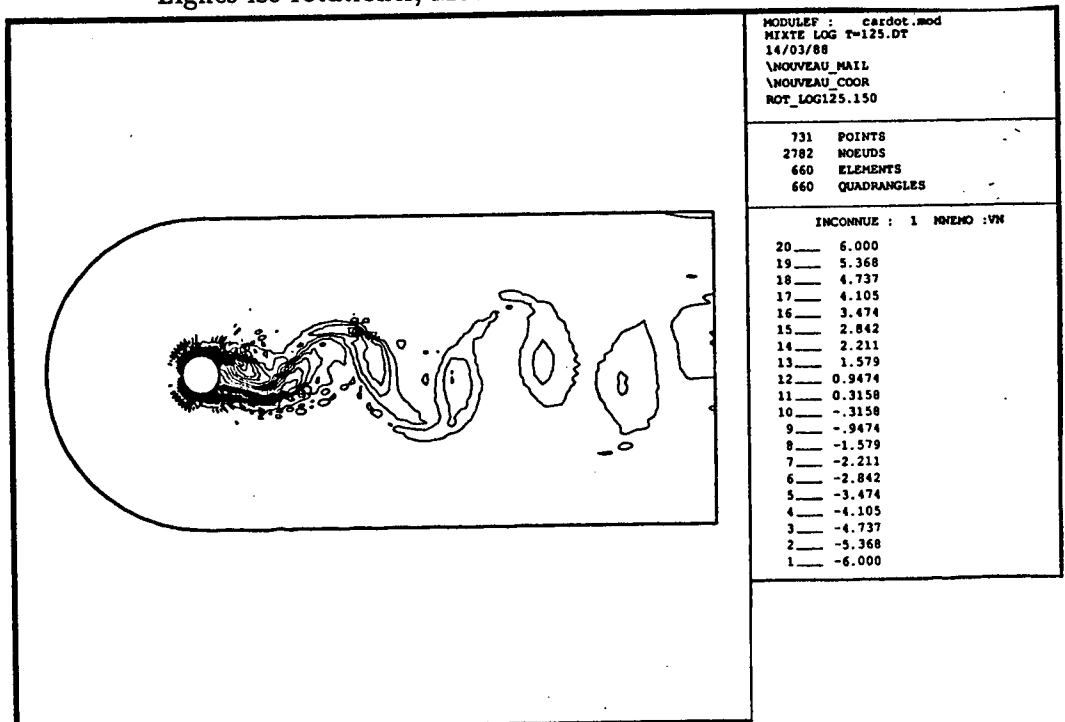


Figure 26.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=500$
 Energie turbulente k , Modèle mixte $k - \epsilon - MPP$

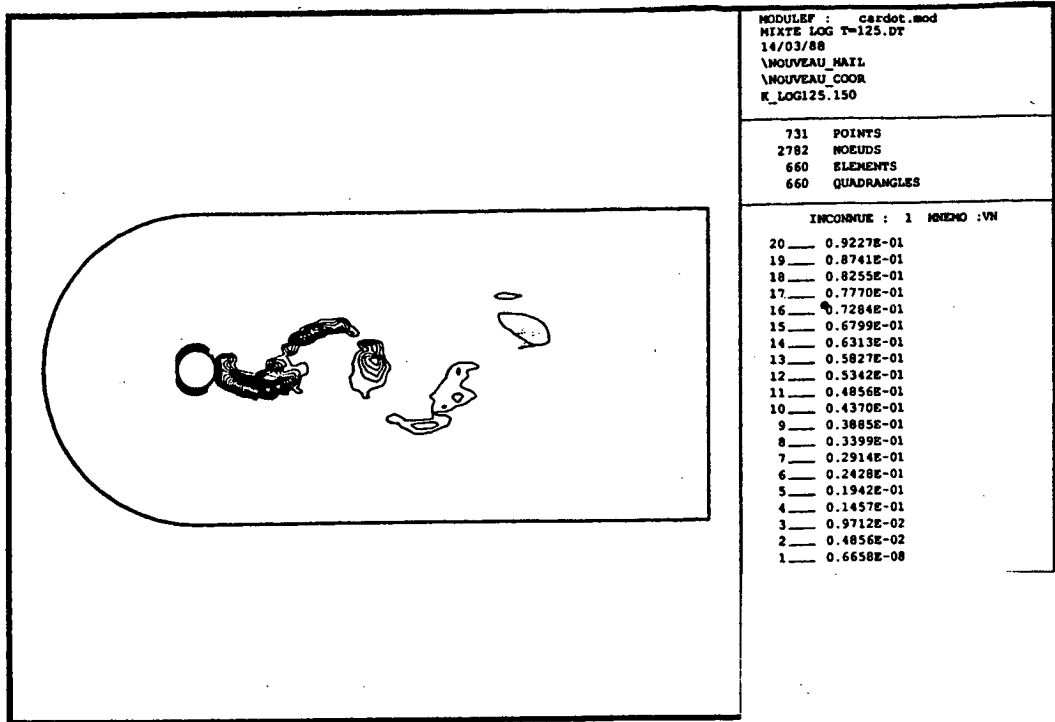


Figure 27.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=10000$
 Lignes iso-rotationnel, Modèle mixte $k - \theta - MPP$

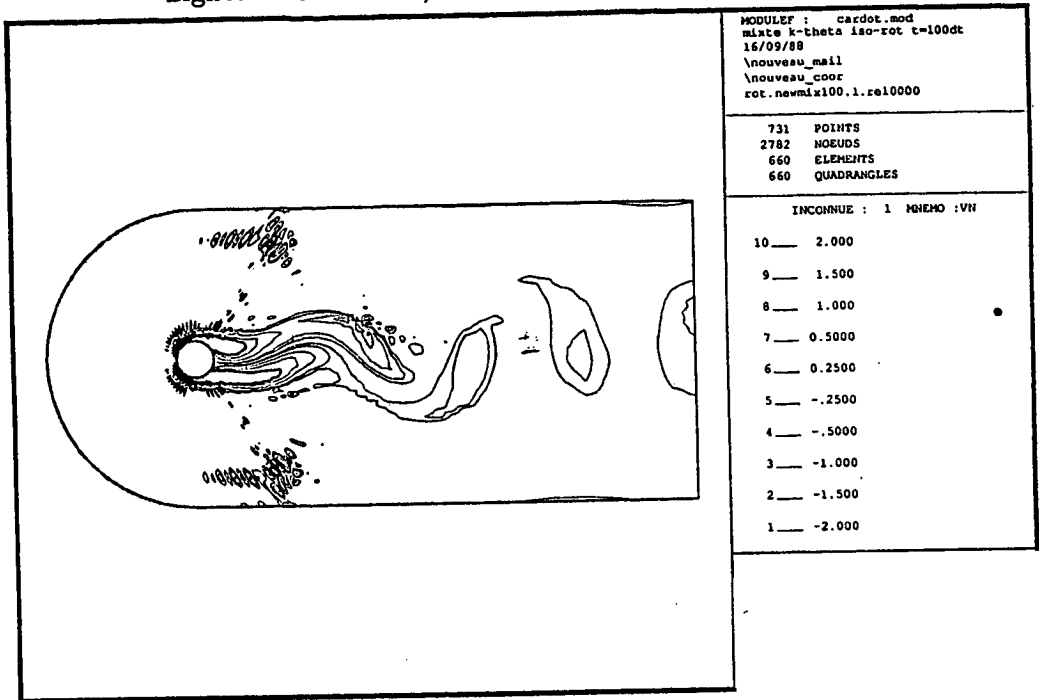


Figure 28.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=10000$
 Energie turbulente k , Modèle mixte $k - \theta - MPP$

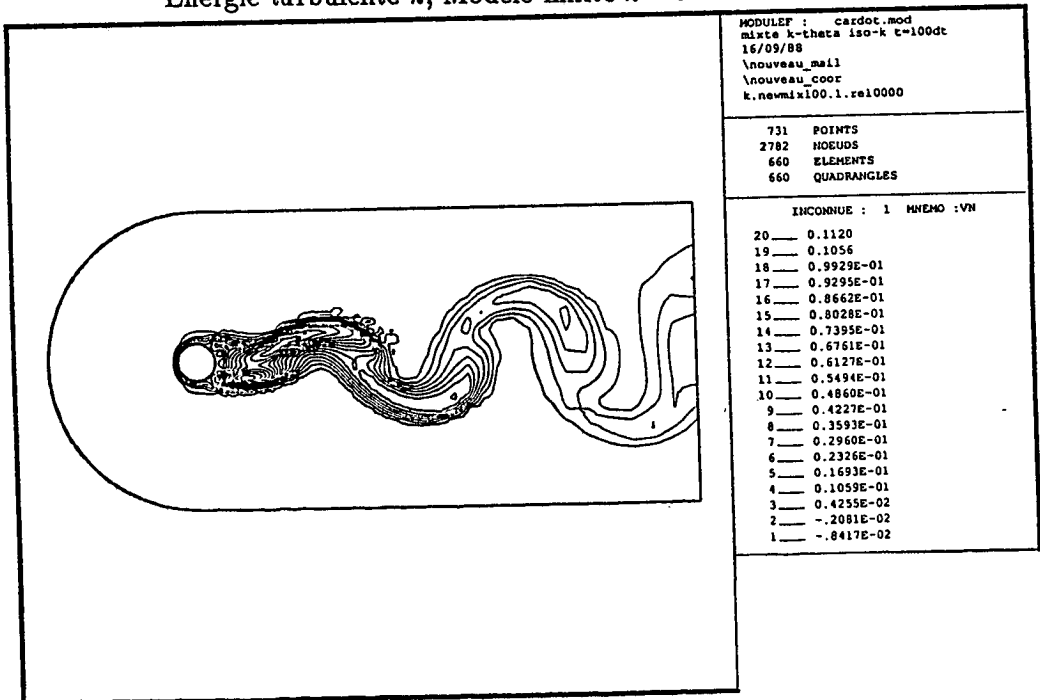


Figure 29.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=10000$
 Comparaison des tenseurs visqueux et MPP, Modèle mixte $k - \theta - MPP$

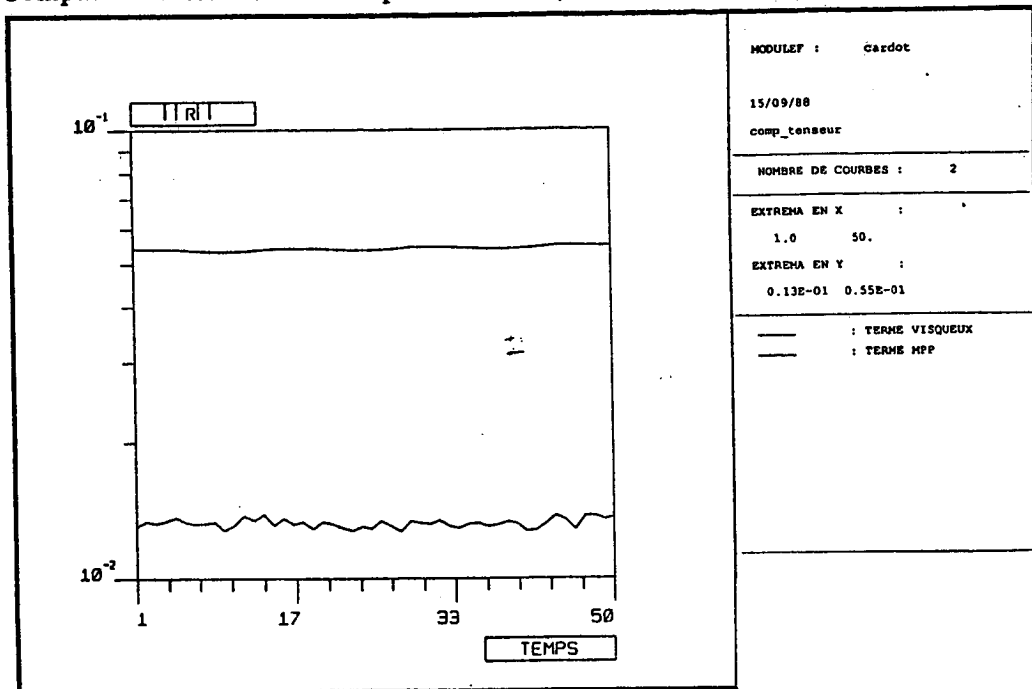


Figure 30.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=10000$
 Lignes iso-rotationnel, Modèle mixte $k - \theta - MPP$ avec particules.

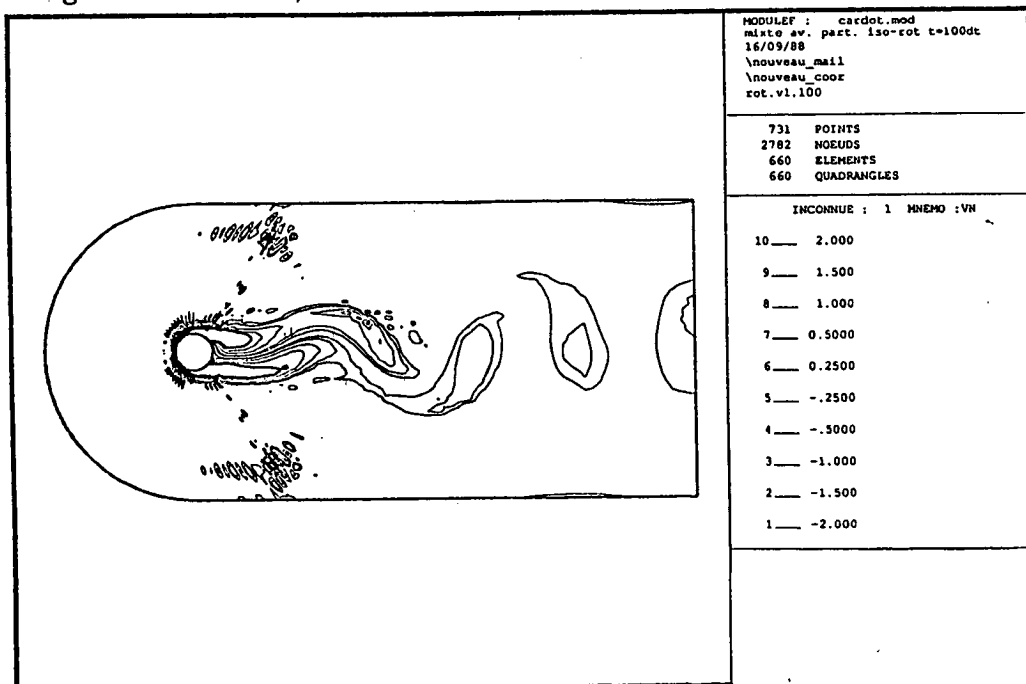


Figure 31.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=10000$
 Energie turbulente k , Modèle mixte $k - \theta - MPP$ avec particules.

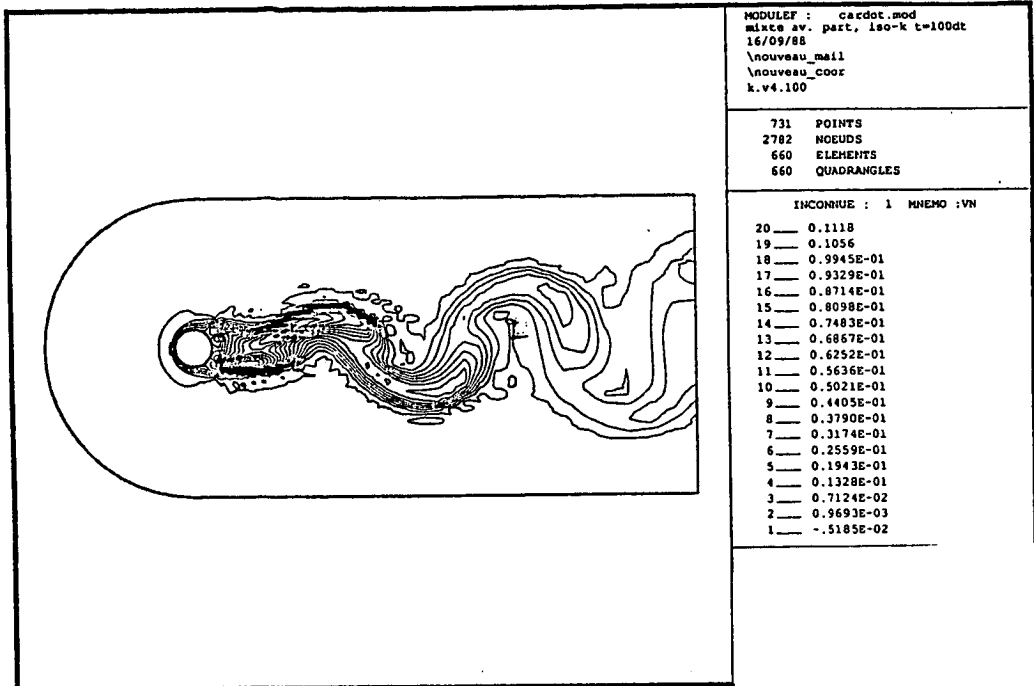


Figure 32.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=10000$
 Produit $k.q$, Modèle mixte $k - \theta - MPP$ avec particules.

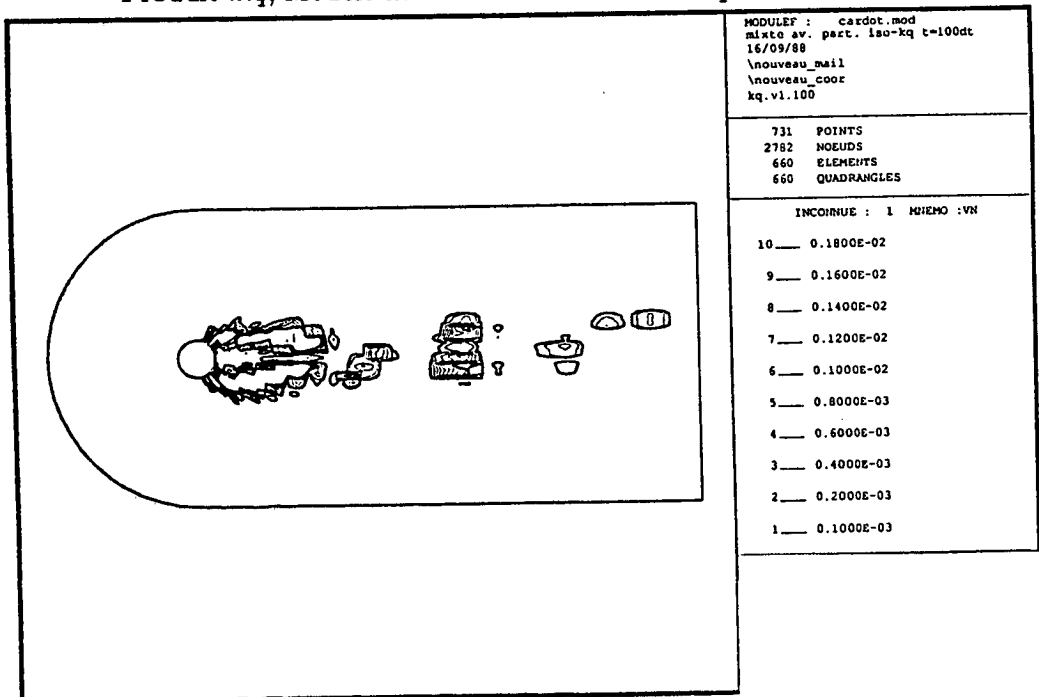
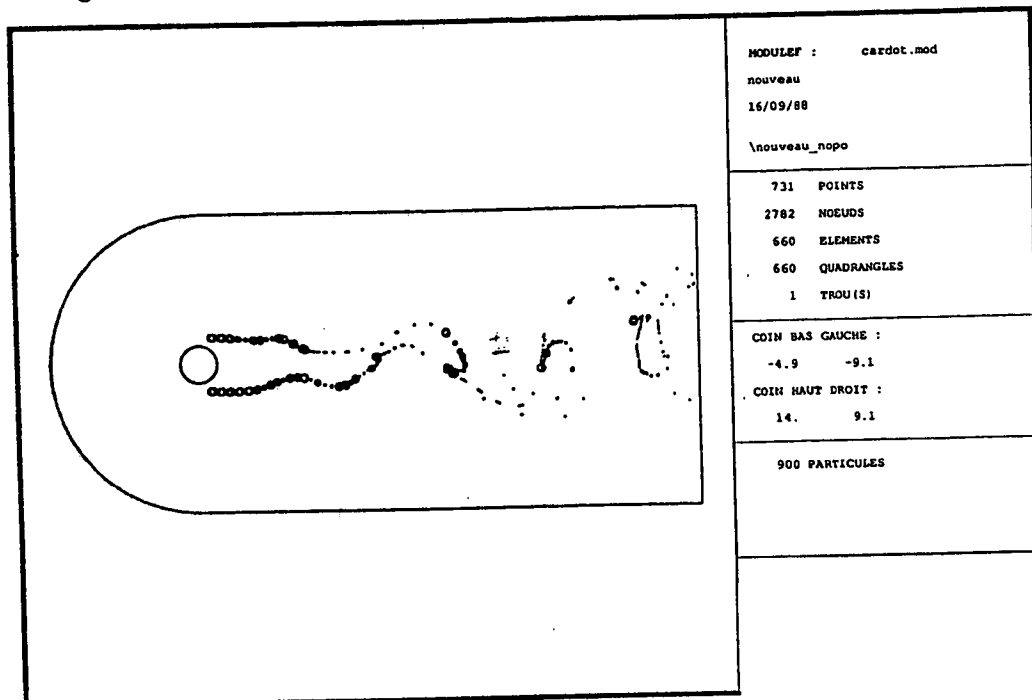


Figure 33.
 Ecoulement derrière un cylindre $Re=10000$
 Lignes d'émission, Modèle mixte $k - \theta - MPP$ avec particules.



Imprimé en France
 par
 l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

