HAL
open science

Resolution des equations de Navier-Stokes avec des elements finis extremement minces dans la couche limite

M.A. d'Errico

▶ To cite this version:

M.A. d'Errico. Resolution des equations de Navier-Stokes avec des elements finis extremement minces dans la couche limite. RR-0997, INRIA. 1989. inria-00075562

HAL Id: inria-00075562
https://inria.hal.science/inria-00075562

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 997

Programme 7

RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES AVEC DES ELEMENTS FINIS EXTREMEMENT MINCES DANS LA COUCHE LIMITE

Mario A. D'ERRICO

Février 1989

RR-0997

3027

RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES AVEC DES ELEMENTS FINIS EXTREMEMENT MINCES DANS LA COUCHE LIMITE

Mario A. D'Errico
INTEC * - INRIA **

RESUME

La simulation d'écoulements visqueux et laminaires pose des problèmes à très grand nombre de Reynolds à cause des couches limites. On propose ici une nouvelle façon de résoudre le système linéaire issu d'une discrétisation par éléments finis des équations de Navier-Stokes instationnaires, incompressibles et laminaires. Il consiste à traiter la partie du système correspondant à la couche limite avec une méthode de relaxation par blocs de façon à imiter la résolution des équations paraboliques de la couche limite de Prandtl. On présente des résultats sur une plaque plane et un profil d'aile à Re=10^5 et 10^6. On montre que la méthode évite les propagations d'erreurs d'arrondis due au mauvais préconditionnement du système linéaire global.

NUMERICAL SIMULATION OF LAMINAR INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW WITH EXTREMELY THIN FINITE ELEMENTS NEAR THE BOUNDARIES.

ABSTRACT

Viscous and laminar flow simulations is a source of problems at very high Reynolds number (Re) because of the boundary layers. Discretization grids extremely thin are needed in the perpendicular direction to the boundary layer and that produces a bad, or at least mediocre, conditioning of the linear systems. We propose here, not a new aproximation in order to solve the problem, but a new way of resolving the linear system that arises from a finite element discretization of the nonstationnary, incompressible and laminar Navier-Stokes equations. It is a simple idea that consists in changing the method of resolution in the boundary layer by a bloc relaxation method, adapted to physics, that imitates the the method of resolution of the parabolics Prandtl boundary layer equations, while in the remaining domain a Cholesky or conjugate gradient method is employed. The global linear system is solved by blocs. The first corresponds to the boundary layer and wake; the second corresponds to the remaining domain. We have obtained better results on a wing profile at Reynolds number 100 000 because this method seems not to propagate the round off errors due to the bad conditionning of the global linear system.

INTEC : Instituto de Desarrollo Tecnologico para la Industria Quimica. (Grupo de Mecánica Computacional) Santa Fe - Argentina)

PAPIER RÉCUPERÉ ET RECYCLÉ

"x" étant la direction de l'écoulement et "y" la direction perpendiculaire. Les eqs. (3) peuvent être résolues par une méthode de différences finies en marchant dans le sens de l'écoulement : si la solution à l'abscisse x_1 est connue, on calcule la solution à $x_1+\Delta x$ en résolvant un système linéaire en y (Rosenhead [1], chapitre 6, section 10); puisqu'il s'agit d'une EDP parabolique en x.

Dans le présent travail on propose une résolution par blocs du système linéaire issu de (1) : on décompose le système linéaire global, correspondant à tout le domaine, en deux blocs, correspondants à deux sous-domaines. Un qui represente la solution dans la couche limite plus sillage, et l'autre qui represente la solution dans le reste du domaine. Le premier, correspondant à la couche limite, est résolu par une méthode de relaxation par blocs, où chaque bloc correspond à toutes les inconnues sur une section perpendiculaire à l'écoulement (equivalent à une abscisse x fixe en (3)) et la relaxation est faite dans le sens de l'écoulement (equivalent à marcher sur x en (3)).

Le second, correspondant au reste du domaine, est résolu par la méthode de Cholesky ou gradient conjugué.

On est parti d'un code de calcul des solutions des équations bidimensionnelles de N.S. incompressible en éléments finis avec décentrage par caractéristique.

On a testé l'algorithme sur une plaque plane et sur un profil d'aile et on a comparé les résultats avec ceux du programme original. On a obtenu d'excellents résultats dans l'exemple de la plaque plane. A $Re=10^6$ l'algorithme proposé permet d'atteindre une solution que le code original ne peut pas calculer. On a comparé la trainée avec la valeur théorique et on a vérifié une bonne corrélation.

Dans le cas du profil d'aile les résultats obtenus sont moins bons, bien que meilleurs que ceux obtenus avec le code original. Ici on n'a pas pu faire des comparaisons de trainée, faute de solution analytique. On compare seulement avec le programme original.

Un fait à noter est la robustesse du programme original qui permet d'obtenir des résultats pas trop mauvais à Re=100.000 alors que on s'attendait à pire, compte tenu du mauvais conditionnement prévu des systèmes linéaires.

RAPPEL DE LA METHODE DE BASE

Le programme de base sur lequel s'est effectué le travail est le module NSQ2CA (Hecht-Cardot [6]) d'éléments finis, qui utilise une formulation variationelle dans une base à divergence nulle (Hecht [7]) et une discrétisation de la dérivée totale par la méthode de caractéristiques (Pironneau [8]).

Il faut résoudre, à chaque pas de temps, l'équation suivante (voir ref. [6] pour plus de détails) :

$$(u_h^{k+1},v_h) + \frac{\nu.\Delta t}{2}.(\text{grad } u_h^{k+1}+\text{grad}^T u_h^{k+1},\text{grad } v_h^{k+1}+\text{grad}^T v_h^{k+1}) = (u_h(X^k),v_h) \qquad (4)$$

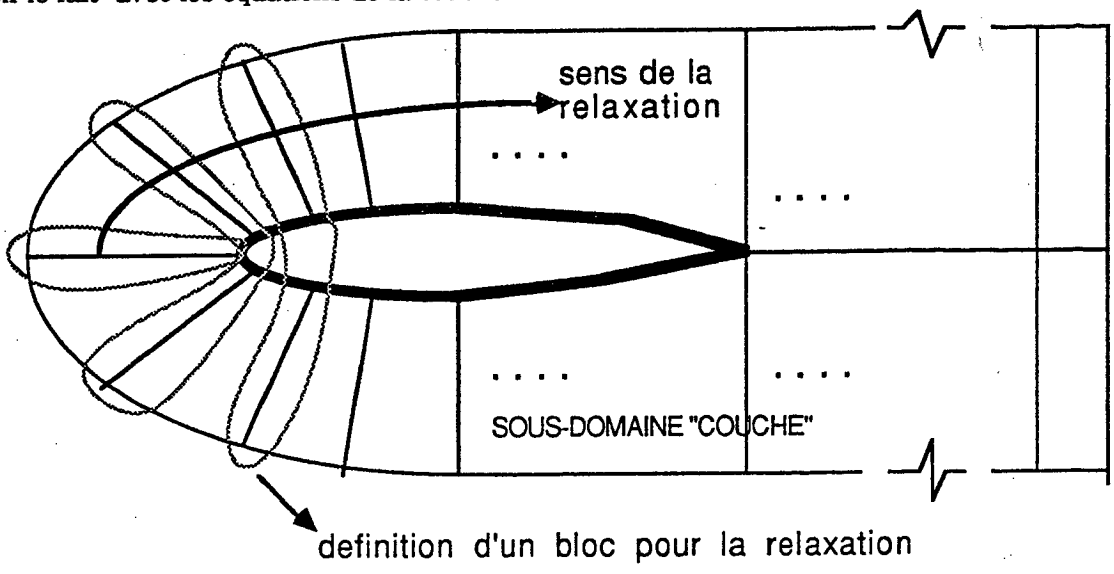
$$u_h^{k+1}{}_{\Gamma} = u_{\Gamma} \qquad \text{pour tout} \quad v_h \in V_{0h}$$

où $X^k = X_{(x,k\Delta t)}$ approche la solution, integrée dans le sens du temps décroissant, de :

$$\frac{dX}{d\tau} = u(X,\tau) \quad \text{avec la condition initiale :} \quad X_{(x,(k+1)\Delta t)} = x$$

Dans la pratique, cela revient à résoudre le système linéaire :

suivante, de façon à imiter la solution progressive dans le sens de l'écoulement comme on le fait avec les équations de la couche limite de Prandtl :



IMPLEMENTATION

Le sous-systéme "exterieur" (7.1) peut être résolu, en principe, par une méthode quelconque car il ne pose pas de problème au point de vu conditionnement. Ici on a profité de la factorisation de Cholesky implementée dans le code original, mais on a essayé aussi une méthode de gradient conjugué. Pour Cholesky on stocke seulement la matrice triangulaire inférieure L issue de la factorisation $L.L^T$ du bloc diagonal "exterieur" A_{22} . Il est stocké sous forme profil avec un seul pointeur necessaire, ce qui correspond au code original. Pour le gradient conjugué, il faut seulement savoir calculer $A_{22}.u$ à u donné et on stocke A_{22} sous forme "morse" (Modulef [9]), deux pointeurs, de file et de colonne, étant necessaires.

La résolution du sous-système "couche" (7.2), écrit simplifié comme

$$A_{11}.u_1 = f_1$$

est la plus critique, car sensible à la méthode employée. On utilise donc une méthode itérative de relaxation par blocs, robuste devant un éventuel conditionnement médiocre de la matrice du système.

Alors A_{11} est décomposée de la façon suivante :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \ldots B_{1i} & \ldots & B_{1p} \\ B_{21} & B_{22} \ldots & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ B_{i1} \ldots\ldots & B_{ii} \ldots & B_{ij} \ldots & B_{ip} \\ \ldots & & \ldots & \\ B_{p1} \ldots & & \ldots & B_{pp} \end{vmatrix} \qquad (10)$$

et les vecteurs u_1 et f_1 comme :

$$u_1 = [x_1 \ldots x_i \ldots x_p]^T \qquad \text{et} \qquad f_1 = [g_1 \ldots g_i \ldots g_p]^T$$

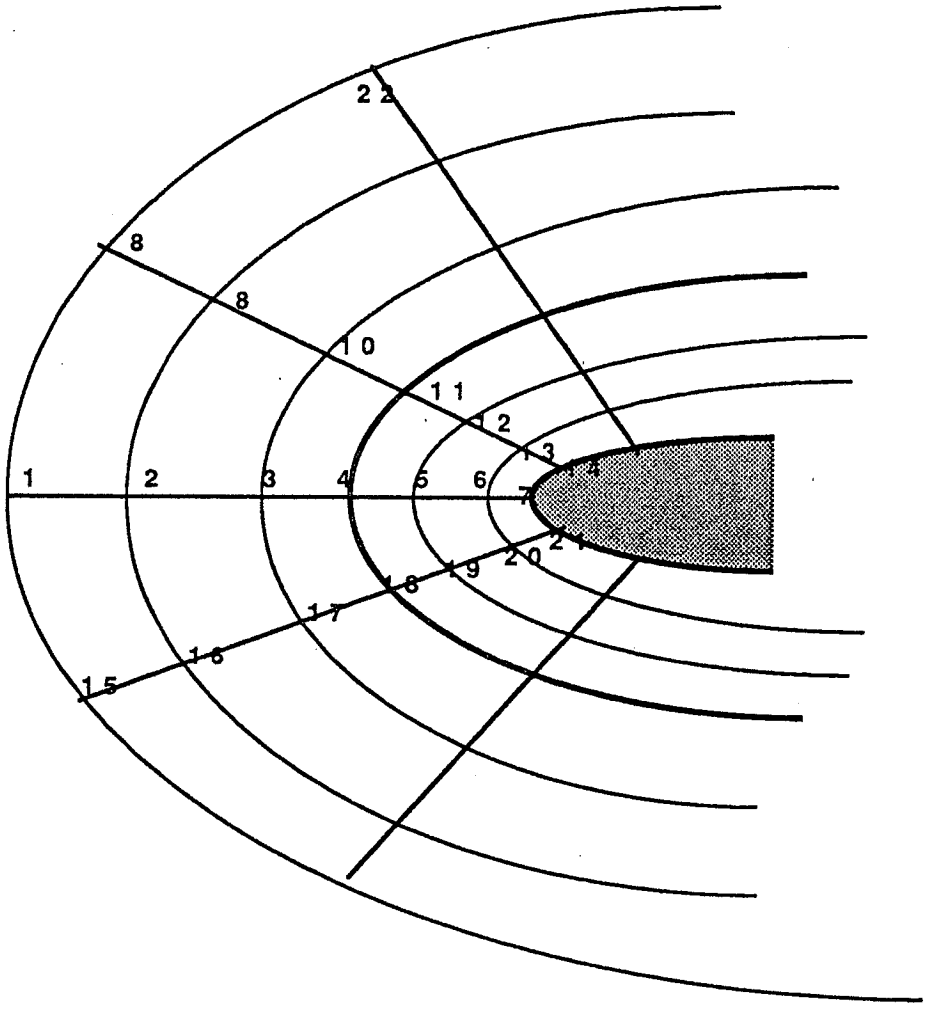
où p est le nombre de blocs (voir plus bas pour la définition de chaque bloc), de dimension > 1.

coupes et la numérotation des blocs est croissante dans le sens de l'écoulement (voir dessin plus haut).

Pour le sous-domaine "exterieur", il ne reste qu'à numéroter les noeuds ; on a choisi de faire comme suit mais il faut reconnaitre que c'est loin d'être optimal :

ayant obtenu une numérotation optimale pour le domaine complet, on assigne ensuite aux noeuds du sous-domaine "exterieur" seul, une numérotation qui suit l'ordre de la numérotation globale optimale mais de façon à être consécutive au numéro du dernier noeud du sous-domaine "couche".

Par exemple, si la numérotation globale optimale est :



et la numérotation finale du sous-domaine "couche" est :

Le gros bloc hors de la diagonal A_{12} , necessaire pour le calcul des deux seconds membres de (7.1) et (7.2), est stocké sous forme compacte (tous les éléments différents de zéro, colonne par colonne) et demande alors deux pointeurs.

RESULTATS NUMERIQUES

EXEMPLE 1 : plaque plane $Re = 10^6$

sous-domaine "couche" :
15 éléments dans la direction normale à l'écoulement.
hauteur $\approx 0.5\ 10^{-2}$ (chorde = 1)
maximum rapport largeur/hauteur d'un élément : 640
1993 inconnues sur un total de 4508

La fig. 1 montre le maillage général et la fig. 2 montre un zoom sur le bord d'attaque de la plaque.

Les figs. 3 y 4 montrent les profils de vitesse stationnaires obtenus pour Re=1.000.000, avec $\Delta t=0.1$, $\omega=1.7$, et 5 cycles de couplage.

Les figs. 5 y 6 montrent les profils correspondants obtenus au même temps avec le code original. On remarque que ce dernier est incapable d'arriver a un état stationnaire, comme le montre la fig. 7, qui présente les histogrammes de convergence.

On a comparé la valeur numérique du coefficient de trainée avec ceux qui relevent de la théorie de la couche limite :

$$C_d = 1.338/\sqrt{Re}$$

	valeur calculé	valeur theorique
C_d pour $Re=10^6$	$1.334\ 10^{-3}$	$1.338\ 10^{-3}$

ce qui montre une bonne corrélation.

EXEMPLE 2 : profil NACA 0012 à incidence nulle - $Re = 10^5$

sous-domaine "couche" :
10 éléments dans la direction normale à l'ecoulement.
hauteur $\approx 10^{-2}$ (chorde = 1)
maximum rapport largeur/hauteur d'un élément : 100
2060 inconnues sur un total de 3919

La fig. 8 et la fig. 9 montrent respectivement le maillage général et un zoom sur le bord d'attaque.

Le fig. 10 montre le profil de vitesse obtenu pour Re=100.000, avec $\Delta t=0.1$, $\omega=1.7$, et 5 cycles de couplage. Le fig. 11 montre le profil correspondant obtenu au même temps avec le code original. Dans la fig. 12 on présente les histogrammes de convergence des deux codes. On voit une amélioration sur le code original.

EXEMPLE 3 : profil NACA 0012 à incidence nulle - $Re = 10^6$

sous-domaine "couche" :

for Lam. and Turb. Flows. Venise 1981.

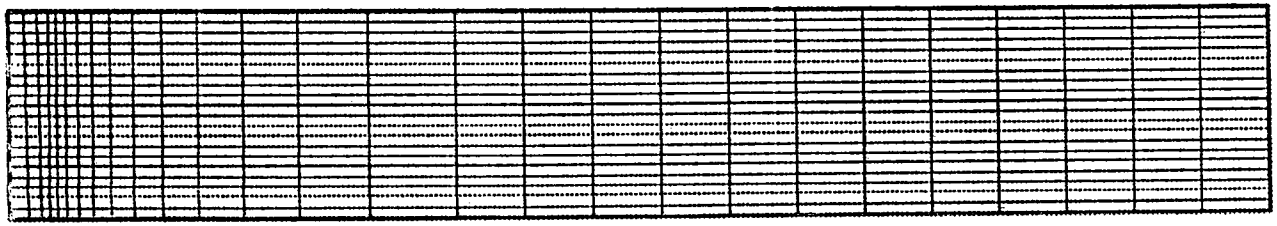
[5] J.C. Le Balleur; "Viscid- inviscid coupling calculations for two and three-dimensional flows". *Von Karman Institute Lecture series*, 1982-04.

[6] F. Hecht - B. Cardot; "Résolution des équations bidimensionnelles de Navier-Stokes". *Rapport Technique INRIA* nº 59. Septembre 1985.

[7] F. Hecht; Base à divergence nulle pour les équations de Navier-Stokes these de doctorat 3eme cycle 1978.

[8] O. Pironneau; "On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations". *Numerische Matematik* 38,309-332 (1982).

[9] Descriptions des structures des données Modulef. Rapport nº 2 (avril 1987).



MODULEF : derrico

capa8

22/09/88

capa8.nopo

1008	POINTS
3905	NOEUDS
945	ELEMENTS
945	QUADRANGLES
0	TROU(S)

COIN BAS GAUCHE :

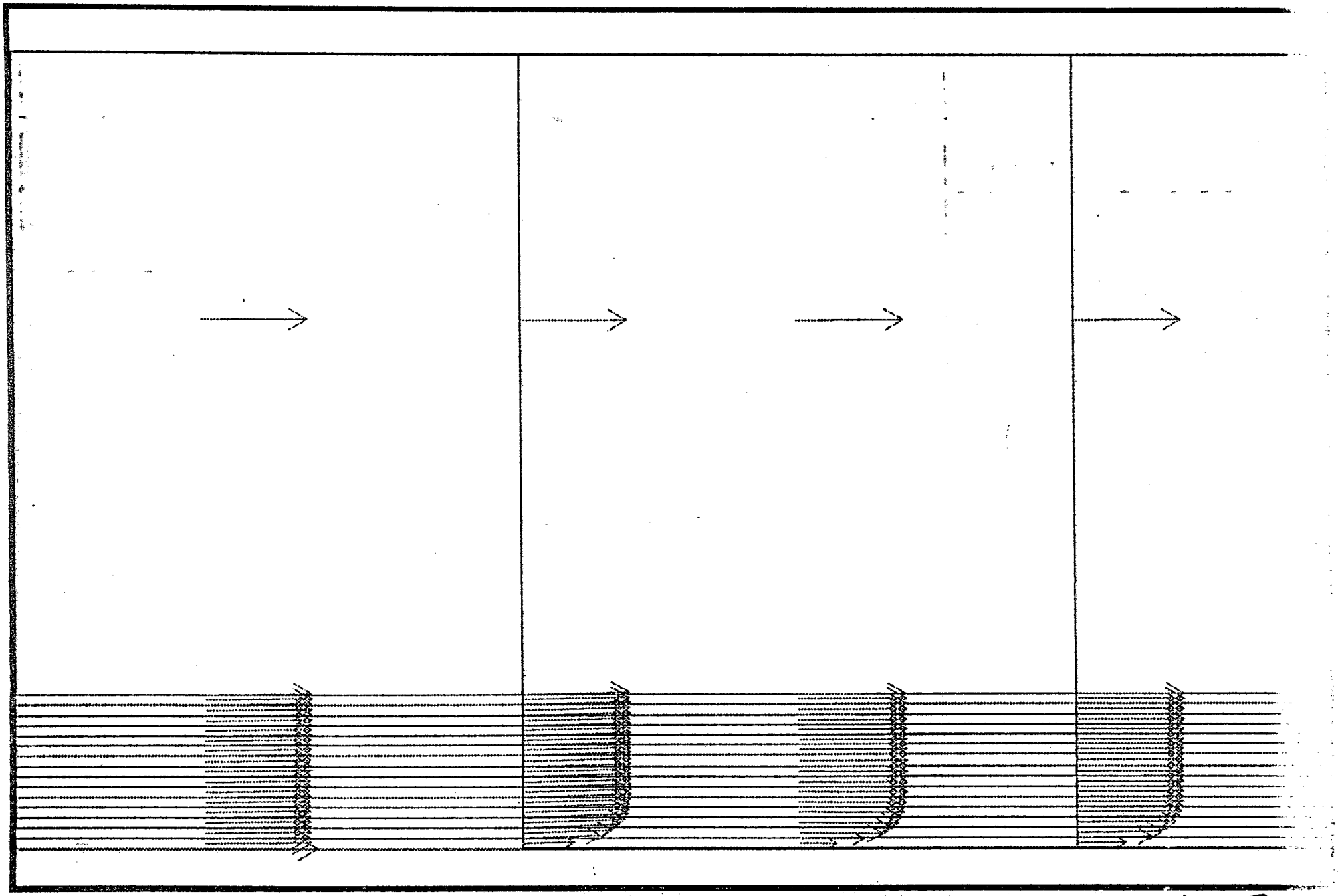
-0.25 -1.4

COIN HAUT DROIT :

3.2 1.9

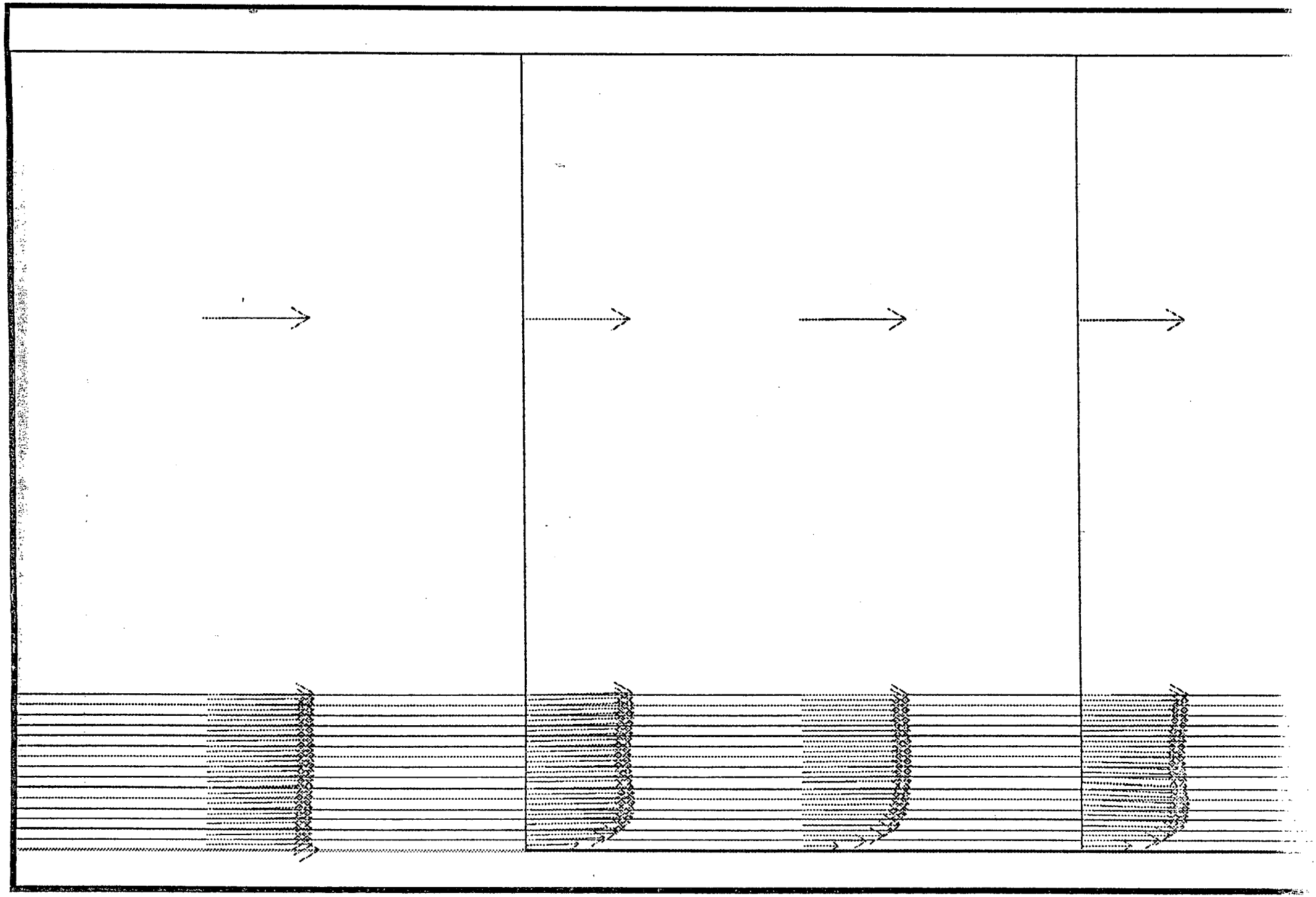
le 22:09:1988 a 15h 43mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

Fig. 1



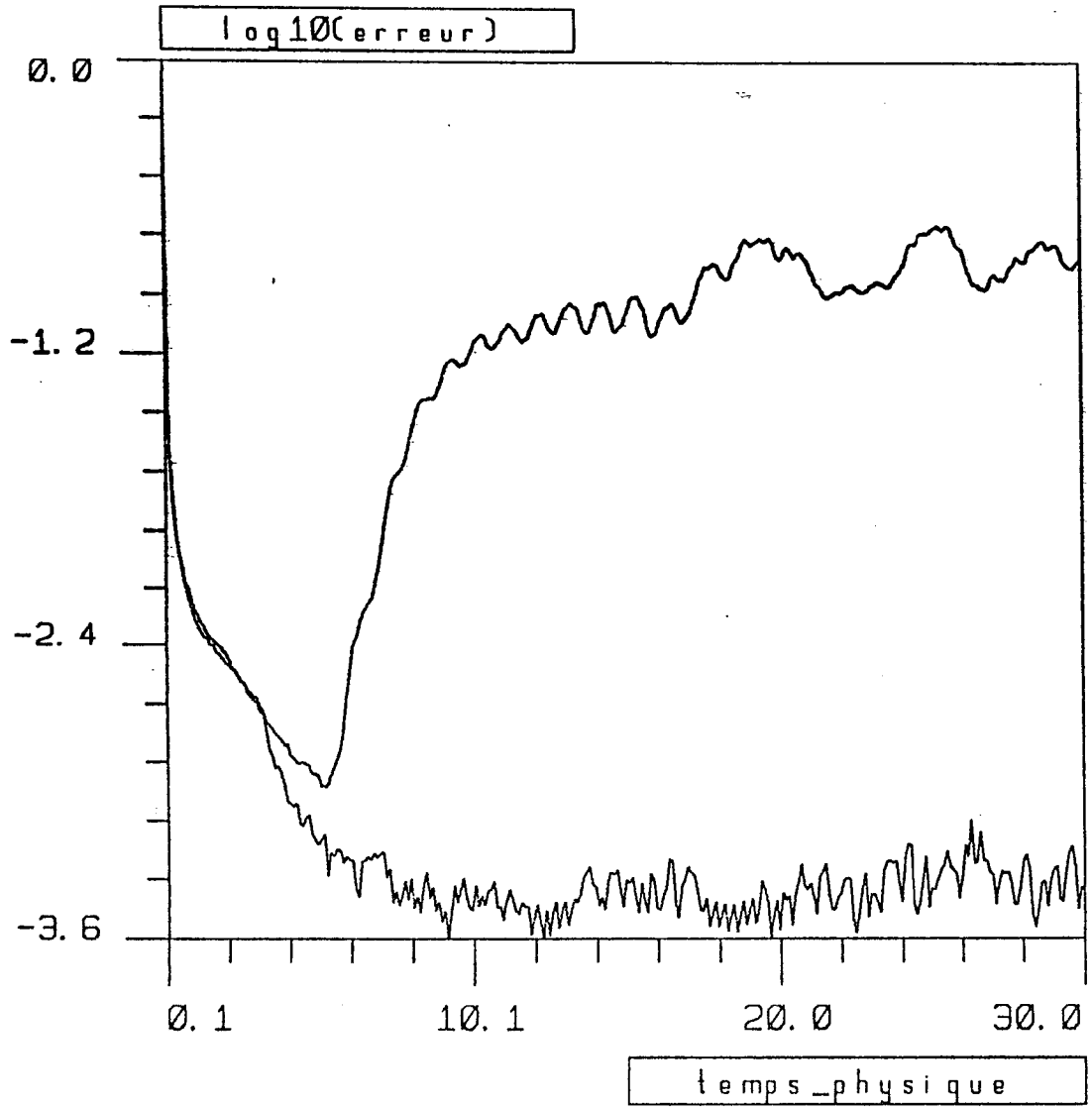
le 01:09:1988 a 13h 54mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

fig. 3



le 01:09:1988 a 13h 58mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

fig. 5



MODULEF : derrico

19/09/88

converg

NOMBRE DE COURBES : 2

EXTREMA EN X :

0.10 30.

EXTREMA EN Y :

-3.6 0.00

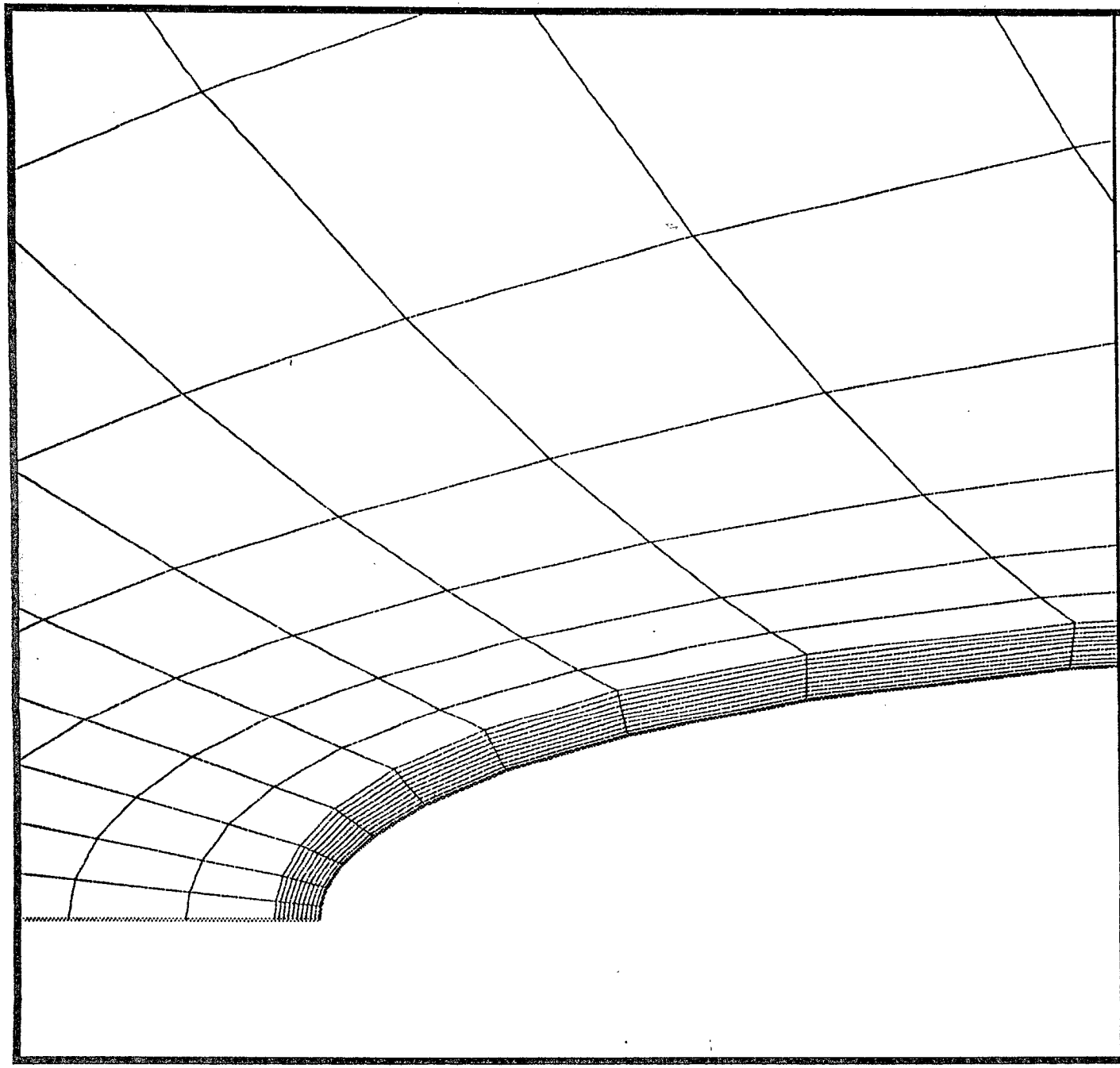
——— : code-modifie

——— : code-original

TRACE DE COURBES

le 19:09:1988 a 13h 14mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

fig. 7



MODULEF :

GEMESH GEMESH GEMESH GEMESH GE

28/09/88

perf.nopo

861	POINTS
3321	NOEUDS
800	ELEMENTS
800	QUADRANGLES
0	TROU(S)

COIN BAS GAUCHE :

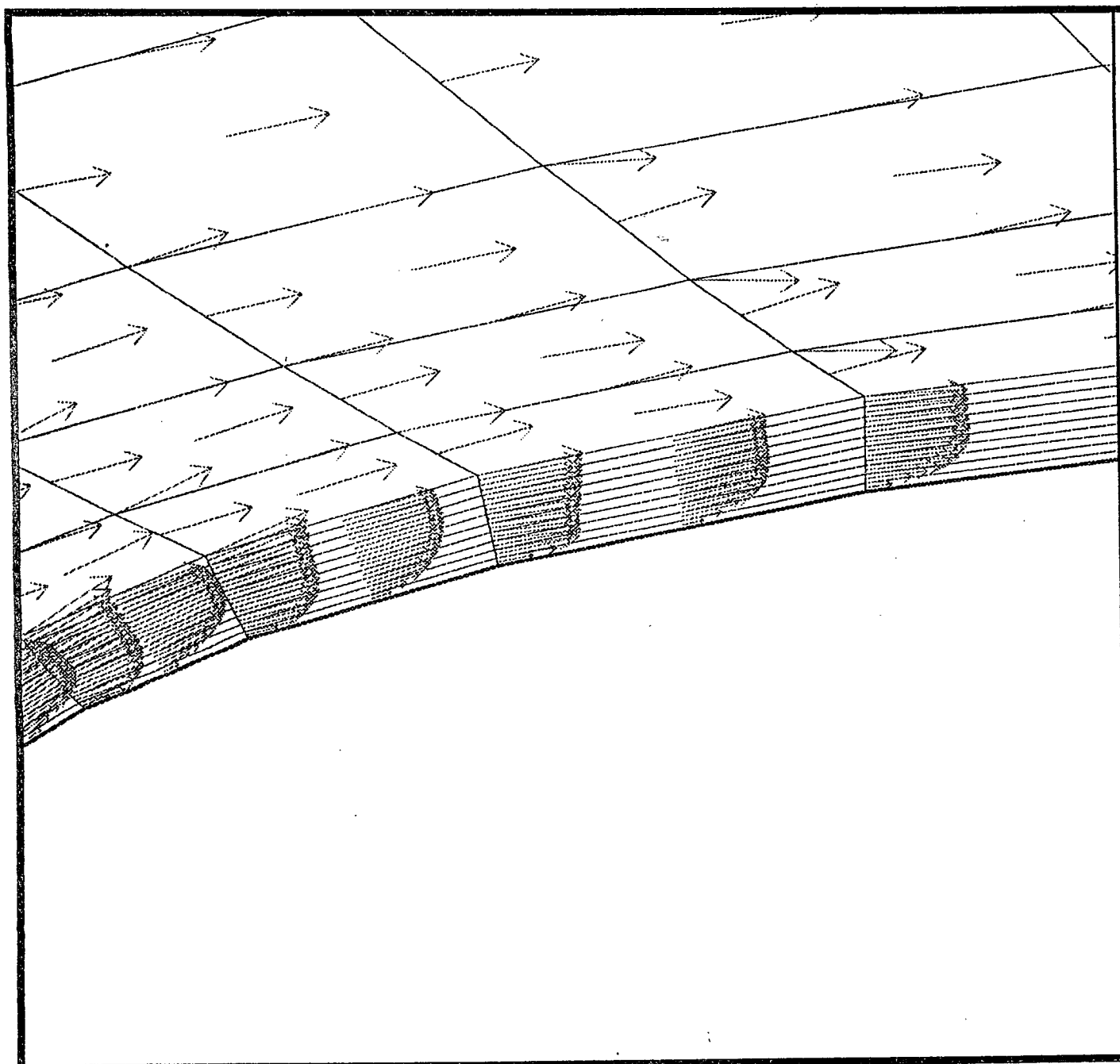
-0.67E-01 -0.30E-01

COIN HAUT DROIT :

0.18 0.20

le 28:09:1988 a 15h 46mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

fig. 9



MODULEF : derrico

28/09/88
perf.mail
perf.coor
perf.st5.2.v

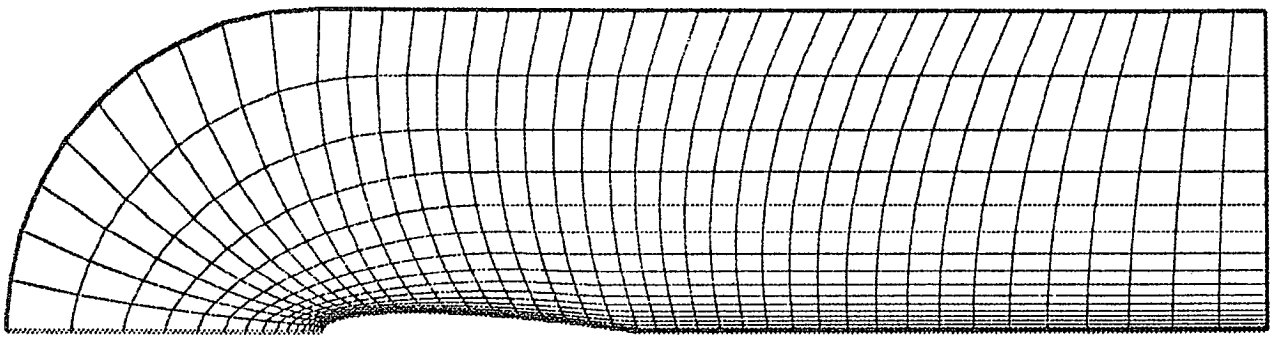
861	POINTS
3321	NOEUDS
800	ELEMENTS
800	QUADRANGLES

EXTREMA DU CHAMP B :
0.00 1.2
ECHELLE :
2.0 CM. = 1.2

VITESSES

le 28:09:1988 a 16h 03mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

fig. 11



MODULEF : derrico

perf2

26/09/88

perf2.nopo

1066	POINTS
4131	NOEUDS
1000	ELEMENTS
1000	QUADRANGLES
0	TROU(S)

COIN BAS GAUCHE :

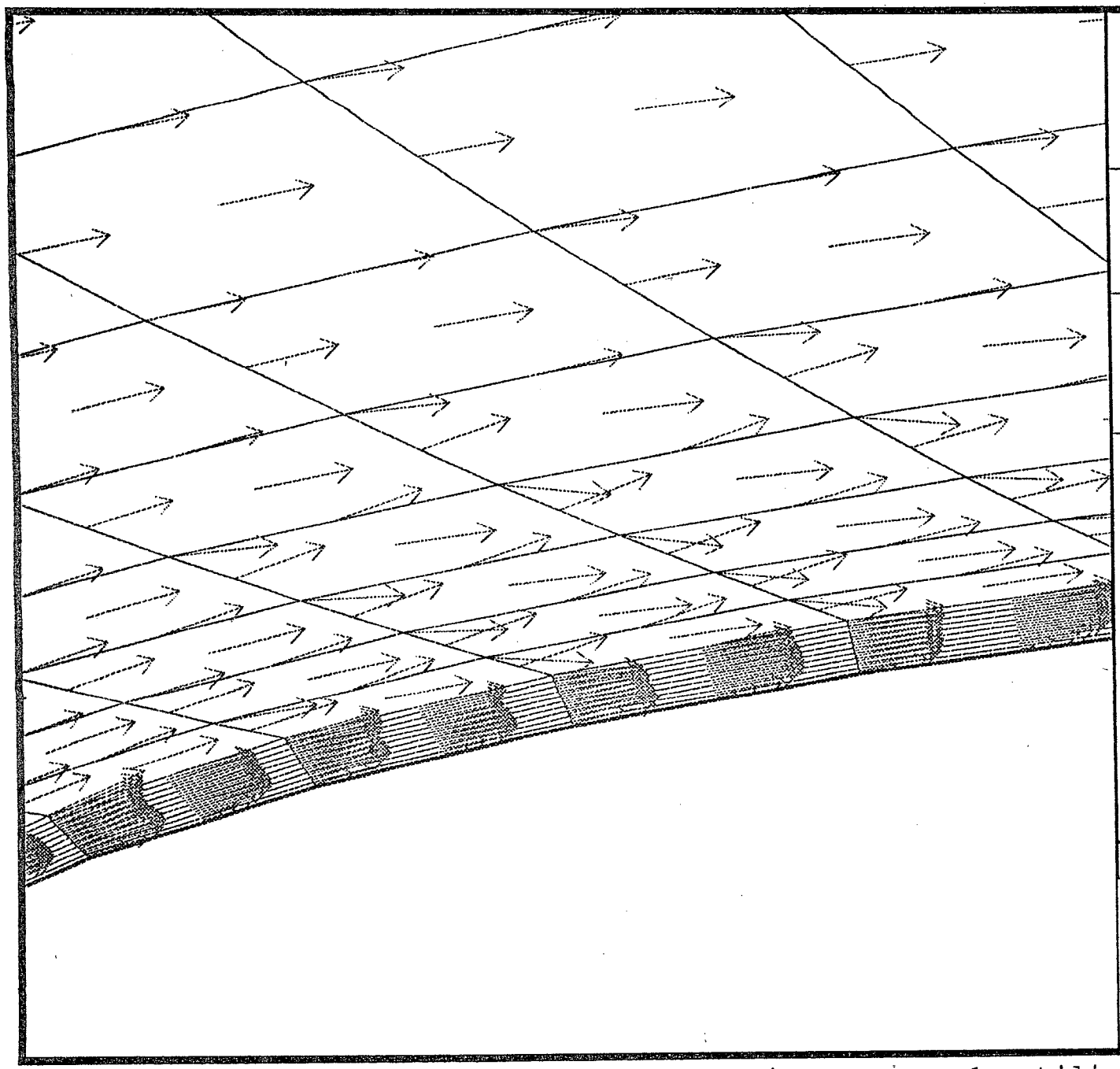
-1.2 -1.6

COIN HAUT DROIT :

3.2 2.6

le 28:09:1988 a 15h 47mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

fig. 13



MODULEF : derrico

28/09/88
perf2.mail
perf2.coor
perf2.1.1.v

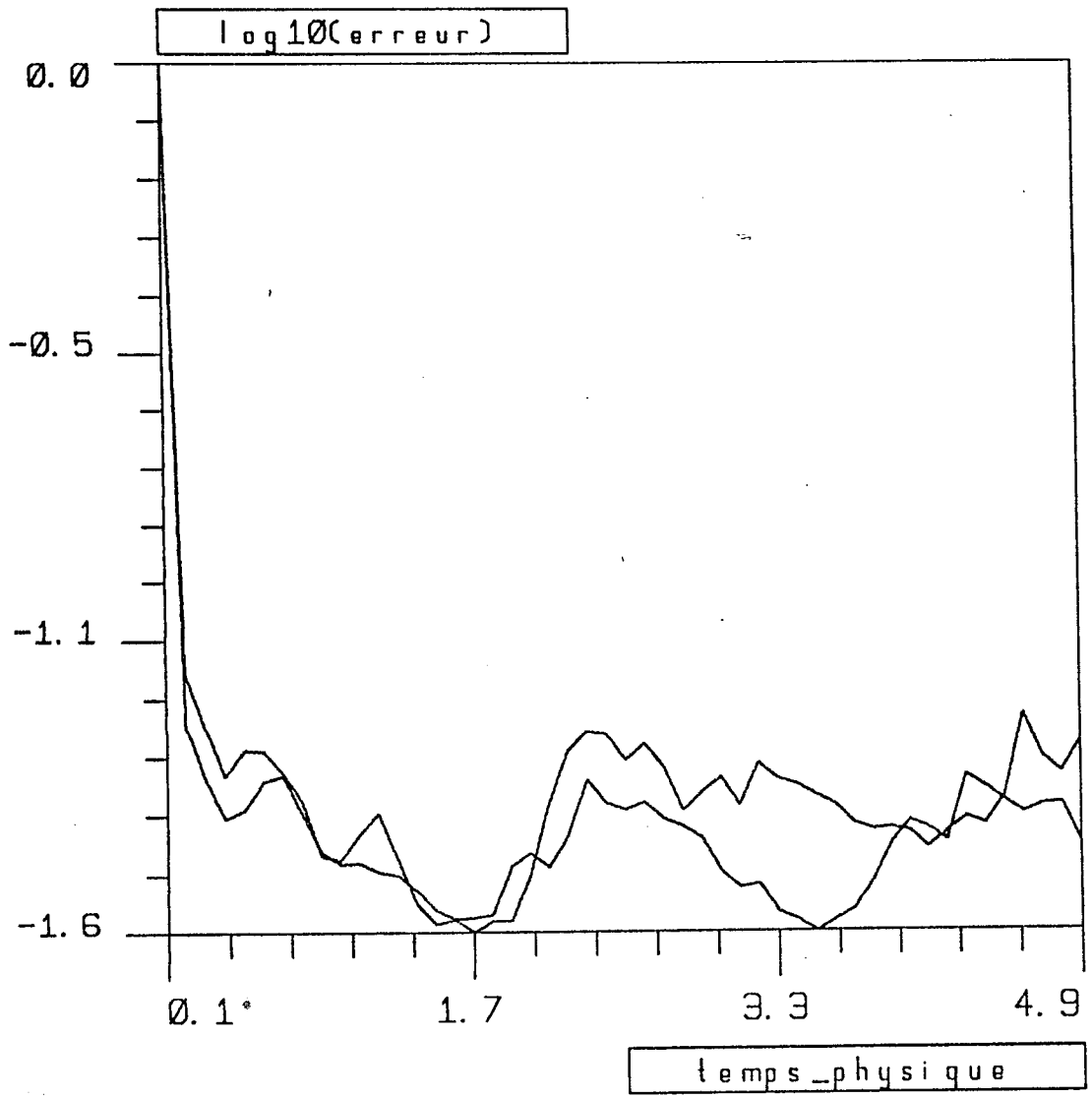
1066 POINTS
4131 NOEUDS
1000 ELEMENTS
1000 QUADRANGLES

EXTREMA DU CHAMP B :
0.00 1.2
ECHELLE :
2.0 CM. = 1.2

VITESSES

le 28:09:1988 a 17h 56mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

fig. 15



MODULEF : derrico

28/09/88

converg

NOMBRE DE COURBES : 2

EXTREMA EN X :

0.10 4.9

EXTREMA EN Y :

-1.6 0.48E-10

_____ : code_modifie

_____ : code_original

TRACE DE COURBES

le 28:09:1988 a 17h 52mn. dessin numero: 1. utilisateur: derrico

Fig. 17