Manipulateurs paralleles. 3e partie : applications

Jean-Pierre Merlet

▶ **To cite this version:**

Jean-Pierre Merlet. Manipulateurs paralleles. 3e partie : applications. [Rapport de recherche] RR-1003, INRIA. 1989, pp.100. inria-00075556

HAL Id: inria-00075556
https://inria.hal.science/inria-00075556

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Résumé

Dans cette troisième partie nous allons nous intéresser aux applications potentielles d'un manipulateur parallèle, en particulier du point de vue de la commande par retour d'efforts, ainsi qu'à quelques caractéristiques de ce type de manipulateur qui influe sur leurs commandes. On décrira l'environnement de programmation utilisé pour le prototype existant ainsi que le matériel utilisé et ses conséquences sur les performances.

Nous introduirons aussi quelques récents développements de la théorie des configurations singulières qui a été présentée dans la deuxième partie de cette monographie. On étudiera en particulier les vecteurs propres associées aux configurations singulières et donc les mouvements correspondant à ces configurations.

In this third part we will consider the potential applications of parallel manipulators, especially those involving force-feedback control. We will deal with some features of this kind of manipulators which are important for their control. We will describe the programming environment we have developped, the hardware which has been used and its consequences upon the performances.

In a second part we introduce recent developments in the singular configuration theory presented in part two, especially the study of the eigenvectors yielding the motion of the manipulator in these configurations.

Chapitre 1

Introduction

Ce rapport est divisé en 4 parties : la première est consacrée aux applications faites des manipulateurs parallèles combinés à une commande par retour d'efforts. Elle présente de nombreuses expériences réalisées avec le prototype de l'INRIA (assemblage, suivi de contour, action sur une manivelle, localisation) et détaille le matériel utilisé ainsi que toutes les observations faites au cours de ces expériences. On y discourt en particulier de la mesure de forces: méthode de calibration des capteurs, fréquence des erreurs de mesure, erreurs de mesure en fonction de la position, charge maximale, erreurs dues à la discrétisation.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de divers phénomènes ayant une influence sur la commande : raideur du manipulateur, vitesses cartésiennes maximum, influence des retards sur une trajectographie cartésienne, environnement de programmation.

Dans la troisième partie on étudie de manière approfondie le temps de calcul de diverses procédures fondamentales pour le contrôle d'un robot parallèle : cinématique directe et inverse, jacobienne et inverse jacobienne, calcul des forces axiales et cartésiennes. Dans chaque cas plusieurs méthodes sont comparées et la meilleure mise en exergue.

Enfin dans la quatrième partie on revient sur l'étude des configurations singulières faite dans le deuxième rapport, en introduisant quelques résultats théoriques nouveaux ainsi qu'en y procédant à une étude extensive des vecteurs propres associés et donc aux degrés de liberté accordés au manipulateur dans ces configurations.

On suppose dans ce rapport que les notions introduites dans les premières et secondes parties sont familières aux lecteurs. Des errata de ces parties sont d'ailleurs introduites.

Cette troisième partie sera normalement suivie de quatre autres rapports. Le premier reviendra sur la modélisation dynamique des manipulateurs parallèles qui a été brièvement introduite dans la première partie. Le second sera consacré à un outil d'aide à la conception et à la commande des manipulateurs parallèles en cours de développement au sein du projet Prisme. Le troisième sera entiérement consacré à l'étude de deux nouveaux prototypes qui résument les connaissances acquises dans le domaine et qui sont actuellement en cours d'élaboration. Il s'agira cette fois d 'un poignet actif léger et rapide à six degrés de liberté (qui a fait l'objet d'un dépot de brevet) et d'un poignet à trois degrés de liberté en rotation. Enfin le quatrième fera le point sur la commande en coopération impliquant des robots parallèles et des manipulateurs d'une autre architecture.

Rappel des notations

- A_i : centre de l'articulation du segment i sur la base
- B_i : centre de l'articulation du segment i sur le mobile
- xa_i, ya_i, za_i : coordonnées du point A_i
- x_i, y_i, z_i : coordonnées du point B_i
- x_0, y_0, z_0 : coordonnées du centre du plateau mobile
- ψ, θ, ϕ : angles d'Euler caractérisant l'orientation du plateau mobile
- ρ_i : longueur du segment i
- n_i :vecteur unitaire de l'axe du segment i
- f_i : force articulaire s'exercant sur le segment i
- SSM : (Symetric Simplified Manipulator) désigne un manipulateur dont les points d'articulation respectent une condition de symétrie par rapport à un axe. C'est le type le plus général considéré dans notre étude (voir page 67).
- TSSM : (Triangular Symetric Simplified Manipulator). C'est un SSM dont les points d'articulation du plateau mobile sont confondus par paire. Le plateau supérieur est alors triangulaire.
- MSSM : (Minimal Symetric Simplified Manipulator). C'est un TSSM dont les points d'articulation sur la base sont aussi confondus par paire. La base et le mobile sont donc triangulaires. C'est le plus simple des manipulateurs que nous étudions.
- sauf mention du contraire les longueurs sont en centimètre, les forces en Newton, les couples en Ncm.

Chapitre 2

Utilisation du retour d'efforts

2.1 Introduction

Nous avons vu dans la première partie de cette monographie que parmi les applications possibles des manipulateurs parallèles figuraient les tâches d'assemblage ou de suivi de contour où le manipulateur est contrôlé à l'aide d'un capteur d'efforts. Nous allons présenter dans ce chapitre quelques applications réalisées dans ce cadre avec la "main gauche" de l'INRIA.

2.2 Les principes

Le principe du contrôleur de force implanté sur la "main gauche" a été décrit dans [4,6]. L'implantation cartésienne de cette commande par retour d'efforts est décrite dans la figure 2.1.

Dans ce schéma nous voyons que la mesure des positions articulaires $\underline{\rho}$ permet d'établir le vecteur des coordonnées généralisées $\underline{X}$ à l'aide du module de cinématique directe. Le vecteur des forces articulaires $\underline{f}$ permet de calculer le vecteur des forces généralisées $\underline{F}$ à l'aide de l'inverse transposée de la matrice jacobienne cinématique. Un module de correction de force corrige ce vecteur par une estimée de la force de frottement et fournit le vecteur de forces corrigées $\underline{F_c}$. La norme de ce vecteur de forces corrigées permet de générer le vecteur vitesse $\underline{V_n}$ de correction de la force. On a

$$\underline{V_n} = c_p(F_d - ||F_c||)\frac{\underline{F_c}}{||F_c||}$$

où F_d est la force de consigne et c_p le coefficient proportionnel du régulateur de force. Un module de saturation vérifie si la vitesse calculée a bien un module inférieur ou égal à la vitesse de consigne V_d. Un module orthogonal ($\perp$) calcule alors une base $\underline{T_t}$ de l'hyperplan tangent au vecteur $\underline{F_c}$. Le vecteur vitesse de déplacement dans cet hyperplan est alors donné par :

$$\underline{V_t} = V_t\underline{T_t}$$

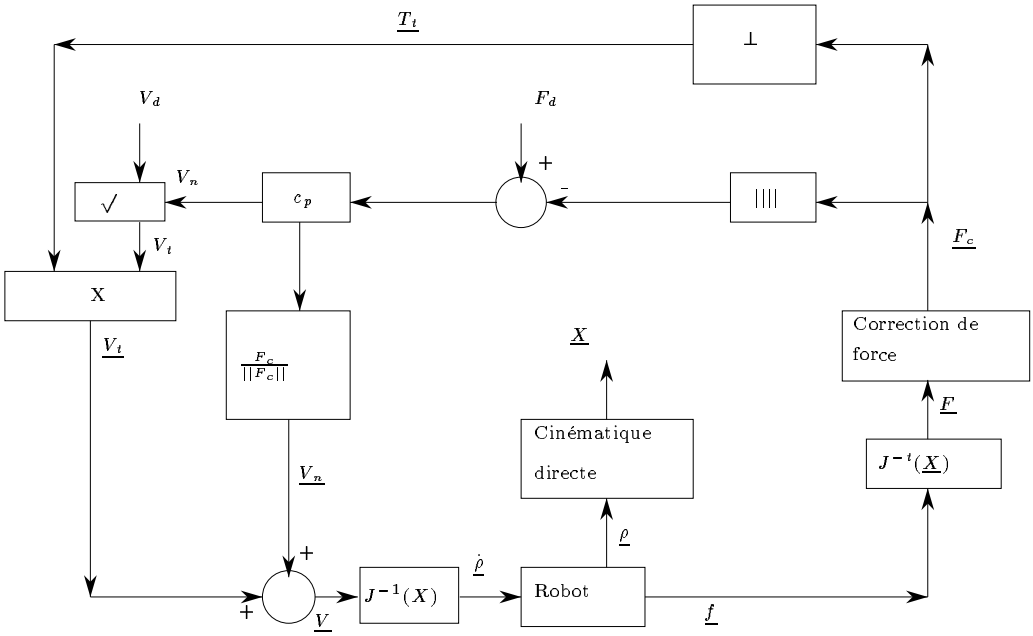

Figure 2.1: Le module cartésien de retour d'efforts

A partir du module de $\underline{V_n}$ on peut calculer la vitesse de déplacement dans l'hyperplan tangent par :

$$V_t = \sqrt{V_d^2 - V_n^2}$$

Les vecteurs orthogonaux $\underline{V_n}$ et $\underline{V_t}$ sont alors sommés et transformés en un vecteur de vitesse articulaire $\dot{\underline{\rho}}$ qui est transmis au manipulateur pour exécution. Le contrôleur ainsi décrit est donc un contrôleur hybride dont la matrice de sélection est ajustée automatiquement à chaque mesure de forces.

Le principe de ce contrôleur est, théoriquement, très favorable à une implantation en coordonnées articulaires dans la mesure où, si on néglige le frottement, le vecteur des forces articulaires donnent directement la direction à contrôler en force dans l'espace de configuration associé aux variables articulaires. Toutefois dans la pratique se pose deux problèmes qui rendent délicate cette implantation.

En effet les forces que nous voulons mesurer sont celles dues au contact entre le robot et son environnement. Or le manipulateur est soumis à des forces de gravité (masse de l'objet posé sur le plateau mobile, masse de ce plateau) qui créent des forces articulaires dépendantes de sa position. La correction de ces forces en articulaire est délicate sans repasser par les forces cartésiennnes.

On concoit qu'il en sera de même pour la correction de force de frottement éventuelle. C'est pourquoi nous avons renoncé à l'implantation de ce type de contrôleur dans le cas de la main gauche. Dans ces conditions il est clair que l'on perd de l'intérêt à mesurer les forces axiales et qu'il est alors préférable de disposer d'un capteur de forces à six composantes posé sur le plateau mobile.

2.3 Le dispositif matériel

Nous présentons quelques expériences réalisées avec la main gauche de l'INRIA, contrôlée par une commande ROBOTSOFT utilisant deux cartes CPU 68000 reliées à un bus VME pour le contrôle simultané de la "main gauche" et d'un robot AID (figure 2.2). L'interface avec les capteurs du robot parallèle (potentiométre linéaire pour la mesure des positions articulaires et capteur mono-axial à jauge de contrainte pour la mesure des forces articulaires) est effectué par des cartes d'acquisition utilisant un bus G64 possédant une interface VME. Ces cartes d'acquisition utilisent un convertisseur 12 bits avec un temps de conversion de 30 μs. Le signal de sortie des jauges de contrainte a une amplitude de 2mV/V. La linéarité des capteurs à jauge est de 0.01%, avec une gamme de mesure de 0 à 30 daN. Une variation de 1 sur le signal numérisé correspond à une variation de 0.15N.

Les actionneurs sont des vérins électriques SKF supportant une charge maximale de 150 daN avec une vitesse maximale de 2cm/s. La commande se fait par l'intermédiaire d'une carte GESDAC-2A, de résolution 12 bits et un temps de conversion typique de 3μs, sortant une tension entre -10 et +10V. L'étage de puissance est composé de variateurs de vitesse à découpage.

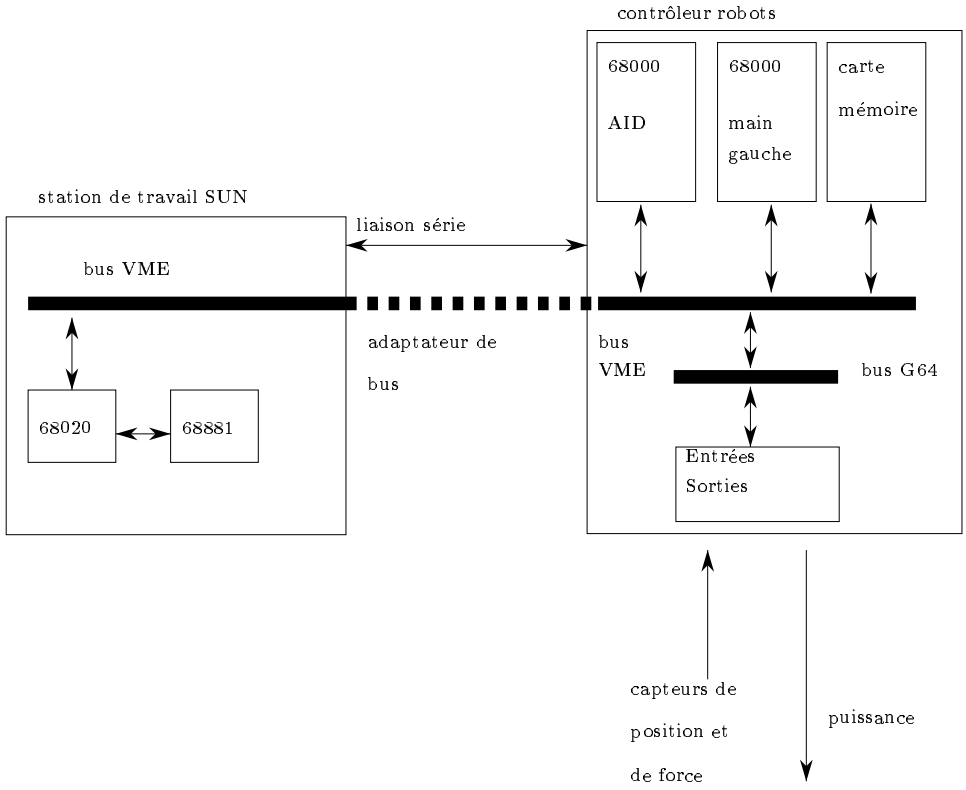

Figure 2.2: Configuration matérielle des expériences

La programmation d'une application est faite en C sur une station de travail SUN qui communique avec le contrôleur pour acquérir les mesures de force et envoyer des ordres de déplacement. Un tel choix permet de disposer de tous les outils d'UNIX pour la phase de mise

au point (debugger symbolique..). Après développement il est possible de créer un programme qui sera téléchargé ultérieurement.

La communication s'effectue soit par l'intermédiaire d'une liaison série RS232 soit à l'aide d'une carte mémoire localisée dans le contrôleur mais accessible par la station de travail qui dispose d'un adaptateur de bus VME. Cet adaptateur permet de connecter les deux bus, la mémoire du contrôleur étant alors vue comme de la mémoire par le SUN. Il suffit alors de rediriger les entrées-sorties du contrôleur vers cette mémoire pour pouvoir permettre l'échange d'informations dans les deux sens.

La fréquence d'échantillonnage n'est cependant pas très bonne : dans le cas de la liaison série celle de la mesure de force se situe au alentour de 72 Hz et elle est ramenée à 16 Hz en utilisant la mémoire commune, ce qui est tout de même assez insuffisant.

La commande du manipulateur est une commande en vitesse ou en position. Nous avons observé deux phénomènes génants dans le premier cadre. Les vitesses articulaires dans les expériences réalisées sont évidemment assez faibles et elles sont transmises sous format entier au contrôleur. La discrétisation nuit alors à la réalisation des vitesses cartésiennes calculées par le module de retour d'effort. D'autre part il semble se produire un phénomène d'empilage des ordres de vitesse: la vitesse émise par le module de retour d'efforts n'est en général pas exécutée immédiatemment, ce qui est particulièrement nuisible lors du premier contact avec l'objet.

Lors des expériences les forces et les positions du manipulateur sont enregistrées. Rappelons qu'une particularité des manipulateurs parallèles est que l'on connaît à tout instant la position exacte du plateau mobile même si des déplacements compliants sont effectués.

2.4 Les capteurs de force

2.4.1 Erreur sur la mesure brute des forces

Lors des expériences on a remarqué que les mesures de force présentaient un caractère aléatoire de non-répétabilité. Un programme de test a été élaboré pour déterminer la fréquence de l'erreur de mesure.

Le principe de ce test est d'effectuer 1000 mesures de force successives en estimant qu'une mesure était erronée lorsque l'écart entre la mesure et une mesure de référence était supérieur à 20 unité capteur soit une différence d'environ 3N. Le tableau suivant résume les résultats. Le 4eme test portait sur 2000 itérations. Le nombre d'erreurs pour chaque capteur est indiqué dans les colonnes numérotées.

test	erreur (%)	1	2	3	4	5	6
1	6.1	15	6	12	9	7	12
2	3.5	0	8	11	4	12	0
3	3.4	0	11	8	8	7	0
4	4.95	20	14	19	12	16	19

On constate qu'environ 5% des mesures sont fausses. Le problème ne semble pas provenir du logiciel d'acquisition puisque le placement d'une boucle d'attente entre deux mesures successives ne modifie pas les valeurs observées. Si l'on augmente le seuil sur l'erreur admise jusqu'a une valeur capteur de 30 unité (soit environ 4.5N) le % d'erreur tombe à zéro. On peut aussi constater que la répartition de l'erreur entre les 6 capteurs ne permet pas de mettre en cause plus spécifiquement l'un d'entre eux.

On a observé toutefois que, d'une manière aléatoire, on peut incriminer la conversion analogique-numérique. En effet lors de certaines mesures la valeur obtenue correspond à une saturation du convertisseur.

Cette constation impose donc la nécessité de réaliser deux mesures successives de force et d'en vérifier la cohérence, ce qui est très pénalisant.

2.4.2 Calibration des capteurs de force

La calibration des capteurs de force consiste à estimer la masse de la partie mobile du manipulateur, ainsi que la position de son centre de gravité, pour pouvoir corriger par la suite la mesure des forces de cette influence. On doit aussi estimer la valeur des coefficients a_i, b_i de chaque capteur qui permettent de calculer les forces axiales à partir des valeurs entières mes_i délivrées par les convertisseurs, selon la formule:

$$f_i = a_i \; mes_i + b_i$$

On doit donc estimer la masse mobile M , les 2 coordonnées du centre de gravité (la masse principale étant due au plateau mobile on connaît la position selon la verticale du centre de gravité), 6 coefficients a_i et 6 coefficients b_i, soit au total 15 termes.

Pour ce faire on utilise la méthode suivante : on pose sur le plateau mobile une masse connue dans une position aléatoire. Le système a alors 17 inconnues : les 12 coefficients a_i, b_i, la masse M de l'équipage mobile, les deux coordonnées de son centre de gravité G ainsi que les deux coordonnées du centre de gravité P de la masse m posée sur le plateau. Ces inconnues sont liées par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^{i=6} f_i \mathbf{n_i} = (m+M)\mathbf{g} \\ \mathcal{M} &= \sum_{i=1}^{i=6} \mathbf{OB_i} \wedge f_i \mathbf{n_i} = (m\mathbf{OP} + M\mathbf{OG}) \wedge \mathbf{g} \end{aligned}$$

où $\mathbf{n_i}$ est le vecteur unitaire du segment i (connu si la position du manipulateur est déterminée), B_i le point d'articulation du segment i et $\mathbf{O}$ le centre du plateau mobile. On dispose ainsi de 6 relations dont 5 sont indépendantes.

On place alors le manipulateur dans cinq positions, réparties régulièrement sur un cercle horizontal centré à la position nominale du manipulateur, et on enregistre les forces axiales renvoyées par le contrôleur à chaque position. On a alors 25 équations dépendantes des 17 inconnues. On utilise alors une méthode de moindre carré pour estimer au mieux ces inconnues.

Cette méthode donne d'excellent résultats : après calcul la somme des résidus (c'est-à-dire la somme des carrés des différences entre les termes de gauche et de droite des 25 équations) est inférieure à 1/100.

2.4.3 Erreurs de mesure sur les forces cartésiennes

Nous avons vu que dans le cas de la main gauche la discrétisation des mesures pouvait conduire à une erreur de mesure sur les forces articulaires de 0.15N. Il est intéressant de se demander quelle est l'erreur correspondante sur les forces cartésiennes. Il est clair que cette erreur dépend de la position du manipulateur puisque l'on à:

$$\underline{F} = J^{-t}(\underline{X})\underline{f}$$

Nous pouvons tracer des atlas de cette erreur en fonction de la position. Cet atlas est présenté sur les figures 2.3, 2.4, 2.5 pour les erreurs sur les forces cartésiennes F_x, F_y, F_z lorsque le plateau est en translation dans le plan x, y (x et y sont compris entre $\pm$ 8cm). Les erreurs sont symétriques en x. Elles le sont aussi en y pour F_x, F_z et sont pratiquement identiques quelle que soit la valeur de y pour F_x.

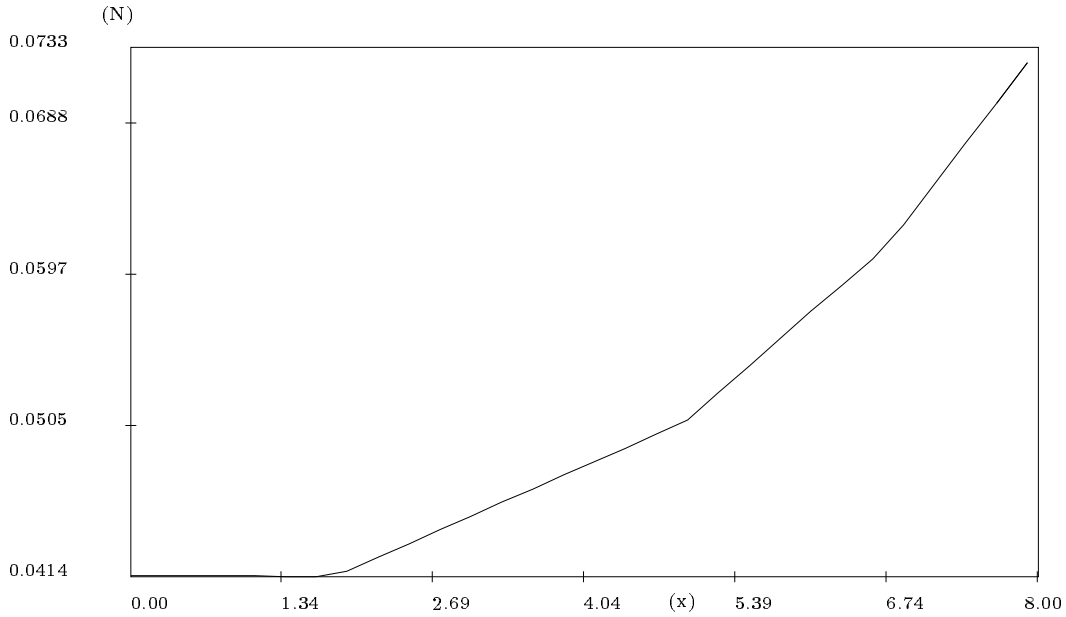

Figure 2.3: Erreur maximale sur la force F_x (mouvement dans le plan x-y)

De ces figures on peut aussi déduire que la main gauche en tant que capteur d'efforts n'est pas isotrope. En effet elle est environ dix fois plus sensible à un effort latéral qu'à un effort selon l'axe vertical. Les figures 2.6, 2.7, 2.8 présentent une vue tridimensionnelle des erreurs en x, y, z.

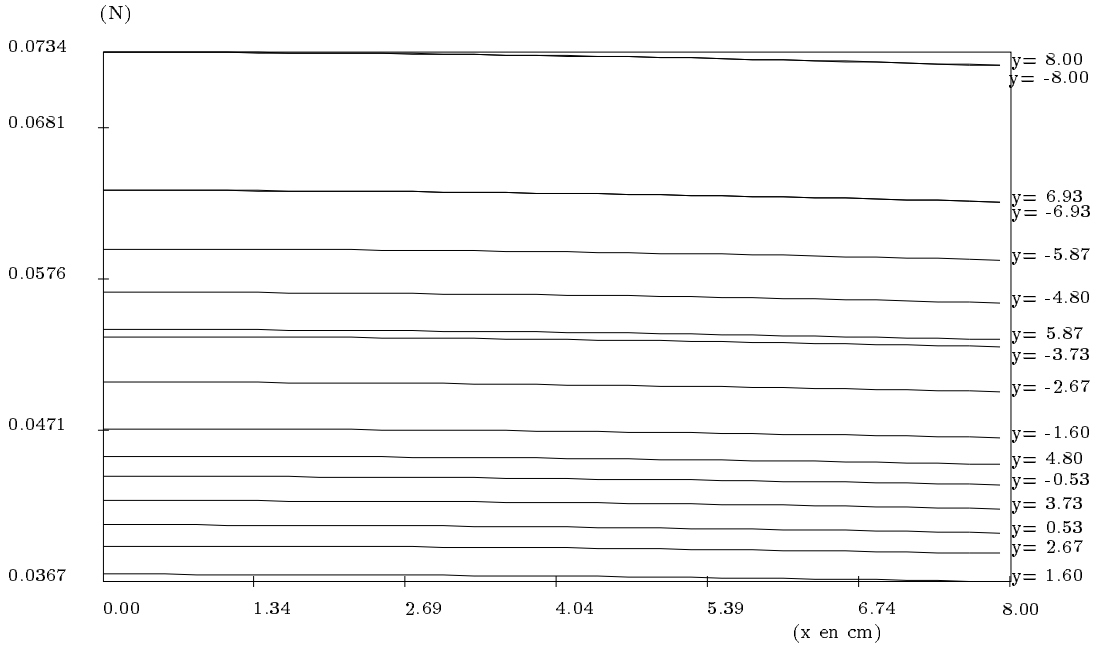

Figure 2.4: Erreur maximale sur la force F_y (mouvement dans le plan x-y)

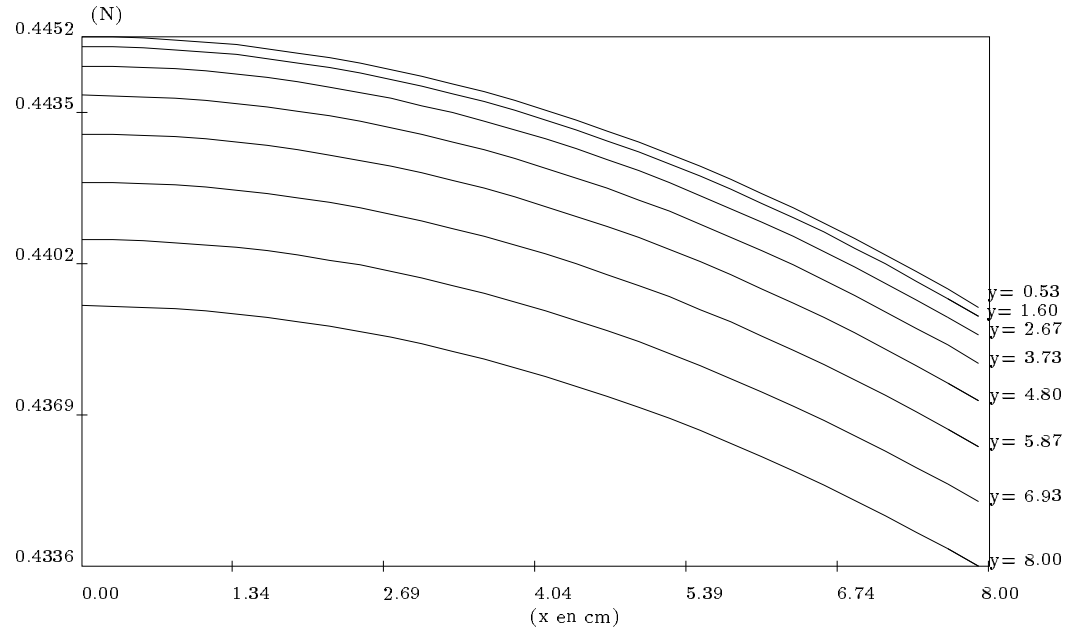

Figure 2.5: Erreur maximale sur la force F_z (mouvement dans le plan x-y)

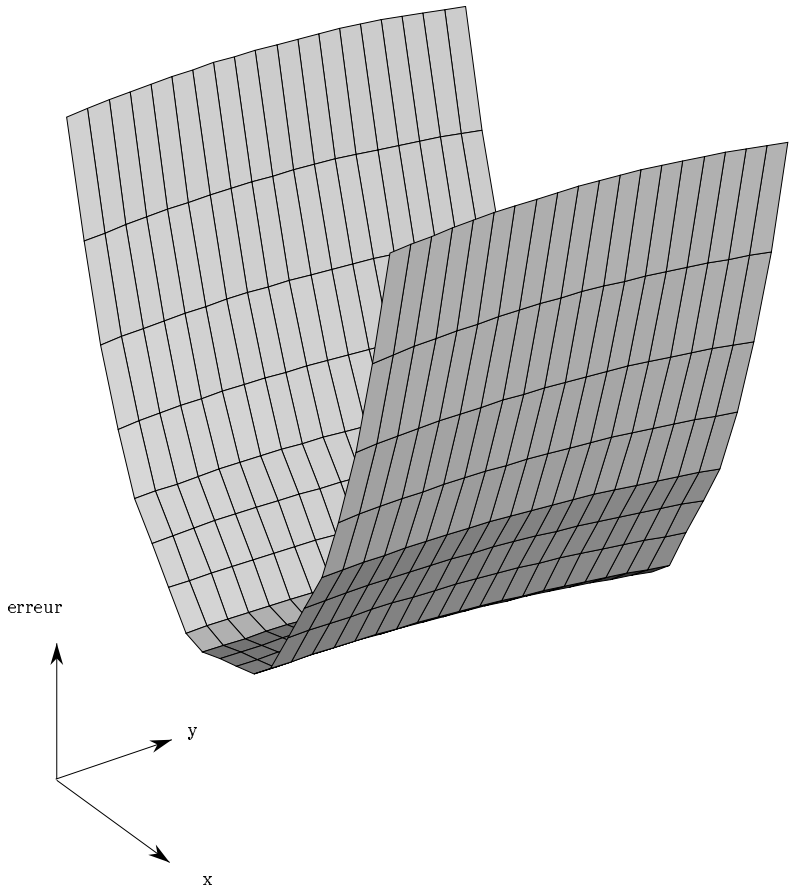

Figure 2.6: Erreur maximale sur la force F_x

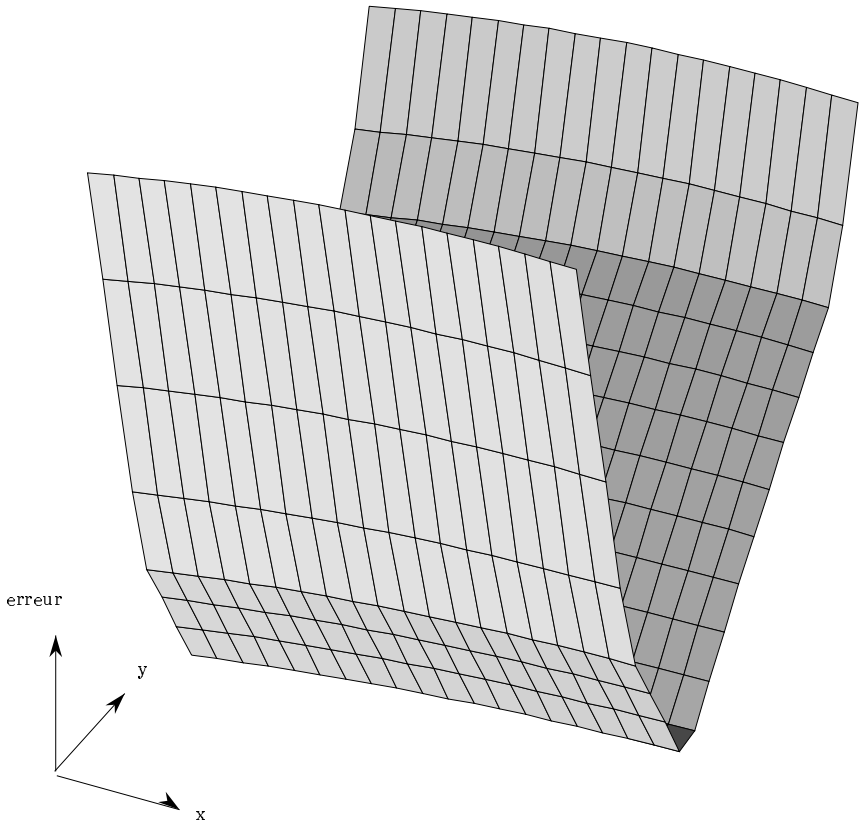

Figure 2.7: Erreur maximale sur la force F_y

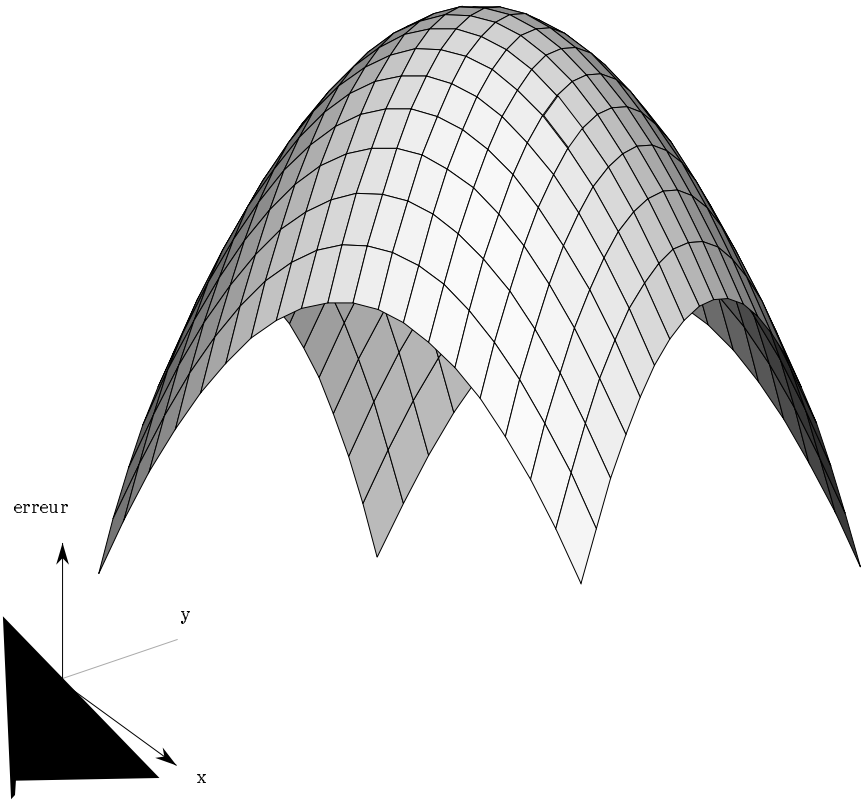

Figure 2.8: Erreur maximale sur la force F_z

2.4.4 Charge nominale

Dans notre prototype la charge est limitée par la capacité de mesure des capteurs de forces (30 daN). Pour une charge donnée il est clair que les forces articulaires dépendent à la fois de la position du manipulateur et de la position du centre de gravité de la charge. Pour simplifier nous allons considérer une charge dont le centre de gravité est confondu avec le centre du plateau mobile. Les figures 2.9, 2.10, 2.11 donnent les valeurs maximales des forces F_x, F_y, F_z selon la position du manipulateur dans le plan x-y (x et y sont compris entre $\pm$ 8cm). Pour ce qui concerne les force F_x on voit qu'il faut considérer que la force maximale est d'environ 100N soit le tiers de la force articulaire maximum.

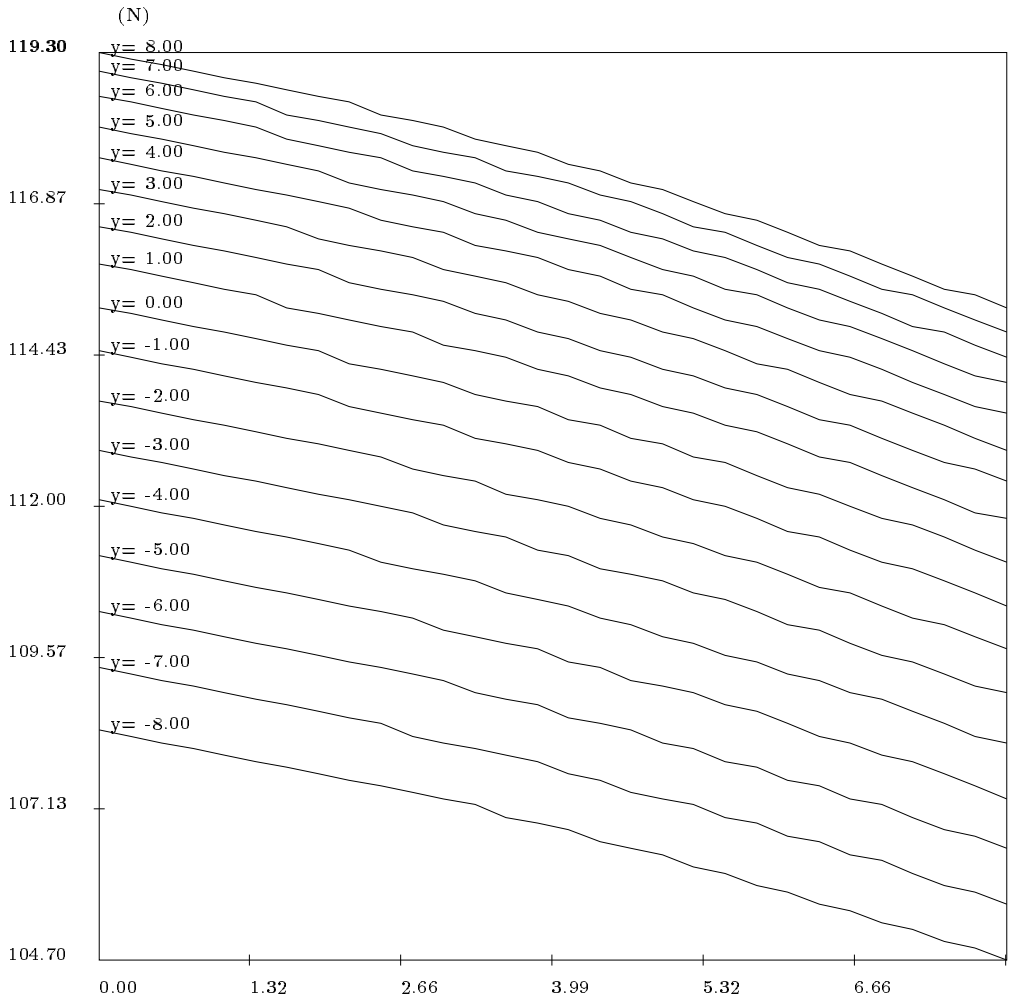

Figure 2.9: Charge maximale: F_x

Il en est de même pour les forces F_y.

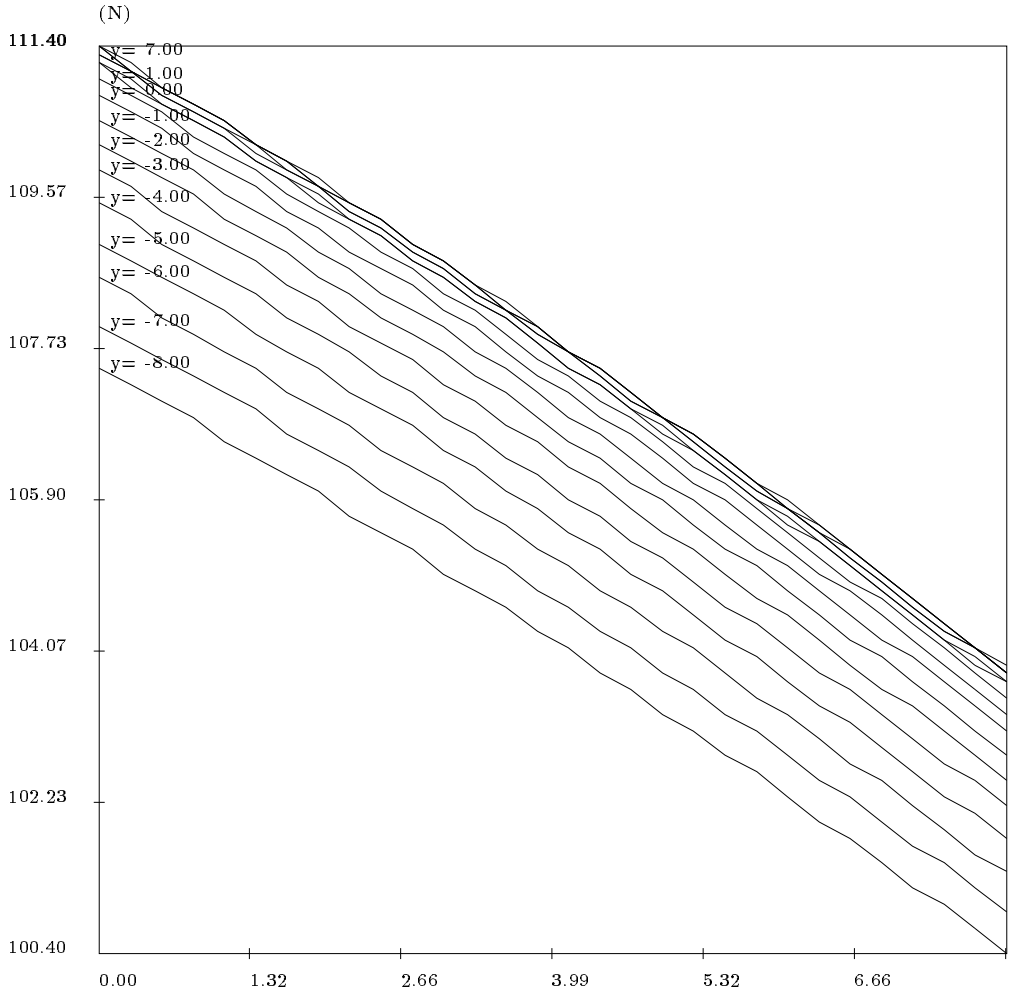

Figure 2.10: Charge maximale: F_y

Pour les forces F_z les variations sont plus importantes allant de six fois la charge articulaire maximale à une fois cette charge. Dans un rayon de un centimètre autour de la position nominale on peut dire que la charge maximale doit être inférieure à 1300N pour une force verticale, 110N pour une force latérale. Cet écart est du à la géométrie de la main gauche, concue pour supporter de forte charge en position verticale.

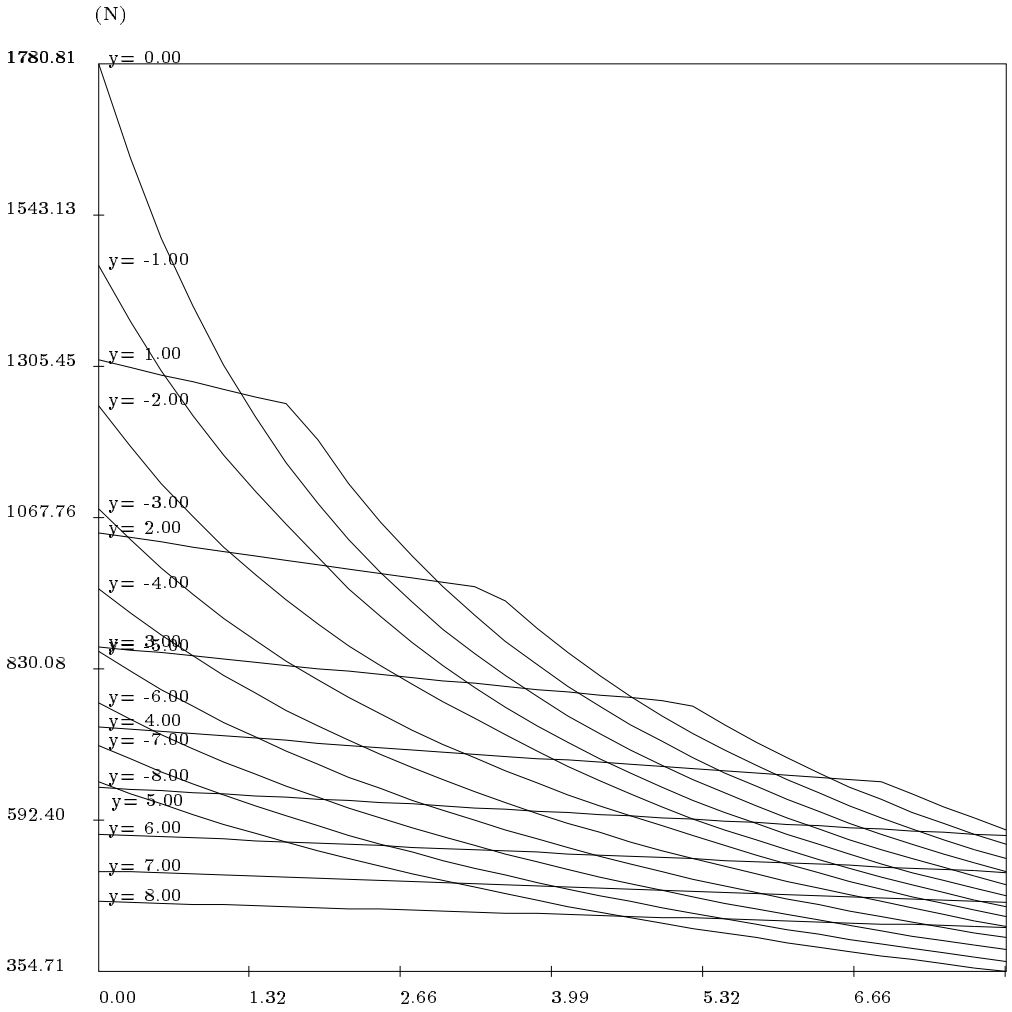

Figure 2.11: Charge maximale: F_z

La figure 2.12 présente une vue tridimensionnelle de la valeur de la charge nominale F_z selon un quadrillage en x, y.

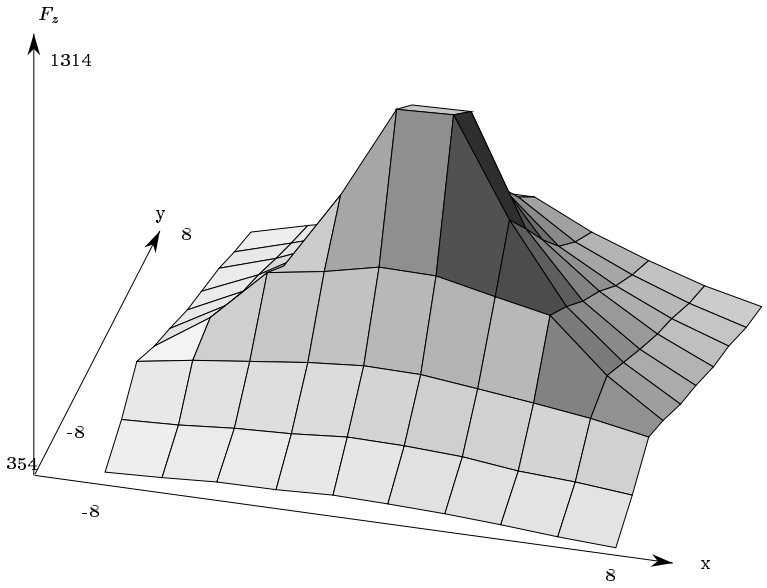

Figure 2.12: Vue tridimensionnelle de la charge maximale F_z

2.5 Suivi de contour

Nous nous intéressons ici au suivi de contour plan réalisé avec une commande en vitesse. Le suivi dans l'espace implique des déplacements trop importants pour être réalisés par un robot parallèle seul : cela implique donc un travail de coopération avec un robot porteur que nous traiterons dans une autre partie de cette monographie.

La méthode employée est de fixer un point dans l'espace et de commander les mouvements du manipulateur de façon à ce que ce point balaye le contour d'un objet fixé sur le plateau. Nous présentons les résultats obtenus pour trois pièces : une bobine d'un contacteur électro-mécanique, un parallélépipède en bois et une clé plate. Ces pièces présentent des discontinuitées de contour importantes ainsi que des caractéristiques de friction très variables. Par exemple la bobine présente sur deux de ces arêtes un aimant qui augmente considérablement la friction.

Rappellons l'idée de base de l'algorithme de suivi de contour. On contrôle en force la direction du plan définie par le vecteur des forces cartésiennes, corrigées par une estimée du frottement (modèle de frottement sec à coefficient constant, du moins au premier passage). Ce contrôle en force est effectué à l'aide d'un simple régulateur proportionnel. La direction perpendiculaire à la précédente est contrôlée en position. Pour définir quelle direction de la tangente est choisie pour le déplacement l'opérateur indique simplement un sens de rotation. La direction de recherche du premier contact est fixée par la donnée d'une vitesse initiale, gardée par une distance maximum à parcourir. Le critère d'arrêt est défini ici comme une distance à parcourir.

Dans le cas d'un changement brusque de contour il est possible que le manipulateur perde le contact entre deux mesures de force. On utilise alors une stratégie simple pour retrouver le contour à partir de la position courante et du dernier point de contact (figure 2.13). Après la perte de contact le manipulateur suit une trajectoire issue du point courant selon une direction faisant un angle θ avec sa direction précédente. Cet angle est fixé par l'opérateur.

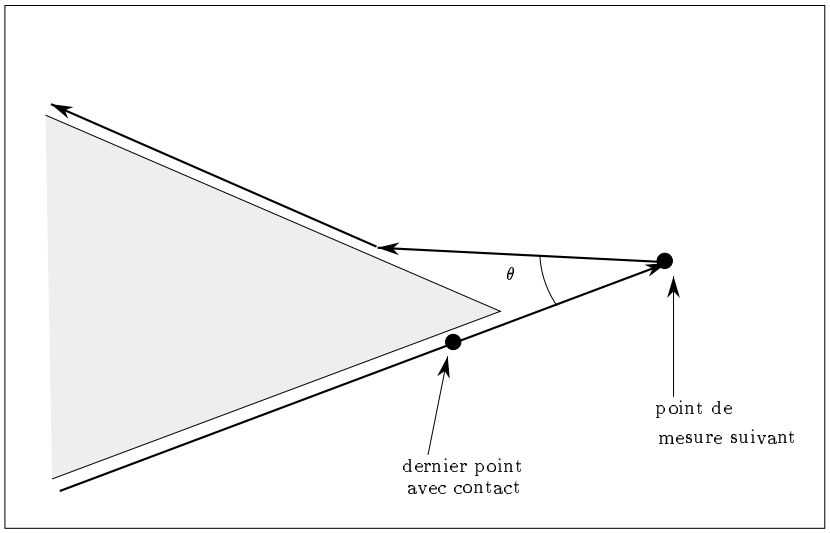

Figure 2.13: Stratégie pour retrouver un point de contact

Dans le cas d'un contour très aigu une grande portion du contour risque d'être inex-

plorée. La stratégie pour éviter ce phénomène consiste à limiter l'amplitude du déplacement de recherche à une valeur fixe L. Si le contact n'est pas retrouvé sur cette portion le manipulateur recommence alors la stratégie à partir du point courant (figure 2.14).

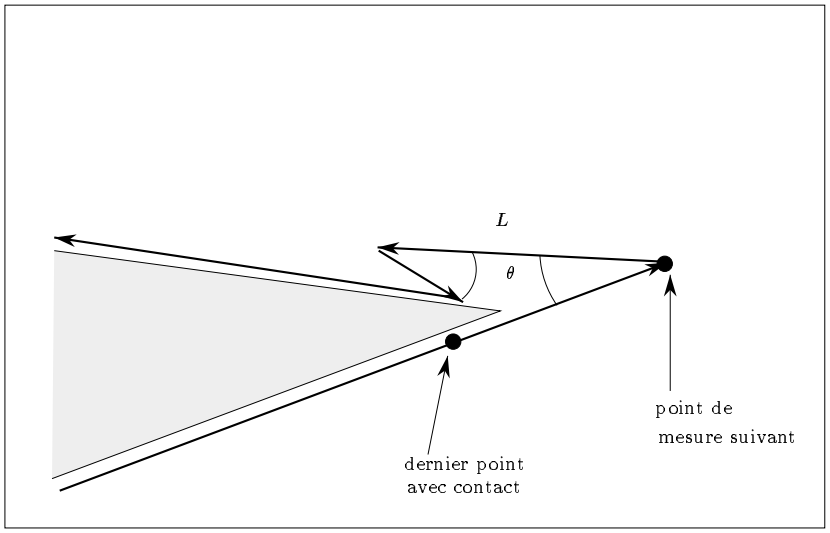

Figure 2.14: Stratégie complète pour retrouver un point de contact

Le contrôleur présenté ici n'utilise donc que l'information locale, c'est-à-dire la dernière mesure de force effectuée. On a choisit d'implanter en parallèle l'utilisation d'une information plus globale qui consiste à déterminer si le manipulateur se trouve sur une partie rectiligne du contour. Pour cela on calcule en chaque point la droite qui passe le mieux parmi les points de contour déjà découverts. Si le point courant se trouve à faible distance de cette droite la direction à contrôler en force est donnée par la normale à la droite et non plus par la mesure des forces. Si ce n'est pas le cas on recommence l'estimation de la droite avec comme premier point le point courant. Une telle stratégie pourrait bien entendu s'appliquer à d'autre type de modèle d'information (trajectoire circulaire par exemple).

2.5.1 Quelques expériences

Le point fixe est représenté dans les expériences par l'extrémité d'une meuleuse. L'outil est placé au dessus du manipulateur par un ensemble de liaison relativement souple : même dans le cas de force de contact faible on a pu observer des déformations non négligeables, ce qui introduit des déformations dans le contour mesuré.

2.5.1.1 Contacteur

L'expérience est illustrée par la photo 2.15. La figure 2.16 montre le contour obtenue lorsque le mode de communication entre le SUN et le contrôleur est la liaison série. Les traits issus du contour représentent la direction de la force au point correspondant. La vitesse de déplacement sur le contour est de 0.03 cm/s et la force de consigne est 4.5N.

La force résultante est représentée sur la figure 2.17. La moyenne des forces est de 5.54 N, avec un écart-type de 4.67 N^2. Si on exclut les points où le contact a été perdu on obtient

Figure 2.15: Expérience de suivi de contour pour le contacteur

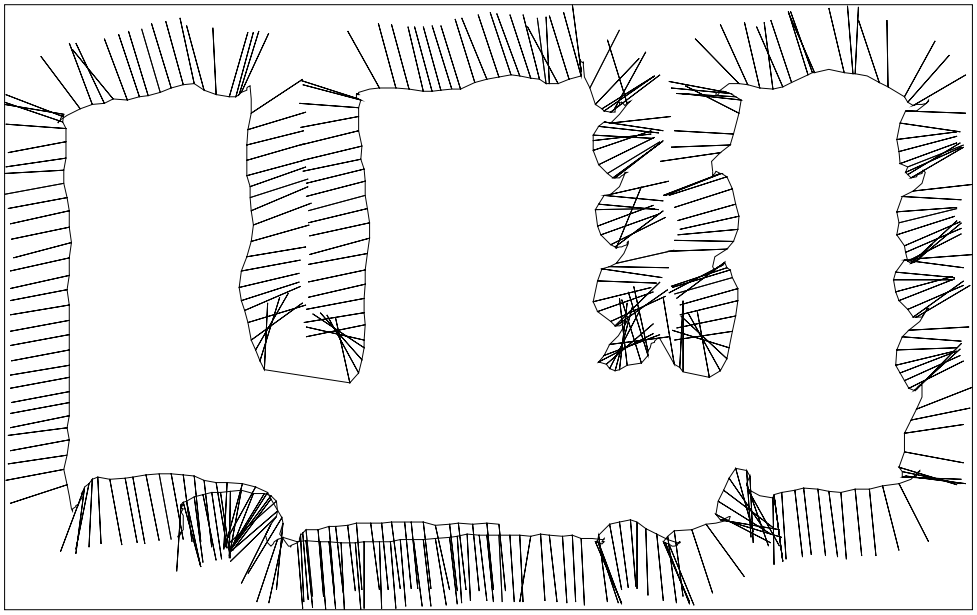

Figure 2.16: Résultat du suivi de contour en utilisant la liaison série

une moyenne de 7.74N et un écart-type de 4.12 N^2. Après filtrage on obtient alors le contour de la figure 2.18.

Examinons maintenant le résultat obtenue en utilisant la liaison bus à bus. Dans ce cas la vitesse est de 0.04cm/s, la force de consigne 5N.

La force résultante est représentée sur la figure 2.20. La moyenne des forces est de 5.64 N, avec un écart-type de 3.96 N^2. Si on exclut les points où le contact a été perdu on obtient une moyenne de 6.68N et un écart-type de 3.68 N^2. L'utilisation de ce mode de communication améliore le comportement de la commande alors que la vitesse de parcours a été augmentée. Ainsi l'écart entre la force moyenne lors du contact et la force de consigne est de 33 % en place des 72 % dans le cas précedent. Après filtrage on obtient alors le contour de la figure 2.21.

Ces enregistrements présentent un caractère relativement chaotique explicable de différentes manières. Nous avons tout d'abord mentionné le caractère peu académique des pièces que nous avons choisi pour ces expériences. La présence de nombreux points anguleux où l'on est assuré de la perte de contact ou, au contraire, d'une augmentation importante de la force de contact (pour les coins où le contour s'oriente perpendiculairement à la trajectoire et que la trajectoire est orientée vers l'intérieur de la matière) va perturber considérablement l'enregistrement des forces. En effet en ces points la procédure de recherche de contact va engendrer un nombre important de points de mesure. Par contre sur les parties du contour où la force est correcte le manipulateur se déplace le plus rapidement (la vitesse de glissement est quasiment égale à la vitesse de consigne puisqu'il n'y a pas de correction à faire sur la normale) et, par conséquent, on va disposer de peu de mesure. Donc sur les enregistrements de force brute on va mettre plus en évidence les points problématiques que les portions de contour où la force a été correctement régulée. D'autre part on a vu que l'empilement des vitesses dans la commande du manipulateur pouvait introduire des écarts importants entre la commande demandée et la vitesse exécutée.

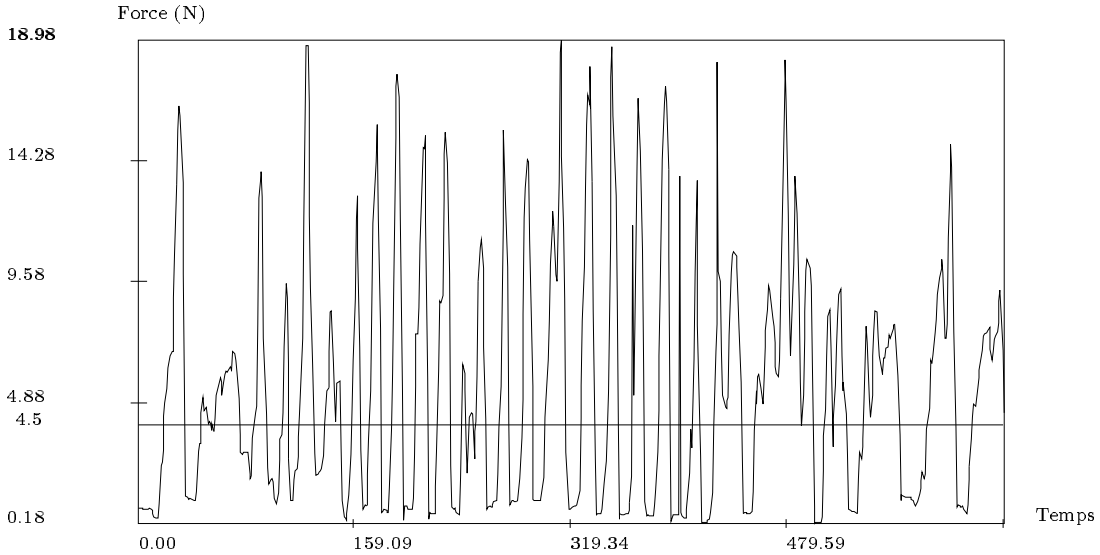

Figure 2.17: Force résultante (liaison série)

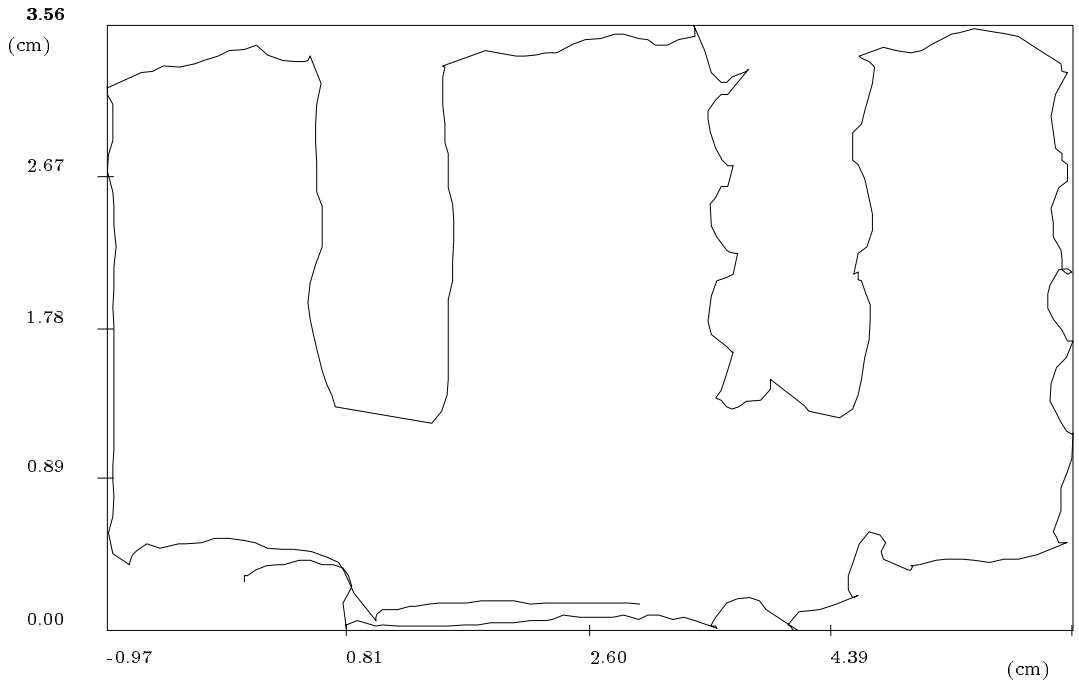

Figure 2.18: Contour filtré (liaison série)

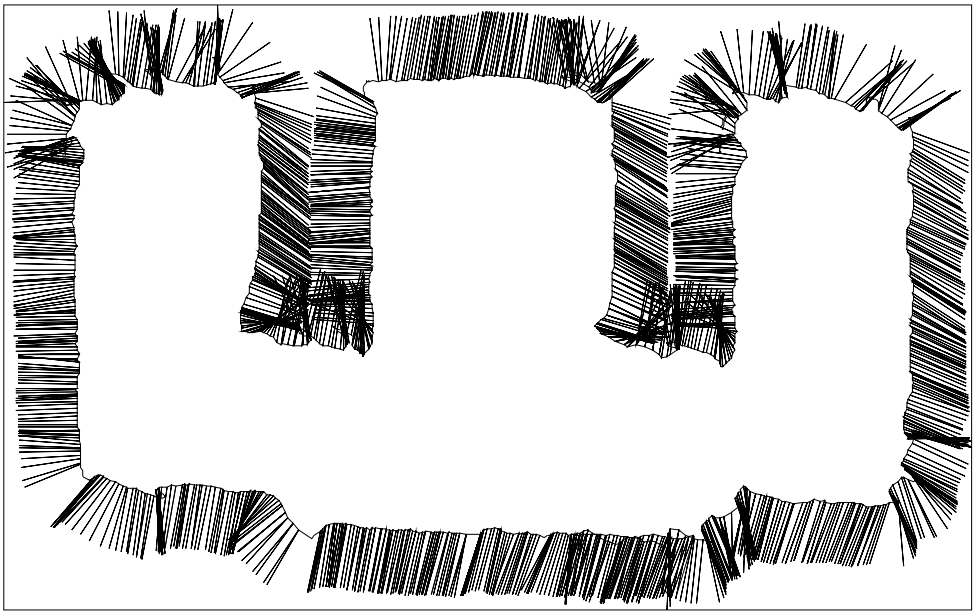

Figure 2.19: Résultat du suivi de contour en utilisant la liaison bus à bus

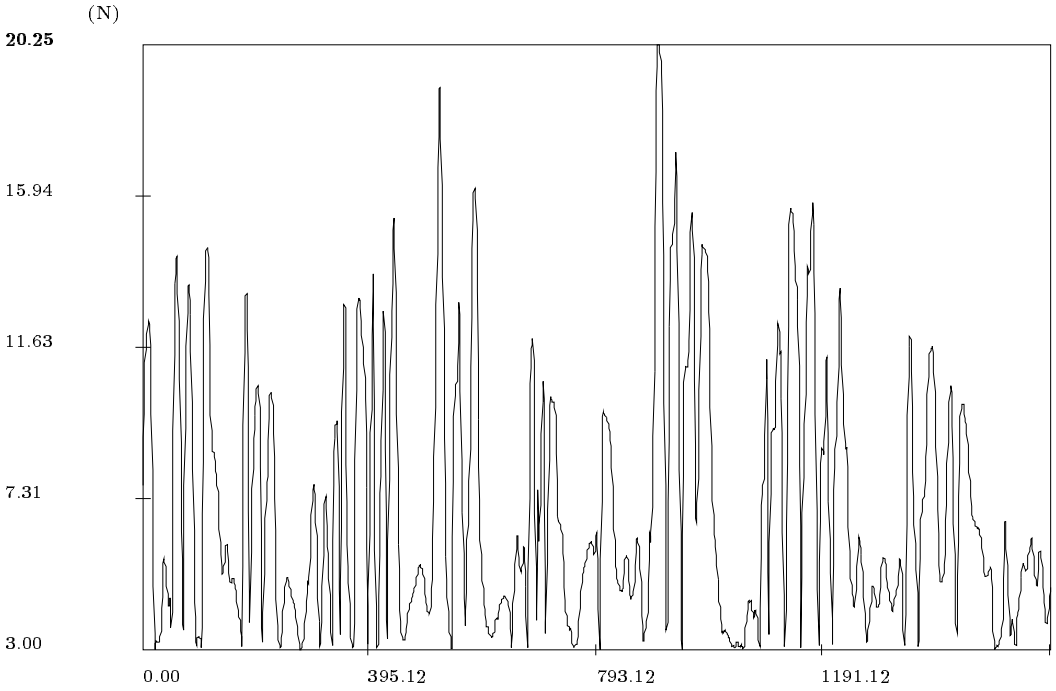

Figure 2.20: Force résultante (liaison bus à bus)

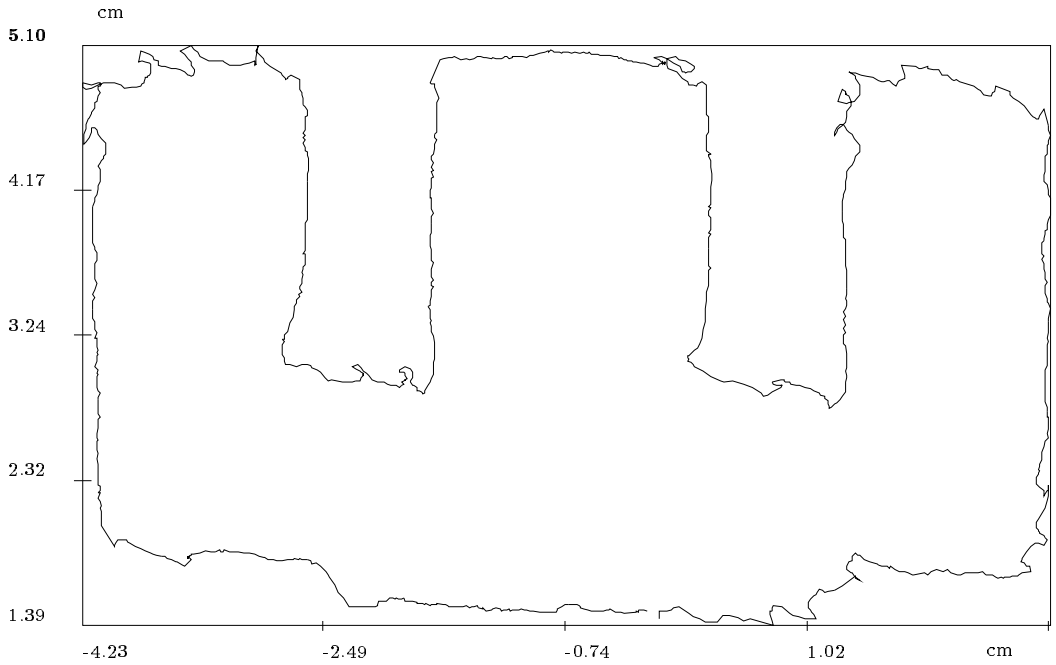

Figure 2.21: Contour filtré (liaison bus à bus)

Une manière plus judicieuse de présenter les choses consiste simplement à comptabiliser les segments du contour où la force est sensiblement correcte, de calculer la longueur totale de ces segments et de la comparer à la longueur totale du contour suivi. Pour ce qui concerne la bobine 49.4% du contour est suivi avec une force comprise entre 2.5N et 7.5N (figure 2.22) alors que 12.1% est suivie avec une force comprise entre 4.5N et 5.5N.

Figure 2.22: Partie du contour où la force est comprise entre 2.5N et 7.5N (contacteur)

2.5.1.2 Parallélépipède

Nous présentons ici seulement les résultats avec la liaison bus à bus. La force de consigne est 5N, la vitesse sur le contour de 0.04cm/s.

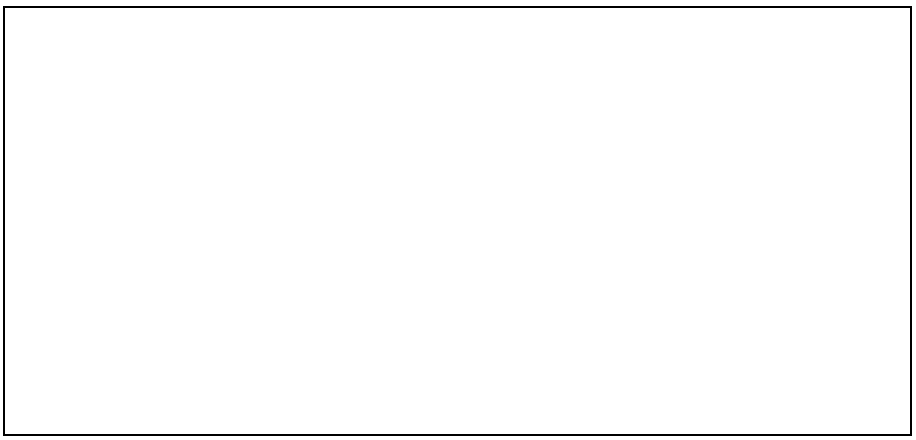

Figure 2.23: Résultat du suivi de contour en utilisant la liaison bus à bus

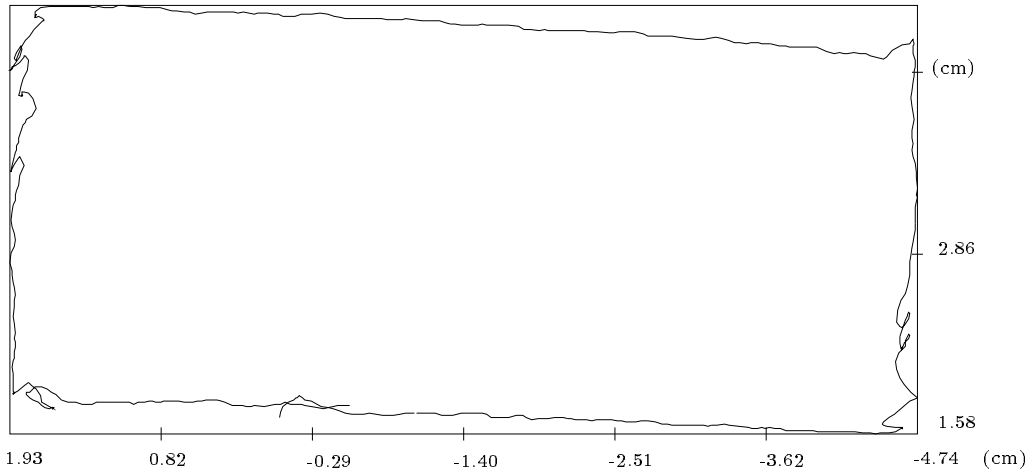

Figure 2.24: Contour filtré (liaison bus à bus)

La moyenne de la force en prenant en compte tous les points vaut 4.67N avec un écart-type de 2.5 N^2. Si l'on tient compte seulement des points de contact on obtient 5.8N avec un écart-type de 1.71 N^2.

Dans le cas de nos expériences on obtient que pour la pièce en bois 70 % du contour est suivi avec une force comprise entre 2.5N et 7.5N (figure 2.26) alors que 26% du contour est suivi avec une force comprise entre 4.5N et 5.5N.

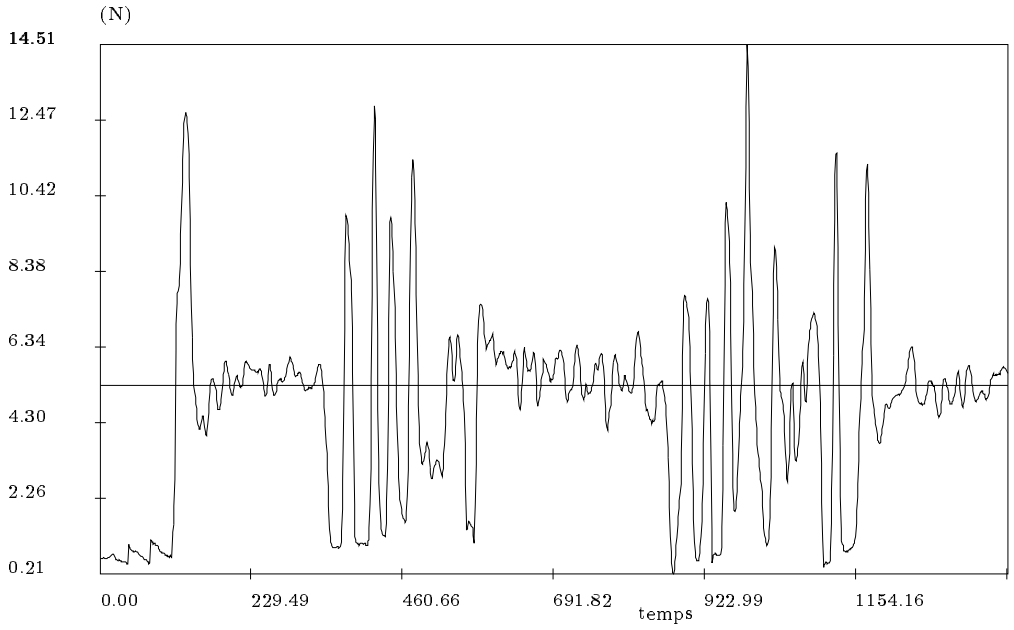

Figure 2.25: Force résultante (liaison bus à bus)

Figure 2.26: Partie du contour où la force est comprise entre 2.5N et 7.5N (bois)

2.5.1.3 Clé plate

Nous présentons ici seulement les résultats avec la liaison série. La force de consigne est 5N, la vitesse sur le contour de 0.04cm/s.

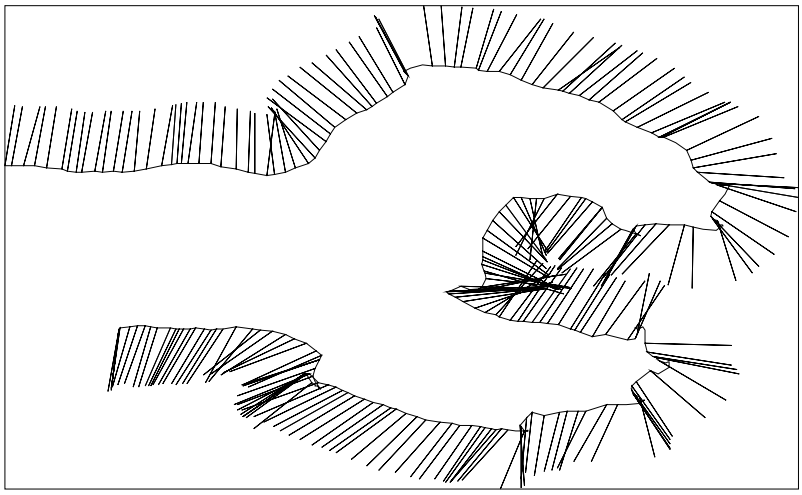

Figure 2.27: Résultat du suivi de contour en utilisant la liaison série

La moyenne de la force en prenant en compte tous les points vaut 6.41N avec un écart-type de 3.7 N^2. Si l'on tient compte seulement des points de contact on obtient 7.62N avec un écart-type de 3.13 N^2.

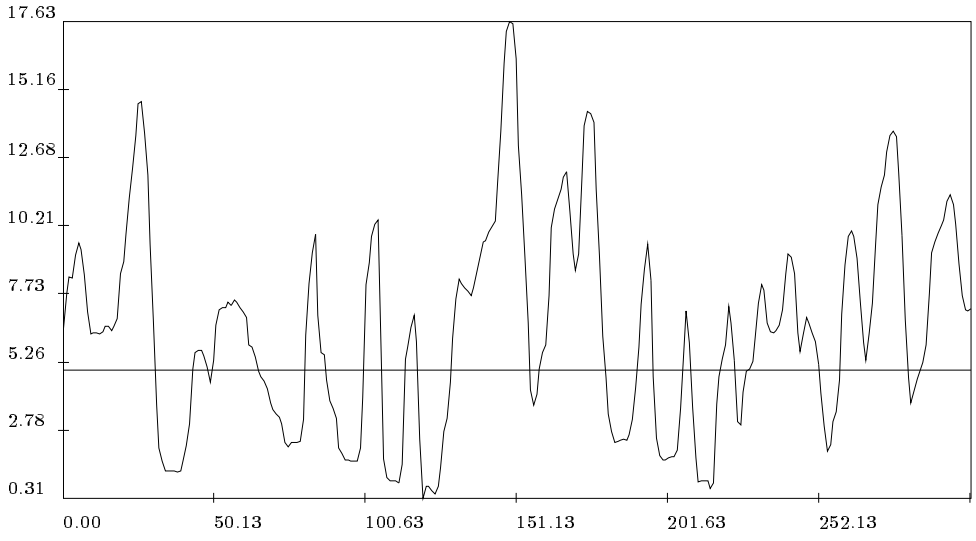

Figure 2.28: Force résultante (liaison série)

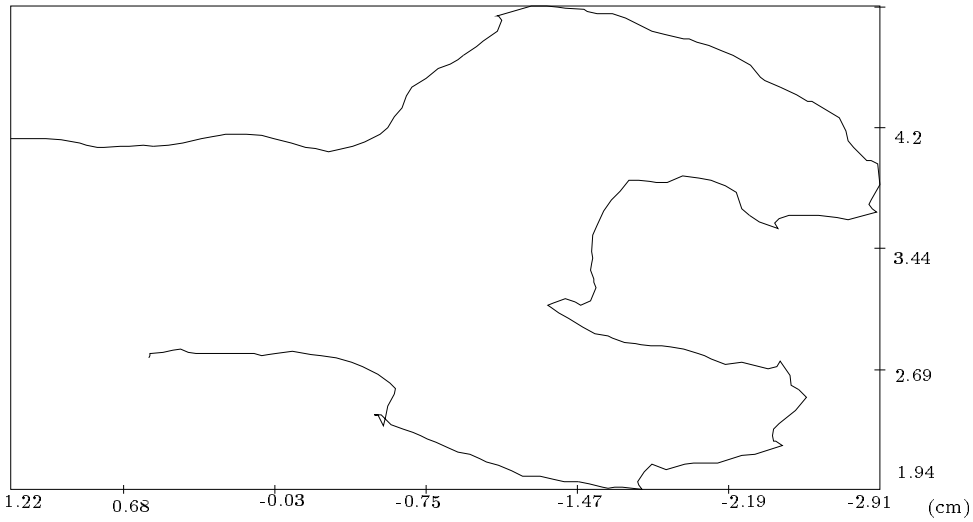

Figure 2.29: Contour filtré (liaison série)

Figure 2.30: Partie du contour où la force est comprise entre 2.5N et 7.5N (bois)

2.6 Approximation polygonale

Lors du suivi de contour on a vu que l'on ne disposait pas de modèle de la pièce, modèle qui serait toutefois utile dans le cas où l'on doit traiter plusieurs pièces du même type. Après une première expérience on dispose d'un nuage de points constitué des coordonnées du manipulateur qui sont enregistrées au cours de l'expérience mais le modèle ne peut être constitué directement par ces points vu leur densité. On va alors essayer de construire une approximation polygonale du contour à partir de ce nuage.

La première étape du traitement va consister à éliminer les points de la trajectoire du manipulateur où il n'y a pas eu de contact. Ceci est obtenu aisément par un simple seuillage puisque l'on dispose pour chaque point de l'amplitude de la force de contact.

Le problème de la construction d'une approximation polygonale à partir d'un nuage de point est bien connu. On a choisi d'utiliser un programme d'approximation polygonale sur une image, élaboré dans le cadre du projet PASTIS par G. Giraudon et M. Berthod[3]. Les phases successives du traitement sont les suivantes :

- à partir du fichier de contour filtré on génére une image du contour sous format INRIMAGE (ceci est effectué par le logiciel de dessin JPdraw qui prend en entrée le fichier de contour filtré et avec lequel on peut générer automatiquement une telle image)
- les points de l'image sont chaînés et une image de l'approximation polygonale construite.
- l'image de l'approximation polygonale est converti par un programme de P. Limozin sous la forme d'un fichier iplot qui décrit les segments présents dans l'image.
- le fichier iplot (qui décrit les segments dans une image à partir des coordonnées en pixel) est recalé dans notre repère de travail, ce qui permet d'obtenir l'approximation polygonale directement dans le repère de travail de la main gauche.

La figure 2.31 présente le résultat de l'approximation polygonale dans le cas de la bobine. Une telle approximation polygonale peut alors être introduite comme trajectoire de consigne pour la main gauche, le retour d'efforts se bornant à effectuer des corrections de position autour de cette trajectoire pour assurer un meilleure contrôle des forces de contact.

La méthode de construction de l'approximation polygonale décrite est basée sur un nombre quasi-infini de mesures. Une autre type de méthode pour les objets polygonaux repose au contraire sur un nombre fini de mesure et sur une stratégie de la prise de mesure qui garantit un nombre minimal de mesure pour la découverte de l'objet: c'est le "probing" décrit dans [2] qui a été implanté mais pas avec la "main gauche".

2.7 Estimation du coefficient de friction

Nous avons vu qu'un des éléments importants de la commande par retour d'efforts était la valeur du coefficient de friction qui introduit un décalage entre la valeur de la normale au contour et celle obtenue à partir de la mesure des forces. Il peut donc être intéressant d'obtenir une estimation des valeurs de ce coefficient pour les réinjecter dans la commande. Pour cela on va utiliser l'approximation polygonale construite dans la précédente section.

Cette approximation polygonale permet d'obtenir la normale unitaire $\mathbf{N}$ au contour pour chacun des segments qui la constitue. Si l'on considère alors tous les points du contour filtré qui sont sur un des segments de l'approximation poygonale et la direction moyenne de la force

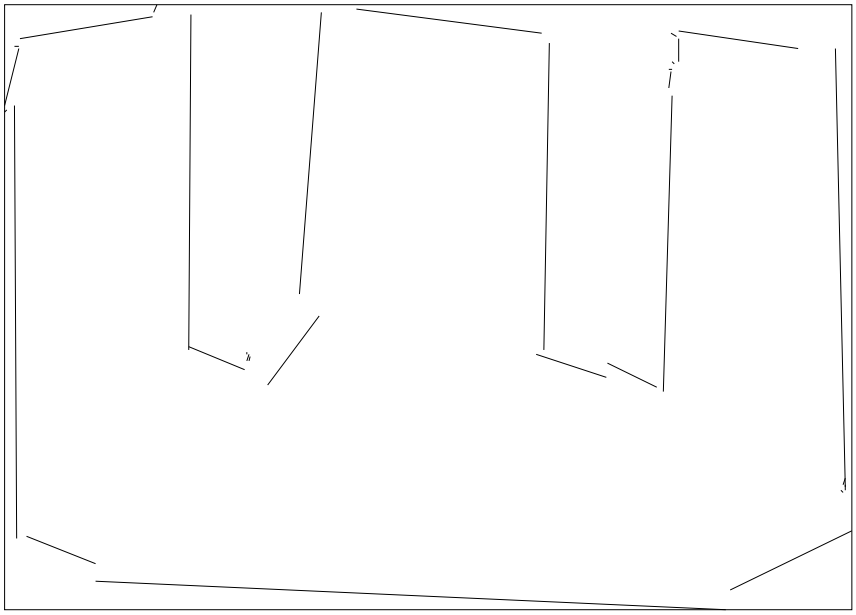

Figure 2.31: Construction d'un modèle polygonale à partir de la trajectoire de la main gauche (contacteur)

de contact décrit par le vecteur unitaire $\mathbf{D}$ on peut alors déterminer la valeur moyenne du coefficient de friction μ_m par:

$$\mu_m = \tan(asin(||\mathbf{N} \wedge \mathbf{D}||)) \tag{2.1}$$

alors que l'angle du cône de friction est donné par:

$$asin(||\mathbf{N} \wedge \mathbf{D}||) \tag{2.2}$$

On peut calculer aussi les valeurs minima et maxima de ce coefficient en considérant les vecteurs $\mathbf{D_{max}}$ et $\mathbf{D_{min}}$ tel que l'angle correspondant du cône de friction soit maximum ou minimum. Les coefficients de friction maximum et minimum sont alors donnés par:

$$\mu_{max} = \tan(asin(||\mathbf{N} \wedge \mathbf{D_{max}}||)) \tag{2.3}$$

$$\mu_{min} = \tan(asin(||\mathbf{N} \wedge \mathbf{D_{min}}||)) \tag{2.4}$$

Ce calcul est évidemment valable si le nombre de point sur le segment de l'approximation polygonale est suffisament grand.

Nous avons appliqué cette méthode pour le contacteur et la figure 2.32 présente le résultat sur l'approximation polygonale. Les valeurs sur les segments entre deux cercles noirs sont les valeurs du coefficient de friction avec, entre parenthéses, le nombre de points utilisés pour son calcul.

La figure 2.33 présente les calculs d'erreur sur ce coefficient de friction. Les barres verticales épaisses indiquent les valeurs maxima et minima du coefficient sur chacun des segments de l'approximation polygonale.

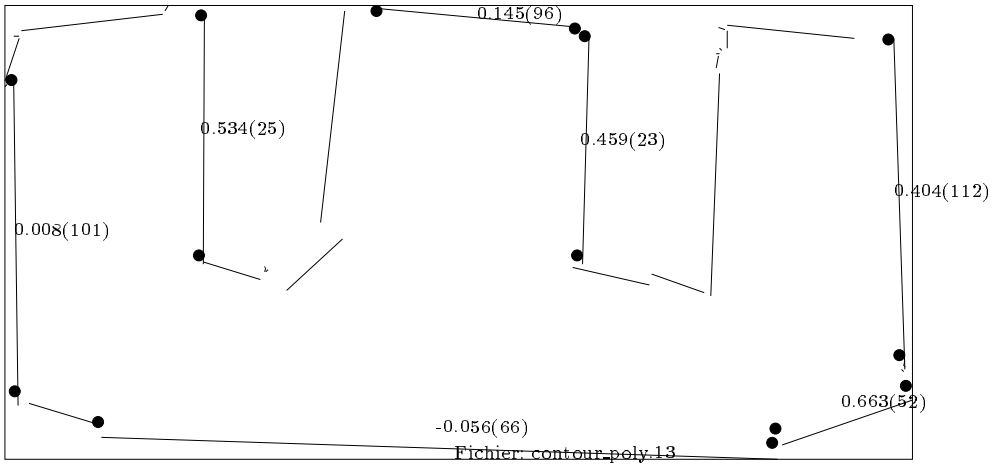

Figure 2.32: Estimation du coefficient de friction (contacteur)

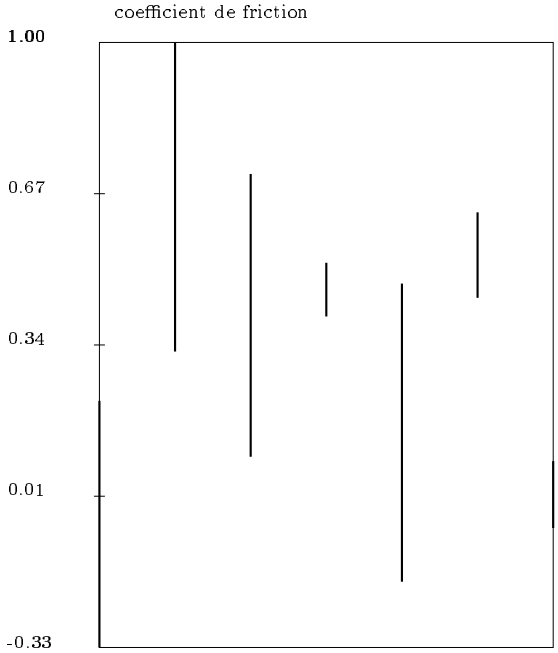

Figure 2.33: Erreur sur le coefficient de friction

On peut constater la disparité importante de ce coefficient qui correspond d'ailleurs aux constatations intuitives que l'on obtient en suivant à la main le contour des pièces. Ainsi sur la pièce en bois on obtient un coefficient de friction important sur la face où le découpage a été fait à la scie, entraînant une rugosité importante. Une face de la bobine présente un coefficient de friction quasiment nulle, ce qui est normal si l'on observe sur la figure 2.19 que la force est en effet quasiment normale au contour sur l'une des arêtes.

2.8 Action sur une manivelle

Une application intéressante du programme de suivi de contour est l'action d'un robot sur une manivelle (ou sur une poignet de porte). Le problème est le suivant: le manipulateur doit faire tourner une manivelle dont il tient la poignet sans connaître la position du centre de rotation.

Le programme de suivi de contour est directement utilisable dans ce cas. La figure 2.34 présente la trajectoire suivie par le manipulateur ainsi que la direction de la force s'exercant sur lui (dans notre cas c'est en fait le robot qui tourne autour d'un point fixe). La figure 2.35 présente les forces en x et en y lors de l'expérience.

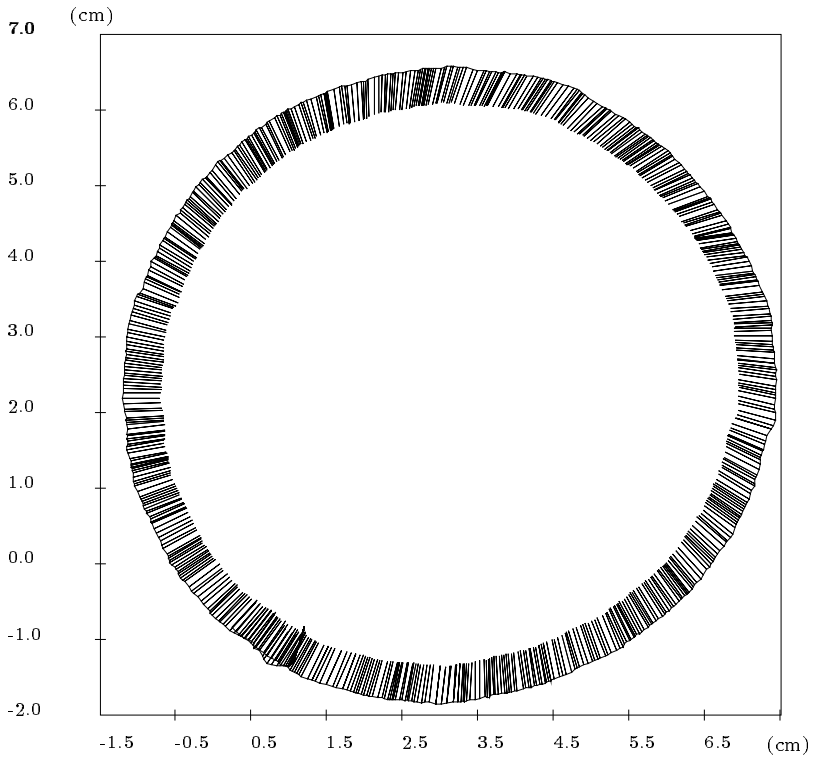

Figure 2.34: Trajectoire suivie par un manipulateur lors de l'action sur une manivelle

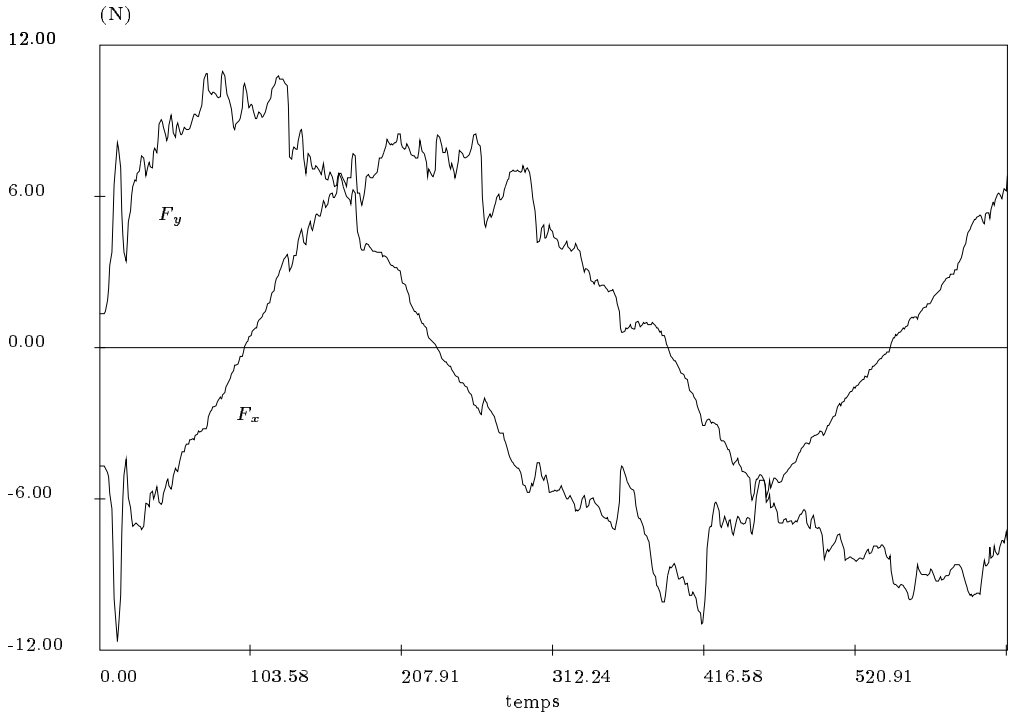

Figure 2.35: Force subies par un manipulateur lors de l'action sur une manivelle

2.9 L'assemblage

L'assemblage est un des autres problèmes génériques de la commande par retour d'efforts. On s'intéresse ici aux assemblages fins, c'est-à-dire à ceux où le jeu entre pièces à assembler est de l'ordre de 10 μm.

La méthode opératoire est la suivante : une des deux pièces à assembler est fixée sur le plateau mobile de la main gauche et son complémentaire est soit lié à un manipulateur porteur soit à un point fixe. La main gauche procéde alors à l'insertion, ce qui est illustré par la photographie de la figure 2.36

Figure 2.36: Opération d'assemblage en coopération

Le contrôleur par retour d'efforts reste le même dans son principe mais il gagne un degré de complexité dans la mesure où, par rapport au suivi de contour, on contrôle ici trois directions de l'espace au lieu de deux. Les orientations réciproques des pièces sont supposées correctes ou l'erreur suffisament faible pour que la compliance passive de la main gauche puisse réaliser la correction.

La commande utilisée ici est une commande en position mais dans le principe rien ne

s'oppose à une commande en vitesse. Nous avons choisi ce type de commande surtout en raison du matériel disponible. La communication entre le contrôleur robot et le SUN passe par la liaison série.

Du point de vue de l'opérateur la définition d'un assemblage se borne à la définition d'une direction d'insertion (par la donnée d'une vitesse initiale pour la recherche du contact) et d'un gain pour le régulateur de force. On définit aussi deux critères d'arrêt: le premier est un déplacement maximum selon la direction d'insertion (utile pour la définition de tâche d'assemblage de trous débouchants) et un critère de coaxialité entre la force et la direction d'insertion (qui permet l'arrêt de l'assemblage si le trou est non débouchant).

D'un point de vue pratique on a choisit de réaliser des assemblages selon une direction d'insertion horizontale (qui a l'avantage par rapport à la direction verticale de bien mettre en évidence l'action du contrôleur) sur des pièces de formes variées : cube, cylindre et pièce à multiples contacts. Nous présentons ici les résultats pour les deux premiers types de pièce (mais le contrôleur fonctionne aussi bien dans le troisième cas). Les jeux sont de l'ordre de 10 μm dans les deux cas.

Par convention la direction d'insertion sera désignée dans la suite par la direction x. Les deux directions y, z sont orthogonales entre elles et avec x, (x, y, z) formant un triédre orthonormé direct.

2.9.1 Assemblage cubique

La figure 2.37 présente les corrections apportées par le contrôleur lors de l'assemblage du cube. On peut y constater que l'amplitude des corrections (qui correspondent à l'erreur d'alignement initial) sont d'environ 3.4 mm selon l'axe y et 1mm selon l'axe z. La figure 2.38 présente la position selon l'axe d'insertion lors de l'assemblage et la figure 2.39 présente la force de contact durant l'expérience.

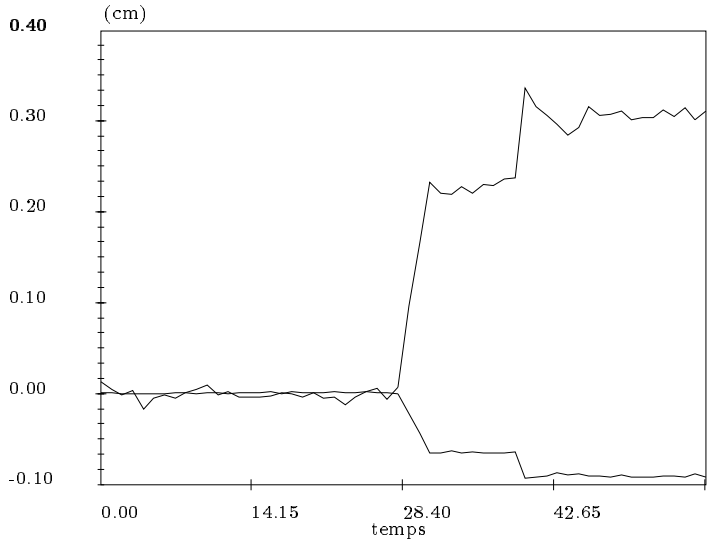

Figure 2.37: Correction de position lors de l'assemblage cubique

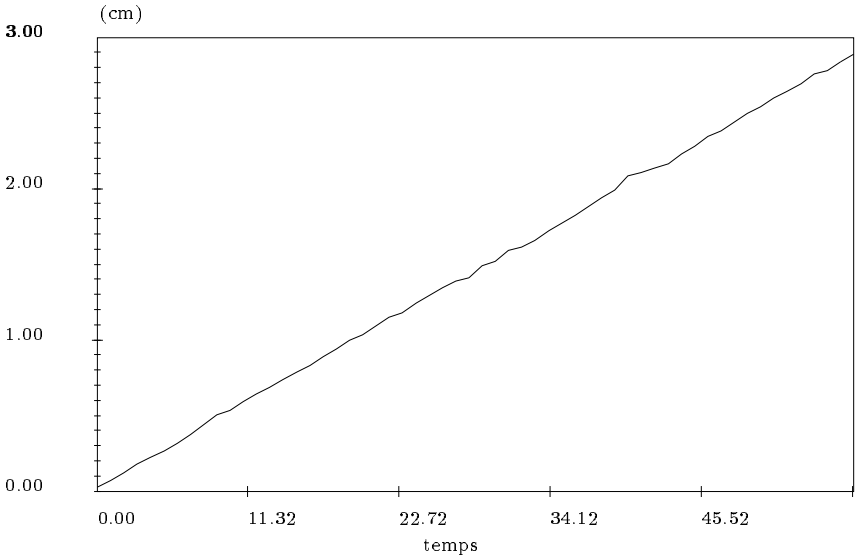

Figure 2.38: Position selon l'axe d'insertion lors de l'assemblage cubique

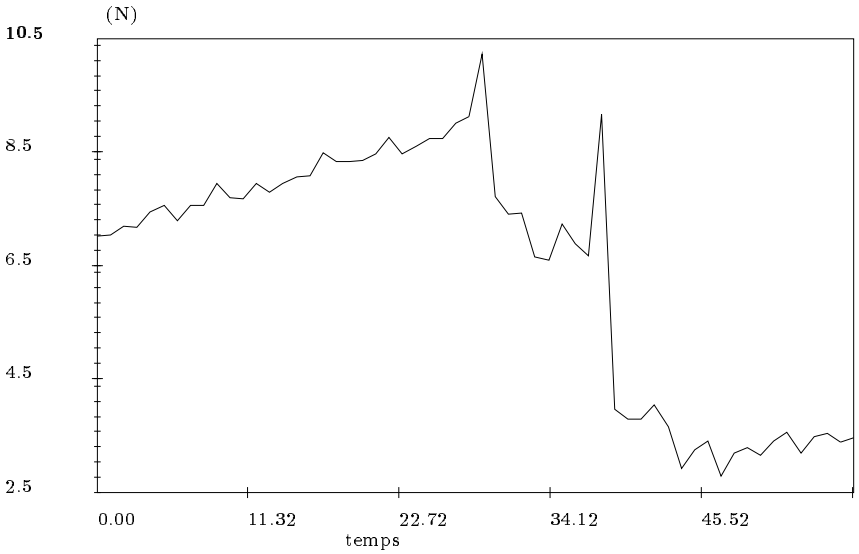

Figure 2.39: Force de contact lors de l'assemblage cubique

2.9.2 Assemblage cylindrique

Pour cet assemblage nous avons décidé de nous livrer à une étude comparative entre la compliance active et la compliance passive en reproduisant la même expérience (grâce à la grande répétabilité de la main gauche) et en utilisant soit l'un ou l'autre des deux types de compliance.

La figure 2.40 présente les corrections de position selon l'axe y, la figure 2.41 celles selon l'axe z, la figure 2.42 selon l'axe x et enfin la figure 2.43 la force résultante.

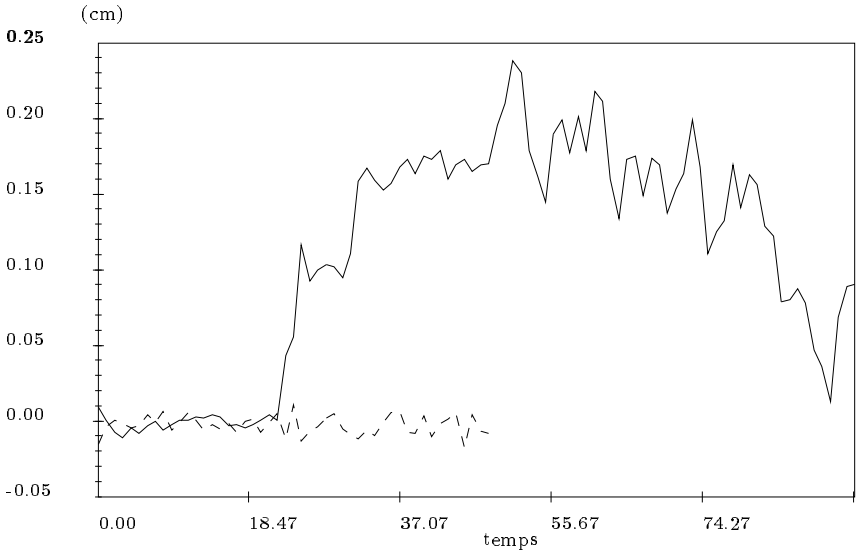

Figure 2.40: Correction de position selon l'axe y (trait plein: compliance active, pointillé: compliance passive)

Ce type d'expérience montre les limites de la compliance passive. En effet dès que l'erreur initiale dépasse une certaine limite (qui dépend de la forme de l'objet) elle se relève impuissante à corriger l'erreur: c'est le cas dans l'expérience précédente où un seuil de sécurité sur la force de contact impose l'arrêt de l'assemblage. Par contre la compliance active arrive globalement à corriger les erreurs de positionnement. Toutefois certaines expériences ont montré que la compliance passive pouvait tout de même corriger des erreurs faibles (au maximum de l'ordre du millimètre).

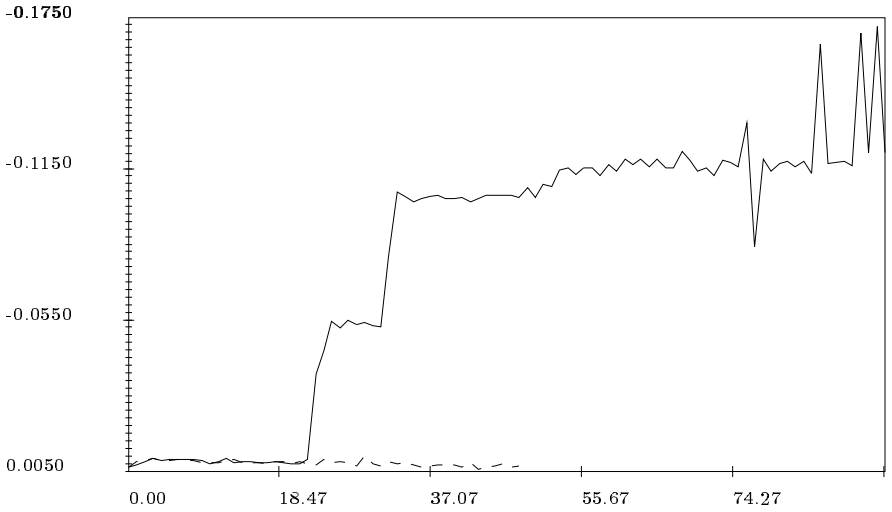

Figure 2.41: Correction de position selon l'axe z (trait plein: compliance active, pointillé: compliance passive)

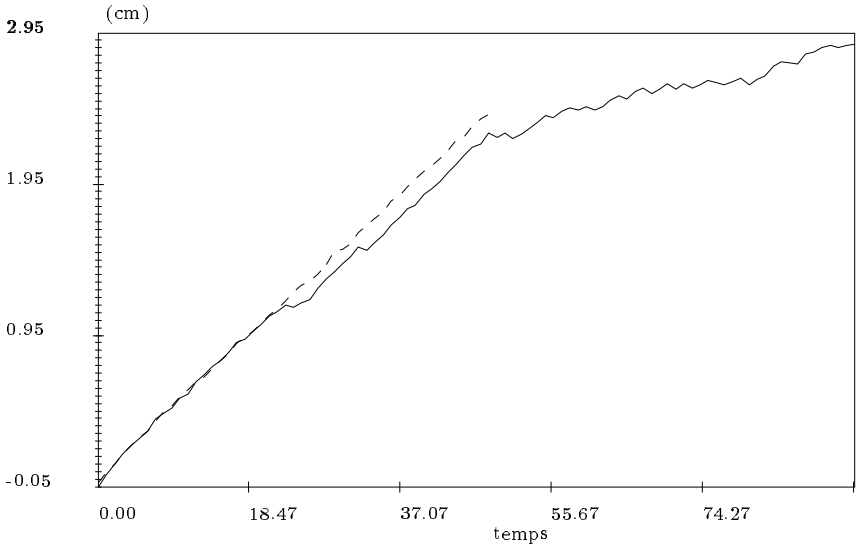

Figure 2.42: Position selon l'axe x (trait plein: compliance active, pointillé: compliance passive)

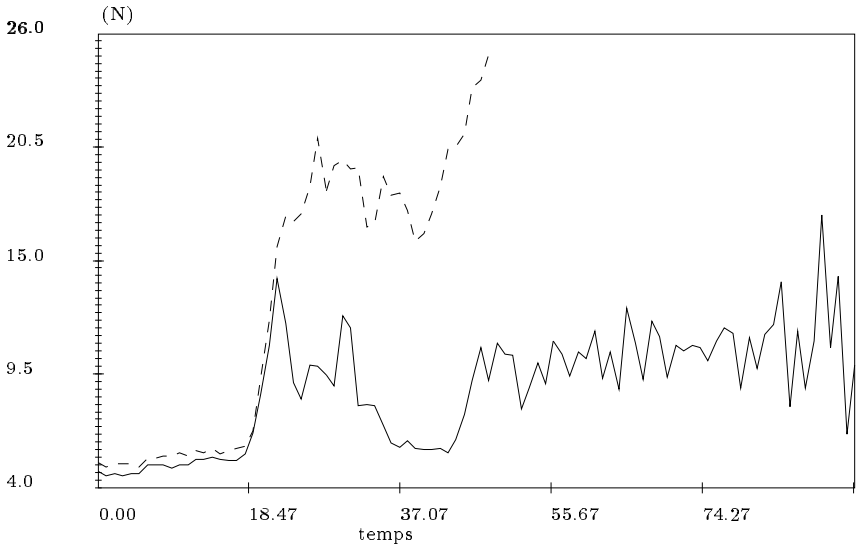

Figure 2.43: Force de contact (trait plein: compliance active, pointillé: compliance passive)

2.10 Localisation d'objet

2.10.1 Principe

Dans cette application on va utiliser les capteurs de force de la main gauche pour procéder à la localisation de la position du centre de gravite d'une pièce, position qui sera ensuite calculée dans le repère d'un robot AID chargé de la saisie de la pièce à partir de cette information.

On suppose tout d'abord que le plateau de la main gauche est horizontal et que l'on cherche à determiner la position dans ce plan du centre de masse P de l'objet. Soit x_p, y_p, z_p les coordonnées de P dans le repère lié au plateau mobile. Soit F_z, M_x, M_y la force mesurée selon l'axe z du plateau mobile et les moments autour des axes x, y. Un calcul simple montre que l'on a :

$$x_p = \frac{-M_y}{F_z} \qquad\qquad y_p = \frac{M_x}{F_z} \tag{2.5}$$

Cette première mesure nous permet donc de déterminer deux des inconnues. Il est clair que dans ce cas on ne peut déterminer la hauteur du centre de masse qui n'influe pas sur les moments lorsque l'on maintient le plateau horizontal. Une deuxième mesure est nécessaire avec le plateau incliné. En effet soit $\mathbf{CP}$ le vecteur liant le centre du plateau mobile au centre de masse de la pièce. On mesure le vecteur des moments $\mathbf{M}$, exprimé dans le repère absolu, qui est donné par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{CP} \wedge \mathbf{F}$$

où $\mathbf{F}$ représente le vecteur des forces extérieures, réduit ici à une force verticale. Soit R la matrice de rotation liant le repère du plateau mobile au repère absolu. On a alors:

$$\mathbf{CP} = \mathbf{CO} + R\mathbf{CP_r}$$

Les composantes de $\mathbf{CP_r}$ sont simplement les composantes de P et si l'on connaît la position et l'orientation du plateau mobile on dispose de $\mathbf{CO}$ et de R. On peut alors calculer z_p si la normale au plateau mobile n'est pas verticale selon l'une des deux formules suivantes qui utilise la représentation de la matrice de rotation sous forme d'angles d'Euler:

$$\mathrm{z_p} = \frac{\cos\phi\cos\psi\cos\theta\mathrm{F_z y_p} + \cos\phi\sin\psi\mathrm{F_z x_p} + \cos\psi\cos\theta\sin\phi\mathrm{F_z x_p} - \sin\phi\sin\psi\mathrm{F_z y_p} + \mathrm{F_z y_0} - \mathrm{M_x}}{\cos\psi\sin\theta\mathrm{F_z}}$$

$$\mathrm{z_p} = \frac{-\cos\phi\cos\psi\mathrm{F_z x_p} + \cos\phi\cos\theta\sin\psi\mathrm{F_z y_p} + \cos\psi\sin\phi\mathrm{F_z y_p} + \cos\theta\sin\phi\sin\psi\mathrm{F_z x_p} - \mathrm{F_z x_0} - \mathrm{M_y}}{\sin\psi\sin\theta\mathrm{F_z}}$$

Une telle manipulation a été effectuée en utilisant un robot AID et la "main gauche" de L'INRIA. La main gauche procéde à la localisation de l'objet et transmet les coordonnées dans le repère de l'AID. L'AID tente alors de se placer au dessus du centre de masse de l'objet. Si la position requise est en dehors de sa zone de travail la main gauche se translate pour atteindre une position accessible à l'AID. Celui ci descend alors jusqu'a ce que la main gauche detecte un contact. Le robot remonte alors légèrement, ferme la pince et se dégage. La main gauche détecte à l'aide des capteurs d'efforts si la saisie a été effectuée correctement. Si ce n'est pas le cas on peut procéder à une relocalisation (mais nous n'avons jamais observé ce phénomène).

2.10.2 Etude de la précision

2.10.2.1 Erreur relative

On peut déduire de l'équation 2.5 l'erreur de mesure faite sur x_p, y_p en fonction de l'erreur de mesure sur la force verticale. On a :

$$\frac{\Delta x_p}{\Delta F_z} = \frac{M_y}{F_z^2} \qquad \frac{\Delta y_p}{\Delta F_z} = \frac{M_x}{F_z^2}$$

Les erreurs relatives peuvent alors s'exprimer par:

$$\frac{\Delta x_p}{x_p} = \frac{\Delta F_z}{F_z} \qquad \frac{\Delta y_p}{y_p} = \frac{\Delta F_z}{F_z}$$

Comme on pouvait s'en douter la mesure sera d'autant plus précise que la charge sera importante et que l'on est proche du centre du plateau mobile.

2.10.2.2 Influence de l'erreur d'arrondi sur les capteurs de force

Les tensions fournies par les capteurs de force sont transmises à un amplificateur puis à un convertisseur A/N qui renvoit des valeurs entières. Les forces axiales ne sont donc connues qu'approximativement. Il est donc intéressant d'étudier l'influence de l'erreur d'arrondi sur la mesure de la masse et de la position du centre de masse pour une manipulation de localisation.

Ceci est fait de la manière suivante. On se donne une masse et la position de son centre de masse sur le plateau mobile, on calcule les forces axiales en N correspondant à ce chargement. Ces forces axiales sont converties en unité convertisseur puis arrondit soit à l'entier le plus proche soit à la partie entière puis on reconvertit ces valeurs en Newton et on les utilisent pour estimer les forces et moments correspondants qui sont ensuite transmises au programme de localisation.

Les courbes suivantes donnent les valeurs absolues des erreurs sur la masse et sur la position du centre de masse pour différentes positions de celui-ci. La table page 46 résume les erreurs sur la position du centre de masse et sur la masse dans les différents cas.

Les figures 2.44, 2.45 donnent les erreurs pour cent positions du centre masse comprises entre 0 et 8 cm pour x, le y restant constant. L'arrondi se fait en prenant la partie entière de la mesure des forces axiales.

Les figures 2.46, 2.47 donnent les erreurs pour cent positions du centre masse comprises entre 0 et 8 cm pour y, le x restant constant. L'arrondi se fait en prenant la partie entière de la mesure des forces axiales.

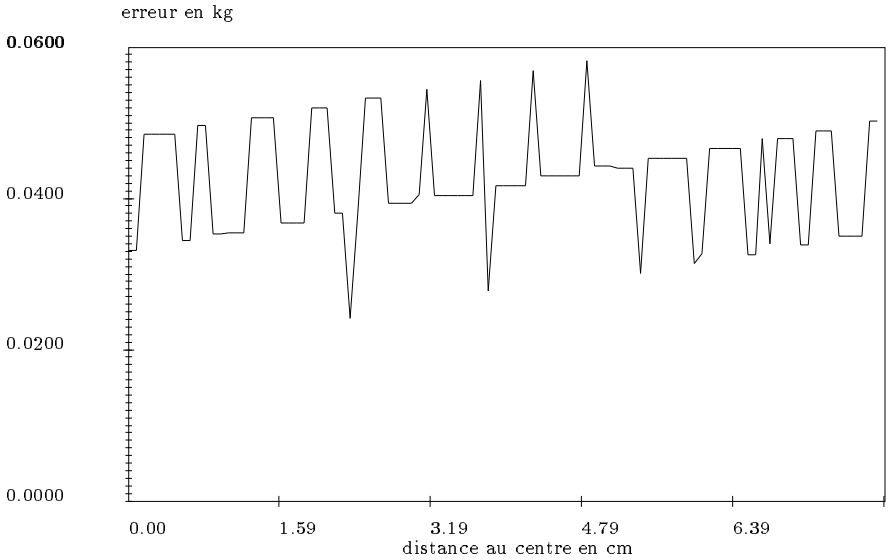

Figure 2.44: Valeur absolue de l'erreur sur la masse (arrondi à la partie entière, x=0..8cm, y=0)

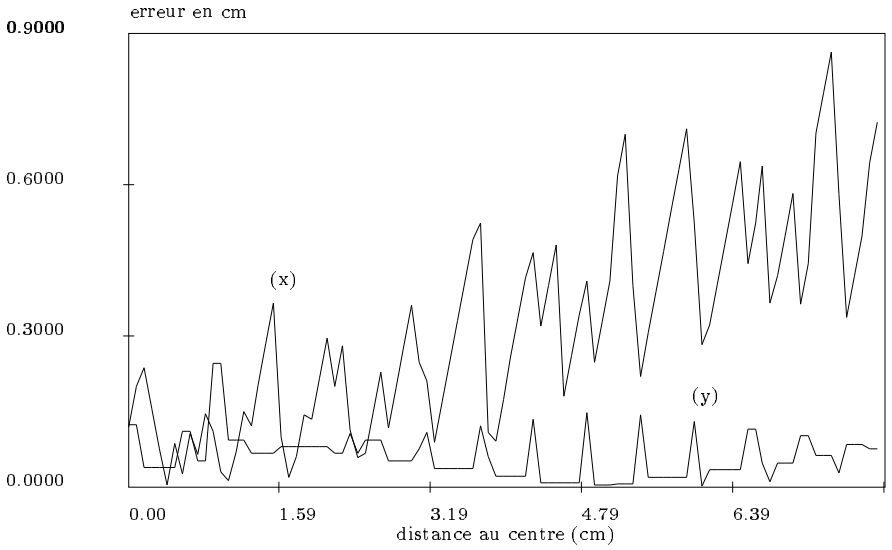

Figure 2.45: Valeur absolue de l'erreur sur x,y du centre de masse (arrondi à la partie entière, x=0..8cm, y=0)

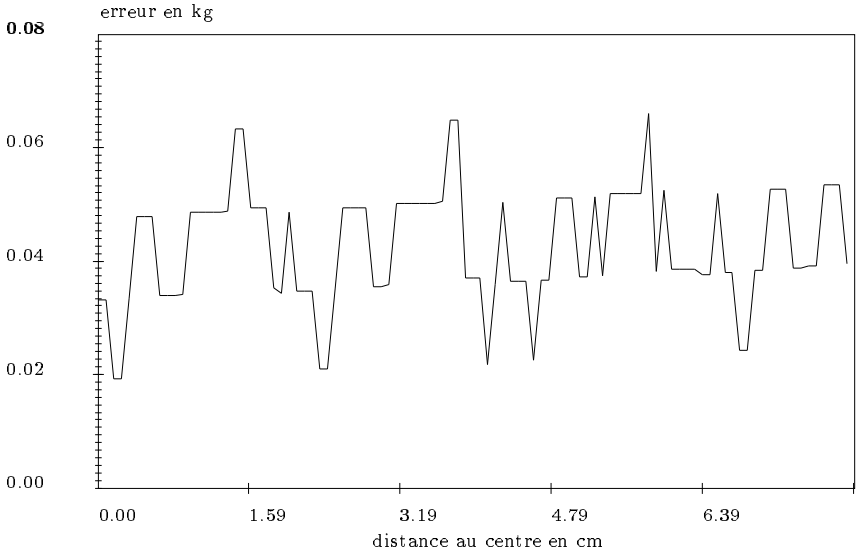

Figure 2.46: Valeur absolue de l'erreur sur la masse (arrondi à la partie entière, y=0..8cm, x=0)

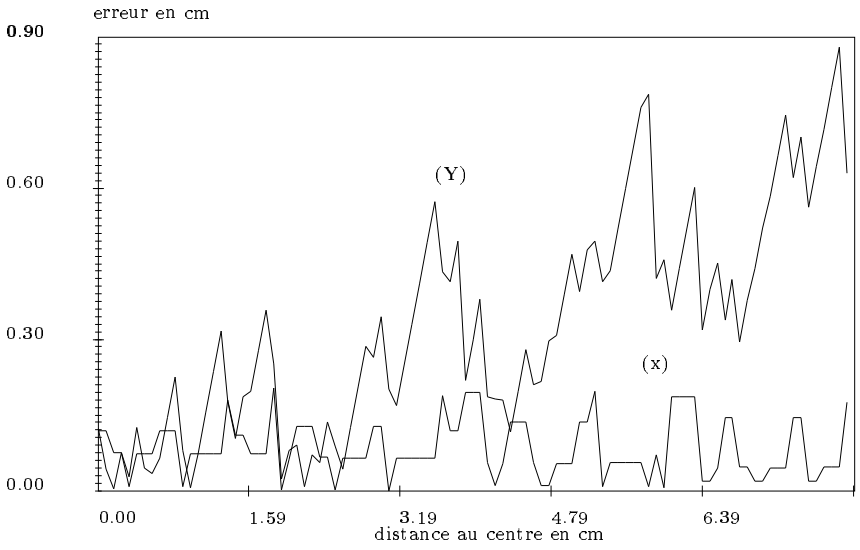

Figure 2.47: Valeur absolue de l'erreur sur x, y du centre de masse (arrondi à la partie entière, y=0..8cm, x=0)

Les figures 2.48, 2.49, 2.50, 2.51, reprennent les mêmes expériences dans le cas où l'arrondi prend la valeur entière la plus proche de la valeur réelle.

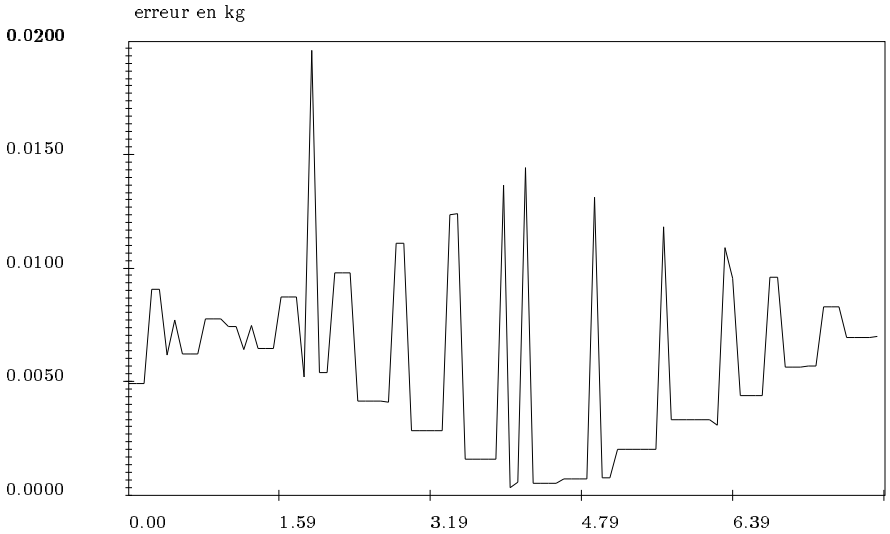

Figure 2.48: Valeur absolue de l'erreur sur la masse (arrondi à l'entier le plus proche, x=0..8cm, y=0)

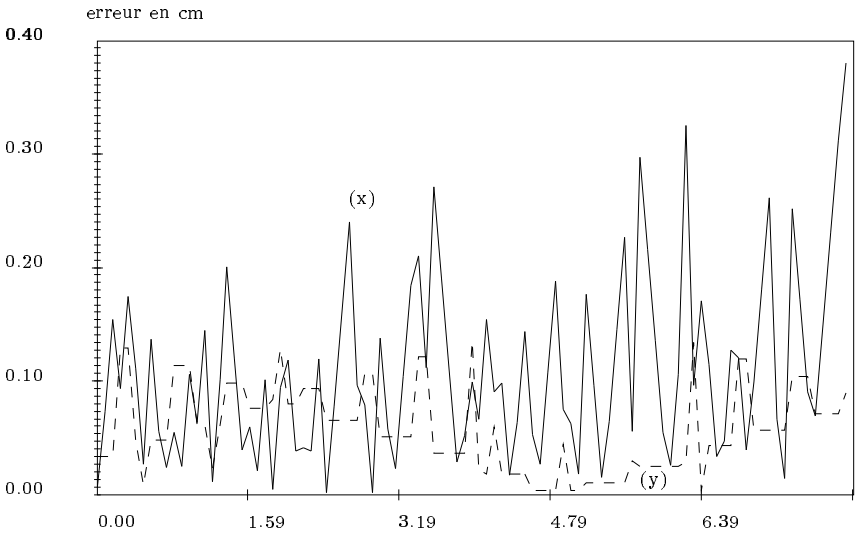

Figure 2.49: Valeur absolue de l'erreur sur le x, y du centre de masse (arrondi à l'entier le plus proche, x=0..8cm, y=0)

Le tableau suivant résume les erreurs maximum observées. Les positions sont en centimètres et les masses en gramme.

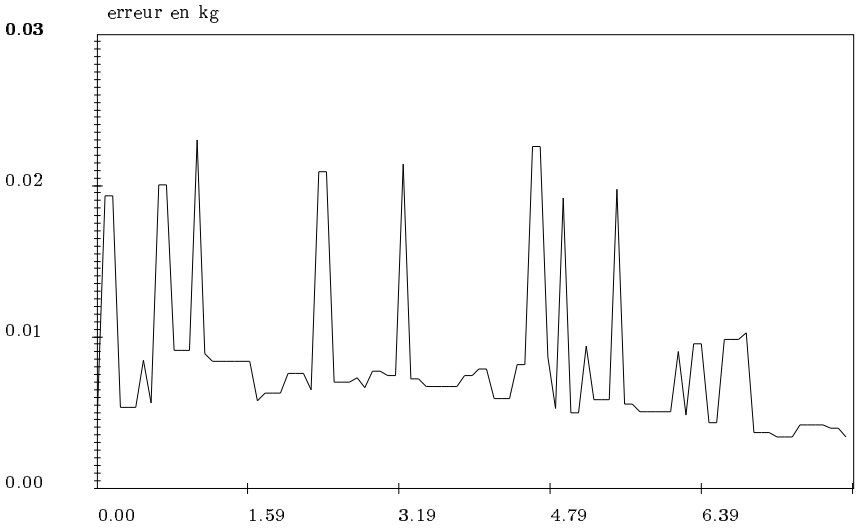

Figure 2.50: Valeur absolue de l'erreur sur la masse (arrondi à l'entier le plus proche, y=0..8cm, x=0)

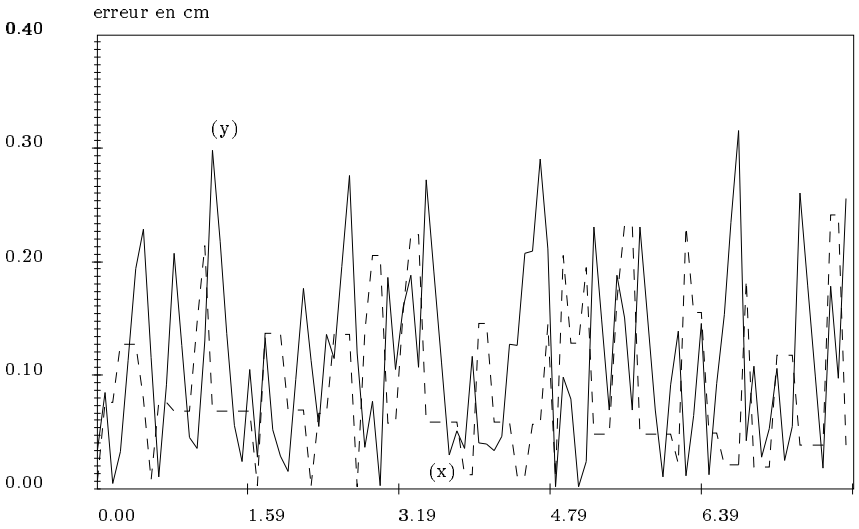

Figure 2.51: Valeur absolue de l'erreur sur le x du centre de masse (arrondi à l'entier le plus proche, y=0..8cm, x=0)

type d'arrondi	position masse	Δ x	Δ y	Δ M
partie entière	x∈ [0,8], y=0	0.85	0.25	58
partie entière	y∈ [0,8], x=0	0.88	0.205	66
entier le plus proche	x∈ [0,8], y=0	0.38	0.13	19
entier le plus proche	y∈ [0,8], x=0	0.24	0.31	23

Tableau 2.1: Résumé des erreurs introduites par la discrétisation de la mesure des forces axiales

2.10.3 Expérience de localisation

Un programme de test a été implanté sur la main gauche. Basé sur les outils graphiques de la station de travail SUN elle permet d'effectuer par de simple manipulation à la souris le tarage des capteurs d'efforts du manipulateur, la localisation d'un objet ainsi que des statistiques sur l'erreur de localisation (mesures répétées pour un même objet avec enregistrement des mesures). C'est cet outil statistique dont on présente les résultats dans les figures 2.52 2.53, 2.54.

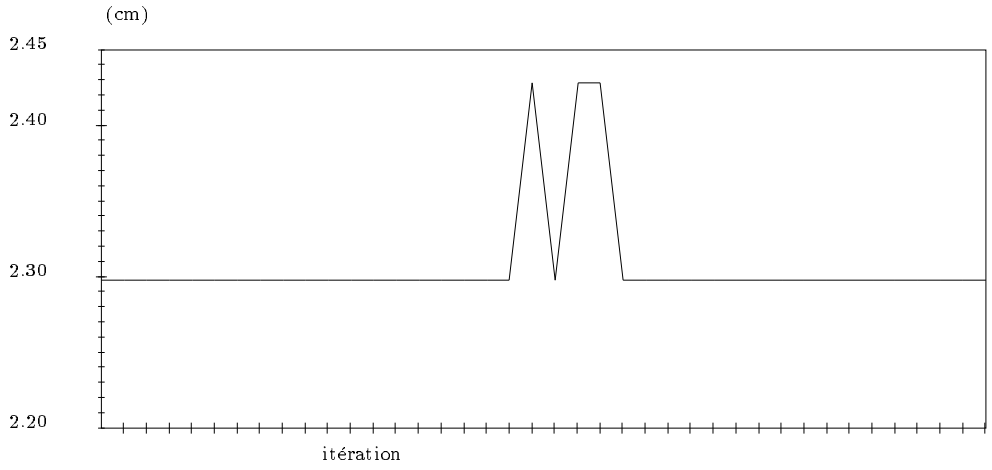

Figure 2.52: Localisation en x sur 40 itérations

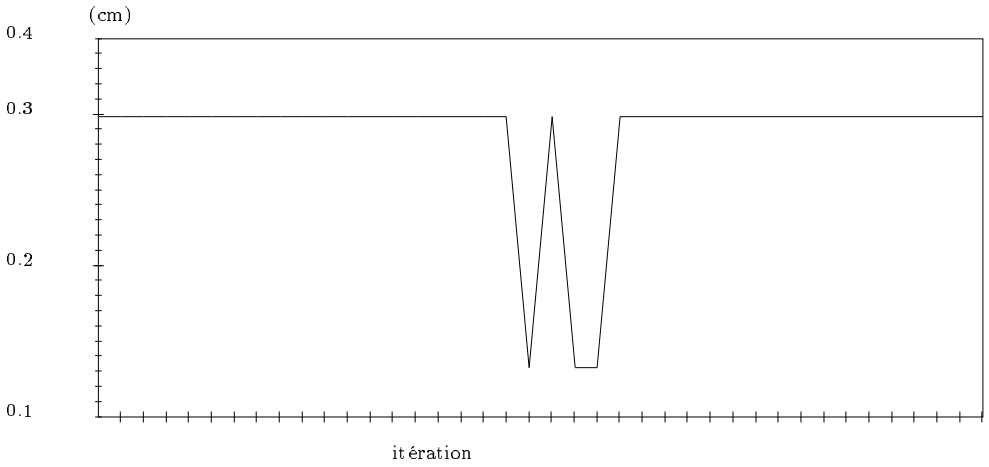

Figure 2.53: Localisation en y sur 40 itérations

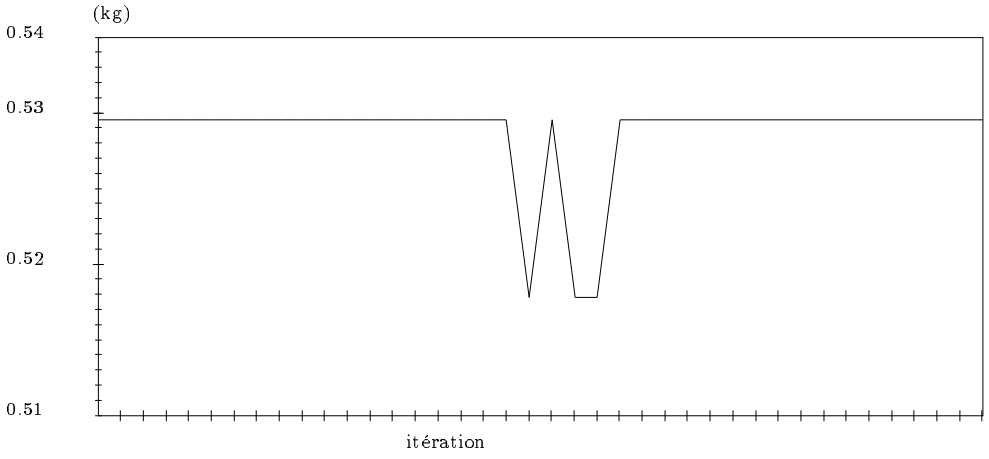

Figure 2.54: Mesure de la masse sur 40 itérations

Chapitre 3

Temps de calcul

Il est intéressant de connaître les temps de calcul de certaines procédures de base qui vont être employées constamment lors de la programmation d'une application. Cela concerne principalement les programmes de cinématique, de calcul de matrice jacobienne et de calcul des forces articulaires et cartésiennes. Les temps ont été établis sur un SUN 3-60 avec coprocesseur mathématique et sont donnés en milliseconde.

3.1 Temps de calcul de la cinématique inverse

Nous donnons ici les temps de calcul de différents programmes concernant la cinématique inverse.

On note $\mathbf{X}$ le vecteur des coordonnées du centre du plateau mobile, Mla matrice de rotation définie par les angles d'Euler et $X_e$le vecteur des angles d'Euler. ρ est le vecteur des coordonnées articulaires.

($\mathbf{X}$, M) $\Longrightarrow\rho$	1.1
($\mathbf{X}$, X_e) $\Longrightarrow\rho$	1.55
($\mathbf{X}$, X_e) $\Longrightarrow\rho$ et vecteur unitaire des segments	1.82
($\mathbf{X}$, M) $\Longrightarrow\rho$ et vecteur unitaire des segments	1.36
($\mathbf{X}$, X_e) $\Longrightarrow\rho$ et angles d'Euler des segments	2.66
($\mathbf{X}$, M) $\Longrightarrow\rho$ et angles d'Euler des segments	2.17

3.2 Temps de calcul de la cinématique directe

Nous allons ici comparer 7 méthodes de calcul de la cinématique directe. Rappellons que l'on peut distinguer deux grands types de méthodes: itérative ou moindre carré.

3.2.1 Méthode itérative

La méthode itérative [7] consiste à corriger une estimée initiale à l'aide de la différence entre les longueurs des segments calculées pour cette estimée et les longueurs réelles. Plus formellement on peut écrire :

$$\Delta \mathbf{X} = J(\rho_{\mathbf{est}} - \rho)$$

où $\mathbf{X}$ représente les coordonnées cartésiennes, $\rho_{\mathbf{est}}$ les longueurs des segments pour l'estimée courante, ρ les longueurs réelles et J une matrice. La matrice J idéale serait la matrice jacobienne qui dépend de la configuration. Plus exactement cette méthode peut utiliser deux type de matrice jacobienne : celle reliant les variations des coordonnées cartésiennes et des angles d'Euler aux variations de longueur des segments ou celle reliant les vitesses cartésiennes et angulaires aux vitesses articulaires (que nous avons appelé jacobienne cinématique). Dans ces deux cas on considère que l'espace de travail est suffisamment réduit pour pouvoir utiliser une matrice jacobienne constante estimée numériquement dans une position nominale, ce qui pose un problème pour la matrice jacobienne des angles d'Euler qui présente une singularité pour $\theta = 0$.

Dans la méthode utilisant la jacobienne cinématique les corrections de vitesse angulaire permettent de calculer une matrice de rotation qui est appliquée à la matrice de rotation courante. On en déduit alors éventuellement les angles d'Euler.

Une variante de ces méthodes consiste à utiliser une particularité que nous avons présenté dans [4] à propos de la position du centre du plateau mobile. Nous avons vu que l'on pouvait exprimer les coordonnées du centre du plateau en fonction des angles de rotation et des longueurs des segments. On peut alors concevoir des méthodes où l'algorithme itératif sert à calculer les angles de rotation et où les coordonnées du centre du plateau sont calculées directement à partir des longueurs des segments et des nouveaux angles de rotation.

3.2.2 Méthode de moindre carré

On utilise ici une méthode de moindre carré pour minimiser le critère H défini par:

$$H = \sum_{i=1}^{i=6} (\rho^i_{est} - \rho^i)^2$$

qui est une fonction des variables généralisées $\mathbf{X}$.

3.2.3 Méthodes employées

- 1: algorithme itératif avec jacobienne cinématique
- 2: moindre carré
- 3: algorithme itératif avec jacobienne des angles d'Euler
- 4: algorithme itératif avec jacobienne cinématique et estimation de la matrice de rotation (pas de calcul des angles d'Euler)
- 5: algorithme itératif avec jacobienne des angles d'Euler et estimation de x_0, y_0 en fonction des longueurs segments et des orientations
- 6: algorithme itératif avec jacobienne cinématique et estimation de x_0, y_0 en fonction des longueurs segments et des orientations. On calcule les angles d'Euler.
- 7: algorithme itératif avec jacobienne cinématique et estimation de x_0, y_0 en fonction des longueurs segments et des orientations. On ne calcule pas les angles d'Euler.

numéro de test	x_0	y_0	z_0	ψ	ϕ	ϕ
(0)valeur juste	3	3	40	0	0	0
valeur estimée	2.9	2.9	39.9	0.5	-0.5	0.5
(1)valeur juste	3	3	40	0	0	0
valeur estimée	0	0	40	0	0	0
(2)valeur juste	3	3	40	0	0	0
valeur estimée	2.95	2.95	39.95	0.1	-0.1	0.1
(3)valeur juste	3	3	40	0	0	0
valeur estimée	0	0	45	0	0	0
(4)valeur juste	4	-5	47	15	-10	20
valeur estimée	0	0	45	0	0	0
(5)valeur juste	2	-2	46	15	-10	20
valeur estimée	0	0	45	0	0	0

Tableau 3.1: Valeurs des positions de test

Les jacobiennes sont estimées en :
0 0 40 0 0 0 : pour la jacobienne cinématique
0 0 40 0 12 0 : pour la jacobienne des angles d'Euler
Le seuil d'erreur sur la longueur des segments est de 0.01cm.
La position des points d'articulation pour le SSM sont les suivantes :

articulation	x_a	y_a	z_a	x_b	y_b	z_b
1	9.700	9.100	0.	3.	7.300	0.
2	12.760	3.900	0.	7.822	-1.050	0.
3	3.	-13.	0.	4.822	-6.248	0.
4	-3.	-13.	0.	-4.822	-6.248	0.
5	-12.760	3.900	0.	-7.822	-1.050	0.
6	-9.700	9.100	0.	-3.	7.300	0.

3.2.4 Temps de calcul

numéro de test	0	1	2	3	4	5
méthode						
1	9.3	8.44	6.5	13.83	24.83	17.5
2	300	700	265	1732	715	614
3	7.33	9.5	4.9	10.17	-	-
4	8.06	7.5	4.8	12.7	21.7	15.17
5	7.6	7.94	4.6	13.67	-	-
6	9.22	8.11	5.83	17.33	-	-
7	8.33	7.22	4.94	15.83	-	-

3.2.5 Commentaires

La méthode itérative utilisant la jacobienne cinématique présente des bons résultats de convergence même avec une estimée initiale éloignée de la bonne valeur. L'introduction de

l'estimation des x_0, y_0 n'apportent rien au niveau de la rapidité de convergence et au contraire rend la méthode non convergente dans certain cas.

La méthode itérative utilisant la jacobienne des angles d'Euler est la méthode la plus rapide (de 27% à 45% plus rapide que la méthode précédente) mais la convergence n'est pas assurée dans tous les cas. L'introduction de l'estimation des x_0, y_0 n'apportent rien au niveau de la convergence et le gain en rapidité n'est pas clair.

La méthode des moindre carré est bien sûr la plus lente mais posséde elle aussi de bonne propriétés de convergence.

Nous avons adopté dans le cas le plus général une méthode à deux niveaux avec tout d'abord une méthode itérative utilisant la jacobienne cinématique et, en cas de non-convergence, méthode de moindre carré.

Dans le cas de tâche où on évolue autour d'une position nominale connue avec une matrice jacobienne non singulière, on rajoute un troisième niveaux car on commence par utiliser la méthode itérative utilisant la jacobienne des angles d'Euler.

3.3 Calcul des matrices jacobienne et inverse jacobienne

Nous montrons ici les temps de calcul des matrices jacobienne et inverse jacobienne , cinématique et des angles d'Euler. On rappele que dans le cas général la formulation analytique de la matrice inverse jacobienne est connue mais que la formulation des matrices jacobiennes est trop lourde pour être utilisée dans un programme. On procéde donc en général par inversion numérique.

procédure	temps de calcul en ms
inverse jacobienne cinématique	1.65
inverse jacobienne Euler	5.58
jacobienne et inverse jacobienne Euler	18.63
jacobienne et inverse jacobienne cinématique	14.22

3.4 Calcul des forces axiales et cartésiennes

3.4.1 Forces cartésiennes

Nous avons vu dans la première partie de cette monographie que l'on connaîssait la formulation analytique permettant le passage des forces articulaires aux forces cartésiennes (la position du manipulateur étant connue). On donne ici le temps de calcul de procédures permettant de calculer les forces et les moments, les forces seules ainsi que les forces dans le plan XY (un manipulateur parallèle est souvent amené à travailler dans ce plan) à partir des forces articulaires. On suppose ici la position connue sous la forme des coordonnées du centre du plateau mobile et de la matrice de rotation obtenue à partir des angles d'Euler.

calcul des forces et moments	2.13
calcul des forces	0.92
calcul des forces dans le plan	0.59

3.4.2 Forces articulaires

3.4.2.1 Méthodes employées

Le problème est ici de déterminer les forces axiales à partir d'un chargement connu en cartésien. L'équation de base régissant cette transformation est:

$$\tau = J^t \mathbf{F}$$

où τ est le vecteur des forces axiales et $\mathbf{F}$ le vecteur des forces cartésiennes. On a donc ici un système linéaire en terme des forces axiales.

On peut donc utiliser un programme de résolution numérique de système linéaire (méthode de pivot par exemple). Une autre possibilité est de calculer l'inverse de la jacobienne au point courant, puis de procéder à son inversion numérique. Une troisième méthode consiste à utiliser un schéma itératif comparable à celui employé pour la cinématique directe, décrit par:

$$\tau_k = \tau_{k-1} + J^t(\mathbf{F} - G(\tau_{k-1}))$$

où τ_k est l'estimée à l'itération k, $\mathbf{F}$ les forces cartésiennes et G la fonction permettant de passer des forces articulaires aux forces cartésiennes.

3.4.2.2 Temps de calculs

- 1: par résolution du système linéaire
- 2: par inversion de l'inverse de la jacobienne cinématique
- 3: méthode itérative avec jacobienne cinématique constante

numéro de test	fax_1	fax_2	fax_3	fax_4	fax_5	fax_6
(0)valeur juste	10	10	10	10	10	10
valeur estimée	9	9	9	9	9	9
position	0	0	40	0	0	0
(1)valeur juste	10	10	10	10	10	10
valeur estimée	9	9	9	9	9	9
position	3	3	40	0	0	0
(2)valeur juste	10	10	10	10	10	10
valeur estimée	9	9	9	9	9	9
position	3	3	40	10	10	10
(3)valeur juste	10	10	10	10	10	10
valeur estimée	9.9	9.9	9.9	9.9	9.9	9.9
position	0	0	40	0	0	0
(4)valeur juste	10	10	10	10	10	10
valeur estimée	9.9	9.9	9.9	9.9	9.9	9.9
position	3	3	40	0	0	0
(5)valeur juste	10	10	10	10	10	10
valeur estimée	9.9	9.9	9.9	9.9	9.9	9.9
position	3	3	40	10	10	10
(6)valeur juste	10	9	8	7	6	5
valeur estimée	9	8	7	6	5	4
position	0	0	40	0	0	0
(7)valeur juste	10	9	8	7	6	5
valeur estimée	9.9	9	8	7	6	5
position	0	0	40	0	0	0
(8)valeur juste	10	9	8	7	6	5
valeur estimée	9.9	9	8	7	6	5
position	3	3	40	0	0	0

La jacobienne cinématique est estimée en 0,0,40,0,0,0. Le seuil d'erreur admise sur les forces axiales est de 0.1N.

numéro de test méthode	1	2	3
(0)	5.3	15.6	5.4
(1)	5.4	15.3	14.9
(2)	5.4	15.7	24.7
(3)	5.3	16.7	5.3
(4)	5.4	16.7	15.9
(5)	5.4	16.9	25.3
(6)	5.4	16.7	5.67
(7)	5.4	15.7	5.4
(8)	5.4	16.7	15.4

3.4.2.3 Commentaires

Au vu des résultats ci-dessus il semble le plus raisonnable d'employer la méthode qui utilise le programme de résolution d'un système linéaire.

Chapitre 4

Caractéristiques des robots parallèles

4.1 Errata des parties 1 et 2

4.1.1 Partie 1

En page 10 le deuxième élément de la troisième colonne de la matrice de rotation est $-cos\psi sin\theta$.
En page 15 l'équation (17) s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{OB_i}}{dt} = \frac{\mathbf{OC}}{dt} + \mathbf{B_iC} \wedge \mathbf{\Omega}$$

Donc une ligne de la matrice inverse jacobienne s'écrit:

$$x_u\,, y_u\,, z_u\,, y_b z_u - z_b y_u\,, z_b x_u - x_b z_u\,, x_b y_u - y_b x_u$$

où x_b, y_b, z_b représente les coordonnées de $\mathbf{CB_i}$ exprimées dans le repère absolu. En page 34 l'équation (4) s'écrit :

$$K = \frac{J\,J^T}{k}$$

4.1.2 Partie 2

En page 17 la ligne intersectée par les six segments est la ligne B_1B_6 et non B_4B_5. Il en est de même à la page 20.
En page 25 pour le complexe spécial il convient de changer dans l'équation en $U1, V1, W1$ les termes en x_0 en z_0.

4.2 Raideur

Nous avons vu qu'un manipulateur parallèle présentait une très bonne rigidité de par sa structure mécanique mais que cette rigidité pouvait se révéler néfaste pour les applications

faisant appel à de la commande par retour d'efforts. C'est pourquoi nous avons rajouté dans chaque segment de notre prototype un amortisseur élastique permettant une faible variation de longueurs des segments sous l'influence des forces articulaires. Ces variations sont toutefois incluses dans la mesure des longueurs du segment, ce qui permet de connaître à tout instant la longueur exacte de ceux-ci et, par conséquence, la position exacte du plateau mobile. L'étude de la raideur du manipulateur est délicate puisqu'il s'agit en fait d'une matrice de raideur 6x6 qui s'écrit:

$$K = kJ^{-1}J^{-t}$$

où k est la raideur de l'amortisseur élastique (800N/cm dans notre cas). Un reproche souvent fait au manipulateur parallèle est leur manque de rigidité, en particulier lorsque l'on exerce un couple autour de leur axe vertical. Rappellons ici la valeur des matrices de raideur et de compliance de notre prototype lorsqu'il se trouve dans sa position nominale.

$$K = \begin{pmatrix} 51.0841 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1472.0605 & 0.0087 \\ 0.0000 & 51.0902 & -0.0001 & -1472.0601 & -0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0001 & 4697.8256 & 0.0248 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -1472.0600 & 0.0250 & 135150.9687 & 0.0005 & 0.0001 \\ 1472.0605 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0013 & 135144.8125 & 0.6525 \\ 0.0087 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0002 & 0.6520 & 4033.6647 \end{pmatrix}$$

Si l'on considère que la raideur des amortisseurs est 1 la matrice de compliance s'écrit alors:

$$C = \begin{pmatrix} 22.82468 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.248617 & 0.0000 \\ 0.0000 & 22.82468 & 0.0000 & 0.248557 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.170292 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.248557 & 0.0000 & 0.008627 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.248617 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.008627 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.198331 \end{pmatrix}$$

Comme pour la maneuvrabilité une étude rigoureuse nécessite une décomposition en valeurs propres, ce que nous ferons pour la position nominale. Toutefois nous allons présenter ici des vues tridimensionnelles de la valeur des termes diagonaux lorsque deux degrés de liberté du système sont laissés libres, en l'occurrence la position en x, y du plateau mobile. Les figure 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 présentent les variations des éléments diagonaux de la matrice de raideur.

La raideur k_{xx} présente un minimum pour la position nominale du manipulateur et croît fortement dès que l'on s'écarte de celle-ci. Nous ne représenterons pas les variations de l'élément en y qui sont similaires à celles en x. Les variations de l'élément en z présentent des caractéristiques opposées à celles des cas précédents. La raideur diminue lorsque l'on s'écarte de la position nominale. Toutefois la valeur reste très élevée. La raideur pour un couple autour de l'axe x suit la même loi de variation que précédemment. Pour un couple autour de l'axe y on obtient sensiblement les mêmes résultats.

Quant au couple autour de l'axe z les variations sont plus brutales : minimale dans la position nominale la raideur augmente fortement dès que l'on s'en écarte pour atteindre une valeur quatre fois plus forte aux extrémités du domaine atteignable.

4.3 Etude des valeurs propres de la matrice de raideur

Nous avons vu que la matrice de raideur de la "main gauche" n'était pas en général diagonale. Il est donc intéressant de calculer les valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice. C'est ce que nous allons faire en utilisant les notations suivantes :

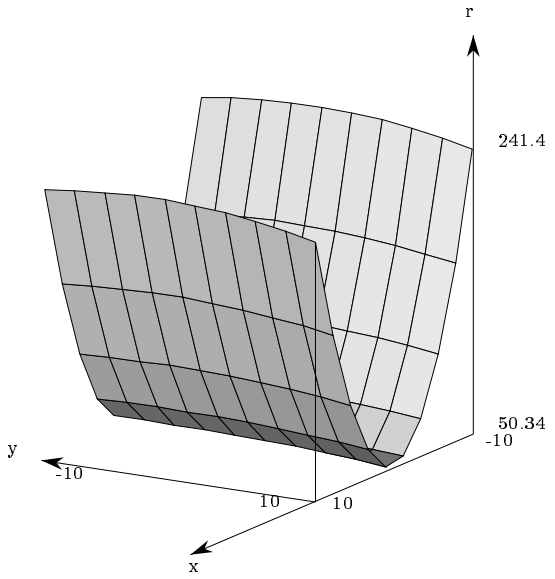

Figure 4.1: Variation de l'élément k_{xx} de la matrice de raideur pour x, y = ± 10cm

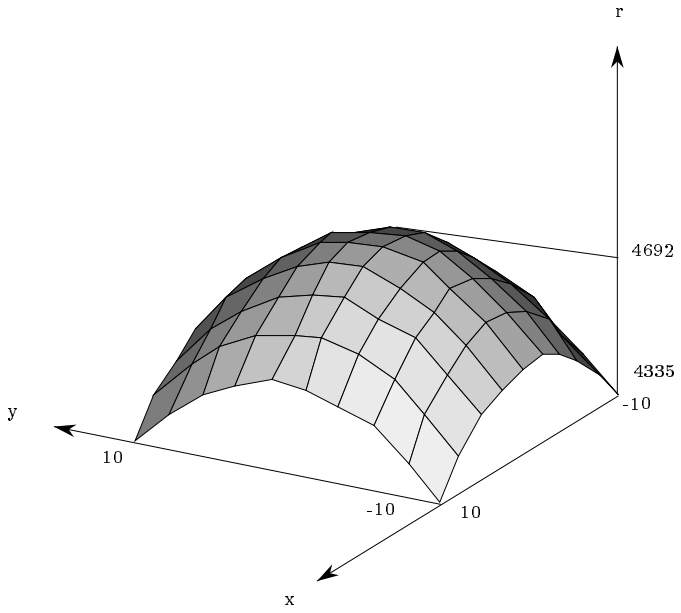

Figure 4.2: Variation de l'élément k_{zz} de la matrice de raideur pour x, y = ± 10cm

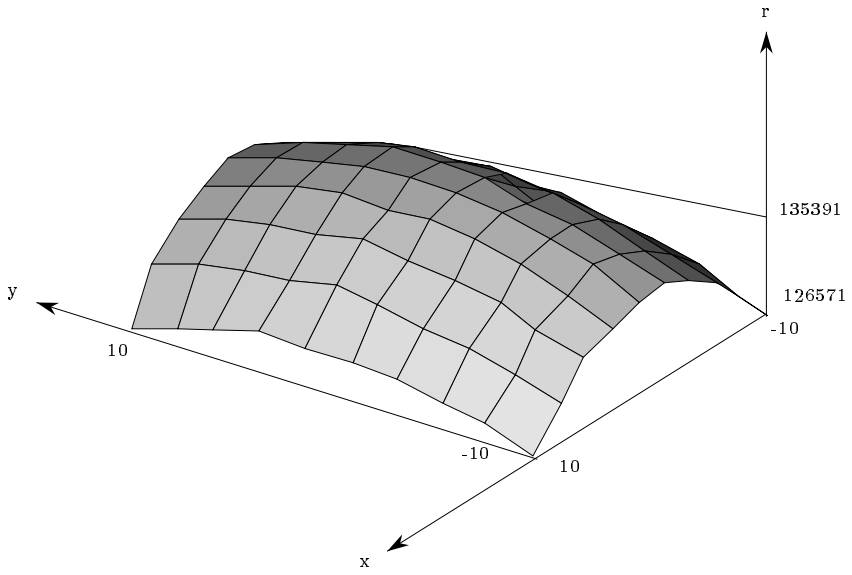

Figure 4.3: Variation de l'élément k_{rx} de la matrice de raideur pour x, y = ± 10cm en Ncm

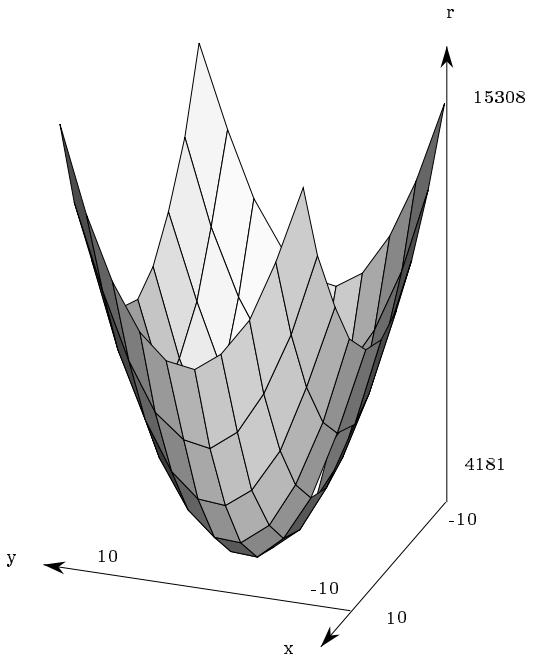

Figure 4.4: Variation de l'élément k_{rz} de la matrice de raideur pour x, y = ± 10cm en Ncm

$raid$: matrice de raideur
$raid_d$: matrice de raideur diagonalisé
vec_p: matrice de changement de repère

4.3.1 Position nominale

On obtient les résultats suivants :

$$raid = \begin{pmatrix} 51.0841 & 0.1\ 10^{-05} & 0.2\ 10^{-05} & -0.3\ 10^{-04} & 1472.06 & 0.00875 \\ 0.1\ 10^{-05} & 51.0902 & -0.00015 & -1472.06 & 0.1\ 10^{-04} & 0.8\ 10^{-05} \\ 0.2\ 10^{-05} & -0.00015 & 4697.83 & 0.02445 & 0.00055 & -0.1\ 10^{-04} \\ -0.3\ 10^{-04} & -1472.06 & 0.02445 & 135151. & 0.00036 & -0.3\ 10^{-04} \\ 1472.06 & 0.1\ 10^{-04} & 0.00055 & 0.00036 & 135145. & 0.65156 \\ 0.00875 & 0.8\ 10^{-05} & -0.1\ 10^{-04} & -0.3\ 10^{-04} & 0.65156 & 4033.67 \end{pmatrix}$$

$$vec_p = \begin{pmatrix} 0.01090 & 0.6\ 10^{-06} & 0.4\ 10^{-06} & 0.99994 & 0.9\ 10^{-09} & -0.7\ 10^{-04} \\ 0.6\ 10^{-06} & -0.01089 & 0.2\ 10^{-08} & -0.7\ 10^{-04} & -0.3\ 10^{-07} & -0.99994 \\ 0.4\ 10^{-08} & 0.2\ 10^{-06} & 0.2\ 10^{-07} & 0.9\ 10^{-09} & -1. & 0.2\ 10^{-07} \\ -0.6\ 10^{-04} & 0.99994 & 0.3\ 10^{-09} & -0.7\ 10^{-06} & 0.2\ 10^{-06} & -0.01089 \\ 0.99994 & 0.6\ 10^{-04} & -0.5\ 10^{-05} & -0.01090 & 0.4\ 10^{-08} & 0.7\ 10^{-06} \\ 0.5\ 10^{-05} & 0.6\ 10^{-10} & 1. & -0.4\ 10^{-06} & 0.2\ 10^{-07} & 0.2\ 10^{-08} \end{pmatrix}$$

$$raid_d = \begin{pmatrix} 135161. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 135167. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 4033.67 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 35.0456 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 4697.83 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 35.0524 \end{pmatrix}$$

On obtient donc une matrice de raideur dans les mêmes coordonnées que la matrice originale mais dont la raideur en x, y passe de 51.08 N/cm à 35.05 N/cm.

4.3.2 Rotation autour de l'axe z

Examinons le cas où l'on fait tourner de 50 degré le manipulateur autour de son axe z sans modifier la position du centre du plateau mobile.

$$raid = \begin{pmatrix} 117.107 & 0.00116 & -0.00079 & -3490.18 & -409.619 & 0.00646 \\ 0.00116 & 117.112 & -0.00019 & 409.517 & -3490.18 & 0.00158 \\ -0.00079 & -0.00019 & 4565.78 & 0.03016 & 0.00571 & 6980.35 \\ -3490.18 & 409.517 & 0.03016 & 143628. & 2.93947 & -0.23123 \\ -409.619 & -3490.18 & 0.00571 & 2.93947 & 143630. & 0.35412 \\ 0.00646 & 0.00158 & 6980.35 & -0.23123 & 0.35412 & 12290.3 \end{pmatrix}$$

$$vec_p = \begin{pmatrix} -0.01811 & 0.01645 & -0.7\ 10^{-07} & -0.99561 & -0.2\ 10^{-05} & -0.09039 \\ 0.01645 & 0.01811 & -0.6\ 10^{-06} & 0.09039 & -0.1\ 10^{-04} & -0.99561 \\ 0.2\ 10^{-08} & -0.2\ 10^{-06} & -0.50787 & -0.9\ 10^{-06} & 0.86143 & -0.1\ 10^{-04} \\ 0.81343 & -0.58115 & -0.1\ 10^{-05} & -0.02446 & -0.1\ 10^{-05} & 0.00064 \\ -0.58115 & -0.81343 & 0.2\ 10^{-05} & -0.00064 & 0.9\ 10^{-06} & -0.02446 \\ -0.3\ 10^{-05} & -0.1\ 10^{-05} & -0.86143 & 0.6\ 10^{-06} & -0.50787 & 0.7\ 10^{-05} \end{pmatrix}$$

$$raid_d = \begin{pmatrix} 143712. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 143718. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 16405.7 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 31.1083 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 450.426 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 31.1145 \end{pmatrix}$$

On voit que pour un mouvement de vissage autour de l'axe z la raideur a fortement diminuée (450.426). Cette valeur n'est pas affectée si l'on change la position du centre du plateau mobile ou si l'on modifie les autres angles de rotation.

4.4 Vitesses cartésiennes maximales

On s'intéresse aux vitesses cartésiennes maximales permises à la main gauche pour une vitesse articulaire maximale donnée (ici 2cm/s). On présente ici des vues tridimensionnelles des vitesses en fonction de deux des paramètres de position: en l'occurrence on se limite ici à des déplacement dans le plan x-y.

La vitesse en x est minimale (6.73 cm/s) en -8.0, 2.105 et maximale (13.64cm/s) en -0.421, -8.0. La vitesse en y est minimale (6.733cm/s) en -2.105, 8.0 et maximale (15.45cm/s) en -0.421, -1.263. La vitesse en z est sensiblement constante (2cm/s) sur tout le domaine. Il en est de même pour les vitesses angulaires autour de x (0.25 à 0.31 rad/s) et autour de y (0.25 à 0.28 rad/s). La vitesse angulaire autour de l'axe z est minimale (0.76 rad/s) en -8.0, 8.0 et maximale (2.014 rad/s) en -0.421, -0.421.

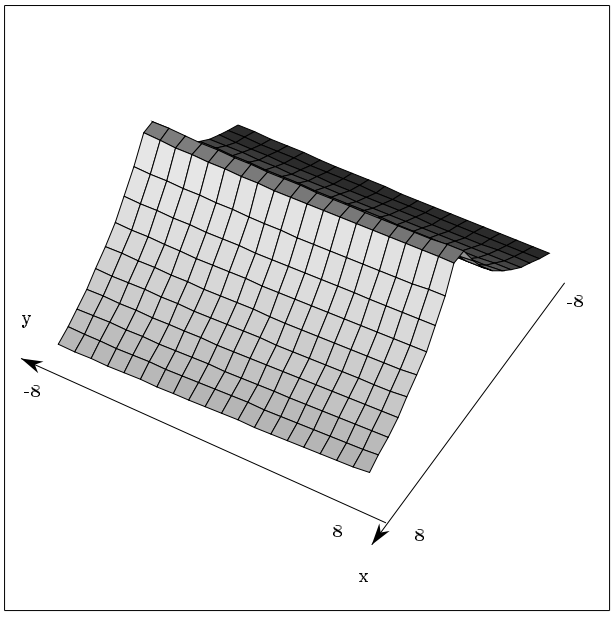

Figure 4.5: Vitesse cartésiennes V_x maximale (x-y= $\pm$8cm)

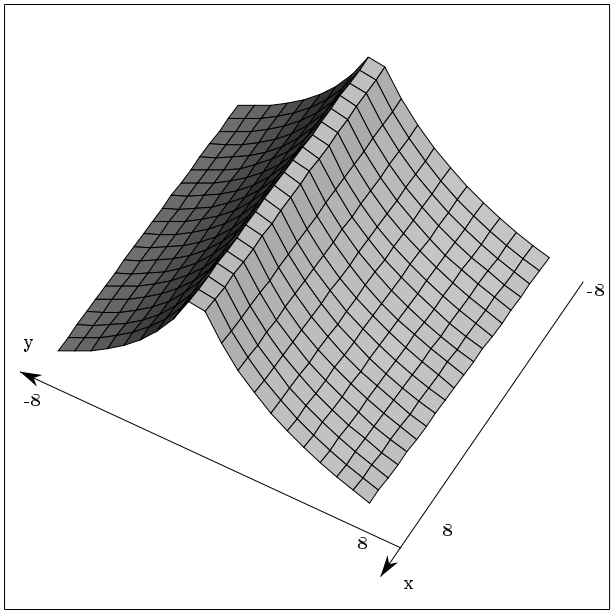

Figure 4.6: Vitesse cartésienne V_y maximale (x-y= $\pm$8cm)

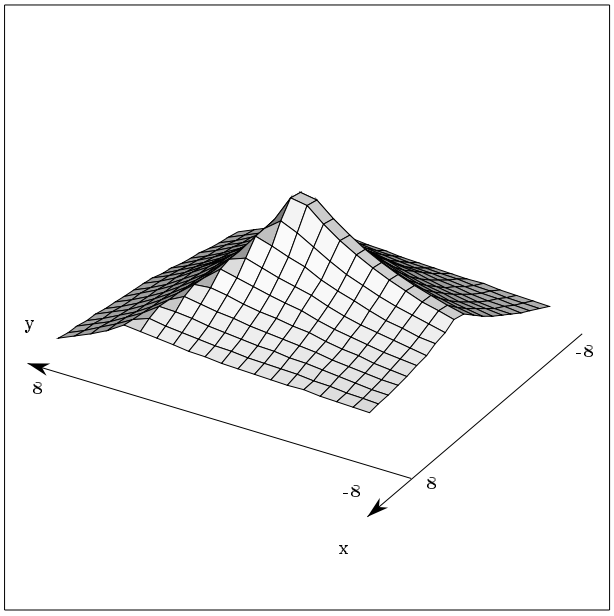

Figure 4.7: Vitesse angulaire ω_x maximale (x-y= $\pm$8cm)

4.5 Influence de la commande articulaire sur les mouvements cartésiens

On s'intéresse ici à la commande en position cartésienne de la main gauche. On suppose que l'on désire atteindre un objectif cartésien sur un axe fixé et on s'intéresse aux variations des coordonnées selon des axes perpendiculaires à l'axe de déplacement. Plus précisément dans l'exemple que nous allons traiter nous allons effectuer une translation selon l'axe x de 5cm, à partir de la position nominale, et regarder les variations des coordonnées y et z. Les coordonnées articulaires sont commandées par un régulateur proportionnel. On va mettre en évidence qu'un retard pur sur les vérins a de fortes conséquences sur les mouvements cartésiens du manipulateur.

Dans un premier temps on suppose que les vérins n'ont pas de retard pur. On obtient alors la courbe 4.8 pour ce qui concerne l'axe x. Les autres axes s'écartent de la valeur nulle de quantités négligeables. Supposons que nous introduisions maintenant un retard pur sur l'un

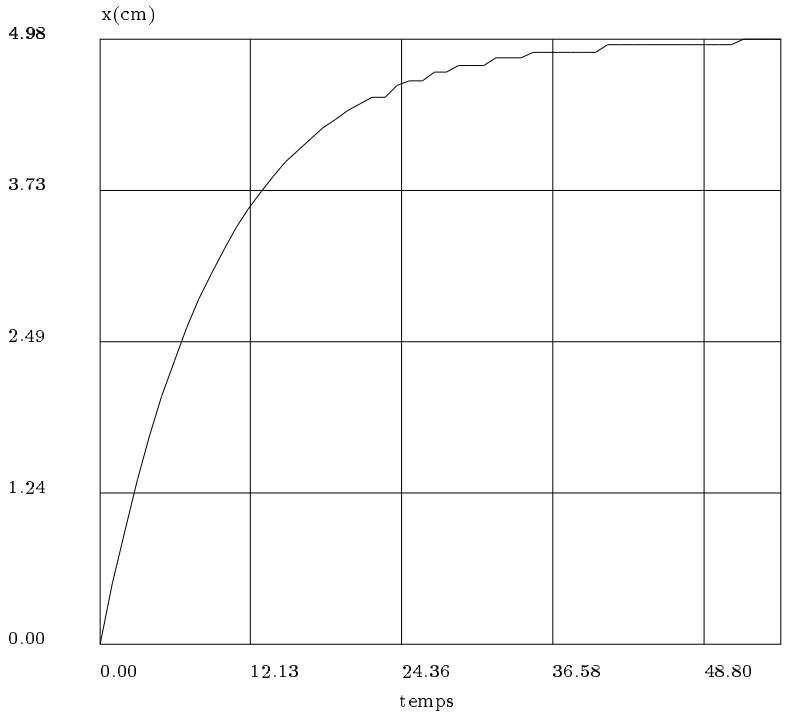

Figure 4.8: Mouvement selon l'axe x (pas de retard pur sur les vérins)

des vérins. On constate alors que les mouvements cartésiens sur les axes non concernés à-priori par la translation ont des amplitudes non négligeables. C'est un fait que nous pouvons observer d'ailleurs sur la main gauche qui souffre effectivement de retard pur dans la commande des vérins: pour des raisons de matériel notre commande cartésienne est une commande en position et les écarts de trajectoires pour une translation sont visibles à l'oeil nu. On ne saurait donc assez insister sur la nécessité d'une bonne identification des actionneurs ainsi que d'une électronique performante.

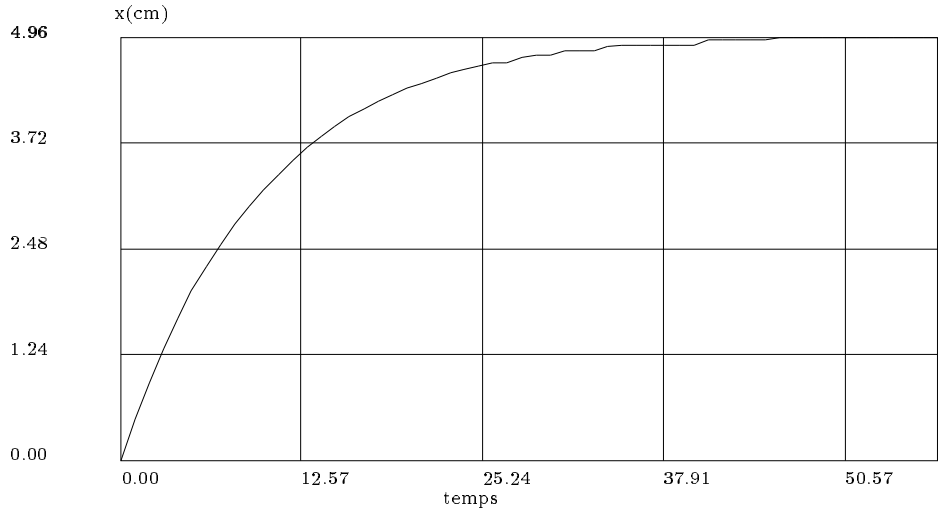

Figure 4.9: Mouvement selon l'axe x si le vérin 6 a un retard pur

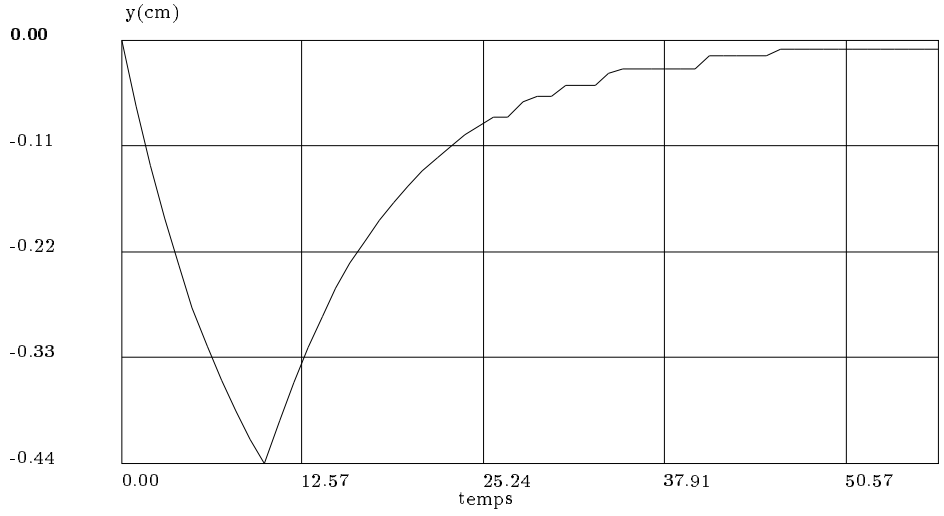

Figure 4.10: Mouvement selon l'axe y si le vérin 6 a un retard pur

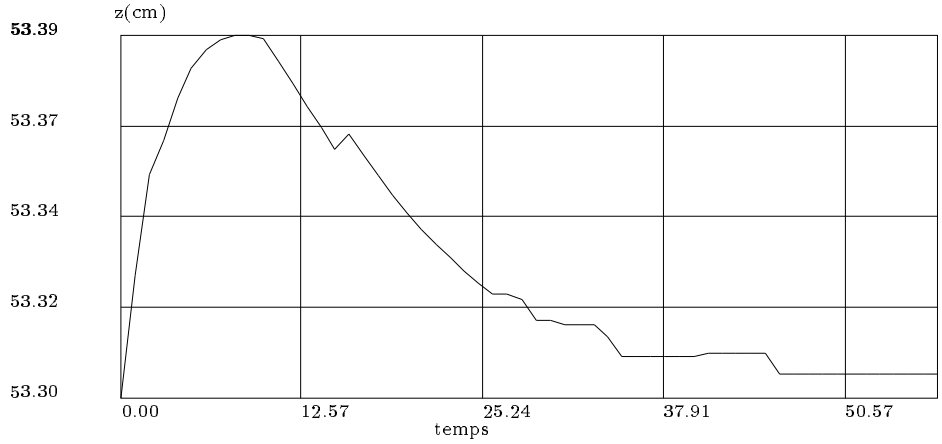

Figure 4.11: Mouvement selon l'axe z si le vérin 6 a un retard pur

4.6 Outils

La programmation d'un robots parallèle nécessite des outils de mise au point. Si en développant nos programmes sur une station de travail on dispose de nombreux outils de programmation et d'interaction graphique il n'en n'est pas de même pour ce qui concerne de l'environnement robotique. C'est pourquoi différents outils graphiques d'aide à la commande des robots ont été élaborés. Tous ces outils utilisent l'environnement SUNVIEW qui permet la création de boutons, menus, dessins et en assure la gestion. C'est ainsi que nous avons crée une boite à boutons graphique représentée sur la figure 4.12.

Cette outil permet la commande interactive soit articulaire soit cartésienne du robot. Dans le même ordre d'idée on a crée un outil permettant l'acquisition "au vol" de l'état du manipulateur (figure 4.13)

Cet outils permet en cliquant sur un bouton de déterminer le type d'asservissement courant, les valeurs brutes et converties des capteurs (potentiométres et capteurs d'effort), la position courante du robot (qui est dessinée en même temps en vue de dessus) ainsi que la position du centre de masse d'un objet posé sur le plateau mobile.

Figure 4.12: La boite à bouton de la main gauche

Figure 4.13: Outil d'acquisition de l'état de la main gauche

Chapitre 5

Les configurations singulières

5.1 Congruence

Dans la deuxième partie de cette monographie nous avions exploré une nouvelle technique pour la mise en évidence, de manière géométrique, des configurations singulières des robots parallèles. Nous avions montré que la géométrie des lignes, dite de Grassmann, permettait d'explorer les relations de dépendance entre droites de l'espace et que le manipulateur parallèle était dans une configuration singulière si ces lignes n'étaient pas indépendantes. Nous avons montré la puissance de cette technique dans le cas où certaines paires de point d'articulation occupaient le même point de l'espace, ce qui nous avait permis de trouver des configurations singulières inconnues à ce jour mais dans le cas le plus général nous avions rencontré des problèmes pour montrer que 5 lignes de l'espace pouvaient créer une congruence et que 6 lignes pouvaient se ramener à un complexe. Nous allons résoudre au moins partiellement ces problèmes en faisant un usage extensif des coordonnées de Plücker.

5.1.1 Notation et rappel

On considère ici un SSM c'est-à-dire un manipulateur parallèle avec 6 points d'articulation placés sur un cercle, distincts, mais satisfaisant à une symétrie axiale (figure 5.1).

Nous noterons PA_i le vecteur de Plücker associé à la i^{eme} ligne du SSM. On se rappelle qu'un vecteur de Plücker est un vecteur de dimension 6 et on notera pa_i le vecteur formé par les 3 premières composante de PA_i et qa_i le vecteur formé par les 3 dernières composantes.

$$PA_i = \begin{bmatrix} pa_i \\ qa_i \end{bmatrix}$$

On se rappelle que nous avons la relation:

$$pa_i . qa_i = 0$$

où "." représente le produit scalaire. Par la suite on sera amené à considérer différentes droites qui vont intersecter les différentes droites du SSM. On désignera par de simples numéros ces

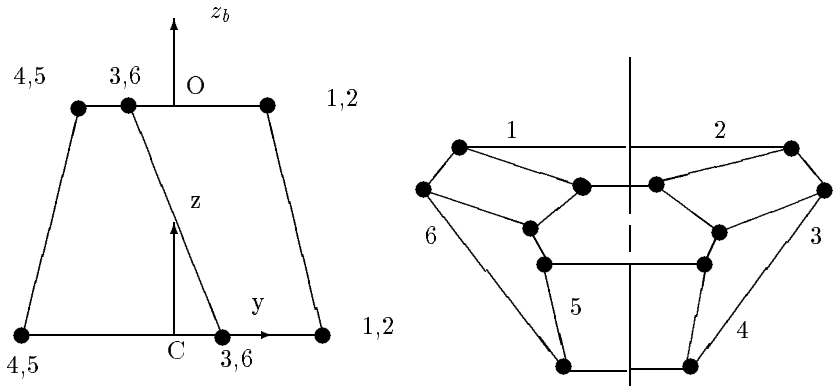

Figure 5.1: Un SSM (vue de côté et de dessus

droites dont nous noterons les vecteurs de Plücker par P_i où i est le numéro de la droite. On aura :

$$P_i = \begin{bmatrix} p_i \\ q_i \end{bmatrix}$$

et nous avons de la même manière :

$$p_i.q_i = 0$$

On notera les composantes des vecteurs p_i, q_i par :

$$p_i = \begin{bmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \\ p_{i3} \end{bmatrix} \qquad q_i = \begin{bmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ q_{i3} \end{bmatrix}$$

La condition d'intersection de la droite i avec une des lignes du SSM s'écrit simplement :

$$p_i.qa_i + q_i.pa_i = 0$$

5.1.2 Congruence et 5 lignes d'un SSM

Nous n'avions pas résolu le problème de la configurations de type 4c pour le SSM, c'est-à-dire le cas où 5 lignes du SSM intersectaient toutes 2 droites gauches. Une congruence établit deux relations de dépendence sur les coordonnées des vecteur de Plücker des droites. Nous allons essayer de trouver une forme appropriée à ces deux relations. On va considérer 4 des 6 lignes (par exemples les lignes 1, 2, 3, 4) constituant le SSM et établir des conditions pour que la ligne i intersecte ces 4 lignes. On écrit les 4 équations suivantes :

$$\begin{aligned} pa_1.q_i + qa_1.p_i &= 0 \\ pa_2.q_i + qa_2.p_i &= 0 \\ pa_3.q_i + qa_3.p_i &= 0 \\ pa_4.q_i + qa_4.p_i &= 0 \end{aligned}$$

Ces 4 équations linéaires en terme des p_{ij}, q_{ij} nous permettent de calculer 4 de ces composantes en fonction des 2 dernières. On choisit de calculer $p_{i1}, p_{i2}, q_{i1}, q_{i2}$ en fonction de p_{i3}, q_{i3}. On a alors:

$$\begin{bmatrix} p_{i1} \\ p_{i2} \end{bmatrix} = U p_{i3} + V q_{i3} \tag{5.1}$$

et de la même manière :

$$\begin{bmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \end{bmatrix} = R p_{i3} + S q_{i3} \tag{5.2}$$

Ecrivons alors que la droite i coupe la 5eme ligne du SSM :

$$pa_5.q_i + qa_5.p_i = 0$$

En remplacant les p_{ij}, q_{ij} calculées précedemment on obtient une relation linéaire en terme des p_{i3}, q_{i3} :

$$\mathrm{A} p_{i3} + \mathrm{B} q_{i3} = 0 \tag{5.3}$$

L'équation précédente doit être satisfaite pour toute droite qui coupe les 5 droites du SSM. Supposons tout d'abord que A et B sont non nulles. On en déduit :

$$p_{i3} = -\frac{\mathrm{B} q_{i3}}{\mathrm{A}}$$

On peut alors écrire :

$$p_i = \begin{bmatrix} -\frac{U\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + V \\ -\frac{B}{A} \end{bmatrix} q_{i3} \qquad\qquad q_i = \begin{bmatrix} -\frac{R\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + S \\ 1 \end{bmatrix} q_{i3}$$

Si on écrit alors que $p_i.q_i = 0$ on a :

$$\left[-\frac{U^T \mathrm{B}}{\mathrm{A}} + V^T \qquad -\frac{B}{A} \right] \begin{bmatrix} -\frac{R\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + S \\ 1 \end{bmatrix} q_{i3}^2 = 0$$

Si $q_{i3} = 0$ on a alors $p_{i3} = 0$: la droite i n'est pas définie. On en déduit alors que :

$$\left[-\frac{U^T \mathrm{B}}{\mathrm{A}} + V^T \qquad 1 \right] \begin{bmatrix} -\frac{R\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + S \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{5.4}$$

Supposons alors qu'il existe une deuxième droite j qui intersecte les 5 droites du SSM mais qui est gauche avec i. Ecrivons la condition pour que i soit gauche avec j :

$$p_i.q_j + q_i.p_j \neq 0$$

Les droites i, j vérifient toutes deux les équations 5.1, 5.2, 5.3. On a alors :

$$p_i.q_j = \left[-\frac{U^T \mathrm{B}}{\mathrm{A}} + V^T \qquad -\frac{B}{A} \right] \begin{bmatrix} -\frac{R\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + S \\ 1 \end{bmatrix} q_{i3} q_{j3}$$

En utilisant l'équation 5.4 on voit alors que :

$$p_i.q_j = 0$$

De la même manière on a :

$$p_j.q_i = \left[-\frac{U^T \mathrm{B}}{\mathrm{A}} + V^T \qquad -\frac{B}{A} \right] \begin{bmatrix} -\frac{R\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + S \\ 1 \end{bmatrix} q_{i3} q_{j3}$$

et donc que :

$$p_j.q_i = 0$$

ce qui revient à dire que les droites ne peuvent être gauche.

Supposons maintenant que l'un des coefficients A ou B soit nul. Si B est nul on a alors :

$$Ap_{i3} = 0$$

Comme on ne s'intéresse pas au cas où $p_{i3} = 0$ (droite dans le plan de la base du manipulateur) on obtient donc $A = 0$.

Si A est nul et B non nul on a :

$$Bq_{i3} = 0$$

Si $q_{i3} = 0$ on obtient :

$$p_i = \begin{bmatrix} U^T & & 1 \end{bmatrix} p_{i3}$$

$$q_i = \begin{bmatrix} R^T & & 1 \end{bmatrix} p_{i3}$$

Soit

$$p_i.q_i = \begin{bmatrix} U^T R & & 1 \end{bmatrix} p_{i3}^2 = 0$$

Et on en déduit de la même manière que précedemment:

$$p_j.q_i + p_i.q_j = \begin{bmatrix} U^T R & & 1 \end{bmatrix} p_{i3} q_{j3} = 0$$

Les deux droites ne peuvent donc pas être gauche.

En conclusion la congruence va être caractérisée par les deux conditions :

$$\mathrm{A} = 0 \qquad\qquad \mathrm{B} = 0 \tag{5.5}$$

Le calcul de ces deux conditions est complexe dans le cas général mais nous avons pu le mener à bien si on suppose que le plateau mobile peut se translater dans le plan x-y et seulement tourner autour autour de son axe vertical. Si on rajoute un autre degré de liberté en rotation les systèmes de calcul formel (nous avons utilisé MAPLE, MACSYMA et REDUCE) n'arrivent pas à résoudre le système d'équations linéaires.Il en est de même si on choisit une rotation autour d'un axe horizontal. Ceci montre bien la nécessité de création d'un système de calcul formel pour la géométrie.

On trouve dans ce cas résolue la condition suivante pour que B=0

$$B = 6rz_0(4\sqrt{3}\sin(\gamma)\cos(\gamma) - 8\sqrt{3}\cos^3(\gamma)\sin(\gamma) - 8\cos^2(\gamma) + 8\cos^4(\gamma) + 3) \tag{5.6}$$

où γ est le demi-angle entre deux point d'articulation voisins. L'équation admet comme solution en γ la valeur $\pi/6$ ce qui correspond à des plateaux de forme hexagonale régulière. Mais dans ce cas le déterminant du système linéaire est nul. Il n'y a donc pas de solution. Le programme REDUCE présenté en annexe montre la résolution du problème pour le cas où l'on autorise la rotation autour d'un axe vertical.

On a pu d'ailleurs confirmer ce résultat en calculant dans ce cas particulier la valeur du déterminant de l'inverse de la matrice jacobienne qui est :

$$det = \frac{det_1}{\prod_{i=1}^{i=6} \rho_i}$$

$$
\begin{aligned}
det_1 &= \frac{27\alpha_0 \cos(t)\, g r^3 r^3 z_0^3}{4} \\
\text{où} & \\
\alpha_0 &= \sqrt{3}\left(6\cos^2(\gamma) - 3\right) - 64\cos^5(\gamma)\sin(\gamma) \\
&\quad +64\cos^3(\gamma)\sin(\gamma) - 18\cos(\gamma)\sin(\gamma)
\end{aligned}
$$

et qui s'annule effectivement pour $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$ ou $\gamma = \frac{\pi}{6}$. On a pu faire de même pour ce qui concerne le TSSM. Introduisons tout d'abord une notation concernant les points d'articulations qui va nous permettre de simplifier le calcul. On va définir deux angles u, v permettant de repérer ces points d'articulations (figure 5.2) et on définit R et r les rayons des cercles sur lesquelles se trouve les points d'articulation sur le plateau fixe et le plateau mobile. Les coor-

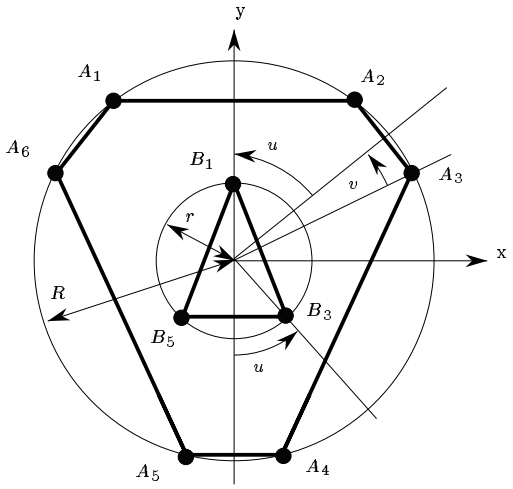

Figure 5.2: Définition des points d'articulation pour un TSSM

données des points d'articulation sont donc :

$$
\begin{aligned}
xa_1 &= -Rsin(u-v) && (5.7)\\
ya_1 &= Rcos(u-v) && (5.8)\\
xa_3 &= Rsin(u+v) && (5.9)\\
ya_3 &= Rcos(u+v) && (5.10)\\
xa_4 &= Rsin(v) && (5.11)\\
ya_4 &= -Rcos(v) && (5.12)\\
x_3 &= rsin(u) && (5.13)\\
y_3 &= -rcos(u) && (5.14)
\end{aligned}
$$

Rappelons qu'une ligne de l'inverse de la jacobienne s'exprime sous la forme :

$$\frac{\mathbf{A_iB_i}}{\rho_i}, \frac{\mathbf{CB_i} \wedge \mathbf{A_iB_i}}{\rho_i}$$

Posons $s_1 = R^2 + r^2$. Les longueurs des segments s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} -ro1 \quad = \quad & 2\cos(\psi - u + v)\, R\; r + 2\cos(u - v)\, R\; y_0 \\ & -2\cos(\psi)\, r y_0 - 2\sin(u - v)\, R\; x_0 + 2\sin(\psi)\, r x_0 \\ & -s_1 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -ro2 \quad = \quad & 2\cos(\psi + u - v)\, R\; r + 2\cos(u - v)\, R\; y_0 \\ & -2\cos(\psi)\, r y_0 + 2\sin(u - v)\, R\; x_0 + 2\sin(\psi)\, r x_0 \\ & -s_1 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ro3 \quad = \quad & 2\cos(\psi + 2u + v)\, R\; r - 2\cos(\psi + u)\, r y_0 \\ & -2\cos(u + v)\, R\; y_0 + 2\sin(\psi + u)\, r x_0 \\ & -2\sin(u + v)\, R\; x_0 + s_1 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ro4 \quad = \quad & -2\cos(\psi + u - v)\, R\; r - 2\cos(\psi + u)\, r y_0 \\ & +2\cos(v)\, R\; y_0 + 2\sin(\psi + u)\, r x_0 - 2\sin(v)\, R\; x_0 \\ & +s_1 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -ro5 \quad = \quad & 2\cos(\psi - u + v)\, R\; r + 2\cos(\psi - u)\, r y_0 \\ & -2\cos(v)\, R\; y_0 - 2\sin(\psi - u)\, r x_0 - 2\sin(v)\, R\; x_0 \\ & -s_1 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ro6 \quad = \quad & 2\cos(\psi - 2u - v)\, R\; r - 2\cos(\psi - u)\, r y_0 \\ & -2\cos(u + v)\, R\; y_0 + 2\sin(\psi - u)\, r x_0 \\ & +2\sin(u + v)\, R\; x_0 + s_1 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \end{aligned}$$

on obtient:

$$det = cos\psi x_3 x a_1 (x_3 y a_3 - x_3 y a_4 + x a_3 y_1 - x a_3 y_3 - x a_4 y_1 + x a_4 y_3)(y_1 - y_3)(y a_3 - y a_4) z_0^3$$

5.2 Le MSSM comme complexe spécial

Dans ce cas nous avions vu que les termes de la matrice de rotation doivent satisfaire à une équation les liant aux coordonnées des points d'articulation :

$$(v2y_3 - v2y_1 + v1x_3)(y a_4 - y a_1) + x a_2 (v5y_3 - v5y_1 + v4x_3) = 0$$

Cette équation peut être résolue et l'on donne ici les trois solutions possibles :

$$
\begin{aligned}
\psi &= -\arctan\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right) \\
\text{où} & \\
\alpha_0 &= \cos(\phi)\cos(\theta)\,xa_2y_1 - \cos(\phi)\cos(\theta)\,xa_2y_3 \\
&\quad + \cos(\phi)\,x_3ya_1 - \cos(\phi)\,x_3ya_4 - \cos(\theta)\sin(\phi)\,x_3xa_2 \\
&\quad + \sin(\phi)\,y_1ya_1 - \sin(\phi)\,y_1ya_4 - \sin(\phi)\,y_3ya_1 \\
&\quad + \sin(\phi)\,y_3ya_4
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos(\phi)\cos(\theta)\,y_1ya_1 - \cos(\phi)\cos(\theta)\,y_1ya_4 \\
&\quad - \cos(\phi)\cos(\theta)\,y_3ya_1 + \cos(\phi)\cos(\theta)\,y_3ya_4 \\
&\quad - \cos(\phi)\,x_3xa_2 - \cos(t)\sin(\phi)\,x_3ya_1 \\
&\quad + \cos(\theta)\sin(\phi)\,x_3ya_4 - \sin(\phi)\,xa_2y_1 + \sin(\phi)\,xa_2y_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\theta &= -\left(\arccos\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right) - \pi\right) \\
\text{où} & \\
\alpha_0 &= \cos(\phi)\cos(\psi)\,x_3ya_1 - \cos(\phi)\cos(\psi)\,x_3ya_4 \\
&\quad - \cos(\phi)\sin(\psi)\,x_3xa_2 + \cos(\psi)\sin(\phi)\,y_1ya_1 \\
&\quad - \cos(\psi)\sin(\phi)\,y_1ya_4 - \cos(\psi)\sin(\phi)\,y_3ya_1 \\
&\quad + \cos(\psi)\sin(\phi)\,y_3ya_4 - \sin(\phi)\sin(\psi)\,xa_2y_1 \\
&\quad + \sin(\phi)\sin(\psi)\,xa_2y_3
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \cos(\phi)\cos(\psi)\,xa_2y_1 - \cos(\phi)\cos(\psi)\,xa_2y_3 \\
&\quad + \cos(\phi)\sin(\psi)\,y_1ya_1 - \cos(\phi)\sin(\psi)\,y_1ya_4 \\
&\quad - \cos(\phi)\sin(\psi)\,y_3ya_1 + \cos(\phi)\sin(\psi)\,y_3ya_4 \\
&\quad - \cos(\psi)\sin(\phi)\,x_3xa_2 - \sin(\phi)\sin(\psi)\,x_3ya_1 \\
&\quad + \sin(\phi)\sin(\psi)\,x_3ya_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi &= \arctan\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right) \\
\text{où} & \\
\alpha_0 &= \cos(\psi)\cos(\theta)\,xa_2y_1 - \cos(\psi)\cos(\theta)\,xa_2y_3 \\
&\quad + \cos(\psi)\,x_3ya_1 - \cos(\psi)\,x_3ya_4 + \cos(\theta)\sin(\psi)\,y_1ya_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - \cos(\theta)\sin(\psi)\, y_1 y a_4 - \cos(\theta)\sin(\psi)\, y_3 y a_1 \\
& + \cos(\theta)\sin(\psi)\, y_3 y a_4 - \sin(\psi)\, x_3 x a_2
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 \;=\; & \cos(\psi)\cos(\theta)\, x_3 x a_2 - \cos(\psi)\, y_1 y a_1 + \cos(\psi)\, y_1 y a_4 \\
& + \cos(\psi)\, y_3 y a_1 - \cos(\psi)\, y_3 y a_4 + \cos(\theta)\sin(\psi)\, x_3 y a_1 \\
& - \cos(\theta)\sin(\psi)\, x_3 y a_4 + \sin(\psi)\, x a_2 y_1 - \sin(\psi)\, x a_2 y_3
\end{aligned}
$$

On a remarqué aussi que si la variable z_0 devait satisfaire à une équation du deuxième degré dont les coefficients dépendent des autres coordonnées généralisées, par contre les variables x_0, y_0 sont obtenues comme solution d'une équation linéaire. Un exemple d'une telle configuration est illustrée figure 5.3.

5.3 Maneuvrabilité

Dans ce contexte des configurations singulières il est intéressant de déterminer si l'on est proche d'une telle configuration. Un index possible est de considérer la valeur absolue du déterminant de l'inverse jacobienne. Cet index, que l'on appele généralement maneuvrabilité, permet d'introduire une notion imparfaite de distance à une singularité. Elle est utile en fait au approche d'une telle situation car elle permet de mettre en exergue la valeur propre la plus faible de l'inverse de la jacobienne. Cette valeur propre faible indique que les forces articulaires peuvent devenir fortes pour une combinaison de forces et moments extérieurs appliqués, le rapport des forces articulaires sur les forces extérieurs étant l'inverse de la valeur propre en question. On concoit alors l'importance de l'index pour la conception du manipulateur. Une analyse plus rigoureuse des valeurs propres sera d'ailleurs effectuée dans une section ultérieure. Dans les figures suivantes on présente des représentations tridimensionnelles de la maneuvrabilité lorsque deux degrés de liberté du manipulateur sont laissés libres. Insistons sur le fait qu'il s'agit d'une aide visuelle qui ne saurait remplacer une étude rigoureuse des valeurs propres de l'inverse jacobienne.

Considérons tout d'abord le cas des déplacements dans le plan x-y (figure 5.4)

La maneuvrabilité est maximum dans la position nominale du manipulateur et décroît fortement lorsque x-y augmente. Nous avons volontairement exagéré les possibilités de déplacement dans le plan pour illustrer cette particularité. Toutefois on peut confirmer ainsi que le robot évolue en toute sécurité dans ce plan.

Examinons maintenant le cas où les variables laissées libres sont x et ψ (ce qui correspond donc à une rotation possible autour de l'axe vertical). Nous savons qu'une singularité est présente dans ce cas lorsque la valeur de l'angle de rotation est $\pm\frac{\pi}{2}$, ceci quelle que soit la position du centre du plateau mobile. Nous savons que cette valeur est hors du domaine atteignable de la "main gauche" mais il est judicieux d'examiner la variation de la maneuvrabilité autour de cette position. Sur la figure 5.5 nous avons donc choisi de faire varier la position en x de $\pm$ 8cm et la variable ψ de $\pm$ 90 degré.

On peut alors constater que la maneuvrabilité décroît très rapidement si l'on augmente l'angle de rotation. On examinera plus précisément dans ce cas quelle est la valeur propre qui devient faible et quel est son vecteur propre correspondant. Une figure identique serait obtenue si l'on considérait l'axe y en place de l'axe x. On va considérer le cas où les degrés libres sont l'axe x et une rotation autour de cet axe, d'angle θ (figure 5.6). On a limité les déplacements

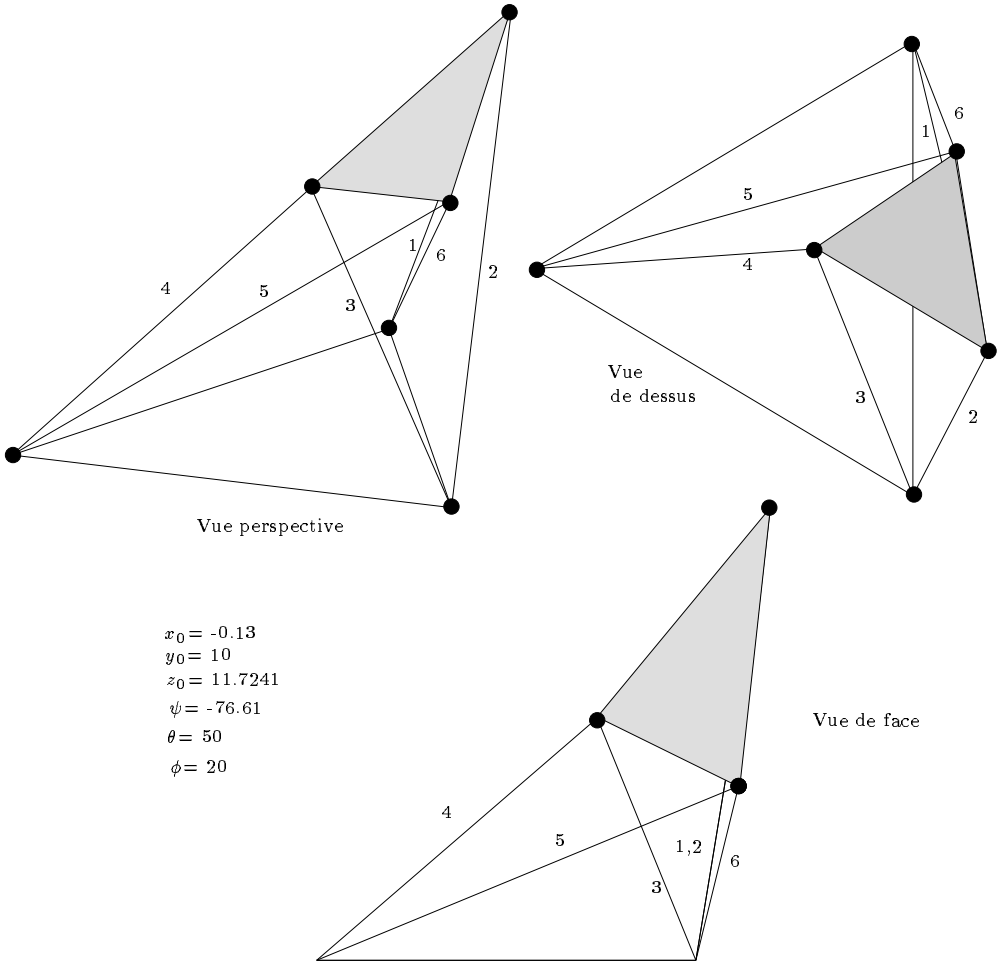

Figure 5.3: Exemple de configuration conduisant à un complexe spécial

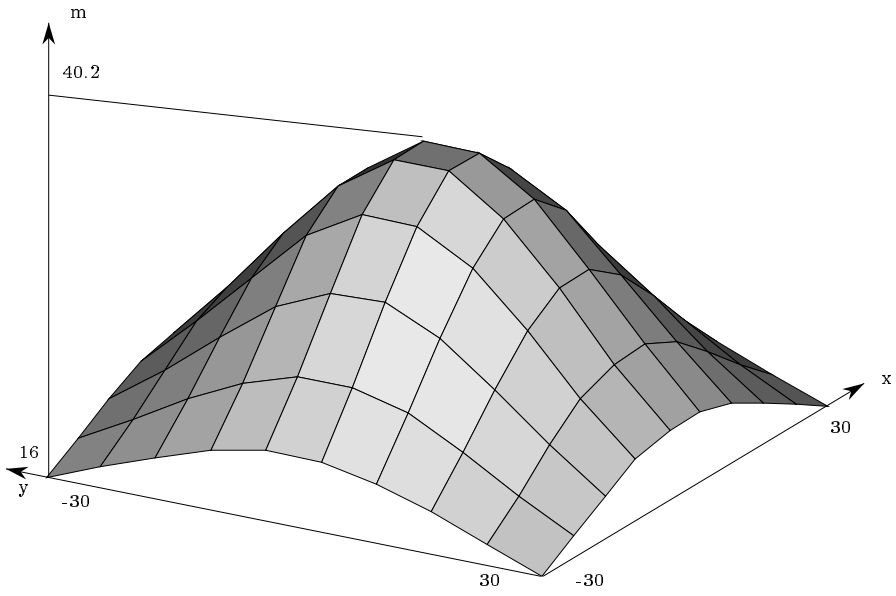

Figure 5.4: Maneuvrabilité pour x,y = ± 30cm

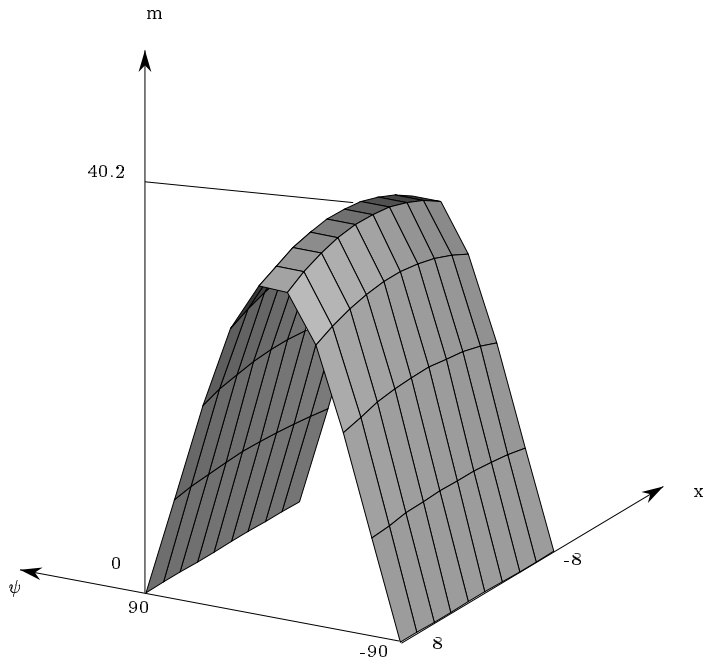

Figure 5.5: Maneuvrabilité pour x= ± 8cm, ψ = ± 90 degré

à x= ± 10cm, θ = ± 45 degré qui sont des valeurs exagérés vis-à-vis des possibilités de mouvement de la main gauche. Si on se référe à l'étude complète des configurations singulières on se rappele que, pour un TSSM, une singularité apparaîssait pour θ= 90 degré. On voit ici qu'effectivement la maneuvrabilité subit une décroissance rapide dès que l'on augmente l'angle de rotation. Rappelons simplement que la géométrie de la main gauche ne permet pas d'atteindre des angles élevés dans ce type de rotation.

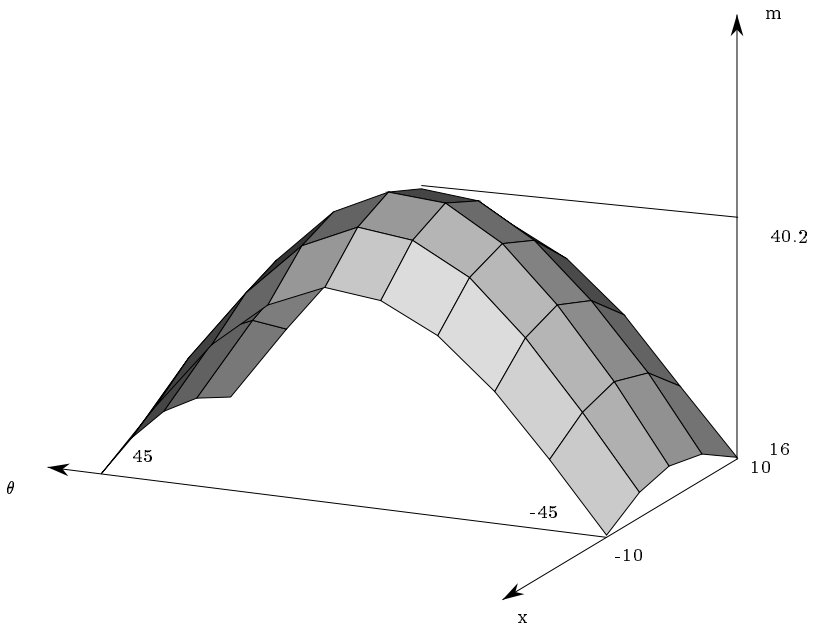

Figure 5.6: Maneuvrabilité pour x= ± 10cm, θ = ± 45 degré

On peut reprendre la même étude si en place de x on laisse libre y. Le résultat (figure 5.7) est identique en ce qui concerne les conclusions même si la forme de la surface est sensiblement différente. Il semblerait en effet qu'une variation en y permet de faire remonter la maneuvrabilité pour un θ donné contrairement au cas précedent où seule la variation en θ conditionnait sa décroissance sans que les variations en x l'influe.

Pour en terminer avec les rotations on va maintenant libérer les variations en ψ, θ (c'est-à-dire permettre une rotation autour de l'axe z puis une rotation autour du nouvel axe x) en laissant le centre du plateau dans sa position nominale. On permet ici des variations de ± 90 degré en ψ (on passe donc dans une singularité) et de ± 30 degré en θ (figure 5.8).

On constate là aussi une rapide décroissance de la maneuvrabilité lorsque l'angle ψ augmente sans que θ influe considérablement l'amplitude de cette décroissance. Parallèlement on remarque une décroissance lorsque θ augmente, sans que la valeur de ψ influe sur celle-ci.

Pour en terminer avec cette étude de la maneuvrabilité considérons ses variations lorsque l'on libére les variables x, z. On va présenter ici une vue globale lorsque z=0-53 et x= ± 10 cm (figure 5.9). On se rappele que nous avons une singularité évidente pour z=0.

On constate alors une phénomène intéressant. La maneuvrabilité présente un pic très élevé juste avant la singularité. Ce pic correspond à une position extrêmement stable du manipulateur où les segments du manipulateur forment un angle de 30 degré avec la base du

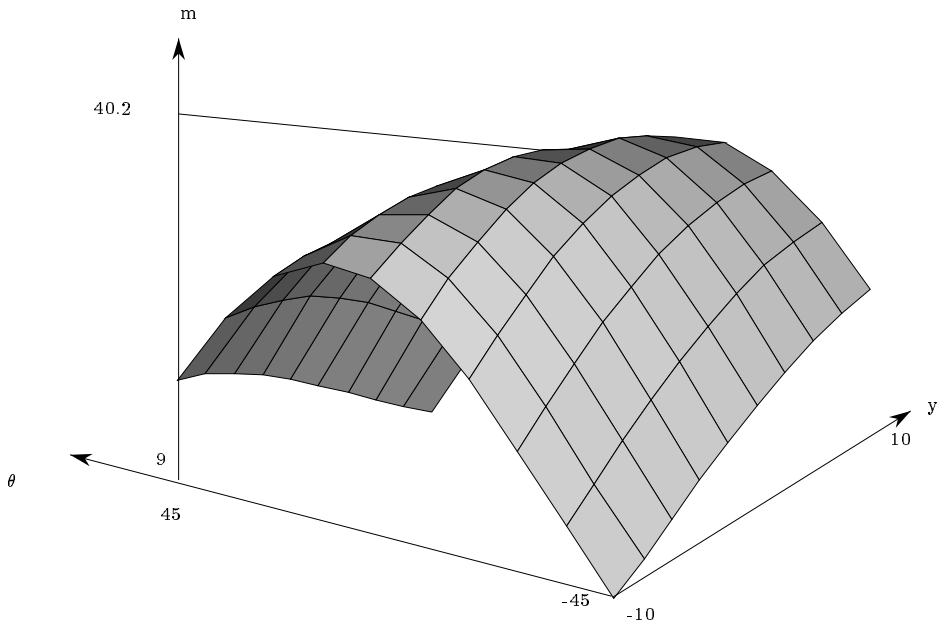

Figure 5.7: Maneuvrabilité pour y= ± 10cm, θ = ± 45 degré

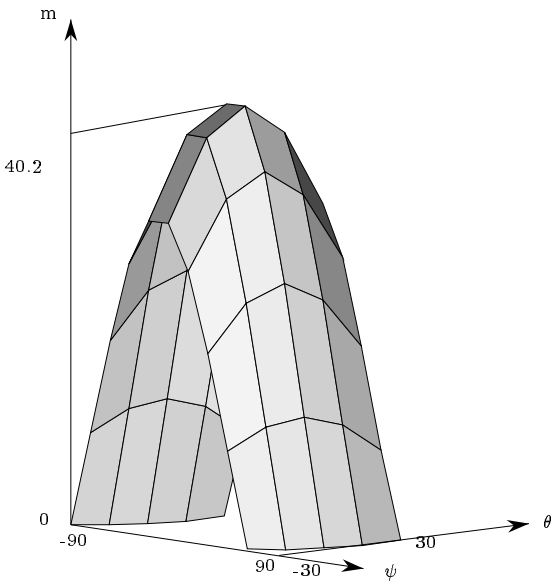

Figure 5.8: Maneuvrabilité pour ψ=± 90 degré, θ = ± 30 degré

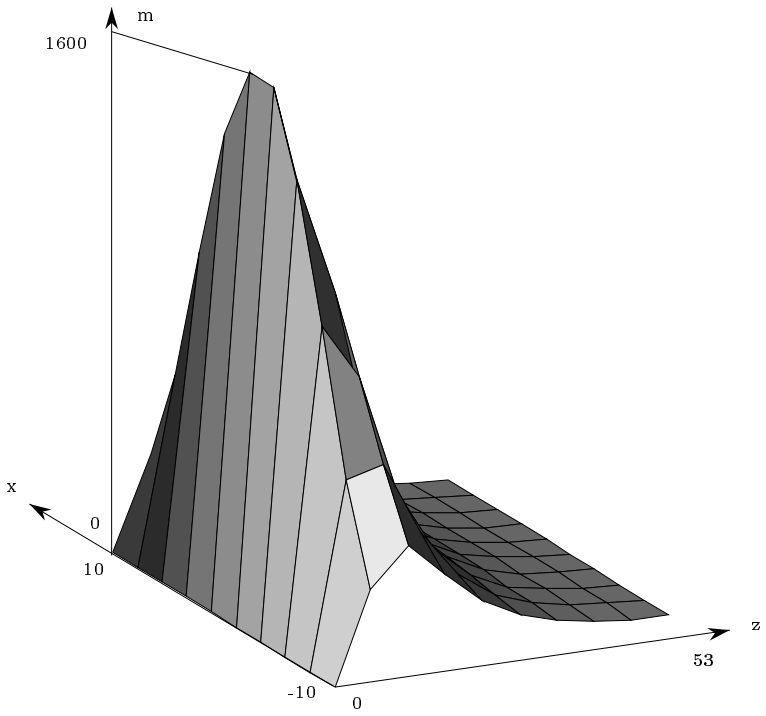

Figure 5.9: Maneuvrabilité pour z=0-53, x = ± 10 cm

robot. Dans ce cas un mouvement en x-y-z nécessite une forte sollicitation extérieure. Mais cette sollicitation va rapidement diminuer dès que l'on aura réussit à dépasser ce "point dur".

5.4 Vecteurs propres des configurations singulières

L'étude des configurations singulières faite dans la deuxième partie de cette monographie nous a permis de mettre en évidence des familles de singularités. Nous n'avons cependant pas examiné le type des degrés de liberté supplémentaires obtenus dans ces configurations. Ceci se fait de manière simple en considérant les vecteurs propres associés aux valeurs propres nulles de la matrice inverse jacobienne. Ces vecteurs propres fixent le mouvement du manipulateur qui est effectué avec des vitesses articulaires nulles. En vertu du principe de réciprocité ils donnent aussi les torseurs de forces extérieures qui ne peuvent être équilibrés par les forces articulaires. Pour la détermination des vecteurs propres nous avons utilisé le programme BASILE qui est un outil de calcul formel pour l'automatique [1]. Nous avons écrit un programme C qui calcule la matrice jacobienne inverse du manipulateur pour une position et orientation donnée et qui génére un programme BASILE qui se charge du calcul numérique des vecteurs propres et valeurs propres associées (fonction *bdiag*). Nous allons examiner les différent cas de singularités exposés dans la partie 2 de la monographie. Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes :

ji : matrice jacobienne inverse

v_p: valeur propre de la matrice inverse jacobienne

vec_p : matrice des vecteurs propres associés

ji_d : matrice jacobienne diagonalisée (si c'est possible)

5.4.1 SSM

5.4.1.1 Configuration singulière de dimension 4

Nous avons vu (page 58 de la partie 2) que si les coordonnées des points d'articulation d'un SSM satisfaisaient aux relations :

$$xa_2 = xa_4 \quad 2ya_3 = ya_1 + ya_4$$

alors le manipulateur présentait une singularité quelle que soit la position du centre du plateau mobile du moment que les angles d'Euler restaient tous nuls. Ces relations sont satisfaites en particulier si les points d'articulation sont régulièrement répartis sur un cercle (angle entre deux points successifs égal à 60 degré, figure 5.10). C'est le cas que l'on va examiner.

La matrice jacobienne inverse s'écrit :

$$ji = \begin{pmatrix} -0.096909 & -0.104299 & 0.989813 & 4.544301 & -4.222314 & 0. \\ -0.142371 & 0. & 0.989813 & 0. & -6.203114 & 0. \\ -0.096909 & 0.104299 & 0.989813 & -4.544301 & -4.222314 & 0. \\ 0.096909 & 0.104299 & 0.989813 & -4.544301 & 4.222314 & 0. \\ 0.142371 & 0. & 0.989813 & 0. & 6.203114 & 0. \\ 0.096909 & -0.104299 & 0.989813 & 4.544301 & 4.222314 & 0. \end{pmatrix}$$

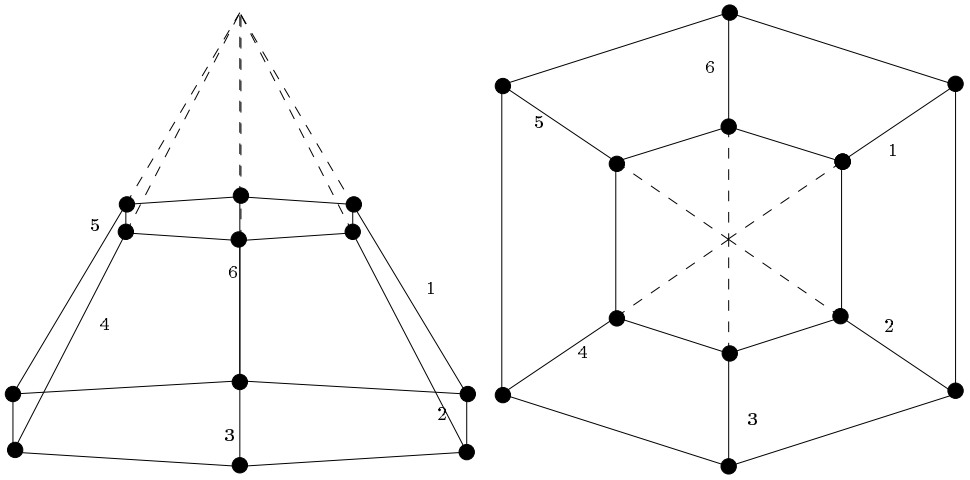

Figure 5.10: Exemple de configuration des points d'articulation conduisant à une singularité de dimension 4 (les points d'articulation sont régulièrement répartis sur un cercle)

Ces valeurs propres sont :

$$v_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.1544846 \\ 4.5236379 \\ 2.1825627 \\ 0.513\ 10^{-16} \\ 0.0000011 \end{pmatrix}$$

Ces vecteurs propres sont :

$$vec_p = \begin{pmatrix} 0. & 1.214427 & 0.428980 & -2.672756 & 0.13\ 10^{-09} & -5.279033 \\ 0. & 0.288407 & 0.760978 & -3.507642 & 4.625164 & -5.527051 \\ 0. & -0.713273 & 0.705579 & -2.959569 & 0. & -0.29\ 10^{-05} \\ 0. & -0.874550 & -0.120205 & -0.011630 & 0.106155 & -0.126855 \\ 0. & 0.051470 & -0.452204 & 0.823256 & -0.29\ 10^{-11} & 0.121162 \\ 1. & 1.05315 & -0.396805 & 0.275183 & -14.73594 & -5.405885 \end{pmatrix}$$

et la matrice inverse diagonalisé s'écrit :

$$ji_d = \begin{pmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & -4.154485 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 4.523638 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 2.182563 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.11\ 10^{-05} \end{pmatrix}$$

La matrice a donc trois valeurs propres nulles qui correspondent à un mouvement de rotation pure autour de l'axe z, à un mouvement combinant une translation selon l'axe y à une rotation autour de l'axe z (5eme colonne de la matrice des vecteurs propres) et enfin à un mouvement combinant des translations en x, y à une rotation en z.

5.4.1.2 Singularité de Fichter

Cette singularité correspond à une rotation du plateau supérieur de ± 90 degré autour de l'axe z quelle que soit la position du centre du plateau mobile.

$$ji = \begin{pmatrix} 0.27205 & -0.23095 & 0.93416 & -8.13129 & -1.95395 & 1.88497 \\ 0.05016 & -0.24690 & 0.96774 & -3.78463 & 6.88545 & 1.95282 \\ 0.18873 & 0.1669 & 0.96774 & -4.07043 & -6.72022 & 1.95282 \\ 0.06399 & 0.35108 & 0.93416 & 5.75767 & -6.06504 & 1.88505 \\ -0.33604 & -0.12013 & 0.93416 & 2.37362 & 8.01899 & 1.88505 \\ -0.23889 & 0.08000 & 0.96774 & 7.85509 & -0.16522 & 1.95275 \end{pmatrix}$$

$$v_p = \begin{pmatrix} 8.060677 + 4.8264924i \\ 8.060677 - 4.8264924i \\ 0.3417390 + 0.8413734i \\ 0.3417390 - 0.8413734i \\ 0.0000052 \\ -0.0825323 \end{pmatrix}$$

$$vec_p = \begin{pmatrix} -0.44984 & -0.19262 & -2.30525 & -0.08707 & 0.5\ 10^{-04} & -2.86241 \\ 0.30815 & -0.63004 & -0.87633 & 1.56327 & 0.00076 & 3.0959 \\ -0.47309 & 0.33439 & -1.68006 & -0.20265 & 2.92129 & -12.5603 \\ 0.12800 & 0.75599 & 0.18899 & 0.40150 & -0.2\ 10^{-04} & -0.19615 \\ 0.74137 & -0.42398 & -0.05904 & 0.11342 & 0.2\ 10^{-04} & -0.02585 \\ 0.59955 & 0.44005 & 0.30288 & -0.91737 & -1.4477 & 6.26952 \end{pmatrix}$$

$$ji_d = \begin{pmatrix} 6.60799 & 5.00469 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -5.07631 & 9.51336 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1.25704 & 2.53313 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -0.61019 & -0.57356 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.5\ 10^{-05} & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -0.08253 \end{pmatrix}$$

La matrice inverse jacobienne a donc une valeur propre nulle. La configuration correspond au cas où la variété engendrée par les lignes du manipulateur est un complexe. Le mouvement associé est une rotation autour de l'axe z combinée à un mouvement de translation selon cet axe. C'est donc bien le vissage décrit par Fichter. Dans notre cas le vissage a un pas de 12.67 cm.

5.4.2 TSSM

5.4.2.1 Configuration de type 3c

Dans cette configuration 4 lignes du TSSM intersectent toutes le même point (en l'occurrence un des points d'articulation du mobile, le point 1 sur la figure 5.11). On obtient dans ce cas les résultats suivants :

$$ji = \begin{pmatrix} -0.65643 & 0.01065 & 0.75431 & 2.45506 & -0.86643 & 2.14875 \\ -0.69861 & 0.16865 & 0.69534 & 1.39998 & -1.30628 & 1.72339 \\ -0.14616 & 0.82601 & 0.54438 & 3.92255 & -2.65503 & 5.08174 \\ -0.21696 & 0.68514 & 0.69535 & -1.40082 & 1.30542 & -1.72333 \\ 0.37734 & -0.25751 & 0.88955 & -6.41078 & -0.99739 & 2.43067 \\ -0.01768 & 0.01412 & 0.99974 & 3.25389 & 3.47558 & 0.00846 \end{pmatrix}$$

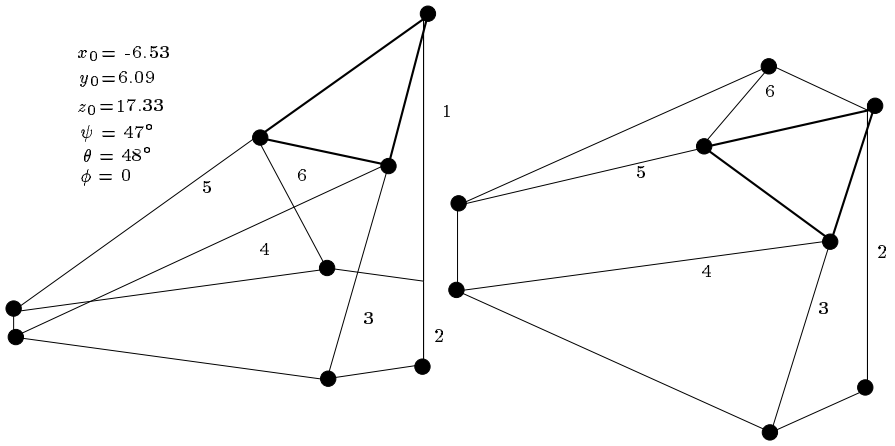

Figure 5.11: Configuration de type 3c : 4 lignes (1,2,3,5) coupe un même point (B1)

$$v_p = \begin{pmatrix} -3.35732 + 4.1518i \\ -3.35732 - 4.1518i \\ 1.6625 \\ -0.96171 \\ 3.68096 \\ -0.00025 \end{pmatrix}$$

$$vec_p = \begin{pmatrix} 0.35331 & 0.33633 & 0.47734 & -1.28922 & -0.46284 & -1.95699 \\ 0.37115 & 0.18027 & 0.65341 & -1.23912 & -0.28028 & 0.7003 \\ 0.95767 & 0.64982 & 1.0404 & 0.75793 & -0.91555 & -1.71815 \\ -0.45878 & -0.46272 & 0.28983 & 0.01566 & -0.01538 & -0.26716 \\ 0.37749 & -0.77593 & -0.81503 & -0.18676 & -0.61163 & 0.73003 \\ -0.59337 & 0.20458 & -0.51311 & -0.16996 & -0.84054 & 0.60166 \end{pmatrix}$$

$$ji_d = \begin{pmatrix} -2.63457 & 4.58354 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -3.8747 & -4.08008 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1.6625 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -0.96171 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 3.68096 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -0.00025 \end{pmatrix}$$

On obtient une valeur propre nulle qui correspond à un mouvement dont l'axe instantané de rotation passe par le point commun aux quatres droites (ici le point B1).

5.4.2.2 Configuration 4d

On considère ici le cas où 5 lignes d'un TSSM constituent une congruence dégénérée. Une telle configuration est montrée sur la figure 5.12. L'analyse des vecteurs propres amène :

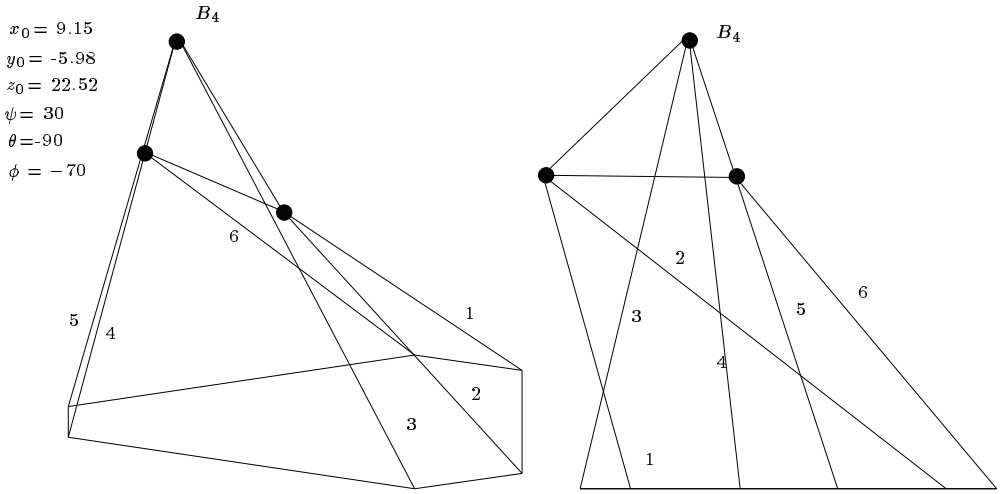

Figure 5.12: Congruence dégénérée pour un TSSM : toutes les lignes sont dans un plan ou intersectent un point donné du plan (ici 1,2,3 sont coplanaires et 5 intersecte B4)

$$ji = \begin{pmatrix} 0.22663 & -0.48986 & 0.84183 & 1.6643 & -5.56691 & -3.68745 \\ -0.20829 & -0.36494 & 0.90743 & 0.74923 & 1.41704 & 0.74186 \\ 0.10548 & 0.17805 & 0.97835 & -2.8531 & 3.642 & -0.35517 \\ 0.2962 & 0.17101 & 0.93969 & -2.74036 & 4.74645 & 0.7\ 10^{-05} \\ 0.55684 & -0.46167 & 0.69050 & -3.57399 & 2.58663 & 4.61163 \\ 0.73056 & -0.34344 & 0.59020 & 1.16682 & -5.33022 & -4.54599 \end{pmatrix}$$

$$v_p = \begin{pmatrix} -0.73702 + 5.56348i \\ -0.73702 - 5.56348i \\ -0.45724 + 0.72663i \\ -0.45724 - 0.72663i \\ -1.47116 \\ 0.3\ 10^{-06} \end{pmatrix}$$

$$vec_p = \begin{pmatrix} -0.63586 & 0.11570 & -0.51870 & -0.85370 & 2.07312 & 1.27871 \\ 0.16659 & 0.31605 & 0.10909 & -1.89647 & 5.16017 & 5.09475 \\ 0.53398 & 0.25102 & -1.33138 & 0.34133 & -2.65488 & 1.99747 \\ 0.66111 & 0.32316 & -0.86697 & 0.05755 & -2.30321 & 0.48921 \\ 0.19903 & -0.91719 & -0.16013 & 0.17348 & -0.40556 & -0.37637 \\ -0.58653 & 0.10125 & -0.25924 & -0.19983 & -0.76436 & 0.64679 \end{pmatrix}$$

$$ji_d = \begin{pmatrix} -2.94187 & -8.15164 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 4.39344 & 1.46784 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -0.18834 & -0.52027 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1.15381 & -0.72614 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -1.47116 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.3\ 10^{-06} \end{pmatrix}$$

5.4.2.3 Configuration 4b

Dans cette configuration 5 lignes du TSSM constitue une congruence hyperbolique, ce qui est caractérisé géométriquement par le fait que les 5 lignes intersectent toutes deux droites gauches D_1 et D_2. Dans notre analyse nous avions alors montré que deux cas pouvaient se produire :

$$D_1 \in P_{12} \quad et \quad D_1 \; intersecte \; B_3$$

$$D_2 \in P_{34} \quad et \quad D_2 \; intersecte \; B_1$$

ou

$$D_1 = P_{12} \cap P_{34} \quad et \quad D_2 = B_1 B_3$$

Le premier cas est illustré par la figure 5.13. L'analyse des valeurs propres donne les résultats suivants:

$$ji = \begin{pmatrix} -0.09198 & -0.83179 & 0.54741 & -1.30567 & -2.66135 & -4.2633 \\ -0.51028 & -0.6393 & 0.57525 & -2.01549 & -0.42070 & -2.25542 \\ -0.11747 & 0.20887 & 0.97086 & -6.93076 & 1.3281 & -1.12433 \\ -0.02152 & 0.65651 & 0.75401 & -0.43979 & 4.85835 & -4.24268 \\ 0.55725 & -0.34438 & 0.75556 & 2.30582 & 6.45448 & 1.24133 \\ 0.84607 & -0.44529 & 0.29305 & -0.69898 & -4.69262 & -5.1124 \end{pmatrix}$$

$$v_p = \begin{pmatrix} 7.2099 \\ -3.22627 + 2.2582i \\ -3.22627 - 2.2582i \\ -0.1\ 10^{-04} \\ 1.73263 \\ -1.34811 \end{pmatrix}$$

$$vec_p = \begin{pmatrix} -0.19317 & -0.47929 & 0.4085 & 0.70946 & 0.61116 & 1.59793 \\ -0.11283 & -0.61260 & -0.09017 & -1.60728 & 0.94001 & 1.55535 \\ -0.43262 & -1.23754 & -0.83152 & -3.40157 & 4.20396 & -0.45167 \\ 0.57754 & -0.60423 & 0.19785 & -0.40208 & -0.64504 & -0.15069 \\ 0.70937 & 0.29629 & 0.04435 & 0.45204 & -0.52414 & 0.02005 \\ -0.32238 & -0.13957 & 0.86364 & -0.29753 & 0.61957 & 0.14299 \end{pmatrix}$$

$$ji_d = \begin{pmatrix} 7.2099 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & -1.99942 & 5.54357 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & -1.1914 & -4.45312 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -0.1\ 10^{-04} & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1.73263 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -1.34811 \end{pmatrix}$$

On a une valeur propre nulle et l'axe instantané de rotation passe par le point de coordonnée 16.97, -2.465 dans le repère du plateau mobile.

5.4.2.4 Configuration de type 5a

Dans ce cas les 6 lignes du manipulateur constitue un complexe général et la configuration de Fichter en constitue un cas particulier. On avait montré qu'il existait deux autres solutions impliquant des contraintes sur les orientations : soit $\psi = \phi$ (figure 5.14), soit $\theta = \pm\pi/2$ (figure 5.15) avec dans les deux cas z_0 solution d'un polynome du troisième degré.

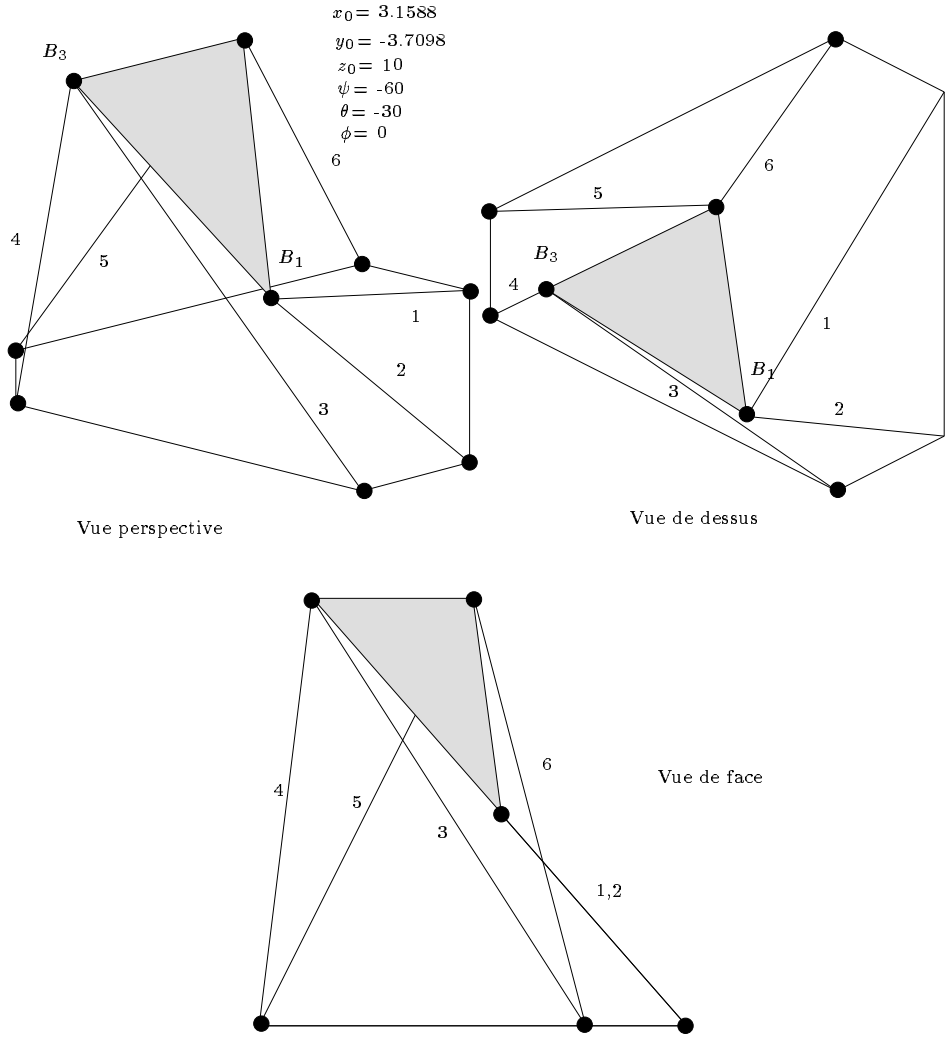

Figure 5.13: Congruence hyperbolique pour un TSSM : les lignes 1,2,3,4,5 intersectent toutes une ligne du plan P_{12} qui passe par B_3 et une ligne du plan P_{34} qui passe par B_1

L'analyse des valeurs propres du premier cas montre que l'on obtient une valeur propre nulle qui conduit à un mouvement complexe dont l'axe instantané de rotation passe par le point de coordonnées -11.62, -2.5 dans le repère du plateau mobile.

$$ji = \begin{pmatrix} -0.68597 & -0.36623 & 0.62875 & -0.92117 & 6.34324 & 2.68982 \\ -0.33418 & 0.0029 & 0.94251 & 3.72837 & -5.96504 & 1.3403 \\ 0.12159 & 0.66513 & 0.73676 & 2.48631 & -4.41562 & 3.57601 \\ 0.26820 & 0.33674 & 0.90260 & -5.62599 & -2.15682 & 2.47637 \\ 0.56482 & -0.29344 & 0.77128 & -2.31441 & -0.40325 & 1.54146 \\ 0.1829 & -0.49483 & 0.84952 & -1.24463 & 4.92293 & 3.13547 \end{pmatrix}$$

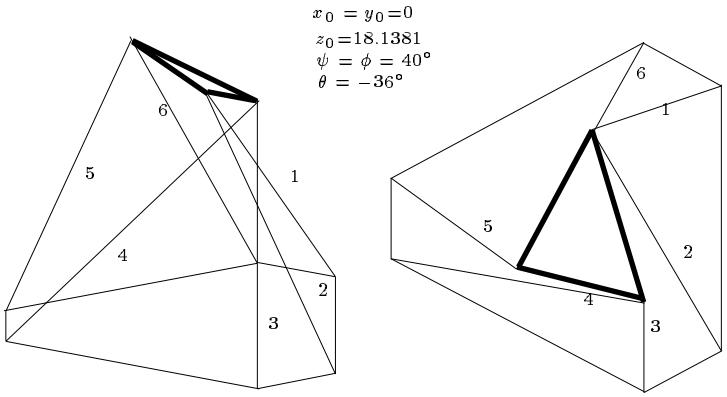

Figure 5.14: Première configuration où les 6 lignes du TSSM constitue un complexe général ($\psi = \phi$)

$$v_p = \begin{pmatrix} -6.82204 \\ 5.19126 \\ 1.46753 \\ -1.63356 \\ 0.2\ 10^{-05} \\ -1.04326 \end{pmatrix}$$

$$vec_p = \begin{pmatrix} 0.21555 & 0.76349 & -0.08753 & 2.4447 & -1.28001 & -2.78136 \\ 0.1777 & 0.07964 & 1.37911 & -1.43117 & -4.98167 & -0.86920 \\ 0.04029 & 0.56053 & 1.41228 & -2.08867 & -5.17541 & 2.43525 \\ -0.92286 & 0.21085 & 0.20344 & 0.29975 & -0.29749 & -0.17338 \\ -0.36434 & 0.30876 & -0.01013 & -0.50774 & -0.59561 & 0.12744 \\ 0.06621 & 0.89212 & -0.11888 & 0.73216 & 1.50776 & -0.67804 \end{pmatrix}$$

$$ji_d = \begin{pmatrix} -6.82204 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 5.19126 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1.46753 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -1.63356 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.2\ 10^{-05} & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -1.04326 \end{pmatrix}$$

Dans le deuxième cas le calcul des valeurs propres montre que l'on obtient une valeur propre nulle qui conduit à un mouvement complexe dont l'axe instantané de rotation passe par le point de coordonnées -12.55, -21.3 dans le repère du plateau mobile.

$$ji = \begin{pmatrix} -0.41702 & -0.21488 & 0.88313 & 1.06807 & -0.18437 & 0.45948 \\ -0.34119 & 0.00129 & 0.93999 & 0.87182 & -5.1364 & 0.32347 \\ 0.14697 & 0.69673 & 0.70212 & 2.77023 & -5.06037 & 4.44162 \\ 0.04127 & 0.76634 & 0.64110 & 5.14587 & 1.09385 & -1.63877 \\ 0.62670 & -0.07108 & 0.77601 & -0.73030 & -2.6949 & 0.34295 \\ 0.23830 & -0.22961 & 0.94366 & 1.14127 & 4.36379 & 0.77357 \end{pmatrix}$$

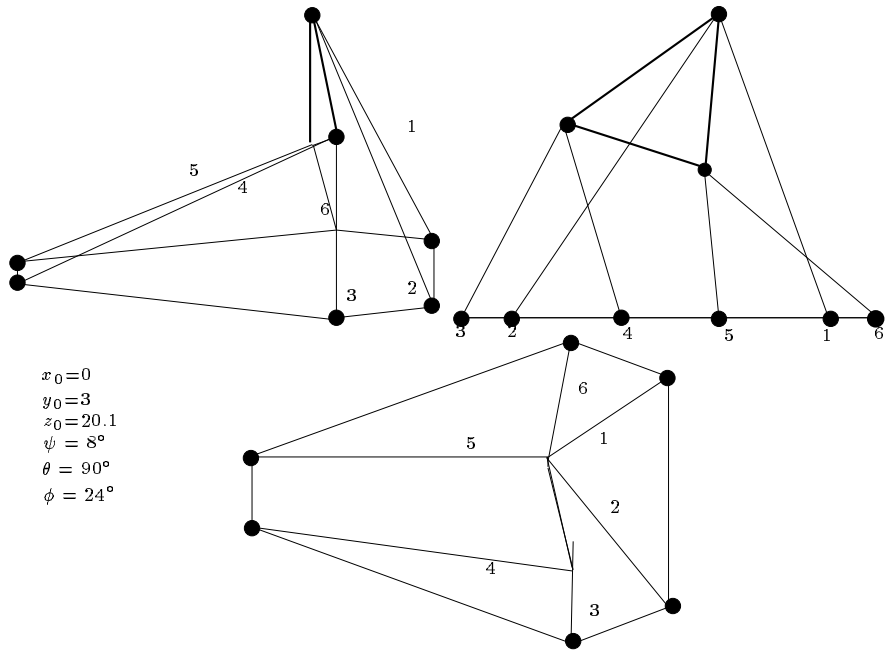

Figure 5.15: Deuxième configuration où les 6 lignes du TSSM constitue un complexe général ($\theta = \pm\frac{\pi}{2}$)

$$v_p = \begin{pmatrix} -2.03921 + 2.19155i \\ -2.03921 - 2.19155i \\ 3.5263 \\ 0.2\ 10^{-04} \\ -1.21298 \\ 5.27603 \end{pmatrix}$$

$$vec_p = \begin{pmatrix} 0.00936 & 0.20865 & -0.34852 & -0.59144 & 0.96727 & -0.46333 \\ 0.52501 & 0.47772 & -0.08180 & 1.76645 & 1.04776 & -0.35960 \\ 1.36625 & -0.48180 & -1.03047 & 0.62267 & -0.66408 & -1.33024 \\ -0.35181 & 0.04456 & -0.16591 & -0.36349 & -0.02934 & -1.17127 \\ 0.06180 & 0.45809 & -0.18385 & 0.09032 & 0.06868 & -0.08395 \\ -0.57035 & -0.00413 & -0.73684 & -0.02634 & 0.18652 & -0.66324 \end{pmatrix}$$

$$ji_d = \begin{pmatrix} -1.06396 & -2.66431 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 2.15966 & -3.01447 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 3.5263 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0.2\ 10^{-04} & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -1.21298 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 5.27603 \end{pmatrix}$$

5.4.3 MSSM

5.4.3.1 Configuration de type 5b

Nous avons examiné cette configuration où la variété engendrée par les lignes du manipulateur constitue un complexe spécial, c'est-à-dire où les 6 lignes intersectent toutes une ligne de l'espace (figure 5.16). L'analyse des valeurs propres conduit aux résultats suivants :

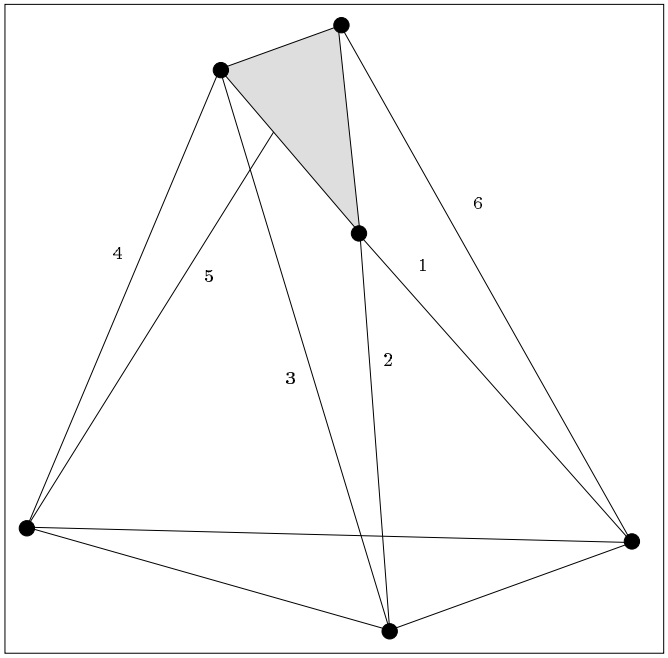

Figure 5.16: Configuration de Hunt : les lignes forment un complexe spécial (toutes les lignes intersectent la ligne passant par B_4, B_5)

$$ji = \begin{pmatrix} -0.37405 & -0.26920 & 0.88748 & 0.2\ 10^{-04} & 2.613 & 0.79262 \\ -0.13130 & -0.28776 & 0.94866 & -0.1\ 10^{-04} & -5.26306 & -1.59647 \\ 0.12876 & 0.31266 & 0.94110 & -3.13705 & -3.86268 & 1.7125 \\ -0.12876 & 0.31266 & 0.94110 & -3.13705 & 3.86268 & -1.7125 \\ 0.13130 & -0.28776 & 0.94866 & -0.1\ 10^{-04} & 5.26306 & 1.59647 \\ 0.37405 & -0.26920 & 0.88748 & 0.2\ 10^{-04} & -2.613 & -0.79262 \end{pmatrix}$$

$$v_p = \begin{pmatrix} 3.56686 + 2.04523i \\ 3.56686 - 2.04523i \\ -2.4671 + 1.18234i \\ -2.4671 - 1.18234i \\ -0.2\ 10^{-04} \\ -0.58682 \end{pmatrix}$$

$$vec_p = \begin{pmatrix} 0.26839 & 0.20163 & 0.23171 & 0.19896 & 0.2\ 10^{-04} & 2.11003 \\ -0.26858 & 0.72034 & 0.73124 & 0.95829 & 2.47652 & 2.2196 \\ -0.09365 & 1.51724 & -1.15273 & 0.24102 & 0.75119 & -0.03199 \\ 0.21054 & -0.00897 & -0.98218 & 1.67523 & 0.47219 & 0.23016 \\ 0.48644 & 0.05375 & 0.06541 & -0.10351 & 0.2\ 10^{-05} & 0.06069 \\ -0.06458 & 0.52253 & 0.51360 & 0.60067 & 0.3\ 10^{-05} & 0.02317 \end{pmatrix}$$

$$ji_d = \begin{pmatrix} 5.26688 & 4.67733 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -1.5122 & 1.86684 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -2.62604 & 2.35824 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -0.60350 & -2.30815 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -0.2\ 10^{-04} & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -0.58682 \end{pmatrix}$$

On obtient une valeur propre nulle et l'axe instantané de rotation est simplement la droite passant par les points d'articulation 4 et 5 du plateau mobile.

5.4.3.2 Configuration de type 5a

Dans le cas où la variété engendrée par les lignes du manipulateur correspondent à un complexe général nous avions vu que la coordonnées en z du centre du plateau était solution d'un polynome de degré 3 dont les coefficients dépendent des autres paramètres de position. On a pu ainsi trouver 3 racines réelles en z_0. On examine ici ces trois cas.

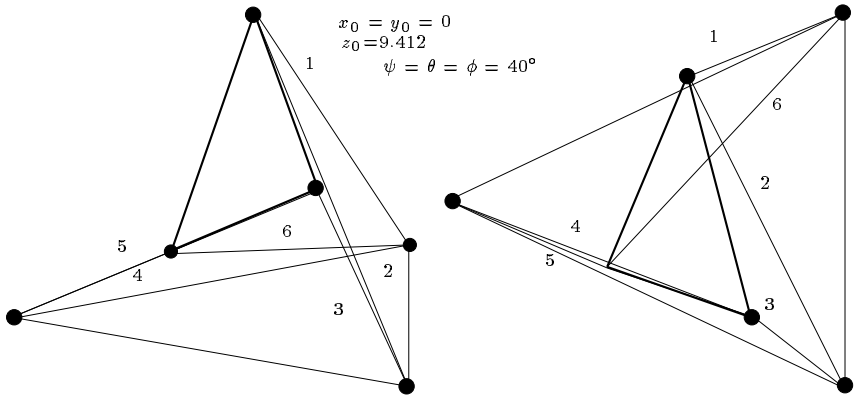

Figure 5.17: Vue perspective et de dessus de la première configuration de type 5a

On obtient alors les résultats suivants :

$$ji = \begin{pmatrix} -0.7143 & -0.39323 & 0.57892 & 1.56713 & 1.10747 & 2.68584 \\ -0.33848 & -0.47606 & 0.81166 & 2.90547 & -4.68731 & -1.53755 \\ 0.29912 & 0.85232 & 0.42904 & 2.31565 & -2.81537 & 3.97848 \\ 0.32484 & 0.83567 & 0.44288 & 1.97479 & -3.05736 & 4.32044 \\ 0.67738 & -0.69436 & 0.24295 & -4.32444 & -4.01888 & 0.57111 \\ 0.20849 & -0.54953 & 0.80904 & 2.19006 & 5.88533 & 3.43317 \end{pmatrix}$$

$$v_p = \begin{pmatrix} -7.19153 \\ 5.32084 + 1.02817i \\ 5.32084 - 1.02817i \\ -0.93745 \\ -0.2\ 10^{-05} \\ 4 - 1.88493 \end{pmatrix}$$

$$vec_p = \begin{pmatrix} -0.04480 & -0.03311 & 0.45985 & 1.98547 & 0.40485 & -0.96271 \\ 0.13899 & -0.97517 & -0.40412 & 0.29409 & -1.21058 & -2.20886 \\ 0.37716 & -0.70118 & 0.36351 & 0.03969 & -1.74704 & 0.32931 \\ 0.44600 & -0.65507 & 0.40833 & 0.17044 & 0.27615 & 0.35915 \\ 0.71009 & 0.42041 & 0.04917 & 0.08501 & -0.09885 & -0.29406 \\ -0.50593 & 0.30908 & 0.86377 & -0.26496 & 0.18663 & -0.06308 \end{pmatrix}$$

$$ji_d = \begin{pmatrix} -7.19153 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 4.18732 & -2.63334 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.88936 & 6.45436 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -0.93745 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -0.2\ 10^{-05} & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -1.88493 \end{pmatrix}$$

On trouve une valeur propre nulle qui correspond à un mouvement complexe. On peut cependant montrer que l'axe instantané de rotation passe par le point d'articulation 3 du plateau mobile.

Considérons maintenant le deuxième cas (figure 5.18). On obtient les résultats suivants :

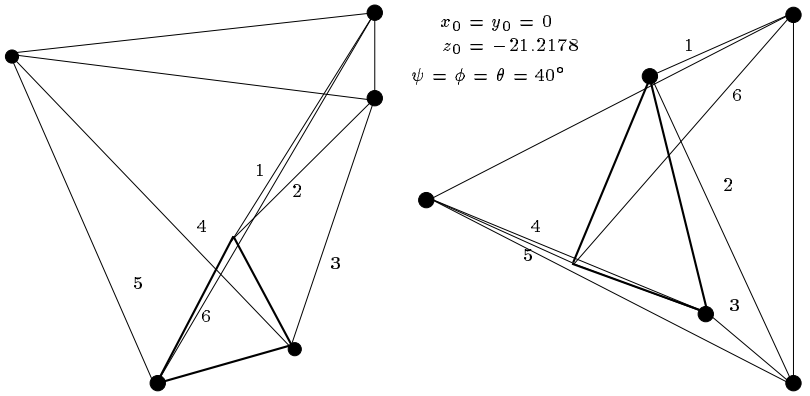

Figure 5.18: Vue perspective et de dessus de la deuxième configuration singulière de type 5a

$$ji = \begin{pmatrix} -0.63132 & -0.34755 & -0.69329 & 1.06526 & -6.67038 & 2.37383 \\ -0.15922 & -0.22393 & -0.96151 & -3.99844 & 5.94839 & -0.72324 \\ 0.21240 & 0.60520 & -0.76722 & -2.63673 & 4.50661 & 2.82496 \\ 0.12539 & 0.32257 & -0.93820 & 5.63427 & 2.66045 & 1.6677 \\ 0.41082 & -0.42111 & -0.80864 & 1.57649 & 0.87284 & 0.34636 \\ 0.16762 & -0.44180 & -0.88131 & 1.35417 & -4.99216 & 2.76014 \end{pmatrix}$$

$$v_p = \begin{pmatrix} 6.5667 \\ -0.51383 + 3.11468i \\ -0.51383 - 3.11468i \\ -0.38055 \\ 2.48629 \\ 0.4\ 10^{-05} \end{pmatrix}$$

$$vec_p = \begin{pmatrix} 0.09225 & 0.75322 & -0.20627 & 1.19767 & -0.79716 & -2.22339 \\ 0.23648 & -0.07079 & 0.97302 & 1.39371 & 0.56165 & -6.24412 \\ 0.15610 & -0.74065 & 1.43429 & -0.56265 & -0.94230 & 4.12326 \\ -0.83504 & -0.34383 & 0.16805 & -0.04637 & 0.20093 & 0.24812 \\ -0.26477 & 0.24896 & 0.25232 & -0.15799 & 0.08444 & 0.74205 \\ -0.00935 & 0.59468 & 0.21441 & -0.25688 & -1.0928 & 1.6725 \end{pmatrix}$$

$$ji_d = \begin{pmatrix} 6.5667 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.12247 & -3.23223 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 3.12667 & -1.15013 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -0.38055 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 2.48629 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.4\ 10^{-05} \end{pmatrix}$$

On obtient là aussi une valeur propre nulle et l'axe instantané de rotation passe par le point d'articulation 4 du plateau mobile.

Enfin on examine le dernier cas (figure 5.19).

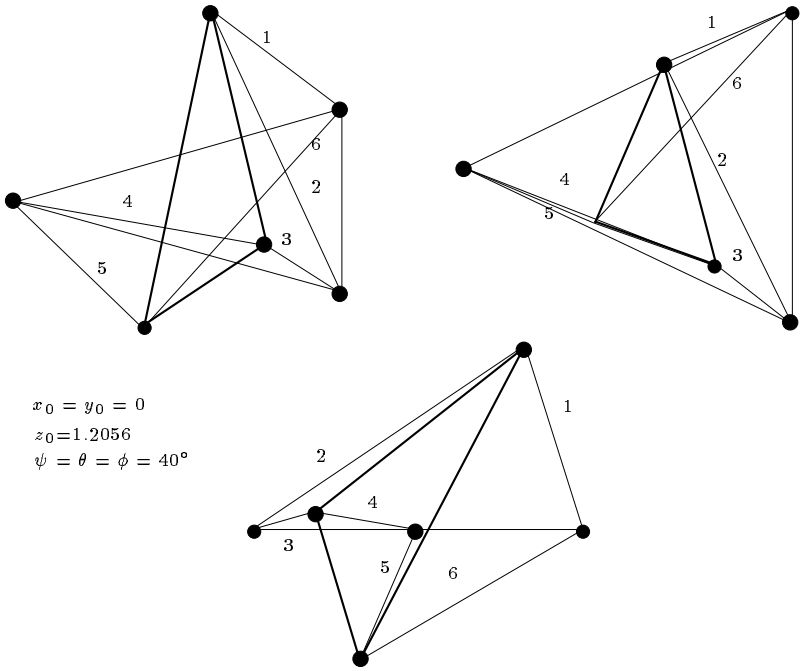

Figure 5.19: Vue perspective et de dessus de la troisième configuration singulière de type 5a

On obtient alors les résultats suivants:

$$ji = \begin{pmatrix} -0.84742 & -0.46651 & 0.25347 & 1.74417 & -1.43702 & 3.18638 \\ -0.57764 & -0.81242 & 0.07943 & -0.25666 & -0.07405 & -2.6239 \\ 0.33103 & 0.94323 & 0.02723 & 0.77503 & -0.39909 & 4.40282 \\ 0.34038 & 0.87565 & -0.34262 & 5.61268 & -0.41036 & 4.52714 \\ 0.68666 & -0.70387 & -0.18183 & -2.50322 & -2.59157 & 0.57893 \\ 0.31626 & -0.83358 & 0.45291 & 3.11654 & 4.01196 & 5.20771 \end{pmatrix}$$

$$v_p = \begin{pmatrix} 9.10186 \\ 3.62419 \\ -3.41709 \\ -0.1\ 10^{-04} \\ -1.45155 \\ -1.26118 \end{pmatrix}$$

$$vec_p = \begin{pmatrix} -0.35135 & 0.07243 & 0.61705 & 0.64531 & 2.85308 & 7.96735 \\ 0.19310 & 0.21771 & -0.32445 & 0.14517 & -0.00306 & -1.00958 \\ -0.34799 & -0.28349 & 0.65296 & 1.99242 & 1.1954 & 4.74221 \\ -0.73400 & 0.81563 & 0.30435 & 0.15618 & 0.35532 & 1.28553 \\ 0.10088 & -0.37983 & 0.61716 & -0.18961 & 0.42480 & 0.73969 \\ -0.59384 & -0.46170 & -0.48533 & -0.13662 & -0.63940 & -1.92972 \end{pmatrix}$$

$$ji_d = \begin{pmatrix} 9.10186 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 3.62419 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -3.41709 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -0.1\ 10^{-04} & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -1.45155 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -1.26118 \end{pmatrix}$$

On obtient une valeur propre nulle conduisant à un mouvement dont l'interprétation mécanique est délicate.

Chapitre 6

Annexe

Singularité de type 4c pour un SSM

NOTATION:
ct,st : cosinus, sinus de l'angle de rotation autour de l'axe
vertical
cp,sp : cosinus, sinus du demi-angle entre deux points
d'articulation voisins
x0,y0,z0 : position du centre du plateau mobile
dans le repere absolu
r : rayon du plateau mobile
gr : rayon du plateau fixe

LA POSITION DES POINTS D'ARTICULATION SUR LE PLATEAU INFERIEUR

a1(1,1) := xa1 a1(2,1) := ya1 a1(3,1) := 0
a2(1,1) :=- xa1 a2(2,1) := ya1 a2(3,1) := 0
a3(1,1) := xa3 a3(2,1) := ya3 a3(3,1) := 0
a4(1,1) := xa4 a4(2,1) := ya4 a4(3,1) := 0
a5(1,1) :=- xa4 a5(2,1) := ya4 a5(3,1) := 0
a6(1,1) :=- xa3 a6(2,1) := ya3 a6(3,1) := 0

LA POSITION DES POINTS D'ARTICULATION SUR LE PLATEAU SUPERIEUR

b1r(1,1) := x1 b1r(2,1) := y1 b1r(3,1) := 0
b2r(1,1) :=- x1 b2r(2,1) := y1 b2r(3,1) := 0
b3r(1,1) := x3 b3r(2,1) := y3 b3r(3,1) := 0
b4r(1,1) := x4 b4r(2,1) := y4 b4r(3,1) := 0
b5r(1,1) :=- x4 b5r(2,1) := y4 b5r(3,1) := 0
b6r(1,1) :=- x3 b6r(2,1) := y3 b6r(3,1) := 0

LA POSITION DU CENTRE DU PLATEAU MOBILE DANS LE REPERE
ABSOLU

cen(1,1) := x0 cen(2,1) := y0 cen(3,1) := z0

LA MATRICE DE ROTATION LIANT LES DEUX REPERES

rot(1,1) := ct rot(1,2) := st rot(1,3) := 0
rot(2,1) :=- st rot(2,2) := ct rot(2,3) := 0
rot(3,1) := 0 rot(3,2) := 0 rot(3,3) := 1

LES COORDONNEES DE Pl"ucker DES LIGNES 1,2,3,4,5 DU SSM

```
pa1(1,1) := (sqrt(3)*cp*gr + 2*cp*r*st - 2*ct*r*sp - gr*sp + 2*x0)/2
pa1(2,1) := ( - sqrt(3)*gr*sp + 2*cp*ct*r - cp*gr + 2*r*sp*st + 2*y0)/2
pa1(3,1) := z0

pa2(1,1) := ( - sqrt(3)*cp*gr + 2*cp*r*st + 2*ct*r*sp + gr*sp + 2*x0)/2
pa2(2,1) := ( - sqrt(3)*gr*sp + 2*cp*ct*r - cp*gr - 2*r*sp*st + 2*y0)/2
pa2(3,1) := z0


pa3(1,1) := (sqrt(3)*cp*ct*r - sqrt(3)*cp*gr + sqrt(3)*r*sp*st - cp*r*

          st + ct*r*sp - gr*sp + 2*x0)/2
pa3(2,1) := ( - sqrt(3)*cp*r*st + sqrt(3)*ct*r*sp + sqrt(3)*gr*sp - cp
          *ct*r - cp*gr - r*sp*st + 2*y0)/2
pa3(3,1) := z0


pa4(1,1) := (sqrt(3)*cp*ct*r - sqrt(3)*r*sp*st - cp*r*st - ct*r*sp - 2
          *gr*sp + 2*x0)/2
pa4(2,1) := ( - sqrt(3)*cp*r*st - sqrt(3)*ct*r*sp - cp*ct*r + 2*cp*gr
           + r*sp*st + 2*y0)/2
pa4(3,1) := z0


qa1(1,1) := ( - (gr*z0)*(sqrt(3)*sp + cp))/2
qa1(2,1) := (gr*z0*( - sqrt(3)*cp + sp))/2
qa1(3,1) := (gr*(2*sqrt(3)*cp*r*sp*st + sqrt(3)*cp*y0 - 2*sqrt(3)*ct*r
                 2
             *sp  + sqrt(3)*ct*r + sqrt(3)*sp*x0 - 2*cp*ct*r*sp +
                        2
             cp*x0 - 2*r*sp *st + r*st - sp*y0))/2

qa2(1,1) := ( - (gr*z0)*(sqrt(3)*sp + cp))/2
qa2(2,1) := (gr*z0*(sqrt(3)*cp - sp))/2
qa2(3,1) := (gr*(2*sqrt(3)*cp*r*sp*st - sqrt(3)*cp*y0 + 2*sqrt(3)*ct*r
                 2
             *sp  - sqrt(3)*ct*r + sqrt(3)*sp*x0 + 2*cp*ct*r*sp +
                        2
             cp*x0 - 2*r*sp *st + r*st + sp*y0))/2

qa3(1,1) := (gr*z0*(sqrt(3)*sp - cp))/2
qa3(2,1) := (gr*z0*(sqrt(3)*cp + sp))/2
qa3(3,1) := (gr*(2*sqrt(3)*cp*r*sp*st - sqrt(3)*cp*y0 - 2*sqrt(3)*ct*r
                 2
             *sp  + sqrt(3)*ct*r - sqrt(3)*sp*x0 - 2*cp*ct*r*sp +
                        2
             cp*x0 - 2*r*sp *st + r*st - sp*y0))/2

qa4(1,1) := cp*gr*z0
qa4(2,1) := gr*sp*z0
                                                  2
qa4(3,1) := (gr*(2*sqrt(3)*cp*r*sp*st + 2*sqrt(3)*ct*r*sp  - sqrt(3)*
                                                  2
             ct*r + 2*cp*ct*r*sp - 2*cp*x0 - 2*r*sp *st + r*st - 2
             *sp*y0))/2

pa5(1,1) := ( - sqrt(3)*cp*ct*r - sqrt(3)*r*sp*st - cp*r*st + ct*r*sp
          + 2*gr*sp + 2*x0)/2
pa5(2,1) := (sqrt(3)*cp*r*st - sqrt(3)*ct*r*sp - cp*ct*r + 2*cp*gr - r
          *sp*st + 2*y0)/2
pa5(3,1) := z0


qa5(1,1) := cp*gr*z0
qa5(2,1) :=  - gr*sp*z0
                                                  2
qa5(3,1) := (gr*(2*sqrt(3)*cp*r*sp*st - 2*sqrt(3)*ct*r*sp  + sqrt(3)*
                                                  2
             ct*r - 2*cp*ct*r*sp - 2*cp*x0 - 2*r*sp *st + r*st + 2
             *sp*y0))/2
```

LE SYSTEME LINEAIRE DECRIVANT L'INTERSECTION D'UNE LIGNE AVEC LES LIGNES 1,2,3,4 DU SSM

```
eq1 := ( - sqrt(3)*cp*gr*p12*z0 + 2*sqrt(3)*cp*gr*p13*r*sp*st + sqrt(3
                                                                  2
       )*cp*gr*p13*y0 + sqrt(3)*cp*gr*q11 - 2*sqrt(3)*ct*gr*p13*r*sp
        + sqrt(3)*ct*gr*p13*r - sqrt(3)*gr*p11*sp*z0 + sqrt(3)*gr*p13
       *sp*x0 - sqrt(3)*gr*q12*sp - 2*cp*ct*gr*p13*r*sp + 2*cp*ct*q12
       *r - cp*gr*p11*z0 + cp*gr*p13*x0 - cp*gr*q12 + 2*cp*q11*r*st
                                                    2
        - 2*ct*q11*r*sp + gr*p12*sp*z0 - 2*gr*p13*r*sp *st + gr*p13*r
       *st - gr*p13*sp*y0 - gr*q11*sp + 2*q11*x0 + 2*q12*r*sp*st + 2*
       q12*y0 + 2*q13*z0)/2


eq2 := (sqrt(3)*cp*gr*p12*z0 + 2*sqrt(3)*cp*gr*p13*r*sp*st - sqrt(3)*
                                                                  2
       cp*gr*p13*y0 - sqrt(3)*cp*gr*q11 + 2*sqrt(3)*ct*gr*p13*r*sp
        - sqrt(3)*ct*gr*p13*r - sqrt(3)*gr*p11*sp*z0 + sqrt(3)*gr*p13
       *sp*x0 - sqrt(3)*gr*q12*sp + 2*cp*ct*gr*p13*r*sp + 2*cp*ct*q12
       *r - cp*gr*p11*z0 + cp*gr*p13*x0 - cp*gr*q12 + 2*cp*q11*r*st
                                                    2
        + 2*ct*q11*r*sp - gr*p12*sp*z0 - 2*gr*p13*r*sp *st + gr*p13*r
       *st + gr*p13*sp*y0 + gr*q11*sp + 2*q11*x0 - 2*q12*r*sp*st + 2*
       q12*y0 + 2*q13*z0)/2



eq3 := (sqrt(3)*cp*ct*q11*r + sqrt(3)*cp*gr*p12*z0 + 2*sqrt(3)*cp*gr*
       p13*r*sp*st - sqrt(3)*cp*gr*p13*y0 - sqrt(3)*cp*gr*q11 - sqrt(
                                                    2
       3)*cp*q12*r*st - 2*sqrt(3)*ct*gr*p13*r*sp  + sqrt(3)*ct*gr*p13
       *r + sqrt(3)*ct*q12*r*sp + sqrt(3)*gr*p11*sp*z0 - sqrt(3)*gr*
       p13*sp*x0 + sqrt(3)*gr*q12*sp + sqrt(3)*q11*r*sp*st - 2*cp*ct*
       gr*p13*r*sp - cp*ct*q12*r - cp*gr*p11*z0 + cp*gr*p13*x0 - cp*
       gr*q12 - cp*q11*r*st + ct*q11*r*sp + gr*p12*sp*z0 - 2*gr*p13*r
          2
       *sp *st + gr*p13*r*st - gr*p13*sp*y0 - gr*q11*sp + 2*q11*x0 -
       q12*r*sp*st + 2*q12*y0 + 2*q13*z0)/2


eq4 := (sqrt(3)*cp*ct*q11*r + 2*sqrt(3)*cp*gr*p13*r*sp*st - sqrt(3)*cp
                                  2
       *q12*r*st + 2*sqrt(3)*ct*gr*p13*r*sp  - sqrt(3)*ct*gr*p13*r -
       sqrt(3)*ct*q12*r*sp - sqrt(3)*q11*r*sp*st + 2*cp*ct*gr*p13*r*
       sp - cp*ct*q12*r + 2*cp*gr*p11*z0 - 2*cp*gr*p13*x0 + 2*cp*gr*
       q12 - cp*q11*r*st - ct*q11*r*sp + 2*gr*p12*sp*z0 - 2*gr*p13*r*
         2
       sp *st + gr*p13*r*st - 2*gr*p13*sp*y0 - 2*gr*q11*sp + 2*q11*x0
        + q12*r*sp*st + 2*q12*y0 + 2*q13*z0)/2
```

LE SYSTEME ADMET UNE SOLUTION SI LE DETERMINANT EST NON NUL

DETERMINANT:

```
                2   2   2     2    2   2     2   2           3   3
s1 := 2*gr*z0*(3 *cp  *ct  *r*sp  + 3 *cp  *r*sp  *st  + 2*sqrt(3) *cp  *
               2               3   3       2         3   2
             ct  *r*sp + 2*sqrt(3) *cp  *r*sp*st  + sqrt(3) *cp  *ct*sp
                       3   2                 3     2     3
             *y0 + sqrt(3) *cp  *sp*st*x0 - 2*sqrt(3) *cp*ct  *r*sp
                      3        2              3        3   2
              + 3*sqrt(3) *cp*ct*sp  *x0 - 2*sqrt(3) *cp*r*sp  *st  -
                     3     2              4   2           4     2
             3*sqrt(3) *cp*sp  *st*y0 - 3*3*cp  *ct  *r - 3*3*cp  *r*st
                     3              3              2   2     2
              - 3*3*cp  *ct*y0 - 3*3*cp  *st*x0 - 4*3*cp  *ct  *r*sp  +
                  2                  2    2   2          2
             6*3*cp  *ct*sp*x0 - 4*3*cp  *r*sp  *st  - 6*3*cp  *sp*st*y0
                        2                2          2     4
              - 2*3*cp*ct*sp  *y0 - 2*3*cp*sp  *st*x0 - 3*3*ct  *r*sp
                        3            4   2        3
```

```
 - 3*3*ct*sp *x0 - 3*3*r*sp *st  + 3*3*sp *st*y0 + 6*
          3   2                  3
sqrt(3)*cp *ct *r*sp - 9*sqrt(3)*cp *ct*x0 + 6*sqrt(3)*
  3        2             3                  2
cp *r*sp*st  + 9*sqrt(3)*cp *st*y0 + 6*sqrt(3)*cp *ct*
                    2                       2      3
sp*y0 + 6*sqrt(3)*cp *sp*st*x0 - 6*sqrt(3)*cp*ct *r*sp
                    2                       3   2
 - 6*sqrt(3)*cp*ct*sp *x0 - 6*sqrt(3)*cp*r*sp *st  + 6*
            2                       3
sqrt(3)*cp*sp *st*y0 - 3*sqrt(3)*ct*sp *y0 - 3*sqrt(3)*
  3              2   2     2       2          2
sp *st*x0 + 9*cp *ct *r*sp  + 9*cp *ct*sp*x0 + 9*cp *r*
  2   2       2                 2          2
sp *st  - 9*cp *sp*st*y0 + 9*cp*ct*sp *y0 + 9*cp*sp *st
*x0)
```

ON ECRIT ALORS QUE LA LIGNE COUPE AUSSI LA LIGNE 5
DU SSM EN REMPLACANT LES VALEURS TROUVE PAR LA RESOLUTION
DU SYSTEME LINEAIRE

```
                                    4
c1 := 3*r*( - 32*sqrt(3)*cp*ct*gr*p13*sp *st*x0 + 24*sqrt(3)*cp*ct*gr*
           2
         p13*sp *st*x0 - 6*sqrt(3)*cp*ct*gr*p13*st*x0 - 2*sqrt(3)*cp
                                          4   2
         *gr*p13*r*sp*st + 32*sqrt(3)*cp*gr*p13*sp *st *y0 - 32*sqrt
                    4                          2   2
         (3)*cp*gr*p13*sp *y0 - 24*sqrt(3)*cp*gr*p13*sp *st *y0 + 24
                         2                          2
         *sqrt(3)*cp*gr*p13*sp *y0 + 6*sqrt(3)*cp*gr*p13*st *y0 - 6*
                                        3
         sqrt(3)*cp*gr*p13*y0 - 16*sqrt(3)*cp*q13*sp *z0 + 8*sqrt(3)
                                       2
         *cp*q13*sp*z0 + 6*sqrt(3)*ct*gr*p13*r*sp  - 3*sqrt(3)*ct*gr
                                  5
         *p13*r - 32*sqrt(3)*ct*gr*p13*sp *st*y0 + 40*sqrt(3)*ct*gr*
              3
         p13*sp *st*y0 - 14*sqrt(3)*ct*gr*p13*sp*st*y0 - 32*sqrt(3)*
               5   2                          5
         gr*p13*sp *st *x0 + 32*sqrt(3)*gr*p13*sp *x0 + 40*sqrt(3)*
               3   2                        3
         gr*p13*sp *st *x0 - 40*sqrt(3)*gr*p13*sp *x0 - 14*sqrt(3)*
                  2
         gr*p13*sp*st *x0 + 14*sqrt(3)*gr*p13*sp*x0 + 64*cp*ct*gr*
               5                        3
         p13*r*sp  - 64*cp*ct*gr*p13*r*sp  + 18*cp*ct*gr*p13*r*sp -
                     4                       2
         32*cp*ct*gr*p13*sp *st*y0 + 8*cp*ct*gr*p13*sp *st*y0 + 6*cp
                                       4   2
         *ct*gr*p13*st*y0 - 32*cp*gr*p13*sp *st *x0 + 32*cp*gr*p13*
           4                    2   2                    2
         sp *x0 + 8*cp*gr*p13*sp *st *x0 - 8*cp*gr*p13*sp *x0 + 6*cp
                  2                                     5
         *gr*p13*st *x0 - 6*cp*gr*p13*x0 + 32*ct*gr*p13*sp *st*x0 -
                     3
         56*ct*gr*p13*sp *st*x0 + 18*ct*gr*p13*sp*st*x0 + 64*gr*p13*
            6                    4                    2
         r*sp *st - 96*gr*p13*r*sp *st + 38*gr*p13*r*sp *st - 3*gr*
                           5   2                    5
         p13*r*st - 32*gr*p13*sp *st *y0 + 32*gr*p13*sp *y0 + 56*gr*
              3   2                    3                    2
         p13*sp *st *y0 - 56*gr*p13*sp *y0 - 18*gr*p13*sp*st *y0 +
                                    4                  2
         18*gr*p13*sp*y0 - 16*q13*sp *z0 + 16*q13*sp *z0 - 6*q13*z0)
```

CETTE CONDITION S'ECRIT SOUS LA FORME A p13 + B q13=0

VALEUR DE B

```
                                  3                      4
c1q13 := 6*q13*r*z0*( - 8*sqrt(3)*cp*sp  + 4*sqrt(3)*cp*sp - 8*sp  + 8
          2
          *sp  - 3)
```

SI GAMMA= PI/6 ON A B=0

c1q13(pi/6):0

MAIS LE DETERMINANT DU SYSTEME LINEAIRE EST NUL

s1(pi/6):0

Bibliographie

[1] Delebecque F., Klimann C., Steer S. "BASILE , un système de CAO pour l'Automatique, Guide d'Utilisation", 27 mai 1988, INRIA

[2] Alevizos P., Boissonnat J-D., Yvinec M. "On the order induced by a set of rays. Application to the probing of non-convex polygons" Rapport de Recherche INRIA numéro 927, Novembre 1988

[3] Giraudon G. "Chainage efficace de contour" Rapport de Recherche INRIA numéro 605, Fevrier 85

[4] Merlet J-P. "Parallel manipulators, Part 1, Theory" Rapport de Recherche INRIA numéro 646, Mars 1987

[5] Merlet J-P. "Parallel manipulators, Part 2, Singular Configurations and Grassmann geometry" Rapport de Recherche INRIA numéro 791, Fevrier 1988

[6] Merlet J-P. "Force-feedback control of parallel manipulators" IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Philadelphia,24-29 Avril 1988

[7] Reboulet C., Robert A. "Hybrid control of a manipulator with an active compliant wrist", 3th ISRR, Gouvieux, France, 7-11 Oct. 1985, pp. 76-80.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Utilisation du retour d'efforts **4**

2.1 Introduction . . . 4
2.2 Les principes . . . 4
2.3 Le dispositif matériel . . . 6
2.4 Les capteurs de force . . . 7
2.4.1 Erreur sur la mesure brute des forces . . . 7
2.4.2 Calibration des capteurs de force . . . 8
2.4.3 Erreurs de mesure sur les forces cartésiennes . . . 8
2.4.4 Charge nominale . . . 14
2.5 Suivi de contour . . . 18
2.5.1 Quelques expériences . . . 19
2.5.1.1 Contacteur . . . 19
2.5.1.2 Parallélépipède . . . 25
2.5.1.3 Clé plate . . . 27
2.6 Approximation polygonale . . . 29
2.7 Estimation du coefficient de friction . . . 29
2.8 Action sur une manivelle . . . 32
2.9 L'assemblage . . . 34
2.9.1 Assemblage cubique . . . 35
2.9.2 Assemblage cylindrique . . . 37
2.10 Localisation d'objet . . . 40
2.10.1 Principe . . . 40
2.10.2 Etude de la précision . . . 41
2.10.2.1 Erreur relative . . . 41
2.10.2.2 Influence de l'erreur d'arrondi sur les capteurs de force . . . 41
2.10.3 Expérience de localisation . . . 46

3 Temps de calcul **48**

3.1 Temps de calcul de la cinématique inverse . . . 48
3.2 Temps de calcul de la cinématique directe . . . 48
3.2.1 Méthode itérative . . . 48
3.2.2 Méthode de moindre carré . . . 49
3.2.3 Méthodes employées . . . 49
3.2.4 Temps de calcul . . . 50
3.2.5 Commentaires . . . 50
3.3 Calcul des matrices jacobienne et inverse jacobienne . . . 51
3.4 Calcul des forces axiales et cartésiennes . . . 51
3.4.1 Forces cartésiennes . . . 51
3.4.2 Forces articulaires . . . 52
3.4.2.1 Méthodes employées . . . 52
3.4.2.2 Temps de calculs . . . 52
3.4.2.3 Commentaires . . . 53

4 Caractéristiques des robots parallèles **54**
4.1 Errata des parties 1 et 2 . . . 54
4.1.1 Partie 1 . . . 54
4.1.2 Partie 2 . . . 54
4.2 Raideur . . . 54
4.3 Etude des valeurs propres de la matrice de raideur . . . 55
4.3.1 Position nominale . . . 58
4.3.2 Rotation autour de l'axe z . . . 58
4.4 Vitesses cartésiennes maximales . . . 59
4.5 Influence de la commande articulaire sur les mouvements cartésiens . . . 61
4.6 Outils . . . 63

5 Les configurations singulières **66**
5.1 Congruence . . . 66
5.1.1 Notation et rappel . . . 66
5.1.2 Congruence et 5 lignes d'un SSM . . . 67
5.2 Le MSSM comme complexe spécial . . . 71
5.3 Maneuvrabilité . . . 73
5.4 Vecteurs propres des configurations singulières . . . 79
5.4.1 SSM . . . 79
5.4.1.1 Configuration singulière de dimension 4 . . . 79
5.4.1.2 Singularité de Fichter . . . 81
5.4.2 TSSM . . . 81
5.4.2.1 Configuration de type 3c . . . 81
5.4.2.2 Configuration 4d . . . 82
5.4.2.3 Configuration 4b . . . 84
5.4.2.4 Configuration de type 5a . . . 84
5.4.3 MSSM . . . 88
5.4.3.1 Configuration de type 5b . . . 88
5.4.3.2 Configuration de type 5a . . . 89

6 Annexe **93**
6.1 Bibliographie . . . 98