



HAL
open science

Eléments finis $C1$, polynomiaux de degré quatre par triangle, dans une triangulation formée de triangles équilatéraux

Michel Crouzeix, Miloud Sadkane

► **To cite this version:**

Michel Crouzeix, Miloud Sadkane. Eléments finis $C1$, polynomiaux de degré quatre par triangle, dans une triangulation formée de triangles équilatéraux. [Rapport de recherche] RR-1030, INRIA. 1989. inria-00075528

HAL Id: inria-00075528

<https://inria.hal.science/inria-00075528>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-RENNES

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N°1030

Programme 7

**ELEMENTS FINIS C^1 ,
POLYNOMIAUX DE DEGRE
QUATRE PAR TRIANGLE, DANS
UNE TRIANGULATION FORMEE DE
TRIANGLES EQUILATERAUX**

**Michel CROUZEIX
Miloud SADKANE**

Mai 1989



* R R - 1 0 3 0 *

Campus Universitaire de Beaulieu
35042 - RENNES CÉDEX
FRANCE
Téléphone : 99 36 20 00
Télex : UNIRISA 950 473 F
Télécopie : 99 38 38 32

Éléments finis C^1 , polynomiaux de degré quatre par triangle, dans une triangulation formée de triangles équilatéraux

Quartic C^1 finite elements for equilateral triangulations

Michel Crouzeix (*) and Miloud Sadkane (**)

Publication interne n° 463
Mars 1989

26 pages

Résumé : Nous explicitons une base locale de l'espace des éléments finis C^1 de degré quatre, pour les triangulations utilisant des triangles équilatéraux égaux. Nous obtenons une estimation optimale de l'erreur d'approximation dans cet espace.

Abstract : We construct a local basis of the space of C^1 bivariate piecewise quartic polynomials defined on equilateral triangulations. We obtain an optimal error estimate.

Key words : Multivariate splines, piecewise polynomial functions, finite elements.

AMS (MOS) subject classification : 65D07, 65N30, 41A63, 41A15.

(*) Mathématiques, IRISA, Université de Rennes, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex (France).

(**) IRISA, Université de Rennes, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex (France).

0. Introduction.

Etant donné une triangulation \mathcal{T}_h du plan euclidien \mathbb{R}^2 par des triangles K , fermés, équilatéraux et égaux, on considère l'espace :

$$V_h(\mathbb{R}^2) = \{v_h \in C^1(\mathbb{R}^2) ; \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in P_4\}.$$

Le paramètre h représente la longueur des côtés des triangles de \mathcal{T}_h ; sans perte de généralité, on supposera que ces triangles ont un côté horizontal.

On considère maintenant un ouvert polygonal borné Ω tel que $\bar{\Omega}$ soit une réunion de triangles de \mathcal{T}_h , et on considère l'espace

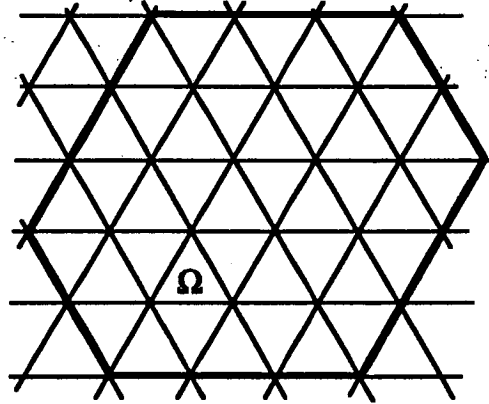


Figure 0.1

$$V_h(\Omega) = \{v_h \in V_h(\mathbb{R}^2) ; v_h = 0 \text{ dans } \Omega^c\},$$

Ω^c désignant le complémentaire de Ω dans \mathbb{R}^2 . On suppose que l'ouvert Ω est simplement connexe et situé localement d'un même côté par rapport à sa frontière Γ . Dans les paragraphes 1, 2, 3 et 4, nous explicitons une base de $V_h(\Omega)$ formée de fonctions ayant un support minimum ; nous obtenons des résultats plus précis que ceux donnés dans [1], mais nous avons une triangulation très particulière. Ensuite nous montrons que toute fonction $u \in H_0^2(\Omega)$ assez régulière peut être approchée en $O(h^4)$, en norme $L^\infty(\Omega)$, par une fonction $r_h u \in V_h(\Omega)$; nous montrons que cet ordre d'approximation est optimal ; cela entraîne l'impossibilité de définir une interpolation de type local, car sinon l'on aurait une approximation en $O(h^5)$. Dans cette partie, nous nous sommes restreint à étudier le cas où Ω est un parallélogramme afin d'éviter une considération pénible de trop nombreux cas particuliers, mais le résultat reste valable dans un cadre beaucoup plus général ; notons en particulier que, quitte à utiliser une partition de l'unité, il n'est pas nécessaire de supposer Ω simplement connexe pour obtenir l'estimation d'erreur.

Remarquons enfin que nous travaillons avec des triangles équilatéraux, mais que, quitte à appliquer au plan une transformation affine, nos résultats restent valables dans le cas où la triangulation est engendrée par trois familles de droites parallèles et équidistantes.

Notations. Nous noterons par \vec{e}_1 le vecteur unitaire horizontal, \vec{j} le vecteur unitaire vertical, \vec{e}_2 et \vec{e}_3 les vecteurs unitaires faisant un angle de $\pm \frac{2\pi}{3}$ avec \vec{e}_1 .

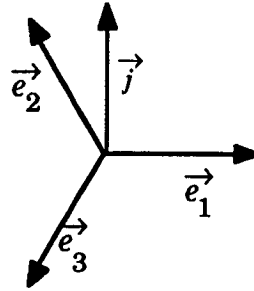


Figure 0.2

1. Fonctions de V_h ayant un support formé de six triangles.

Soit Σ_S la réunion des six triangles de \mathcal{T}_h ayant en commun le sommet S ; avec les notations de la figure 1.1, dans chaque triangle K contenu dans Σ_S , on note $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$, $\lambda_3(x)$ les coordonnées barycentriques de x par rapport aux sommets

$S \equiv S_1, X_2, Y_3$ de K ,

(où $X = A, C$ ou E ; $Y = B, D$ ou F).

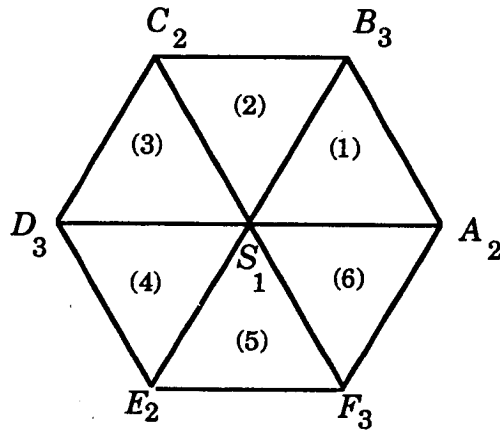


Figure 1.1

Lemme 1.1. La fonction φ_S définie par

$$\varphi_S(x) = 0 \text{ si } x \notin \Sigma_S, \quad \varphi_S(x) = \lambda_1^2 (\lambda_1^2 + 6\lambda_2 \lambda_3 + 4\lambda_1 \lambda_2 + 4\lambda_1 \lambda_3) \text{ si } x \in \Sigma_S,$$

appartient à $V_h(\mathbb{R}^2)$ et vérifie

$$\varphi_S(S) = 1, \quad \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_S(S) = 0.$$

Démonstration. Il est clair que $\varphi_S \in C^0(\mathbb{R}^2)$; dans chaque triangle K de Σ_S ,

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_S = 6 [2\lambda_1 (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3) \vec{\nabla} \lambda_1 + \lambda_1^2 \lambda_3 \vec{\nabla} \lambda_2 + \lambda_1^2 \lambda_2 \vec{\nabla} \lambda_3];$$

la dérivée normale $\frac{\partial \varphi_S}{\partial \nu}$ est nulle sur chaque côté de K , ce qui assure le raccord des dérivées premières de φ_S .

■

Lemme 1.2. On considère les fonctions $\theta_{S,1}$ et $\theta_{S,2}$ définies par

$$\theta_{S,i}(x) = 0 \text{ si } x \notin \Sigma_S, \quad i = 1, 2;$$

$$\theta_{S,i}(x) = \frac{h}{2} \lambda_1^2 (2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + 3\lambda_2 \lambda_3) \text{ dans les triangles } \begin{cases} (1), (6) \text{ si } i=1, \\ (2), (3) \text{ si } i=2; \end{cases}$$

$$\theta_{S,i}(x) = -\frac{h}{2} \lambda_1^2 (2\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 + 3\lambda_2 \lambda_3) \text{ dans les triangles } \begin{cases} (3), (4) \text{ si } i=1, \\ (5), (6) \text{ si } i=2; \end{cases}$$

$$\theta_{S,i}(x) = \frac{h}{2} \lambda_1^3 (\lambda_3 - \lambda_2) \text{ dans les triangles } \begin{cases} (2), (5) \text{ si } i=1, \\ (1), (4) \text{ si } i=2. \end{cases}$$

Ces fonctions appartiennent à $V_h(\mathbb{R}^2)$ et vérifient

$$\theta_{S,i}(S) = 0, \quad \overrightarrow{\text{grad}} \theta_{S,i}(S) = \vec{e}_i, \quad i = 1, 2.$$

Démonstration. Il suffit de la faire pour $i = 1$. La continuité de $\theta_{S,1}$ est immédiate.

Sur $S_1 A_2$, on a $\overrightarrow{\text{grad}} \theta_{S,1} = \frac{h}{2} \lambda_1^3 (\nabla \vec{\lambda}_2 - \nabla \vec{\lambda}_1) - \frac{3h}{2} \lambda_1^2 \lambda_2 (\nabla \vec{\lambda}_2 - \nabla \vec{\lambda}_1)$; on en déduit $\frac{\partial}{\partial v} \theta_{S,1} = 0$ sur $S_1 A_2$, ce qui assure la continuité de $\overrightarrow{\text{grad}} \theta_{S,1}$.

Sur $S_1 B_3$, on a, dans le triangle (1) $\overrightarrow{\text{grad}} \theta_{S,1} \cdot \overrightarrow{S_1 A_2} = h \lambda_1^3$ et dans le triangle (2)

$$\overrightarrow{\text{grad}} \theta_{S,1} \cdot \overrightarrow{C_2 B_3} = h \lambda_1^3, \text{ d'où la continuité de } \overrightarrow{\text{grad}} \theta_{S,1} \text{ sur } S_1 B_3.$$

Compte tenu de la symétrie (paire) par rapport à $A_2 D_3$ et (impaire) par rapport à la médiatrice de $A_2 D_3$, on en déduit que $\theta_{S,1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

■

Lemme 1.3. La fonction η_S définie par

$$\eta_S(x) = 0 \text{ si } x \notin \Sigma_S \text{ et } \eta_S(x) = \frac{3}{2} h^2 (-1)^{i+1} \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 \text{ dans le triangle } (i),$$

appartient à $V_h(\mathbb{R}^2)$. Elle vérifie

$$\eta_S(S) = 0, \quad \overrightarrow{\text{grad}} \eta_S(S) = 0,$$

$$\text{et, dans le triangle } (5), \quad D^2 \eta_S(S)(\vec{j}, \vec{j}) = 1.$$

Démonstration. Il est clair que $\eta_S \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Dans le triangle (5), on a

$$D^2 \eta_S(S) (\vec{j}, \vec{j}) = 3h^2 (\vec{\nabla} \lambda_2 \cdot \vec{j}) (\vec{\nabla} \lambda_3 \cdot \vec{j})$$

et $\vec{j} = -\frac{1}{h\sqrt{3}} (\overrightarrow{S_1 E_2} + \overrightarrow{S_1 F_3})$, d'où le résultat. ■

Remarque. Dans le théorème 3.3, on montrera que les fonctions φ_S , η_S , $\theta_{S,1}$ et $\theta_{S,2}$ engendrent l'espace des fonctions de $V_h(\mathbb{R}^2)$ dont le support est contenu dans Σ_S .

2. Fonctions de V_h ayant un support formé de quatre triangles.

Soit Σ_T la réunion des triangles de \mathcal{T}_h ayant au moins un côté commun avec T .

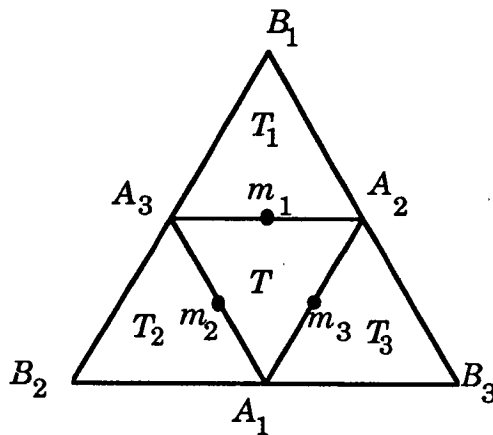
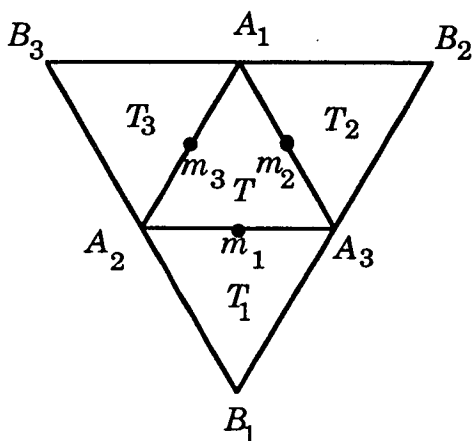


Figure 2.1

Lemme 2.1. La fonction Ψ_T définie par

$$\Psi_T(x) = 0 \text{ si } x \notin \Sigma_T, \quad \Psi_T(x) = 16 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 / \lambda_i^2 \text{ si } x \in T_i,$$

$$\Psi_T(x) = 16 [\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 + 2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3] \text{ si } x \in T,$$

appartient à $V_h(\mathbb{R}^2)$ et vérifie

$$\begin{aligned} \Psi_T(S) &= 0, & \overrightarrow{\text{grad}} \Psi_T(S) &= 0, & \forall S \text{ sommet de triangle de } \mathcal{T}_h; \\ \Psi_T(m_i) &= 1, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Démonstration. Il est clair que Ψ_T est continue. Dans le triangle T et sur A_2A_3 , on a $\overrightarrow{\text{grad}} \Psi_T \cdot \overrightarrow{A_2A_1} = 32\lambda_2 \lambda_3(1-\lambda_3) = 32\lambda_2^2 \lambda_3$ tandis que dans le triangle T_1 et sur A_2A_3 on a $\overrightarrow{\text{grad}} \Psi_T \cdot \overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{\text{grad}} \Psi_T \cdot \overrightarrow{B_1A_3} = 32\lambda_2^2 \lambda_3$. Les dérivées

premières sont donc continues sur A_2A_3 . Par symétrie, il en est de même sur les autres côtés.

■

3. Base de $V_h(\Omega)$.

On considère maintenant l'ensemble des fonctions $\varphi_S, \theta_{S,1}, \theta_{S,2}, \eta_S$ lorsque S parcourt l'ensemble \mathcal{S}_h des sommets des triangles de \mathcal{T}_h et l'ensemble des fonctions Ψ_T , où T parcourt \mathcal{T}_h .

Lemme 3.1. *Les fonctions $\{\varphi_S, \theta_{S,1}, \theta_{S,2}, \eta_S\}_{S \in \mathcal{S}_h}$ et $\{\Psi_T\}_{T \in \mathcal{T}_h}$ sont linéairement indépendantes.*

Démonstration. Supposons que l'on ait

$$A(x) \equiv \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \{\alpha_S \varphi_S(x) + \beta_{S,1} \theta_{S,1}(x) + \beta_{S,2} \theta_{S,2}(x) + \gamma_S \eta_S(x)\} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \Psi_T(x) = 0,$$

avec au plus un nombre fini de coefficients non nuls. En regardant les valeurs de A et de $\overrightarrow{\text{grad}} A$ aux sommets $S \in \mathcal{S}_h$, on obtient immédiatement $\forall S \in \mathcal{S}_h$, $\alpha_S = \beta_{S,1} = \beta_{S,2} = 0$; il reste donc

$$A(x) \equiv \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \gamma_S \eta_S(x) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \Psi_T(x) = 0.$$

Avec les notations de la figure 2.1, en notant par T_1, T_2, T_3 les triangles adjacents à T et en comparant les coefficients de $\lambda_i^2 \lambda_j^2$ dans T on obtient

$$\delta_{T_1} = \delta_{T_2} = \delta_{T_3} = -\delta_T$$

on en déduit que $|\delta_T|$ est indépendant de T ; compte tenu qu'il n'y a qu'un nombre fini de δ_T non nuls, ce n'est possible que si $\forall T, \delta_T = 0$. En comparant les termes en $\lambda_i^2 \lambda_j \lambda_k$ dans chaque triangle T , on obtient ensuite que $\forall S, \gamma_S = 0$.

■

Remarque. Il existe une combinaison linéaire infinie, mais localement finie, (unique à un facteur multiplicatif près) telle que $\forall x \in \mathbb{R}^2, A(x) = 0$; elle s'écrit

$$A(x) \equiv 3h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varepsilon_T \Psi_T(x) + 64 \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \eta_S(x), \text{ avec } \varepsilon_T = \pm 1.$$

Lemme 3.2. On utilise les notations de la figure 3.1.

a) Soit v_h une fonction de $V_h(\mathbb{R}^2)$ qui est nulle ainsi que son gradient au point A_1 et sur les côtés A_2A_3 et A_2B_3 ; alors les restrictions $v_h^{(1)}$ et $v_h^{(2)}$ de v_h à T_1 et T_2 sont de la forme

$$v_h^{(1)} = \alpha \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \beta \lambda_1^2 \lambda_3^2 \quad ; \quad v_h^{(2)} = -\alpha \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \gamma \lambda_1^2 \lambda_3^2 .$$

b) Si de plus v_h est nulle ainsi que son gradient sur le côté A_1A_3 (resp. A_1B_3), alors $v_h^{(1)} = 0$, (resp. $v_h^{(2)} = 0$).

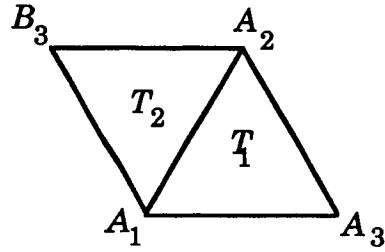


Figure 3.1

Démonstration. a) En écrivant que v_h est nulle ainsi que son gradient au point A_1 et sur les côtés A_2A_3 et A_2B_3 , on obtient

$$v_h^{(1)} = \alpha \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \beta \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \gamma \lambda_1^2 \lambda_2^2 \quad ;$$

de même $v_h^{(2)} = a \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + b \lambda_1^2 \lambda_3^2 + c \lambda_1^2 \lambda_2^2 .$

Sur A_1A_2 , $\overrightarrow{\text{grad}} v_h^{(1)} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} = \alpha \lambda_1^2 \lambda_2 - 2\gamma \lambda_1 \lambda_2^2$

et $\overrightarrow{\text{grad}} v_h^{(2)} \cdot \overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{\text{grad}} v_h^{(2)} \cdot \overrightarrow{B_3A_2} = (2c - a) \lambda_1^2 \lambda_2 .$

La continuité de v_h sur A_1A_2 s'écrit $\gamma = c$, celle de $\overrightarrow{\text{grad}} v_h$ s'écrit $\gamma = 0$ et $\alpha = 2c - a$, d'où le résultat.

b) En effet $v_h^{(1)}$ doit être de la forme $\gamma \lambda_1^2 \lambda_2^2 \dots$

■

Théorème 3.3. On suppose que l'ouvert Ω est simplement connexe et qu'il est situé localement d'un même côté par rapport à sa frontière Γ . On note

$$\mathcal{S}_h(\Omega) = \{S \in \mathcal{S}_h ; \Sigma_S \subset \bar{\Omega}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_h(\Omega) = \{T \in \mathcal{T}_h ; \Sigma_T \subset \bar{\Omega}\}.$$

Alors l'ensemble des fonctions $\{\varphi_S, \theta_{S,1}, \theta_{S,2}, \eta_S\}_{S \in \mathcal{S}_h(\Omega)} \cup \{\Psi_T\}_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)}$ forme une base de $V_h(\Omega)$.

Démonstration.

Soit $W_h(\Omega) = \{v_h \in V_h(\Omega) ; \forall S \in \mathcal{S}_h(\Omega), v_h(S) = 0 \text{ et } \overrightarrow{\text{grad}} v_h(S) = 0\}$
 et $X_h(\Omega)$ le sous-espace de $V_h(\Omega)$ engendré par $\{\varphi_S, \theta_{S,1}, \theta_{S,2}\}_{S \in \mathcal{S}_h(\Omega)}$. Il est clair que $V_h(\Omega) = X_h(\Omega) \oplus W_h(\Omega)$; pour montrer le théorème, il suffit donc de montrer que les fonctions $\{\eta_S\}_{S \in \mathcal{S}_h(\Omega)}$ et $\{\Psi_T\}_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)}$ forment une base de $W_h(\Omega)$. Compte tenu du lemme 3.1, il suffit de montrer la propriété :

(\mathcal{P}_Ω) "Les fonctions $\{\eta_S\}_{S \in \mathcal{S}_h(\Omega)}$ et $\{\Psi_T\}_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)}$ engendrent $W_h(\Omega)$ ".

Nous allons démontrer (\mathcal{P}_Ω) par récurrence sur le nombre de triangles constituant $\bar{\Omega}$. Si $\bar{\Omega}$ est réduit à un triangle, $W_h(\Omega) = \{0\}$ et la propriété (\mathcal{P}_Ω) est vérifiée.

Soit $(N+1)$, $(N \geq 1)$ le nombre de triangles constituant $\bar{\Omega}$; supposons la propriété (\mathcal{P}_{Ω_1}) démontrée pour tous les polygones Ω_1 (satisfaisant aux hypothèses du théorème) constitués d'au plus N triangles de \mathcal{S}_h .

1er cas. Il existe un triangle $T \subset \bar{\Omega}$ ayant deux côtés situés sur la frontière Γ .

Soit T_0 le triangle adjacent à T qui

est contenu dans $\bar{\Omega}$ et T_1, T_2 les autres triangles adjacents à T_0 . On note Ω_1 l'ouvert polygonal $\Omega_1 = \Omega \setminus (T \cap \Omega)$ obtenu en retirant T à Ω . (Ω_1 vérifie encore les hypothèses du théorème). Soit

$v_h \in W_h(\Omega)$; si $\Sigma_{T_0} \subset \bar{\Omega}$, il existe α_0 tel que $v_h - \alpha_0 \Psi_{T_0} = 0$ sur T , on a alors $v_h - \alpha_0 \Psi_{T_0} \in W_h(\Omega_1)$ et (\mathcal{P}_Ω) se déduit de (\mathcal{P}_{Ω_1}) ;

si $\Sigma_{T_0} \not\subset \bar{\Omega}$, alors un des côtés de T_0 est frontière et le lemme 3.2.b) montre que $v_h|_T = 0$, donc $v_h \in W_h(\Omega_1)$ et (\mathcal{P}_Ω) se déduit encore de (\mathcal{P}_{Ω_1}) .

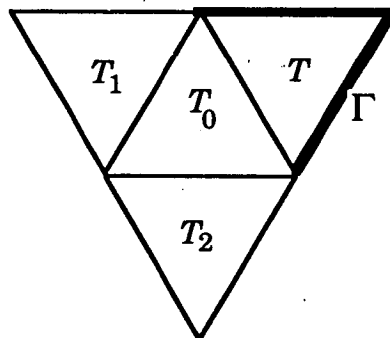


Figure 3.2

2ème cas. Les triangles $T \subset \bar{\Omega}$ ont au plus un côté frontière.

Admettons provisoirement

(H) $\left\{ \begin{array}{l} \text{"Il existe deux triangles adjacents } T_1, T_2 \text{ ayant un sommet commun} \\ S \in \mathcal{S}_h(\Omega) \text{ et les côtés opposés à } S \text{ sur la frontière"} \end{array} \right.$

On note alors $\Omega_1 = \Omega \setminus ((T_1 \cup T_2) \cap \Omega)$.
 Etant donné une fonction $v_h \in V_h(\Omega)$,
 il existe d'après le lemme 3.2.a) α, β
 et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que, sur $T_1 \cup T_2$,
 $v_h - \alpha \eta_S - \beta \Psi_{T_3} - \gamma \Psi_{T_4} = 0$,
 (avec $\beta = 0$ si $\Sigma_{T_3} \not\subset \bar{\Omega}$ et $\gamma = 0$ si
 $\Sigma_{T_4} \not\subset \bar{\Omega}$). On a donc

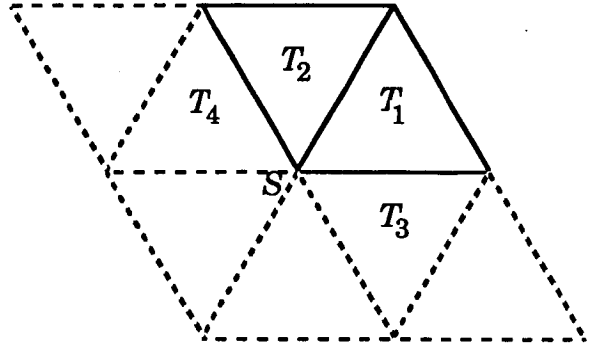


Figure 3.3

$v_h - \alpha \eta_S - \beta \Psi_{T_3} - \gamma \Psi_{T_4} \in W_h(\Omega_1)$,
 et (\mathcal{P}_Ω) se déduit de (\mathcal{P}_{Ω_1}) .



Démonstration de (H). On suppose que les sommets successifs sur la frontière Γ sont numérotés $C_0, C_1, C_2, \dots, C_N = C_0$ de sorte que, \vec{n}_i désignant le vecteur unitaire normal extérieur à $C_i C_{i+1}$, l'on ait $(\vec{n}_i, \vec{C}_i \vec{C}_{i+1}) = \frac{\pi}{2}$.
 Remarquons que, puisqu'un triangle a au plus un côté frontière, les angles $(\vec{C}_{i-1} \vec{C}_i, \vec{C}_i \vec{C}_{i+1})$ ne peuvent prendre que les valeurs $-\frac{2\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{3}$ et 0. Comme de plus $(\vec{C}_0 \vec{C}_1, \vec{C}_1 \vec{C}_2) + (\vec{C}_1 \vec{C}_2, \vec{C}_2 \vec{C}_3) + \dots + (\vec{C}_{N-1} \vec{C}_N, \vec{C}_0 \vec{C}_1) = 2\pi$, il existe (au moins) six indices i tels que $(\vec{C}_{i-1} \vec{C}_i, \vec{C}_i \vec{C}_{i+1}) = \frac{\pi}{3}$. Nous raisonnons maintenant par l'absurde en supposant la négation de la propriété (H) ; ce qui s'écrit

$$(nH) \begin{cases} \forall i \text{ avec } (\vec{C}_{i-1} \vec{C}_i, \vec{C}_i \vec{C}_{i+1}) = \frac{\pi}{3}, \text{ il existe } C_k \text{ sommet sur la frontière} \\ \text{tel que } \vec{C}_i \vec{C}_k = \vec{C}_i \vec{C}_{i-1} + \vec{C}_i \vec{C}_{i+1}. \end{cases}$$

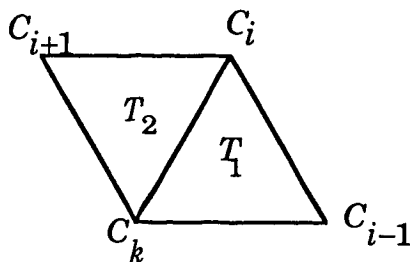


Figure 3.4

Pour de tels indices nous posons

$$l_i = \min(|k-i|, N-|k-i|) ;$$

(l_i représente le nombre minimal de côtés à parcourir pour aller de C_i à C_k sur la frontière). Choisissons un indice i tel que l_i soit minimal ; quitte à renuméroter les points et à opérer une symétrie, on peut supposer $i < k$ et $l_i = k - i$. L'ouvert délimité par $C_i, C_{i+1}, C_{i+2}, \dots, C_k, C_i$ est toujours simplement connexe et vérifie la propriété (nH).

De la relation

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{C_i C_{i+1}}, \overrightarrow{C_{i+1} C_{i+2}}) + (\overrightarrow{C_{i+1} C_{i+2}}, \overrightarrow{C_{i+2} C_{i+3}}) + \dots \\ & \quad + (\overrightarrow{C_{k-1} C_k}, \overrightarrow{C_k C_i}) + (\overrightarrow{C_k C_i}, \overrightarrow{C_i C_{i+1}}) = 2\pi, \end{aligned}$$

on déduit

$$(\overrightarrow{C_i C_{i+1}}, \overrightarrow{C_{i+1} C_{i+2}}) + (\overrightarrow{C_{i+1} C_{i+2}}, \overrightarrow{C_{i+2} C_{i+3}}) + \dots + (\overrightarrow{C_{k-2} C_{k-1}}, \overrightarrow{C_{k-1} C_k}) > 0,$$

ce qui montre qu'il existe j et l avec $i < j < k$ et $i < l < k$ vérifiant

$(\overrightarrow{C_{j-1} C_j}, \overrightarrow{C_j C_{j+1}}) = \frac{\pi}{3}$ et $\overrightarrow{C_j C_l} = (\overrightarrow{C_j C_{j-1}} + \overrightarrow{C_j C_{j+1}})$. On a alors $l_j \leq |l-j| < l_i$ et l'on est en contradiction avec la minimalité de l_i .

■

Remarque. Lorsque l'ouvert Ω n'est pas simplement connexe, les fonctions données ne sont plus suffisantes pour former une base de $V_h(\Omega)$; on peut montrer qu'il suffit de rajouter autour de chaque frontière intérieure Γ_i de Ω , une fonction η_i dont le support Σ_{Γ_i} est la couronne réunion des triangles ayant un ou deux sommets appartenant à Γ_i ; (une telle fonction est unique à un coefficient multiplicatif près).

4. Approximation : minoration.

Pour fixer les idées et surtout éviter une considération oiseuse des différents cas particuliers, nous supposons dans ce qui suit que Ω est un parallélogramme ayant deux côtés horizontaux.

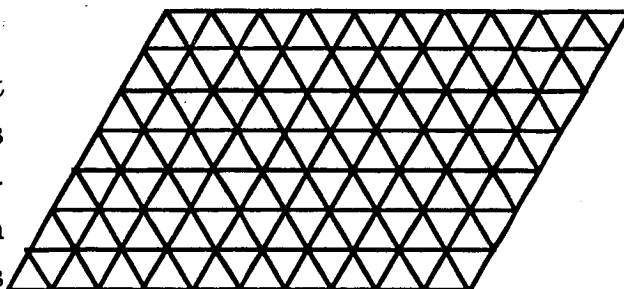


Figure 4.1

Soit u une fonction $\in C^5(\mathbb{R}^2)$ telle que $u = 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}} u = 0$ sur la frontière Γ de Ω ; la quantité

$$e_h(u) = \min_{v_h \in V_h(\Omega)} \|u - v_h\|_{L^\infty(\Omega)}$$

mesure la meilleure approximation possible de u par une fonction de $V_h(\Omega)$; nous introduisons aussi

$$\varepsilon_h(u) = \min_{v_h \in W_h(u, \Omega)} \|u - v_h\|_{L^\infty(\Omega)} ,$$

où

$$W_h(u, \Omega) = \{v_h \in V_h(\Omega) ; \forall S \in \mathcal{S}_h(\Omega), v_h(S) = u(S) \text{ et } \overrightarrow{\text{grad}} v_h(S) = \overrightarrow{\text{grad}} u(S)\}.$$

En utilisant l'inégalité inverse, on a

$$\|\overrightarrow{\text{grad}} u - \overrightarrow{\text{grad}} v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Ch^4 + \frac{C}{h} \|u - v_h\|_{L^\infty(\Omega)} ;$$

compte tenu du fait que

$$\forall S, \|\varphi_S\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 1 \text{ et que } \|\theta_{S,1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \|\theta_{S,2}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq Ch ,$$

on obtient $\varepsilon_h(u) \leq e_h(u) + Ch^5$; on a donc

$$(4.1) \quad e_h(u) \leq \varepsilon_h(u) \leq e_h(u) + Ch^5 .$$

Nous allons montrer que l'on a, en général, $\varepsilon_h(u) = O(h^4)$, et pas mieux ; l'inégalité précédente montre donc qu'il en est de même pour $e_h(u)$.

$$\text{Soit } \tilde{u}_h(x) = \sum_{S \in \mathcal{S}_h(\Omega)} \{u(S) \varphi_S(x) + u_{1,1}(S) \theta_{S,1}(x) + u_{1,2}(S) \theta_{S,2}(x)\},$$

où $u_{1,1}(S)$ et $u_{1,2}(S)$ sont définies par

$$u_{1,1}(S) = \overrightarrow{\text{grad}} u(S) \cdot \left(\frac{4}{3} \vec{e}_1 + \frac{2}{3} \vec{e}_2\right), \quad u_{1,2}(S) = \overrightarrow{\text{grad}} u(S) \cdot \left(\frac{2}{3} \vec{e}_1 + \frac{4}{3} \vec{e}_2\right),$$

de sorte que

$$u_{1,1}(S) \vec{e}_1 + u_{1,2}(S) \vec{e}_2 = \overrightarrow{\text{grad}} u(S) .$$

La fonction $\tilde{u}_h(x)$ appartient à $V_h(\Omega)$ et coïncide avec u , ainsi que son gradient, aux sommets $S \in \bar{\Omega}$. On a donc

$$(4.2) \quad \varepsilon_h(u) = \min_{v_h \in W_h(\Omega)} \|u - \tilde{u}_h - v_h\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Nous commencerons par étudier l'erreur aux points milieux ; pour cela nous utiliserons le lemme technique suivant, de démonstration classique, dans lequel $A \in \mathbb{R}^{n+1, n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ sont la matrice et les vecteurs ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \\ & & & 0 \\ & & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Lemme 4.1. a) Soit $\sigma = \left(\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j b_j \right) / (n+1)$;

on a :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_\infty = |\sigma| ;$$

ce minimum est réalisé lorsque

$$x_i = (-1)^i \left(\sum_{j=1}^i (-1)^j b_j - i \sigma \right).$$

b) Si on choisit x tel que, pour $i = 1, \dots, n$, $(Ax - b)_i = 0$, alors

$$\|Ax - b\|_\infty = (n+1) |\sigma|.$$

On considère maintenant une bande horizontale dans Ω ; avec les notations de la figure 4.2 les côtés $a_0 b_0$ et $a_{N+1} b_{N+1}$ sont sur la frontière Γ de Ω , et les points $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ sont supposés intérieurs à Ω .

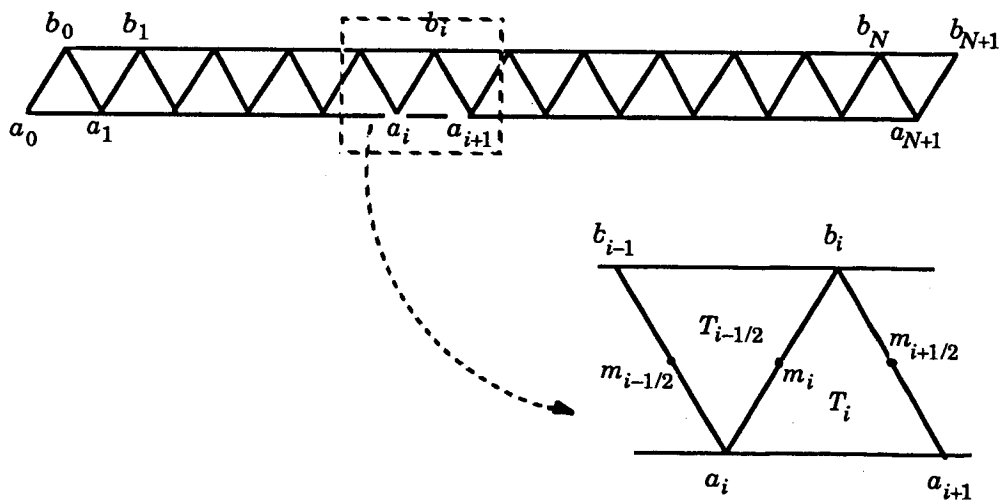


Figure 4.2

Soit $v_h \in W_h(\Omega)$, $v_h(x) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \alpha_T \Psi_T(x) + \sum_{S \in \mathcal{S}_h(\Omega)} \beta_S \eta_S(x)$.

Aux points milieux m_i de $a_i b_i$ et $m_{i+1/2}$ de $b_i a_{i+1}$, on a

$$(u - \tilde{u}_h - v_h)(m_{1/2}) = (u - \tilde{u}_h)(m_{1/2}) - \alpha_{T_{1/2}} ,$$

$$(u - \tilde{u}_h - v_h)(m_i) = (u - \tilde{u}_h)(m_i) - \alpha_{T_{i-1/2}} - \alpha_{T_i} , \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N,$$

$$(u - \tilde{u}_h - v_h)(m_{i+1/2}) = (u - \tilde{u}_h)(m_{i+1/2}) - \alpha_{T_i} - \alpha_{T_{i+1/2}} , \quad \text{pour } 1 \leq i \leq N-1,$$

$$(u - \tilde{u}_h - v_h)(m_{N+1/2}) = (u - \tilde{u}_h)(m_{N+1/2}) - \alpha_{T_N} .$$

Posons

$$(4.3) \quad \rho = \left(\sum_{j=1}^{2N+1} (-1)^j (u - \tilde{u}_h)(m_{j/2}) \right) / (2N+1) ;$$

il résulte du lemme 4.1 a) que l'on a

$$\max_{1 \leq i \leq 2N+1} |(u - \tilde{u}_h - v_h)(m_{i/2})| \geq |\rho| ;$$

l'égalité est réalisée si l'on choisit

$$(4.4) \quad \alpha_{T_{i/2}} = (-1)^i \left[\left(\sum_{j=1}^i (-1)^j (u - \tilde{u}_h)(m_{j/2}) \right) - i\rho \right] , \quad 1 \leq i \leq 2N .$$

On déduit de (4.2), la minoration

$$(4.5) \quad \varepsilon_h(u) \geq |\rho| .$$

Lemme 4.2. a) Si la fonction $u \in C^4(\bar{\Omega})$ s'annule ainsi que son gradient sur les côtés de Ω , et si A désigne la longueur du côté horizontal de Ω , on a

$$|\rho| \leq C_1 h^4 \|D^4 u\|_{L^\infty(\Omega)} , \quad (\text{avec } C_1 \approx \frac{1}{256}) .$$

b) Si de plus $u \in C^5(\bar{\Omega})$, on a

$$\rho = \frac{h^4}{768A} (D^3 u(m_0) - D^3 u(m_{N+1}))(\vec{e}_3 - \vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_1) + O(h^5) .$$

Démonstration. Dans ce qui suit nous noterons $\partial_i u(m) = Du(m)(\vec{e}_i)$,

$$\partial_i^{(2)} u(m) = D^2 u(m)(\vec{e}_i, \vec{e}_i) , \quad \text{etc...}$$

a) Pour $i = 1, \dots, N$, posons

$$(4.6) \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^i [(u - \tilde{u}_h)(m_j) - (u - \tilde{u}_h)(m_{j-1/2})] ;$$

puisque $(u - \tilde{u}_h)(m_{N+1}) = 0$, on a

$$\rho = \sigma_{N+1} / (2N+1) .$$

On peut écrire aussi

$$\sigma_i = \frac{1}{2} u(m_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{2} [u(m_j) - 2u(m_{j+1/2}) + u(m_{j+1})] + \sum_{j=1}^i (\tilde{u}_h(m_{j-1/2}) - \tilde{u}_h(m_j)).$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h(m_{j-1/2}) &= u(a_j) \varphi_{a_j}(m_{j-1/2}) + u(b_{j-1}) \varphi_{b_{j-1}}(m_{j-1/2}) \\ &\quad + u_{1,1}(a_j) \theta_{a_j,1}(m_{j-1/2}) + u_{1,2}(a_j) \theta_{a_j,2}(m_{j-1/2}) \\ &\quad + u_{1,1}(b_{j-1}) \theta_{b_{j-1},1}(m_{j-1/2}) + u_{1,2}(b_{j-1}) \theta_{b_{j-1},2}(m_{j-1/2}); \end{aligned}$$

donc

$$(4.7) \quad \tilde{u}_h(m_{j-1/2}) = \frac{5}{16} (u(a_j) + u(b_{j-1})) + \frac{h}{16} (\partial_2 u(a_j) - \partial_2 u(b_{j-1})).$$

De même

$$(4.8) \quad \tilde{u}_h(m_j) = \frac{5}{16} (u(a_j) + u(b_j)) + \frac{h}{16} (\partial_3 u(b_j) - \partial_3 u(a_j)).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{2} u(m_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{2} [u(m_j) - 2u(m_{j+1/2}) + u(m_{j+1})] - \frac{5}{16} u(b_i) \\ &\quad - \frac{h}{16} \sum_{j=1}^i (\partial_1 u(a_j) - \partial_1 u(b_j)) + \frac{h}{16} \partial_2 u(b_i), \\ \sigma_i &= \frac{1}{2} u(m_i) - \frac{5}{16} u(b_i) + \frac{h}{16} \partial_2 u(b_i) + \frac{h}{32} (\partial_1 u(b_i) - \partial_1 u(a_i)) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{2} [u(m_j) - 2u(m_{j+1/2}) + u(m_{j+1})] \\ &\quad - \frac{h}{16} \sum_{j=0}^{i-1} \left\{ \frac{1}{2} [\partial_1 u(a_j) + \partial_1 u(a_{j+1})] - \frac{1}{2} [\partial_1 u(b_j) + \partial_1 u(b_{j+1})] \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant les formules

$$\frac{1}{2} [u(m_j) - 2u(m_{j+1/2}) + u(m_{j+1})] = \frac{h}{8} (\partial_1 u(m_{j+1}) - \partial_1 u(m_j)) - \frac{h^4}{16 \cdot 4!} \partial_1^{(4)} u(p_j),$$

et

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} [\partial_1 u(a_j) + \partial_1 u(a_{j+1}) - \partial_1 u(b_j) - \partial_1 u(b_{j+1})] &= u(a_{j+1}) - u(a_j) - u(b_{j+1}) + u(b_j) \\ &\quad + \frac{h^4}{12} \partial_3 (\partial_1^{(3)} u(n_j)), \end{aligned}$$

où les points p_j et n_j appartiennent respectivement au segment $[m_j, m_{j+1}]$, et au parallélogramme $a_j, a_{j+1}, b_{j+1}, b_j$, on obtient

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{2} u(m_i) - \frac{1}{4} u(b_i) - \frac{1}{16} u(a_i) \\ &\quad + \frac{h}{16} \partial_2 u(b_i) + \frac{h}{32} (\partial_1 u(b_i) - \partial_1 u(a_i)) + \frac{h}{8} \partial_1 u(m_i) + R_i, \end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad |R_i| \leq i \frac{3h^4}{16 \times 24} \|D^4 u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

b) En utilisant de même les formules

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [u(m_j) - 2u(m_{j+1/2}) + u(m_{j+1})] &= \frac{h}{8} (\partial_1 u(m_{j+1}) - \partial_1 u(m_j)) \\ &\quad - \frac{h^3}{16.4!} (\partial_1^{(3)} u(m_{j+1}) - \partial_1^{(3)} u(m_j)) + O(h^5), \end{aligned}$$

$$\frac{h}{2} [\partial_1 u(a_j) + \partial_1 u(a_{j+1})] = u(a_{j+1}) - u(a_j) + \frac{h^2}{12} (\partial_1^{(2)} u(a_{j+1}) - \partial_1^{(2)} u(a_j)) + O(h^5),$$

et

$$\frac{h}{2} [\partial_1 u(b_j) + \partial_1 u(b_{j+1})] = u(b_{j+1}) - u(b_j) + \frac{h^2}{12} (\partial_1^{(2)} u(b_{j+1}) - \partial_1^{(2)} u(b_j)) + O(h^5),$$

on obtient (4.9) avec

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{h^3}{16.4!} (\partial_1^{(3)} u(m_0) - \partial_1^{(3)} u(m_i)) \\ &\quad - \frac{h^2}{16.12} (\partial_1^{(2)} u(b_0) - \partial_1^{(2)} u(a_0) - \partial_1^{(2)} u(b_i) + \partial_1^{(2)} u(a_i)) + O(h^4), \end{aligned}$$

d'où

$$(4.10) \quad R_i = \frac{h^3}{16.4!} (D^3 u(m_0) - D^3 u(m_i)) (\vec{e}_3 - \vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_1) + O(h^4).$$

Le lemme s'en déduit en remarquant que $\sigma_{N+1} = R_{N+1}$ et que $\frac{A}{2N+1} = \frac{h}{2} + O(h^2)$.

■

Corollaire 4.3. *Il existe des fonctions $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, vérifiant $u = 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}} u = 0$ sur Γ , telles que*

$$e_h(u) \geq C h^4 \quad \text{avec } C \neq 0.$$

Démonstration. Il suffit de prendre une fonction u telle que

$$(D^3 u(m_0) - D^3 u(m_{N+1})) (\vec{e}_3 - \vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_1) \neq 0; \text{ on conclut en utilisant (4.1) et (4.5).}$$

■

5. Approximation - Majoration.

Nous venons de montrer que, dans le cas général, nous ne pouvons espérer une approximation meilleure que $O(h^4)$; nous allons maintenant montrer que cet ordre d'approximation peut être atteint. Pour cela on choisit

$$(5.1) \quad u_h(x) = \tilde{u}_h(x) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \alpha_T \Psi_T(x) + \sum_{S \in \mathcal{S}_h(\Omega)} \beta_S \eta_S(x),$$

où les coefficients α_T sont définis de la manière suivante (voir figure 4.2).

(a) Si les points $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ sont intérieurs à Ω :

$$\alpha_{T_{i/2}} \text{ est défini par (4.4) pour } 1 \leq i \leq 2N;$$

(b) Si les points b_0, b_1, \dots, b_{N+1} sont sur la frontière (supérieure) de Ω :

$$(5.2) \quad \alpha_{T_i} = \frac{1}{2} (u(m_i) - \tilde{u}_h(m_i) + u(m_{i+1/2}) - \tilde{u}_h(m_{i+1/2})), \quad 1 \leq i \leq N;$$

(c) Si les points a_0, \dots, a_{N+1} sont sur la frontière (inférieure) de Ω :

$$(5.3) \quad \alpha_{T_{i-1/2}} = \frac{1}{2} [u(m_{i-1/2}) - \tilde{u}_h(m_{i-1/2}) + u(m_i) - \tilde{u}_h(m_i)], \quad 1 \leq i \leq N.$$

On choisit ensuite les coefficients β_S de telle sorte que l'on ait dans le triangle K_S , (avec les notations de la figure 5.1),
 $D^2 u_h(S)(\vec{j}, \vec{j}) = D^2 u(S)(\vec{j}, \vec{j})$,
 (où \vec{j} désigne le vecteur unitaire vertical orienté vers le haut).

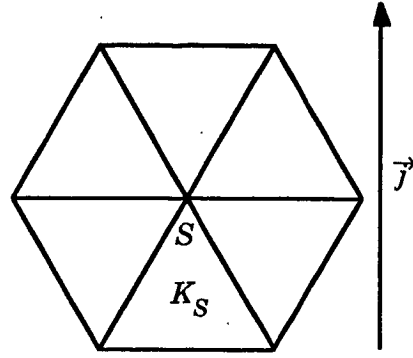


Figure 5.1

5.1. Estimation de l'erreur aux milieux des côtés.

Lemme 5.1. On suppose que $u \in C^5(\bar{\Omega})$ et vérifie $u = 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}} u = 0$ sur Γ . Alors on a

$$\max_{m \in \mathcal{M}_h(\Omega)} |u(m) - u_h(m)| \leq C h^4 (\|D^4 u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|D^5 u\|_{L^\infty(\Omega)})$$

où

$\mathcal{M}_h(\Omega)$ est l'ensemble des milieux de côtés $m \in \Omega$, des triangles $K \in \mathcal{T}_h$.

Démonstration. D'après le choix des coefficients α_{T_i} et le lemme 4.2, on a

$$\max_{1 \leq i \leq 2N+1} |u(m_{i/2}) - u_h(m_{i/2})| = |\rho| \leq C_1 h^4 \|D^4 u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

lorsque l'on est dans la situation de la figure 4.1 avec $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ intérieurs à Ω .

Dans le cas où les points $b_0, b_1, \dots, b_N, b_{N+1}$ sont sur la frontière de Ω , on a :
 pour $i = 1, \dots, N$,

$$|u(m_i) - u_h(m_i)| = |u(m_{i+1/2}) - u_h(m_{i+1/2})| = \frac{1}{2} |u(m_i) - \tilde{u}_h(m_i) - u(m_{i+1/2}) + \tilde{u}_h(m_{i+1/2})|;$$

en utilisant (4.8) et la formule de Taylor en b_i , on obtient

$$(5.4) \quad u(m_i) - \tilde{u}_h(m_i) = u(m_i) - \frac{5}{16} u(a_i) + \frac{h}{16} \partial_3 u(a_i) = \frac{h^2}{32} D^2 u(b_i)(\vec{e}_3, \vec{e}_3) + O(h^4);$$

de même, en utilisant (4.7),

$$(5.5) \quad u(m_{i+1/2}) - \tilde{u}_h(m_{i+1/2}) = \frac{h^2}{32} D^2 u(b_i)(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + O(h^4);$$

et donc, puisque $D^2 u(b_i)(\vec{e}_3, \vec{e}_3) - D^2 u(b_i)(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = (\partial_1^{(2)} u(b_i) - \partial_1(\partial_2 u(b_i))) = 0$,

on a $|u(m_i) - u_h(m_i)| = |u(m_{i+1/2}) - u_h(m_{i+1/2})| = O(h^4)$;

pour $i = \frac{1}{2}$,

$$u(m_{1/2}) - u_h(m_{1/2}) = u(m_{1/2}) - \tilde{u}_h(m_{1/2}) = \frac{h^2}{32} D^2 u(b_0)(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + O(h^4) = O(h^4) .$$

On a ainsi montré

$$\max_{1 \leq i \leq 2N+1} |u(m_{i/2}) - u_h(m_{i/2})| \leq C_2 h^4 \|D^4 u\|_{L^\infty(\Omega)} ,$$

dans le cas où les sommets b_0, \dots, b_{N+1} sont sur la frontière ; le cas où les sommets a_0, \dots, a_{N+1} sont frontières se traite de la même manière.

Il reste à regarder le cas des milieux de côtés horizontaux.

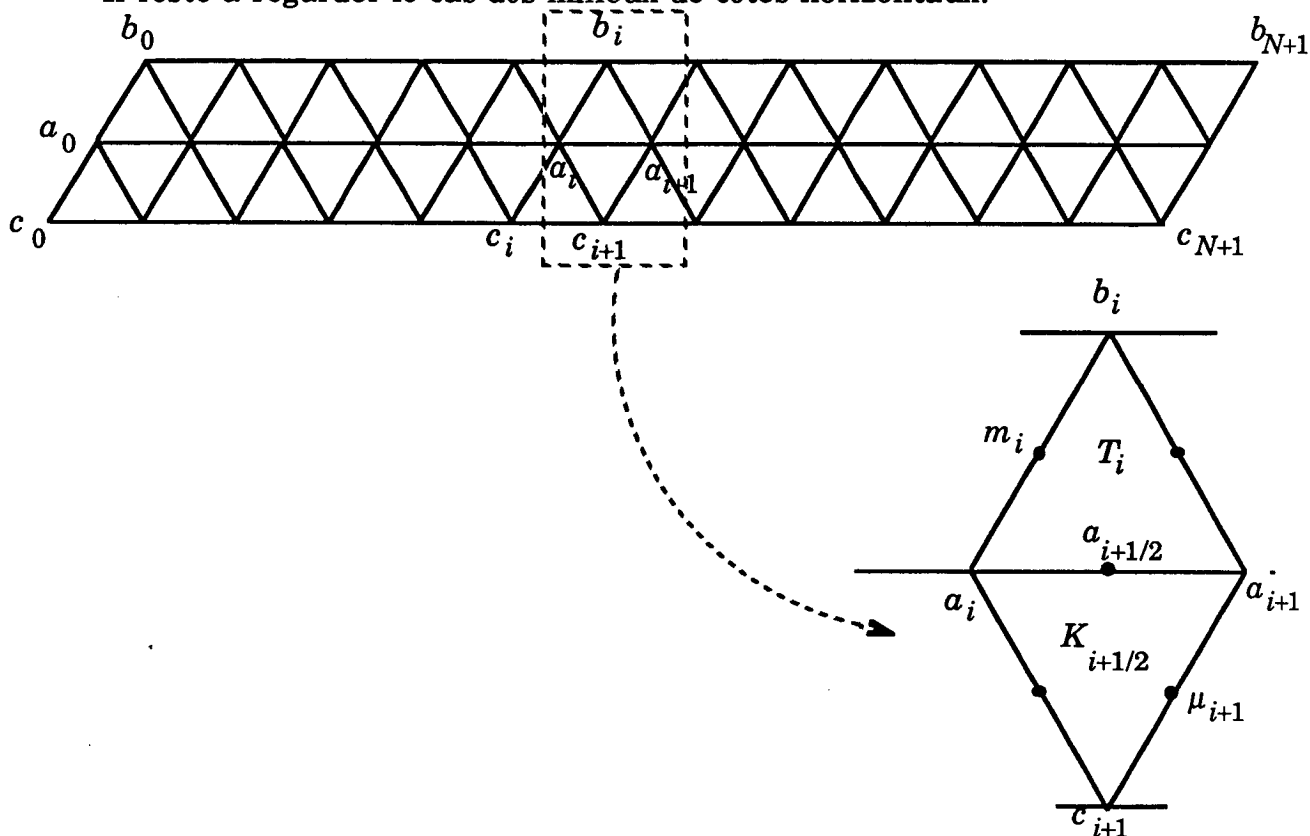


Figure 5.2

Les points $a_{i+1/2}$, m_i , μ_{i+1} désignent respectivement les milieux des côtés $a_i a_{i+1}$, $a_i b_i$, $c_{i+1} a_{i+1}$; T_i est le triangle de sommets a_i , a_{i+1} , b_i , et $K_{i+1/2}$ celui de sommets a_i , a_{i+1} et c_{i+1} .

1er cas. Regardons tout d'abord le cas où les points $b_1, \dots, b_N, c_1, \dots, c_N$ sont intérieurs à Ω .

On a

$$(5.6) \quad u(a_{i+1/2}) - u_h(a_{i+1/2}) = u(a_{i+1/2}) - \tilde{u}_h(a_{i+1/2}) - \alpha_{T_i} - \alpha_{K_{i+1/2}}.$$

D'après (4.4) et (4.6) $\alpha_{T_i} = \sigma_i - 2i \rho.$

De même, en posant

$$\tilde{\sigma}_i = \sum_{j=1}^i [(u - \tilde{u}_h(\mu_j)) - (u - \tilde{u}_h(\mu_{j-1/2}))]$$

et

$$\tilde{\rho} = \left[\sum_{j=1}^{2N+1} (-1)^j (u - \tilde{u}_h(\mu_{j/2})) \right] / (2N+1),$$

on a

$$\alpha_{K_{i+1/2}} = -\tilde{\sigma}_{i+1} + (2i+1)\tilde{\rho} + u(\mu_{i+1}) - \tilde{u}_h(\mu_{i+1}).$$

D'après le lemme 4.2, b) $\rho - \tilde{\rho} = O(h^5)$ et $\tilde{\rho} = O(h^4)$; on a donc

$$(5.7) \quad u(a_{i+1/2}) - u_h(a_{i+1/2}) = u(a_{i+1/2}) - u(\mu_{i+1}) - \sigma_i + \tilde{\sigma}_{i+1} - \tilde{u}_h(a_{i+1/2}) + \tilde{u}_h(\mu_{i+1}) + O(h^4).$$

D'après (4.9) et (4.10)

$$\begin{aligned} \sigma_i - \tilde{\sigma}_{i+1} &= \frac{1}{2} u(m_i) - \frac{1}{4} u(b_i) - \frac{1}{16} u(a_i) \\ &+ \frac{h}{8} \partial_1 u(m_i) + \frac{h}{16} \partial_2 u(b_i) + \frac{h}{32} (\partial_1 u(b_i) - \partial_1 u(a_i)) \\ &- \frac{1}{2} u(\mu_{i+1}) + \frac{1}{4} u(a_{i+1}) + \frac{1}{16} u(c_{i+1}) \\ &- \frac{h}{8} \partial_1 u(\mu_{i+1}) - \frac{h}{16} \partial_2 u(a_{i+1}) - \frac{h}{32} (\partial_1 u(a_{i+1}) - \partial_1 u(c_{i+1})) + O(h^4). \end{aligned}$$

De manière similaire à (4.7) et (4.8), on a

$$\tilde{u}_h(a_{i+1/2}) = \frac{5}{16} (u(a_i) + u(a_{i+1})) + \frac{h}{16} (\partial_1 u(a_i) - \partial_1 u(a_{i+1}))$$

et

$$\tilde{u}_h(\mu_{i+1}) = \frac{5}{16} (u(a_{i+1}) + u(c_{i+1})) + \frac{h}{16} (\partial_3 u(a_{i+1}) - \partial_3 u(c_{i+1})).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u(a_{i+1/2}) - u_h(a_{i+1/2}) &= u(a_{i+1/2}) - \frac{1}{2} u(m_i) - \frac{1}{2} u(\mu_{i+1}) \\ &+ \frac{1}{4} (u(b_i) + u(c_{i+1}) - u(a_i) - u(a_{i+1})) \\ &+ \frac{h}{8} (\partial_1 u(\mu_{i+1}) - \partial_1 u(m_i)) + \frac{h}{32} (\partial_1 u(a_{i+1}) - \partial_1 u(a_i)) \\ &+ \frac{h}{32} [(\partial_2 - \partial_3)u(c_{i+1}) - (\partial_2 - \partial_3)u(b_i)] + O(h^4). \end{aligned}$$

On en déduit

$$(5.8) \quad u(a_{i+1/2}) - u_h(a_{i+1/2}) = O(h^4)$$

en utilisant

$$\begin{aligned} u(m_i) + u(\mu_{i+1}) - 2u(a_{i+1/2}) &= \frac{h^2}{4} D^2 u(a_{i+1/2}) (\vec{e}_2, \vec{e}_2) + O(h^4), \\ u(c_{i+1}) + u(b_i) - 2u(a_{i+1/2}) &= \frac{h^2}{4} D^2 u(a_{i+1/2}) (\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}_2 - \vec{e}_3) + O(h^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(a_{i+1}) + u(a_i) - 2u(a_{i+1/2}) &= \frac{h^2}{4} D^2 u(a_{i+1/2})(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + O(h^4), \\
h(\partial_1 u(m_{i+1}) - \partial_1 u(m_i)) &= -h^2 D^2 u(a_{i+1/2})(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + O(h^4), \\
h(\partial_1 u(a_{i+1}) - \partial_1 u(a_i)) &= h^2 D^2 u(a_{i+1/2})(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + O(h^4), \\
h[(\partial_2 - \partial_3)u(c_{i+1}) - (\partial_2 - \partial_3)u(b_i)] &= -h^2 D^2 u(a_{i+1/2})(\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \vec{e}_2 - \vec{e}_3) + O(h^4).
\end{aligned}$$

2ème cas. Les points b_0, b_1, \dots, b_{N+1} sont frontières.

La formule (5.6) est encore valable, mais il faut remplacer

$$\alpha_{T_i} = \sigma_i - 2i\rho \quad \text{par} \quad \alpha_{T_i} = \frac{1}{2} (u(m_i) - \tilde{u}_h(m_i) + u(m_{i+1/2}) - \tilde{u}_h(m_{i+1/2})).$$

On aura donc, compte tenu des calculs effectués dans le premier cas,

$$(5.9) \quad u(a_{i+1/2}) - u_h(a_{i+1/2}) = O(h^4)$$

si l'on montre que

$$(5.10) \quad \eta_i \stackrel{\text{déf}}{=} \sigma_i - 2i\rho - \frac{1}{2} (u(m_i) - \tilde{u}_h(m_i) + u(m_{i+1/2}) - \tilde{u}_h(m_{i+1/2})) = O(h^4).$$

D'après le lemme 4.2 b), on a $\rho = O(h^5)$, donc $i\rho = O(h^4)$; en utilisant (4.9), (5.4) et (5.5), $u(b_i) = 0$, $Du(b_i) = 0$, on en déduit

$$\eta_i = \frac{1}{2} u(m_i) - \frac{1}{16} u(a_i) + \frac{h}{8} \partial_1 u(m_i) - \frac{h}{32} \partial_1 u(a_i) - \frac{h^2}{64} [D^2 u(b_i)(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + D^2 u(b_i)(\vec{e}_3, \vec{e}_3)] + O(h^4).$$

En utilisant la formule de Taylor au point b_i , on obtient,

$$\eta_i = \frac{h^2}{32} \{ D^2 u(b_i)(\vec{e}_3, \vec{e}_3) + D^2 u(b_i)(\vec{e}_1, \vec{e}_3) - \frac{1}{2} [D^2 u(b_i)(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + D^2 u(b_i)(\vec{e}_3, \vec{e}_3)] \} + O(h^4),$$

d'où, puisque $\vec{e}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_3$,

$$\eta_i = -\frac{h^2}{64} D^2 u(b_i)(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + O(h^4) = O(h^4),$$

ce qui montre (5.10) et par suite (5.9).

Le cas où les sommets a_0, a_1, \dots, a_{N+1} sont frontières se traite de la même manière.

5.2. Estimation globale.

Théorème 5.2. On suppose que $u \in C^5(\bar{\Omega})$ et vérifie $u = 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}} u = 0$ sur Γ . Alors

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C h^4 (\|D^4 u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|D^5 u\|_{L^\infty(\Omega)}) \\
\overrightarrow{\text{grad}}(u - u_h)\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq C h^3 (\|D^4 u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|D^5 u\|_{L^\infty(\Omega)}).
\end{aligned}$$

Démonstration. On va faire l'estimation triangle par triangle en considérant les différents cas possibles.

1^{er} cas. Figure ci-dessous avec a_1, a_2 et $a_3 \in \mathcal{S}_h(\Omega)$; (triangle intérieur).

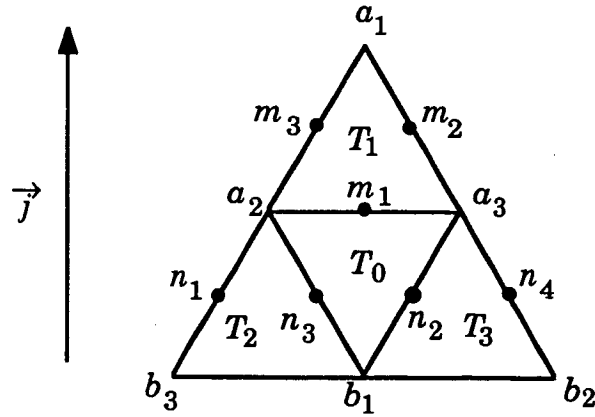


Figure 5.3

Lemme 5.3. a) Il existe une unique fonction $r_h u \in P_4$ telle que

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \forall i = 1, 2, 3, \quad r_h u(a_i) &= u(a_i), \quad r_h u(m_i) = u(m_i), \\ \overrightarrow{\text{grad}}(r_h u)(a_i) &= \overrightarrow{\text{grad}} u(a_i) \quad \text{et} \quad D^2 r_h u(a_i)(\vec{j}, \vec{j}) = D^2 u(a_i)(\vec{j}, \vec{j}). \end{aligned}$$

b) De plus

$$\|u - r_h u\|_{L^\infty(\Sigma)} + h \|\overrightarrow{\text{grad}}(u - r_h u)\|_{L^\infty(\Sigma)} \leq C h^4 \|D^4 u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

avec $\Sigma = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$.

Démonstration. (classique ; cf. Ciarlet-Raviart ou Ciarlet par exemple). ■

Lemme 5.4. Soit $v_h \in V_h(\mathbb{R}^2)$ une fonction telle que

$$(5.12) \quad v_h(a_i) = 0, \quad \overrightarrow{\text{grad}} v_h(a_i) = 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, 3,$$

$$(5.13) \quad \begin{cases} D^2 v_h(a_1)(\vec{j}, \vec{j}) = 0 \text{ dans } T_1, & D^2 v_h(a_2)(\vec{j}, \vec{j}) = 0 \text{ dans } T_2, \\ D^2 v_h(a_3)(\vec{j}, \vec{j}) = 0 \text{ dans } T_3, \end{cases}$$

alors, dans le triangle T_1 de sommets a_1, a_2, a_3 , on a

$$(5.14) \quad \|v_h\|_{L^\infty(T_1)} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^3 (|v_h(m_i)| + |v_h(b_i)| + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(b_i)|) + \sum_{i=1}^4 |v_h(n_i)| \right\}$$

où C est une constante indépendante de h .

Démonstration. Par une homothétie, on se ramène aisément au cas où $h = 1$.

Il suffit de montrer que, si (5.12) est vérifié et si

$$(5.15) \quad \begin{cases} \forall i = 1, 2, 3, \quad v_h(m_i) = 0, \quad v_h(b_i) = 0, \quad \overrightarrow{\text{grad}} v_h(b_i) = 0, \\ \text{et } \forall i = 1, 2, 3, 4, \quad v_h(n_i) = 0, \end{cases}$$

alors $v_h|_{T_1} = 0$.

Des conditions (5.12) et (5.15), on déduit

$$\begin{aligned}
v_h|_{T_1} &= \alpha_1 \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 + \alpha_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^2 \\
v_h|_{T_0} &= \beta_1 \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \beta_2 \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 + \beta_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^2 \\
v_h|_{T_2} &= \gamma_1 \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \gamma_2 \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 + \gamma_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^2 + \gamma \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\
v_h|_{T_3} &= \delta_1 \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + \delta_2 \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3 + \delta_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^2 + \delta \lambda_1^2 \lambda_2^2 .
\end{aligned}$$

La condition (5.13) implique $\alpha_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\delta_3 = 0$;

on obtient, en utilisant la continuité de $\overrightarrow{\text{grad}} v_h$,
entre T_1 et T_0 , $\beta_2 + \alpha_2 = 0$ et $\beta_3 + \alpha_3 = 0$,
entre T_0 et T_2 , $\beta_2 + \gamma_2 = 0$,
entre T_0 et T_3 , $\beta_3 + \delta_3 = 0$;
on en déduit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, donc $v_h|_{T_1} = 0$.

■

En utilisant l'inégalité triangulaire

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(T_1)} \leq \|u - r_h u\|_{L^\infty(T_1)} + \|r_h u - u_h\|_{L^\infty(T_1)},$$

et en appliquant le lemme 5.3 et l'inégalité (5.14) avec $v_h = r_h u - u_h$, on obtient

$$\|u - u_h\|_{L^\infty(T_1)} \leq C h^4 \|D^4 u\|_{L^\infty(\Omega)} + C \left(\sum_{i=1}^3 |u(m_i) - u_h(m_i)| + \sum_{i=1}^4 |u(n_i) - u_h(n_i)| \right).$$

La première majoration du théorème 5.2 se déduit alors du lemme 5.1 ; la deuxième inégalité s'obtient en utilisant l'inégalité inverse.

La démonstration reste essentiellement la même dans les autres cas de figure ; seuls sont modifiés les choix de Σ , (5.13) et (5.14).

2^{ème} cas. Figure 5.4. avec a_1 et $b_4 \in \Gamma$, a_2 et $a_3 \in \mathcal{S}_h(\Omega)$; (frontière supérieure de Ω).

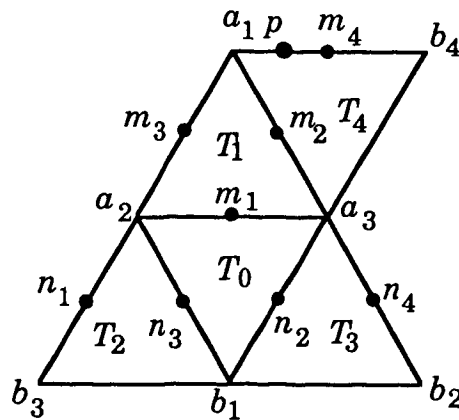


Figure 5.4

On choisit ici $\Sigma = T_0 \cup T_1 \dots \cup T_4$, et on remplace (5.13) et (5.14) par

$$(5.13)_2 \quad D^2 v_h(a_2)(\vec{j}, \vec{j}) = 0 \text{ dans } T_2, \quad D^2 v_h(a_3)(\vec{j}, \vec{j}) = 0 \text{ dans } T_3,$$

$$(5.14)_2 \quad \|v_h\|_{L^\infty(T_1)} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^4 (|v_h(m_i)| + |v_h(n_i)| + |v_h(b_i)|) \right. \\ \left. + h \sum_{i=1}^4 |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(b_i)| + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(m_4)| + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(p)| \right\},$$

où m_4 est le point milieu de $a_1 b_4$, et p celui de $a_1 m_4$.

3^{ème} cas. a_1 et $a_2 \in \Gamma$, $a_3 \in \mathcal{S}_h(\Omega)$; (frontière gauche de Ω).

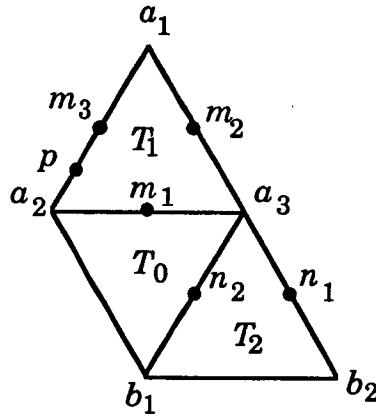


Figure 5.5

On choisit ici $\Sigma = T_0 \cup T_1 \cup T_2$, et on remplace (5.13) et (5.14) par

$$(5.13)_3 \quad D^2 v_h(a_3)(\vec{j}, \vec{j}) = 0 \text{ dans } T_2,$$

$$(5.14)_3 \quad \|v_h\|_{L^\infty(T_1)} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^3 |v_h(m_i)| + \sum_{i=1}^2 (|v_h(n_i)| + |v_h(b_i)|) \right. \\ \left. + h \sum_{i=1}^2 |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(b_i)| + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(m_3)| + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(p)| \right\},$$

où p est le point milieu de $a_2 m_3$.

4^{ème} cas. a_1, a_2 et $a_3 \in \Gamma$; (triangle inférieur gauche de Ω).

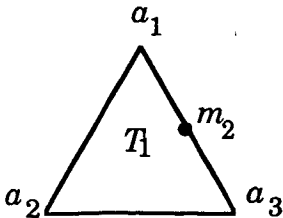


Figure 5.6

Ici il est plus agréable de définir $r_h u$ par

$$r_h u = 0 \text{ et } \overrightarrow{\text{grad}} r_h u = 0 \text{ sur } a_1 a_2 \text{ et } a_2 a_3, \\ r_h u(m_2) = u(m_2),$$

et de remarquer que

$$\|u_h - r_h u\|_{L^\infty(T_1)} \leq |(u_h - r_h u)(m_2)| = |(u_h - u)(m_2)|.$$

5^{ème} cas. $a_1 \in \mathcal{S}_h(\Omega)$, a_2 et $a_3 \in \Gamma$; (frontière inférieure de Ω).

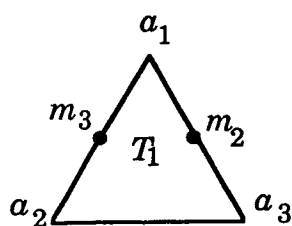


Figure 5.7

On choisit ici $\Sigma = T_1$, et on remplace (5.13) et (5.14) par

$$(5.13)_5 \quad D^2 v_h(a_1)(\vec{j}, \vec{j}) = 0 \text{ dans } T_1,$$

$$v_h = 0 \text{ et } \overrightarrow{\text{grad}} v_h = 0 \text{ sur } a_2 a_3,$$

$$(5.14)_5 \quad \|v_h\|_{L^\infty(T_1)} \leq C (|v_h(m_2)| + |v_h(m_3)|).$$

6ème cas. a_1 et $a_2 \in \mathcal{S}_h(\Omega)$, a_3 et $b_1 \in \Gamma$; (frontière droite de Ω).

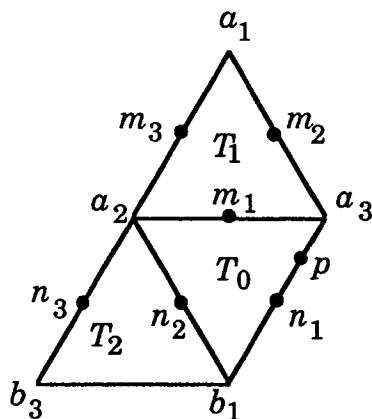


Figure 5.8

On choisit ici $\Sigma = T_0 \cup T_1 \cup T_2$, et on remplace (5.13) et (5.14) par

$$(5.13)_6 \quad D^2 v_h(a_1)(\vec{j}, \vec{j}) = 0 \text{ dans } T_1, \quad D^2 v_h(a_2)(\vec{j}, \vec{j}) = 0 \text{ dans } T_2,$$

$$(5.14)_6 \quad \|v_h\|_{L^\infty(T_1)} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^3 (|v_h(m_i)| + |v_h(n_i)|) + |v_h(b_1)| + |v_h(b_3)| \right. \\ \left. + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(b_1)| + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(b_3)| + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(n_1)| + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(p)| \right\},$$

où p est le point milieu de $a_3 n_1$.

7ème cas. $a_2 \in \mathcal{S}_h(\Omega)$, a_1 et $a_3 \in \Gamma$; (partie supérieure droite de Ω).

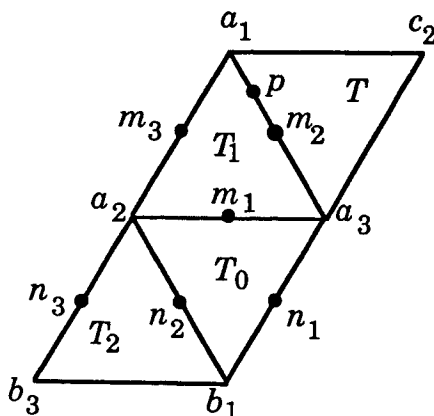


Figure 5.9

Remarquons d'abord que le cas du triangle $T = a_1 a_3 c_2$ se traiterai comme le quatrième cas ; on a donc

$\|u-u_h\|_{L^\infty(T)} + h \|\overrightarrow{\text{grad}}(u-u_h)\|_{L^\infty(T)} \leq C h^4 \|D^4 u\|_{L^\infty(\Omega)} + C |u(m_2)-u_h(m_2)|$;
 cette majoration est en particulier valable au point m_2 et au point p milieu de $a_1 m_2$.

On choisit maintenant $\Sigma = T_0 \cup T_1 \cup T_2$, et on remplace (5.13) et (5.14) par

$$(5.13)_7 \quad D^2 v_h(a_2)(\vec{j}, \vec{j}) = 0 \text{ dans } T_2,$$

$$(5.14)_7 \quad \|v_h\|_{L^\infty(T_1)} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^3 (|v_h(m_i)| + |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(m_i)|) + |v_h(b_1)| + |v_h(b_3)| \right. \\ \left. + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(b_1)| + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(b_3)| + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(m_2)| + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(p)| \right\}.$$

8ème cas. Nous avons traité le cas des triangles dont le côté horizontal était situé au-dessous du sommet opposé ; pour les autres triangles, on a déjà les estimations sur les côtés ; il suffit alors de remarquer que, sous l'hypothèse (5.12), les fonctions $v_h \in V_h$ vérifient

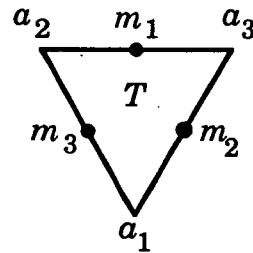


Figure 5.10

$$\|v_h\|_{L^\infty(T_1)} \leq C \sum_{i=1}^3 (|v_h(m_i)| + h |\overrightarrow{\text{grad}} v_h(m_i)|). \quad \blacksquare$$

Références.

- [1] P. ALFELD, B. PIPER and L. L. SCHUMAKER, An explicit basis for C^1 quartic bivariate splines, SIAM J. Numer. Anal. 24, n°4, 891-911, 1987.
- [2] P. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problem*, North-Holland, 1978.
- [3] P. G. CIARLET, P. A. RAVIART, General Lagrange and Hermite interpolation in \mathbb{R}^n with applications to finite element methods, Arch. Rational Mech. Anal. 46, 171-199, 1972.

LISTE DES DERNIERES PUBLICATIONS INTERNES

- PI 457 **MULTICLASS TANDEM QUEUES WITH FEEDFORWARD FLOWS**
Kamel SISMAIL
16 Pages, Février 1989.
- PI 458 **PRIME NUMBERS AS A TOOL TO DESIGN DISTRIBUTED ALGORITHMS**
Michel RAYNAL
14 Pages, Février 1989.
- PI 459 **SYNCHRONOUS PROGRAMMING WITH EVENTS AND RELATIONS : THE SIGNAL LANGUAGE AND ITS SEMANTICS**
Albert BENVENISTE, Paul LE GUERNIC
66 Pages, Février 1989.
- PI 460 **FLOW ANALYSIS IN TANDEM QUEUES WITH FEEDFORWARD FLOWS**
Kamel SISMAIL
14 Pages, Février 1989.
- PI 461 **NUMERICAL CONCERNS IN CONVOLUTION-TYPE ALGORITHMS**
Gerardo RUBINO, William STEWART
18 Pages, Février 1989.
- PI 462 **ACCUMULATED REWARD OVER THE N FIRST OPERATIONAL PERIODS IN FAULT-TOLERANT COMPUTING SYSTEMS**
Gerardo RUBINO, Bruno SERICOLA
14 Pages, Mars 1989.
- PI 463 **ELEMENTS FINIS C^1 , POLYNOMIAUX DE DEGRE QUATRE PAR TRIANGLE, DANS UNE TRIANGULATION FORMEE DE TRIANGLES EQUILATERAUX**
Michel CROUZEIX, Miloud SADKANE
26 Pages, Mars 1989.

