

IRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
IRIA-SOPHIA ANTIPOLIS

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105

78153 Le Chesnay Cedex
France

Tél. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1033

Programme 7

RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES POUR UN FLUIDE COMPRESSIBLE EN MAILLAGE TRIANGULAIRE

Loula FEZOU
Stéphane LANTERI
Bernard LARROUTUROU
Christian OLIVIER

Mai 1989



* R R - 1 0 3 3 *

RESOLUTION NUMERIQUE DES
EQUATIONS DE NAVIER-STOKES
POUR UN FLUIDE COMPRESSIBLE EN
MALLAGE TRIANGULAIRE

Loula FEZOU
Stéphane LANTERI
Bernard LARROUTUROU
Christian OLIVIER

INRIA Sophia-Antipolis
2004, route des Lucioles
06560 VALBONNE (FRANCE)

**RESOLUTION NUMERIQUE
DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES
POUR UN FLUIDE COMPRESSIBLE
EN MAILLAGE TRIANGULAIRE**

L. FEZOU, S. LANTERI, B. LARROUTUROU et C. OLIVIER

INRIA, Sophia-Antipolis, 06560 VALBONNE, FRANCE

RESUME: Nous présentons une méthode de résolution des équations de Navier-Stokes décrivant l'écoulement bidimensionnel d'un fluide compressible. Cette méthode combine une approximation décentrée de type volumes finis pour les termes non visqueux et une approximation centrée de type éléments finis pour les termes visqueux, et opère sur une triangulation du domaine de calcul qui peut être non structurée. Après avoir exposé en détail les méthodes d'approximation spatiale et d'intégration temporelle utilisées, nous étudions sur un problème modèle de convection-diffusion la stabilité des schémas obtenus. Enfin, nous présentons les résultats de quelques expériences numériques portant sur des écoulements internes ou externes, subsoniques ou transsoniques.

NUMERICAL SOLUTION
OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS
FOR A COMPRESSIBLE FLUID
ON A TRIANGULAR MESH

L. FEZOU, S. LANTERI, B. LARROUTUROU and C. OLIVIER

INRIA, Sophia-Antipolis, 06560 VALBONNE, FRANCE

ABSTRACT: We present a method for solving the two-dimensional compressible Navier-Stokes equations. This method combines an upwind finite-volume approximation for the inviscid terms and a centered finite-element approximation for the viscous terms, and operates on a possibly unstructured triangulation of the flow domain. After having described in detail the spatial and temporal approximation, we study on a model convection-diffusion problem the stability of the resulting schemes. We lastly show the results of several numerical experiments concerning an external transonic flow and an internal subsonic flow.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Résolution des équations de Navier-Stokes	4
2.1	Les équations de Navier-Stokes	4
2.2	Approximation spatiale	8
2.2.1	Formulation éléments/volumes finis	8
2.2.2	Calcul des flux convectifs	10
2.2.3	Calcul des flux visqueux	13
2.3	Traitement des conditions aux limites	14
2.3.1	Traitement de la paroi	14
2.3.2	Frontières amont et aval	15
2.4	Méthodes de résolution	18
2.4.1	Schéma explicite	18
2.4.2	Schéma implicite	18
2.4.3	Stockage matriciel	23
3	Stabilité linéaire	25
3.1	Schémas explicites	25
3.1.1	Schéma décentré d'ordre 1	26
3.1.2	Schéma décentré d'ordre 2	27
3.2	Schémas implicites	37
3.2.1	Stabilité linéaire	37
3.2.2	Etude pour les grands pas de temps	38
3.3	Résolution des systèmes linéaires	43
3.3.1	Convergence des méthodes de résolution	44
3.3.2	Etude pour les grands pas de temps	46
4	Résultats numériques	53
4.1	Ecoulement transsonique autour d'un profil	53
4.2	Ecoulement subsonique interne	63
5	Annexe	73
5.1	Calcul des matrices Jacobiennes des flux visqueux	73
5.2	Calcul du pas de temps	78
	Bibliographie	79

1 Introduction

Cette étude est consacrée à la simulation numérique d'écoulements de fluides compressibles visqueux modélisés par le système des équations de Navier-Stokes. Ce modèle constitue en effet un outil mathématique de base particulièrement bien adapté à l'étude théorique et à la prédiction des phénomènes que présentent les situations classiques de l'aérodynamique actuelle. Dans sa formulation complète, il permet entre autres une approche globale au problème d'interaction fluide parfait/fluide visqueux à grands nombres de Reynolds. Toutefois il existe des formes simplifiées de ces équations (équations de la couche limite, équations parabolisées ...) qui sont plus simples et mieux adaptées à un certain nombre d'écoulements. Nous nous placerons ici dans le cas général où nous ne ferons aucune hypothèse sur la nature de l'écoulement.

Notons enfin que ce modèle mathématique ne peut être associé en pratique qu'à l'étude d'écoulements laminaires. En effet, même si le système des équations de Navier-Stokes reste valide dans le cas des écoulements turbulents, les échelles de temps et d'espace qui caractérisent ces derniers ne peuvent être pris en compte dans le cas d'une géométrie représentative d'un écoulement réel, même en utilisant les plus fines discrétisations en temps et en espace qu'autorisent les plus puissants ordinateurs disponibles à l'heure actuelle. Il est alors nécessaire de procéder à une étape de moyenne temporelle des équations et à l'introduction de modèles mathématiques supplémentaires (modèles de turbulence).

* * *

Le travail que nous présentons est divisé en trois parties. On étudie tout d'abord des méthodes de résolution des équations de Navier-Stokes, en s'intéressant au calcul de solutions stationnaires obtenues par une approche instationnaire. On présente deux méthodes d'intégration en temps dont on comparera l'efficacité. La première méthode repose sur une discrétisation explicite des équations; elle est la plus simple à implémenter, mais son utilisation est conditionnée par un critère de stabilité du type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) qui limite la valeur du pas de temps. Dans le but d'obtenir une méthode de résolution plus efficace, on envisage ensuite une version implicite du schéma précédent,

en s'inspirant des travaux réalisés par Stoufflet [32], Fezoui et Stoufflet [10] et Stève [30] dans le cas des équations d'Euler. Le schéma obtenu permet l'utilisation de grands pas de temps; en revanche son implémentation nécessite le développement d'algorithmes plus complexes.

Pour les deux schémas d'intégration temporelle, l'approximation spatiale est réalisée par une méthode mixte éléments finis/volumes finis sur un maillage triangulaire non structuré. Les flux convectifs sont discrétisés à l'aide d'un schéma décentré utilisant un solveur de Riemann approché, et les flux diffusifs sont évalués à l'aide d'un schéma centré (éléments finis P1).

Dans une seconde partie on procède à des études de stabilité linéaire. On étudie tout d'abord les schémas d'intégration en temps, en considérant l'équation modèle monodimensionnelle de convection-diffusion. On détermine ainsi une procédure de calcul du pas de temps dont on présente une généralisation au système des équations de Navier-Stokes. Des travaux similaires ont été effectués par Paolucci et Chenoweth [23]. On s'intéresse ensuite aux méthodes de résolution des systèmes linéaires résolus à chaque pas de temps dans la formulation implicite, pour lesquelles on étudie les propriétés du facteur d'amplification pour de grands pas de temps. Dans cette partie on fera régulièrement référence aux résultats obtenus par Stève [30] dans le cas de la convection pure.

La troisième partie est consacrée à la présentation de résultats numériques pour un écoulement externe transsonique et un écoulement interne subsonique.

* * *

De nombreuses études ont déjà été réalisées dans ce domaine de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, donnant lieu à des algorithmes de résolution fiables et efficaces, reposant cependant en majeure partie sur l'utilisation de maillages structurés. Citons à titre d'exemple les travaux suivants:

Schémas explicites:

McCormack et Lomax [20] présentent une méthode de résolution d'écoulements à grands nombres de Reynolds avec interaction choc/couche limite, en utilisant le système complet des équations de Navier-Stokes. Bristeau *et al.* [4], [5] et [6] utilisent des méthodes d'éléments finis couplées à des méthodes itératives du

type gradient conjugué pour la résolution des systèmes linéaires. Thommen [34] généralise le schéma explicite de Lax-Wendroff au cas visqueux.

Schémas implicites:

Dans les références qui suivent, les maillages utilisés sont structurés, la discrétisation spatiale reposant en général sur une méthode du type volumes finis. McCormack [17] et [18] présente deux extensions implicites de son précédent schéma explicite. Beam et Warming [3] construisent un schéma précis au second ordre en temps et utilisent une méthode de factorisation approchée de la matrice implicite. Thomas et Walters [33] adoptent un schéma décentré pour les flux convectifs et des méthodes de relaxation pour la résolution du système linéaire résultant. Hollanders, Lerat et Peyret [12] résolvent les équations tridimensionnelles en adoptant une technique A.D.I pour la factorisation de la métrique. La solution est avancée en temps en deux étapes. Dans une première phase (prédicteur explicite) une solution provisoire est calculée à l'aide d'un schéma généralisant le schéma centré de Thommen [34], et la phase de correction implicite conduit ensuite à la résolution de systèmes tri-diagonaux par blocs.

Plus récemment, Rostand et Stoufflet [28] présentent un schéma implicite sur des maillages non-structurés avec application à la simulation d'écoulements à grands nombres de Mach. Ils étudient notamment des techniques de limiteurs mieux appropriées aux calculs d'écoulements visqueux. Nous n'aborderons pas ce type de problème dans la suite de ce rapport, notre attention se portant sur des écoulements en régime subsonique ou légèrement transsonique.

On trouvera encore des comparaisons de méthodes numériques dans Peyret et Viviand [24], dans Hollanders et Viviand [13] et Marx [16]. Citons enfin Koren [14] et [15] qui adopte aussi des schémas décentrés pour les flux non visqueux mais utilise des techniques multi-grilles pour la résolution des équations stationnaires.

2 Résolution des équations de Navier-Stokes

2.1 Les équations de Navier-Stokes

Le système des équations de Navier-Stokes en deux dimensions d'espace s'écrit en formulation conservative:

$$(1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial R(W)}{\partial x} + \frac{\partial S(W)}{\partial y} \right),$$

pour (x, y) dans Ω , ouvert borné de \mathbb{R}^2 , de frontière $\partial\Omega = \Gamma$, et $t \geq 0$; $W(x, y, t)$ est une fonction vectorielle de \mathbb{R}^4 définie par:

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix},$$

ρ est la masse volumique, u et v sont les composantes du vecteur vitesse, et E est l'énergie totale par unité de volume.

$F(W)$ et $G(W)$ sont les fonctions de flux convectifs, données par:

$$F(W) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad G(W) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix},$$

où p est la pression donnée par la loi d'état des gaz parfaits:

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho(u^2 + v^2) \right),$$

γ étant le rapport des chaleurs spécifiques, supposé constant ($\gamma = 1.4$ pour un gaz parfait diatomique).

$R(W)$ et $S(W)$ sont les fonctions de flux diffusifs, qui s'écrivent:

$$R(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + \frac{\gamma k}{Pr} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad S(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + \frac{\gamma k}{Pr} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Dans ces expressions, ε est l'énergie interne spécifique:

$$\varepsilon = \frac{E}{\rho} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = C_v T,$$

T désigne la température, C_v la chaleur spécifique à volume constant; τ_{xx} , τ_{xy} et τ_{yy} sont les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \tau_{yy} &= \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

De plus, μ et k sont respectivement un coefficient de viscosité et un coefficient de conductivité thermique normalisés; ces coefficients sont en général des fonctions de la température (par exemple $\mu(T)$ donnée par la loi de Sutherland [1]), mais nous considérerons ici ces deux coefficients comme constants (et donc égaux à 1 puisqu'ils sont normalisés).

Il apparaît dans les équations précédentes deux nombres sans dimension. Le premier est le nombre de Reynolds Re qui mesure l'importance des forces d'inertie par rapport aux forces de viscosité, donné par:

$$Re = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0},$$

où ρ_0 , U_0 , L_0 et μ_0 représentent respectivement une masse volumique, une vitesse, une longueur et un coefficient de viscosité caractéristiques de l'écoulement. Une seconde grandeur sans dimension est le nombre de Prandtl Pr qui ne fait intervenir que des caractéristiques physiques du fluide:

$$Pr = \frac{\mu_0 C_p}{k_0},$$

C_p étant le coefficient de chaleur spécifique à pression constante (C_p est supposé constant), et k_0 un coefficient de conductivité thermique représentatif.

Avant de décrire la méthode numérique utilisée pour résoudre le système (1), nous présentons quelques notations qui seront régulièrement utilisées dans la suite. En intégrant sur un volume fixe D , on obtient en appliquant la formule de Green:

$$\int_D (F(W)_x + G(W)_y) d\Omega = \int_{\partial D} (\eta_x F(W) + \eta_y G(W)) d\sigma,$$

où $\vec{\eta} = (\eta_x, \eta_y)$ est la normale extérieure unitaire sur ∂D . Ceci nous amène à définir un nouveau flux $\mathcal{F}(W)$ à partir des flux convectifs $F(W)$ et $G(W)$ par la combinaison linéaire suivante:

$$\mathcal{F}(W, \vec{\eta}) = \eta_x F(W) + \eta_y G(W).$$

Une démarche similaire pour les flux visqueux donne:

$$\mathcal{V}(W, \vec{\eta}) = \eta_x R(W) + \eta_y S(W).$$

On associe au flux $\mathcal{F}(W, \vec{\eta})$ la matrice Jacobienne définie par:

$$(2) \quad \mathcal{A}(W, \vec{\eta}) = \eta_x \frac{\partial F(W)}{\partial W} + \eta_y \frac{\partial G(W)}{\partial W}.$$

Rappelons ici que le système des équations d'Euler, obtenu en éliminant les flux visqueux dans le système (1) ("Re = +∞"), est de nature hyperbolique: la matrice Jacobienne $\mathcal{A}(W, \vec{\eta})$ est diagonalisable pour tout couple de réels (η_x, η_y) et pour tout vecteur W . Les valeurs propres de \mathcal{A} sont réelles et s'écrivent:

$$\lambda_1(W, \vec{\eta}) = \lambda_2(W, \vec{\eta}) = V_{\perp} = \vec{V} \cdot \vec{\eta},$$

$$\lambda_3(W, \vec{\eta}) = \lambda_1(W, \vec{\eta}) + c \|\vec{\eta}\|,$$

$$\lambda_4(W, \vec{\eta}) = \lambda_1(W, \vec{\eta}) - c \|\vec{\eta}\|,$$

où c est la vitesse locale du son $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$.

La diagonalisation de la matrice $\mathcal{A}(W, \vec{\eta})$ s'écrit:

$$\mathcal{A}(W, \vec{\eta}) = T(W, \vec{\eta}) \Lambda(W, \vec{\eta}) T^{-1}(W, \vec{\eta})$$

$$\Lambda(W, \vec{\eta}) = \text{Diag}(\lambda_k) \quad k = 1, 4 .$$

Nous utiliserons dans la suite la décomposition suivante:

$$\mathcal{A}^\pm(W, \vec{\eta}) = T(W, \vec{\eta}) \Lambda^\pm(W, \vec{\eta}) T^{-1}(W, \vec{\eta}) ,$$

$$\Lambda^\pm(W, \vec{\eta}) = \text{Diag}(\lambda_k^\pm) \quad k = 1, 4 ,$$

$$\lambda_k^+(W, \vec{\eta}) = \text{Max}(\lambda_k, 0) ,$$

$$\lambda_k^-(W, \vec{\eta}) = \text{Min}(\lambda_k, 0) .$$

2.2 Approximation spatiale

2.2.1 Formulation éléments/volumes finis

Le domaine d'étude $\bar{\Omega}$ est approché par un polygone $\bar{\Omega}_h$. La discrétisation spatiale repose sur une triangulation τ_h du domaine $\bar{\Omega}_h$

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{j=1}^{nt} T_j, \quad T_j \in \tau_h$$

où les triangles T_j sont les éléments de la triangulation (nt est le nombre d'éléments de τ_h). A chaque sommet a_i , $i = 1, \dots, ns$ (ns est le nombre total de noeuds du maillage), on associe une cellule C_i . La cellule C_i se construit en joignant successivement les centres de gravité des triangles contenant le noeud a_i et les milieux des segments issus de a_i (voir Figure 1). L'ensemble des cellules forme alors un autre recouvrement de $\bar{\Omega}_h$:

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{i=1}^{ns} C_i .$$

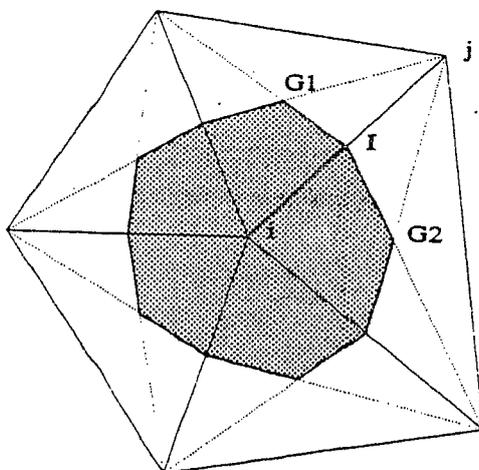


Figure 1: Cellule d'intégration C_i

Nous recherchons les solutions faibles du problème continu (1) des équations de Navier-Stokes. Nous approchons le problème continu défini sur $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+$ par le

problème discret défini sur $\bar{\Omega}_h \times [0, T]$. La formulation variationnelle déduite de (1) s'écrit:

$$(3) \quad \iint_{S_i} (W_t + F(W)_x + G(W)_y) \Psi_i dx dy = \frac{1}{Re} \iint_{S_i} (R(W)_x + S(W)_y) \Psi_i dx dy ,$$

où S_i est le support de la fonction test Ψ_i . La formulation mixte volumes/éléments finis apparaît ici avec le choix des fonctions tests Ψ_i suivant les flux intégrés:

· pour les flux convectifs, nous utilisons une formulation volumes finis, pour laquelle la fonction test est la fonction caractéristique de la cellule de contrôle:

$$\Psi_i = \chi(C_i) , \quad S_i = C_i ;$$

· pour les flux diffusifs, nous utilisons par contre une formulation éléments finis pour laquelle la fonction test est la fonction de base P_1 du sommet a_i :

$$\Psi_i = \varphi_i , \quad S_i = \bigcup_{T: a_i \in T} T .$$

Rappelons qu'à chaque sommet a_i on associe une fonction de base φ_i qui est continue, linéaire sur chaque élément, et vérifie:

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij} .$$

Une fonction quelconque P_1 est alors interpolée sur un triangle T par:

$$f(x, y) |_T = \sum_{a_k \in T} f(a_k) \varphi_k |_T(x, y) ,$$

et le gradient de cette fonction est donné par

$$\vec{\nabla} f(x, y) |_T = \sum_{a_k \in T} f(a_k) \vec{\nabla} \varphi_k |_T(x, y) = \text{Constante} .$$

En introduisant les fonctions tests et les supports correspondants dans (3) et en appliquant la formule de Green on obtient:

$$(4) \quad \begin{aligned} & \text{aire}(C_i) \frac{\delta W_i^{n+1}}{\Delta t^n} + \int_{\partial C_i} \mathcal{F}(W, \bar{\eta}) d\sigma = \\ & -\frac{1}{Re} \sum_{T, a_i \in T} \iint_T \left(R \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + S \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \mathcal{V}(W, \bar{\eta}) \varphi_i d\sigma, \end{aligned}$$

où on a noté:

$$\begin{aligned} W_i^n &= W(x_i, y_i, t^n), \\ \delta W_i^{n+1} &= W_i^{n+1} - W_i^n. \end{aligned}$$

2.2.2 Calcul des flux convectifs

Le calcul des flux convectifs se décompose en deux parties: les flux dits internes calculés aux frontières communes à deux cellules, et les flux traduisant les échanges avec le milieu extérieur aux frontières de $\bar{\Omega}_h$:

$$\int_{\partial C_i} \mathcal{F}(W, \bar{\eta}) d\sigma = \sum_{j \in K(i)} \int_{\partial C_{ij}} \mathcal{F}(W, \bar{\nu}) d\sigma + \int_{\partial C_i \cap \Gamma_h} \mathcal{F}(W, \bar{\eta}) d\sigma,$$

où $K(i)$ est l'ensemble des sommets voisins du sommet a_i , $\Gamma_h = \partial\Omega_h$, et $\partial C_{ij} = \partial C_i \cap \partial C_j = [G_{1,ij}, I_{ij}] \cup [I_{ij}, G_{2,ij}]$ (voir Figure 2).

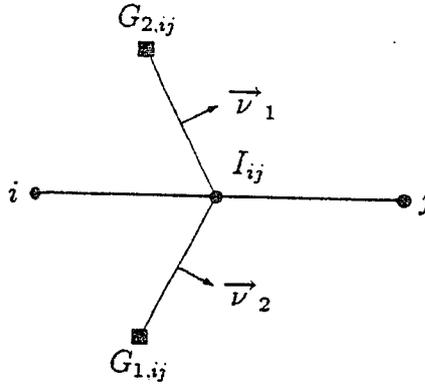


Figure 2: Portion d'intégration entre deux cellules

Les flux internes sont calculés à partir d'un schéma décentré: on évalue le flux à travers ∂C_{ij} en utilisant une fonction de flux numérique Φ :

$$(5) \quad \int_{\partial C_{ij}} \mathcal{F}(W, \vec{v}) d\sigma = \Phi(W_i, W_j, \vec{v}_{ij}) ,$$

avec:

$$\vec{v}_{ij} = \int_{\partial C_{ij}} \vec{v} d\sigma .$$

L'expression générale de la fonction de flux numérique est donnée par:

$$(6) \quad \Phi(U, V, \vec{v}) = \frac{\mathcal{F}(U, \vec{v}) + \mathcal{F}(V, \vec{v})}{2} - d(U, V, \vec{v}) ,$$

dans laquelle $d(U, V, \vec{v})$ représente le terme de diffusion numérique (voir [11]). On utilise ici un schéma de Roe [27] qui s'écrit:

$$(7) \quad \Phi^R(U, V, \vec{v}) = \frac{\mathcal{F}(U, \vec{v}) + \mathcal{F}(V, \vec{v})}{2} - d^R(U, V, \vec{v}) ,$$

$$(8) \quad d^R(U, V, \vec{v}) = |\mathcal{R}(U, V, \vec{v})| \frac{(V - U)}{2} ,$$

où $\mathcal{R}(U, V, \vec{v})$ est appelée matrice de Roe. Par construction même, la matrice $\mathcal{R}(U, V, \vec{v})$ possède certaines propriétés (voir [27]) parmi lesquelles nous citerons la suivante:

$$(9) \quad \mathcal{R}(U, V, \vec{v})(U - V) = \mathcal{F}(U, \vec{v}) - \mathcal{F}(V, \vec{v}) ,$$

qui a certaines conséquences sur le schéma complet. En particulier, le schéma résout exactement les discontinuités stationnaires (voir [11]): en effet, si les états U et V sont séparés par une discontinuité stationnaire, les relations de Rankine-Hugoniot s'écrivent $\mathcal{F}(U, \vec{v}) = \mathcal{F}(V, \vec{v})$, et les relations (7)-(8)-(9) impliquent alors $d^R(U, V, \vec{v}) = 0$ et $\Phi(U, V, \vec{v}) = \mathcal{F}(U, \vec{v})$.

Le caractère faiblement diffusif de ce schéma est un avantage intéressant, notamment pour la simulation numérique d'un écoulement visqueux, où l'on peut s'attendre à ce que le schéma laisse agir la viscosité physique du fluide là où la viscosité numérique n'est pas nécessaire. Par contre ce schéma tend à ne pas faire de distinction entre onde de choc et onde de détente ou discontinuité de contact (en d'autres termes, la remarque précédente sur les discontinuités stationnaires s'applique aussi bien à une discontinuité entropique qu'à une discontinuité non admissible du point de vue du second principe de la thermodynamique), ce qui pose des problèmes dans certains cas.

La propriété (9) a une autre conséquence intéressante sur l'expression du schéma (6); on en déduit en effet les deux expressions simplifiées suivantes:

$$\Phi^R(U, V, \vec{v}) = \mathcal{F}(V, \vec{v}) - \mathcal{R}^+(U, V, \vec{v})(V - U),$$

ou encore

$$\Phi^R(U, V, \vec{v}) = \mathcal{F}(U, \vec{v}) + \mathcal{R}^-(U, V, \vec{v})(V - U),$$

ce qui fait de ce schéma l'un des plus simples et des moins coûteux à implémenter.

La matrice $\mathcal{R}(U, V, \vec{v})$ vérifiant (9) n'est pas unique; toutefois Roe propose une matrice \mathcal{R} faisant intervenir la matrice Jacobienne du flux $\mathcal{F}(W, \vec{v})$:

$$\mathcal{R}(U, V, \vec{v}) = \mathcal{A}(\bar{W}, \vec{v}),$$

où \bar{W} est la "moyenne de Roe" de U et V , définie par les relations suivantes:

$$U = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_1 u_1 \\ \rho_1 v_1 \\ E_1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \rho_2 \\ \rho_2 u_2 \\ \rho_2 v_2 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{W} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \bar{u} \\ \bar{\rho} \bar{v} \\ \bar{E} \end{pmatrix},$$

avec:

$$\bar{\rho} = \frac{\sqrt{\rho_1} \rho_1 + \sqrt{\rho_2} \rho_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}},$$

$$\bar{u} = \frac{\sqrt{\rho_1} u_1 + \sqrt{\rho_2} u_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}},$$

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{\rho_1} v_1 + \sqrt{\rho_2} v_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}},$$

$$\bar{H} = \frac{\sqrt{\rho_1} H_1 + \sqrt{\rho_2} H_2}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}},$$

$$H = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{u^2 + v^2}{2} \text{ étant l'enthalpie totale par unité de volume.}$$

Le schéma (5)-(7)-(8) est précis au premier ordre en espace. L'extension à l'ordre 2 est possible en utilisant une technique M.U.S.C.L ("Monotone Upwind Schemes for Conservation Laws"), introduite par Van Leer [36] et étendue au cas des éléments finis par Fezoui [9]. Pour augmenter la précision, on modifie les arguments de la fonction de flux numérique dans (5) en élevant l'ordre de l'interpolation de l'inconnue W : on utilise une solution linéaire par morceaux au lieu d'une solution constante par cellules, ce qui nécessite une approximation des gradients de la solution aux noeuds du maillage. De façon plus précise, (5) est remplacé par:

$$\int_{\partial C_{ij}} \mathcal{F}(W, \vec{v}) d\sigma = \Phi^R(W_{ij}, W_{ji}, \vec{v}_{ij}),$$

où W_{ij} et W_{ji} sont les états interpolés à la frontière entre les cellules C_i et C_j ($W_{ij} = [W]_{I_{ij}^-}$, $W_{ji} = [W]_{I_{ij}^+}$; voir Figure 3), donnés par:

$$W_{ij} = W_i + \frac{1}{2} \vec{\nabla} W_i \cdot a_i \bar{a}_j, \quad W_{ji} = W_j - \frac{1}{2} \vec{\nabla} W_j \cdot a_j \bar{a}_i,$$

$\vec{\nabla} W_i$ représentant le gradient évalué au noeud i en utilisant la moyenne suivante:

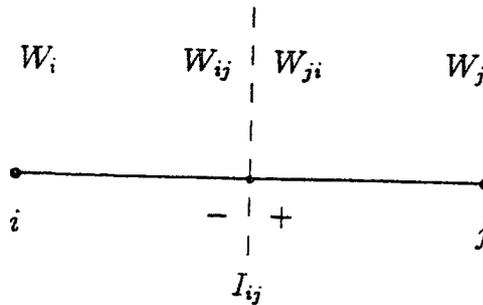
$$(10) \quad \begin{aligned} \vec{\nabla} W_i &= \frac{\int \int_{C_i} \vec{\nabla} W dx dy}{\int \int_{C_i} dx dy} \\ &= \frac{1}{\text{aire}(C_i)} \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{\text{aire}(T)}{3} \sum_{k=1}^3 W_{i,k} \vec{\nabla} \varphi_{i,k}(T). \end{aligned}$$

2.2.3 Calcul des flux visqueux

Une interpolation du type éléments finis P1 est utilisée pour l'approximation spatiale des flux visqueux; on obtient donc un schéma centré en supposant que les variables physiques ρ , u , v et p sont linéaires dans chaque triangle T :

$$\sum_{T, i \in T} \iint_T \left(R \frac{\partial \varphi_i^T}{\partial x} + S \frac{\partial \varphi_i^T}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{T, i \in T} \text{aire}(T) \left(R(T) \frac{\partial \varphi_i^T}{\partial x} + S(T) \frac{\partial \varphi_i^T}{\partial y} \right),$$

où les valeurs $R(T)$ et $S(T)$ sont constantes sur le triangle T (on utilise pour cela la valeur moyenne du vecteur vitesse \vec{V} sur chaque triangle, définie par $\vec{V}_T = \frac{1}{3} \sum_{a_i \in T} \vec{V}_i$).

Figure 3: Positions des états W_{ij} et W_{ji}

2.3 Traitement des conditions aux limites

On suppose par la suite que la frontière Γ_h du domaine Ω_h se décompose en Γ_b , qui représente une paroi solide, et Γ_∞ constitué des frontières amont et aval de l'écoulement:

$$\Gamma_h = \Gamma_b \cup \Gamma_\infty .$$

2.3.1 Traitement de la paroi

Sur la paroi Γ_b on applique les conditions suivantes:

- condition de Dirichlet homogène sur la vitesse (adhérence du fluide à la paroi):

$$\vec{V} = 0 ;$$

- condition de Dirichlet non homogène sur la température (paroi isotherme):

$$T = T_b .$$

Ces conditions sont prises en compte à travers une formulation forte pour laquelle deux méthodes sont utilisables:

Sans extrapolation de la pression:

Dans cette première méthode, on évalue d'abord pour un noeud a_i situé sur Γ_b la masse volumique ρ_i , en imposant nul le flux de masse à travers $\partial C_i \cap \Gamma_b$. L'énergie totale par unité de volume et la pression sont alors données par les relations:

$$E_i = \rho_i C_v T_b, \quad p_i = (\gamma - 1) E_i.$$

Avec extrapolation de la pression:

Cette méthode est proposée par Bristeau *et al* [4]). En portant la condition $\vec{V} = 0$ dans le système (1) on obtient l'expression suivante pour le gradient de pression à la paroi:

$$\vec{\nabla} p = \frac{\mu}{Re} \left(\Delta \vec{V} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} (\text{div} \vec{V}) \right).$$

Cette expression est discrétisée pour calculer la valeur de la pression à la paroi. On utilise pour cela les valeurs de la solution aux noeuds voisins de Γ_b (internes au domaine) sommets des triangles contenant les normales à Γ_b issues des noeuds situés sur la paroi. Une fois évaluée la pression p_i en un noeud a_i situé sur Γ_b , on calcule l'énergie totale par unité de volume et la masse volumique en utilisant la température de paroi T_b :

$$E_i = \frac{p_i}{\gamma - 1},$$

$$\rho_i = \frac{p_i}{(\gamma - 1) C_v T_b}.$$

L'utilisation de cette méthode implique la mise en oeuvre d'un algorithme compliqué; aussi nous ne l'avons utilisée que dans le cas où un schéma explicite est employé pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Dans ce cas, la solution est très comparable à celle que l'on obtient sans extrapolation de pression, pour un coût de calcul plus élevé.

2.3.2 Frontières amont et aval

De façon générale, on utilise la formulation faible (4) pour le traitement des termes de bord correspondant aux frontières amont et aval; autrement dit, on ne cherche pas à imposer les valeurs de la solution (ou de certaines variables) aux noeuds situés sur Γ_∞ , mais à évaluer les termes de flux à travers Γ_∞ (i.e. les intégrales sur $\partial C_i \cap \Gamma_\infty$).

Les flux à travers Γ_∞ sont calculés en supposant que:

$$\int_{\Gamma_{\infty}} \nu(W, \vec{\eta}) \Psi_i d\sigma = 0 ,$$

ce qui correspond à l'application de conditions aux limites du type Neumann pour les flux visqueux aux frontières amont et aval de l'écoulement. Cette simplification est notamment justifiée dans le cas d'un écoulement externe (si la frontière Γ_{∞} est située suffisamment loin de l'obstacle), où les effets visqueux sont négligeables loin des parois.

Il reste à évaluer l'intégrale des flux convectifs:

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_{\infty}} \mathcal{F}(W, \vec{\eta}) d\sigma .$$

On étend l'utilisation des techniques de décentrage aux frontières du domaine de la façon suivante: pour un sommet a_i situé sur une des frontières amont ou aval, on connaît la solution W_i ; on se donne de plus un champ W_{∞} représentatif de l'écoulement à l'extérieur du domaine Ω_h dans la région considérée. Le problème de Riemann défini par les valeurs W_i et W_{∞} est résolu en utilisant, comme pour les flux internes au domaine de calcul, un solveur de Riemann approché:

$$\int_{\partial C_i \cap \Gamma_{\infty}} \mathcal{F}(W, \vec{\eta}) d\sigma = \Phi(W_i, W_{\infty}, \vec{v}_{i\infty}) ,$$

avec:

$$\vec{v}_{i\infty} = \int_{\partial C_i \cap \Gamma_{\infty}} \vec{v} d\sigma .$$

On utilise ici pour simplifier une décomposition de flux de type Steger et Warming [29]: les échanges avec le milieu extérieur sont calculés à partir de l'une des deux expressions suivantes:

$$\Phi_1^{SW}(W_i, W_{\infty}, \vec{\eta}) = \mathcal{A}^+(W_i, \vec{\eta}) W_i + \mathcal{A}^-(W_{\infty}, \vec{\eta}) W_{\infty} ,$$

$$\Phi_2^{SW}(W_i, W_{\infty}, \vec{\eta}) = \mathcal{A}^+(W_i, \vec{\eta}) W_i + \mathcal{A}^-(W_i, \vec{\eta}) W_{\infty} .$$

Dans le cas d'un écoulement externe, un champ uniforme:

$$W_{\infty} = \begin{pmatrix} \rho_{\infty} \\ \rho_{\infty} u_{\infty} \\ \rho_{\infty} v_{\infty} \\ E_{\infty} \end{pmatrix} ,$$

avec:

$$\rho_{\infty} = 1 \quad , \quad \vec{V}_{\infty} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad p_{\infty} = \frac{\rho_{\infty}}{\gamma M_{\infty}^2} \quad ,$$

constitue une bonne approximation de la solution loin de l'obstacle. Cette méthode n'est cependant pas très adaptée au cas où les effets visqueux ne peuvent être négligés aux frontières, comme dans le cas d'un écoulement interne. On utilise alors un état W_{∞} non constant, avec en particulier un profil de vitesse non uniforme; par exemple, à la frontière aval d'un canal horizontal, on peut prendre:

$$\rho_{\infty} = 1 \quad , \quad u_{\infty} = U(y) \quad , \quad v_{\infty} = 0 \quad , \quad p_{\infty} = \frac{\rho_{\infty}}{\gamma M_{\infty}^2} \quad .$$

2.4 Méthodes de résolution

Rappelons que nous nous intéressons au calcul de solutions stationnaires obtenues par une approche instationnaire; en particulier la précision du schéma d'intégration en temps n'est pas un facteur important dans le choix de la méthode de résolution. On expose brièvement ci-dessous un schéma explicite du type Euler décentré, dont le principal atout est la facilité de mise en oeuvre, avant de présenter plus en détail des schémas numériques permettant l'utilisation de grands pas de temps.

2.4.1 Schéma explicite

Le schéma explicite d'Euler décentré s'écrit:

$$W_i^n = W(a_i, t^n),$$

$$\delta W_i^{n+1} = W_i^{n+1} - W_i^n, \quad \Delta t^n = t^{n+1} - t^n,$$

$$(11) \quad \begin{aligned} \text{aire}(C_i) \frac{\delta W_i^{n+1}}{\Delta t^n} + \sum_{j \in K(i)} \Phi_{ij}^n + \int_{\partial C_i \cap \partial \Gamma_\infty} \Phi^{SW}(W_i^n, W_\infty, \vec{\eta}) = \\ - \frac{1}{Re} \sum_{T: i \in T} \text{aire}(T) \left(R^n(T) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + S^n(T) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

La stabilité de ce schéma est conditionnée par un critère du type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) limitant les valeurs des pas de temps. On propose en annexe une procédure de calcul du pas de temps.

2.4.2 Schéma implicite

L'utilisation de schémas implicites (voir Beam et Warming [3], MacCormack [17] et Thomas et Walters [33]) conduit à des méthodes de résolution plus efficaces; en contrepartie leur implémentation sur calculateurs nécessite la mise au point d'algorithmes plus complexes.

Commençons par quelques rappels. Nous reprenons ici une étude présentée par Stève [30] dans le cas des équations d'Euler et nous l'étendons au cas d'un fluide visqueux. Pour des raisons de simplicité nous considérons le système des équations de Navier-Stokes dans le cas monodimensionnel:

$$(12) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + F(W)_x = \frac{1}{Re} R(W)_x .$$

Le schéma totalement implicite s'écrit après discrétisation temporelle:

$$\frac{W^{n+1} - W^n}{\Delta t^n} + G(W^{n+1}) = 0 ,$$

avec:

$$G(W) = G_1(W) + G_2(W) ,$$

où $G_1(W)$ approche le terme $F(W)_x$ et $G_2(W)$ le terme $-\frac{1}{Re}R(W)_x$.

La linéarisation du flux à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 1 en temps, lorsque $G(W)$ est une fonction différentiable, s'exprime par:

$$(13) \quad G(W^{n+1}) = G(W^n) + G'(W^n)(W^{n+1} - W^n) + O(\Delta t^2) ,$$

où $G'(W^n)$ désigne la matrice Jacobienne de $G(W^n)$. On obtient alors la version linéarisée du schéma implicite précédent sous la forme d'un delta-schéma:

$$(14) \quad \left(\frac{I}{\Delta t^n} + G'(W^n) \right) \delta W^{n+1} = -G(W^n) ,$$

pour lequel on note I la matrice identité et $\delta W^{n+1} = W^{n+1} - W^n$. Si le pas de temps est infiniment grand, l'algorithme (14) devient une méthode de Newton, qui a une convergence quadratique au voisinage de la solution du problème $G(W) = 0$:

$$G'(W^n) \delta W^{n+1} = -G(W^n) .$$

La précision spatiale de cette méthode appliquée à la résolution *stationnaire* de (12) est donnée par l'ordre de précision du calcul du flux $G(W)$. Toutefois lorsque le flux $G(W)$ n'est pas différentiable ou lorsque la différentiation de ce flux est complexe voire coûteuse, on introduit un opérateur linéaire que nous notons P^n qui approche la matrice Jacobienne $G'(W^n)$. Le système (14) s'écrit alors:

$$(15) \quad \left(\frac{I}{\Delta t^n} + P^n \right) \delta W^{n+1} = -G(W^n) .$$

On montrera dans la suite que l'introduction d'un tel opérateur approché s'imposera pour le calcul de la matrice Jacobienne des flux non visqueux; on obtiendra alors:

$$P^n = P_1^n + G_2'(W^n) .$$

Comme P^n est différent de la vraie matrice Jacobienne $G'(W^n)$, le schéma (15) pour Δt^n grand, n'est plus en général une méthode de Newton, mais une méthode itérative préconditionnée ou de Newton modifiée:

$$P^n \delta W^{n+1} = -G(W^n) .$$

En utilisant ces considérations, nous écrivons l'extension implicite du schéma (11) sous la forme:

$$(16) \quad \text{aire}(C_i) \frac{\delta W_i^{n+1}}{\Delta t^n} + \sum_{j \in K(i)} \bar{\Phi}_{ij}^{n+1} + \int_{\partial C_i \cap \partial \Gamma_\infty} \bar{\Phi}^{SW}(W_i^{n+1}, W_\infty, \bar{\eta}) = -\frac{1}{Re} \sum_{T, i \in T} \bar{\Upsilon}_{T, i}^{n+1} .$$

Le flux implicite convectif s'écrit:

$$\bar{\Phi}_{ij}^{n+1} = \bar{\Phi}(W_i^n, W_j^n, W_i^{n+1}, W_j^{n+1}, \bar{v}_{ij})$$

avec l'expression suivante de $\bar{\Phi}$, basée sur un développement de Taylor à l'ordre 1 en temps:

$$(17) \quad \bar{\Phi}(U, V, W, Z, \bar{v}) = \Phi(U, V, \bar{v}) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right) (W - U) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial V} \right) (Z - V) ,$$

où $\Phi(U, V, \bar{v})$ est la fonction de flux numérique utilisée pour le schéma décentré explicite. On peut simplifier cette expression dans le cas où la fonction de flux numérique s'écrit sous la forme:

$$\Phi(U, V, \bar{v}) = H_1(U, V, \bar{v})U + H_2(U, V, \bar{v})V ;$$

en particulier, dans le cas du schéma de Roe on peut écrire:

$$H_1(U, V, \bar{v}) = \mathcal{A}^+(\bar{W}, \bar{v}) ,$$

$$H_2(U, V, \bar{v}) = \mathcal{A}(V, \bar{v}) - \mathcal{A}^+(\bar{W}, \bar{v}) ,$$

\bar{W} désignant encore la moyenne de Roe de U et V . De la même façon, le schéma de Steger et Warming utilisé pour calculer les termes de bord conduit à:

$$H_1(U, V, \bar{\eta}) = \mathcal{A}^+(U, \bar{\eta}) ,$$

$$H_2(U, V, \bar{\eta}) = \mathcal{A}^-(V, \bar{\eta}) .$$

Pour calculer les dérivées partielles du flux $\Phi(U, V, \bar{v})$ qui interviennent dans la linéarisation ci-dessus, nous procédons à l'étape de simplification suivante (qui s'avère nécessaire puisque la fonction de flux numérique de Roe n'est pas différentiable):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U} \simeq H_1(U, V, \bar{v}) , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial V} \simeq H_2(U, V, \bar{v}) .$$

Finalement, la linéarisation des flux convectifs s'écrit:

$$(18) \quad \begin{aligned} \bar{\Phi}_{ij}^{n+1} &= \Phi(W_i^n, W_j^n, \bar{v}_{ij}) \\ &+ H_1(W_i^n, W_j^n, \bar{v}_{ij}) (W_i^{n+1} - W_i^n) + \\ &+ H_2(W_i^n, W_j^n, \bar{v}_{ij}) (W_j^{n+1} - W_j^n) . \end{aligned}$$

Une démarche similaire conduit à la linéarisation des flux visqueux. Toutefois, aucune étape de simplification n'est nécessaire car le calcul des matrices Jacobiennes intervenant dans le développement de Taylor est immédiat. On obtient:

$$\hat{\Upsilon}_{T,i}^{n+1} = \hat{\Upsilon}_{T,i} (W_{k1}^n, W_{k2}^n, W_{k3}^n, W_{k1}^{n+1}, W_{k2}^{n+1}, W_{k3}^{n+1}) ,$$

où $k1, k2$ et $k3$ sont les sommets du triangle T , et:

$$(19) \quad \begin{aligned} \hat{\Upsilon}_{T,i}(U, V, W, X, Y, Z) &= \Upsilon_{T,i}(U, V, W) + \\ &\left(\frac{\partial \Upsilon_{T,i}}{\partial U} \right) (X - U) + \\ &\left(\frac{\partial \Upsilon_{T,i}}{\partial V} \right) (Y - V) + \\ &\left(\frac{\partial \Upsilon_{T,i}}{\partial W} \right) (Z - W) , \end{aligned}$$

$\Upsilon_{T,i}(U, V, W)$ étant le terme intervenant dans le schéma centré explicite (11):

$$\Upsilon_{T,i}(U,V,W) = \text{aire}(T) \left(R(U,V,W) \frac{\partial \varphi_i|_T}{\partial x} + S(U,V,W) \frac{\partial \varphi_i|_T}{\partial y} \right).$$

La linéarisation du flux visqueux s'écrit donc:

$$(20) \quad \tilde{\Upsilon}_{T,i}^{n+1} = \Upsilon_{T,i}^n + \left(\frac{\partial \Upsilon_{T,i}}{\partial W_i} \right) \delta W_i^{n+1} + \sum_{k \in T, k \neq i} \left(\frac{\partial \Upsilon_{T,i}}{\partial W_k} \right) \delta W_k^{n+1}.$$

L'algorithme (15) conduit à la résolution d'un système linéaire, ce que l'on réalise en deux étapes (on note $\sigma_i^n = \frac{\Delta t^n}{\text{aire}(C_i)}$):

Phase "physique" ou explicite:

On calcule ici le second membre $\delta \hat{W}_i = -G(W^n)$ du système à résoudre. On rappelle que l'ordre de précision spatiale utilisé pour le calcul des flux explicites donne la précision de la solution stationnaire:

$$(21) \quad \delta \hat{W}_i = - \left(\sum_{j \in K(i)} \Phi_{ij}^n + \int_{\partial C_i \cap \partial \Gamma_\infty} \Phi^{SW}(W_i^n, W_\infty, \bar{\eta}) + \frac{1}{Re} \sum_{T, i \in T} \Upsilon_{T,i}^n \right),$$

Phase "mathématique" ou implicite:

Dans un premier temps on construit la matrice implicite, les flux convectifs étant calculés ici à l'aide d'un schéma précis au premier ordre, ce qui est plus simple et facilite la résolution du système linéaire (propriété de dominance diagonale, voir chapitre 3 ci-dessous). On obtient alors le système $M(W^n) \delta W^{n+1} = \delta \hat{W}$ que l'on résout à l'aide d'une méthode de relaxation du type Gauss-Seidel ou Jacobi. La matrice $M(W^n)$ est formée de blocs 4×4 ; la ligne i de ce système s'écrit:

$$D_i^n \delta W_i^{n+1} + \sum_{j \in K(i)} E_{ij}^n \delta W_j^{n+1} + \sum_{T, i \in T} \sum_{k, k \neq i} F_{ik}^n \delta W_k^{n+1} = \delta \hat{W}_i,$$

avec:

$$(22) \quad D_i^n = \sigma_i^n I + \sum_{j \in K(i)} H_{1,ij}^n + \int_{\partial C_i \cap \partial \Gamma_\infty} \mathcal{A}^+(W_i^n, \bar{\eta}) + \frac{1}{Re} \sum_{T, i \in T} \left(\frac{\partial \Upsilon_{T,i}^n}{\partial W_i} \right),$$

pour le bloc 4×4 diagonal, et:

$$E_{ij}^n = H_{2,ij}^n \quad , \quad F_{ik}^n = \frac{1}{Re} \sum_{T,i \in T, k \in T} \left(\frac{\partial \Upsilon_{T,i}}{\partial W_k} \right) ,$$

pour les blocs extra-diagonaux. Une fois résolu le système matriciel, on obtient W^{n+1} par:

$$W^{n+1} = W^n + \delta W^{n+1} .$$

2.4.3 Stockage matriciel

Nous étudions plus particulièrement dans cette partie le stockage de la matrice implicite $M(W^n)$. Remarquons tout d'abord qu'à l'inverse de celles construites en utilisant un maillage structuré, la matrice que nous obtenons n'a pas de structure particulière. Elle peut toutefois être qualifiée de creuse puisque le nombre de voisins d'un sommet a_i est en général faible (mais variable). On envisage donc un stockage minimal (stockage morse) de $M(W^n)$ qui se répartit comme suit: les blocs diagonaux sont stockés par noeuds, et les blocs extra-diagonaux sont stockés par segment.

Ce dernier choix présente plusieurs avantages. D'une part il permet d'obtenir le stockage minimal (des estimations de ce dernier peuvent être trouvées dans Stève [30] et [31]) et, d'autre part, il est particulièrement bien adapté à la technique d'assemblage des flux non visqueux. En effet ces derniers sont calculés par segment ce qui diminue le coût global puisque l'on peut écrire:

$$\Phi(W_j, W_i, \vec{v}_{ji}) = -\Phi(W_i, W_j, \vec{v}_{ij}) .$$

Toutefois les flux visqueux sont assemblés par triangle (technique caractéristique d'une méthode d'éléments finis). C'est pourquoi il est nécessaire d'adapter l'algorithme précédent à deux phases au stockage utilisé en pratique. Remarquons qu'il faut pour cela distinguer les segments internes des segments sur le bord du domaine $\bar{\Omega}_h$, auxquels est associé un seul triangle. Les contributions matricielles provenant de l'assemblage des flux visqueux sont alors modifiées comme suit:

Pour un segment $[a_i, a_j]$ interne à Ω_h , on appelle T_{ij} et T_{ji} les deux triangles séparés par le segment $[a_i, a_j]$, et on définit:

$$d_i^n = \frac{1}{2} \sum_{T \in \{T_{ij}, T_{ji}\}} \left(\frac{\partial \Upsilon_i}{\partial W_i} \right),$$

$$e_{ij}^n = \sum_{T \in \{T_{ij}, T_{ji}\}} \left(\frac{\partial \Upsilon_i}{\partial W_j} \right).$$

Pour un segment $[a_i, a_j]$ situé sur Γ_h , on pose:

$$d_i^n = \frac{\partial \Upsilon_i}{\partial W_i}.$$

L'algorithme à deux phases est alors redéfini de la façon suivante:

Phase physique ou explicite:

$$(23) \quad \delta \hat{W}_i = - \left(\sum_{j \in K(i)} \Phi_{ij}^n + \int_{\partial C_i \cap \partial \Gamma_\infty} \Phi(W_i^n, W_\infty, \bar{\eta}) + \frac{1}{Re} \sum_{T, i \in T} \Upsilon_i^n \right);$$

Phase mathématique:

$$(24) \quad D_i^n \delta W_i^{n+1} + \sum_{j \in K(i)} E_{ij}^n \delta W_j^{n+1} = \delta \hat{W}_i,$$

avec pour le bloc 4×4 diagonal:

$$D_i^n = \sigma I + \sum_{j \in K(i)} \left(H_{1,ij}^n + \frac{1}{Re} d_i^n \right),$$

et pour les blocs 4×4 extra-diagonaux:

$$E_{ij}^n = H_{2,ij}^n + \frac{1}{Re} e_{ij}^n.$$

3 Stabilité linéaire

L'objet de cette partie est de se donner une idée de la stabilité et de la convergence des schémas explicites et implicites décrits précédemment, en étudiant leur application au problème modèle de l'équation d'advection-diffusion monodimensionnelle:

$$(25) \quad u_t + au_x = \mu u_{xx} ,$$

où a représente la vitesse de convection et μ le coefficient de diffusion ou de viscosité.

Dans un premier temps, nous supposons $a > 0$. Nous supposons pour simplifier que la solution u de (25) est périodique de période 2π , ce qui permettra d'utiliser une décomposition en modes de Fourier pour analyser les schémas numériques.

Nous étudierons d'abord la stabilité linéaire des schémas explicites précis à l'ordre un et deux en espace.

3.1 Schémas explicites

On note x_j , $j \in [0, N]$ les noeuds du maillage, Δx le pas d'espace. On pose en chaque point x_j , $u(x_j) = u_j$. On définit la cellule C_j comme l'intervalle $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ avec $x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}$. Pour faire clairement apparaître le lien avec les schémas étudiés dans la section précédente, nous considérons les schémas explicites de la forme:

$$(26) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (\Phi_{j+\frac{1}{2}}^n - \Phi_{j-\frac{1}{2}}^n) = \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} ,$$

où le second membre est une approximation d'ordre deux du terme de diffusion, et où:

$$\Phi_{j+\frac{1}{2}}^n = \Phi \left(u_{j+\frac{1}{2}}^-, u_{j+\frac{1}{2}}^+ \right) , \quad \Phi_{j-\frac{1}{2}}^n = \Phi \left(u_{j-\frac{1}{2}}^-, u_{j-\frac{1}{2}}^+ \right) .$$

Φ est la fonction de flux numérique, qui s'écrit:

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2} (f(u) + f(v) - d(u, v)) ,$$

où $f(u) = au$ est la fonction de flux et où $d(u, v)$ est le terme de diffusion numérique. Un schéma est dit décentré si l'on peut écrire (voir [11]):

$$d(u, v) = \left| f' \left(\frac{u+v}{2} \right) \right| (v-u) + o(|v-u|) .$$

Dans le cas qui nous intéresse ici où f est linéaire, toutes les fonctions de flux décentrées s'écrivent:

$$\Phi(u, v) = au , \quad d(u, v) = a(v-u) .$$

3.1.1 Schéma décentré d'ordre 1

On obtient un schéma précis au premier ordre en espace en supposant u_j constant sur la cellule C_j pour le calcul des flux convectifs. Dans ce cas on peut écrire:

$$\Phi_{j+\frac{1}{2}}^n = \Phi(u_j, u_{j+1}) , \quad \Phi_{j-\frac{1}{2}}^n = \Phi(u_{j-1}, u_j) ,$$

ce qui conduit au schéma suivant:

$$(27) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} .$$

L'étude de stabilité du schéma (27) est réalisée au moyen de l'analyse de Fourier. On note u_j^n les modes de Fourier:

$$u_j^n = \exp(ij\theta_k) ,$$

avec $i^2 = -1$ et:

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{N+1} \quad \left(k = 0, \dots, N \text{ et } N = \frac{2\pi}{\Delta x} \right) .$$

Le facteur d'amplification $g_{\theta_k}(\Delta t)$ est alors défini par les relations:

$$u_j^{n+1} = g_{\theta_k}(\Delta t) u_j^n .$$

Nous dirons que le schéma est stable si la condition de von Neumann est vérifiée:

$$\max_{k \in [0; N]} |g_{\theta_k}(\Delta t)| \leq 1 .$$

On obtient, après substitution, la valeur du facteur d'amplification pour le schéma (27):

$$g_{\theta_k}(\Delta t) = 1 - \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} + \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x^2} \right) (1 - \cos \theta_k) - i \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin \theta_k ,$$

la condition de stabilité s'écrit après calculs:

$$\Delta t \leq \frac{2\Delta x \left(a + \frac{2\mu}{\Delta x} \right)}{\cos \theta_k \left(a^2 - \left(a + \frac{2\mu}{\Delta x} \right)^2 \right) + a^2 + \left(a + \frac{2\mu}{\Delta x} \right)^2}.$$

Puisque l'on cherche à obtenir une majoration du pas de temps valable pour tous les modes de Fourier, on s'intéresse au minimum du second membre de l'inégalité précédente; ce minimum est atteint lorsque $\cos \theta_k = -1$ car le coefficient de $\cos \theta_k$ au dénominateur est toujours négatif. Le schéma (27) est donc stable sous la condition:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a + \frac{2\mu}{\Delta x}}.$$

Remarque:

En posant $\mu = 0$ (resp. $a = 0$) on retrouve la condition de stabilité habituelle pour l'équation de convection (resp. de la chaleur):

$$\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2},$$

3.1.2 Schéma décentré d'ordre 2

On peut augmenter la précision de l'approximation spatiale du terme de convection en interpolant linéairement u sur la cellule C_j . On calcule ainsi des valeurs de u aux frontières des cellules par les formules:

$$u_{j+\frac{1}{2}}^- = u_j + \frac{\Delta x}{2} P_{j+\frac{1}{2}}^-, \quad u_{j+\frac{1}{2}}^+ = u_{j+1} - \frac{\Delta x}{2} P_{j+\frac{1}{2}}^+,$$

$$u_{j-\frac{1}{2}}^- = u_{j-1} + \frac{\Delta x}{2} P_{j-\frac{1}{2}}^-, \quad u_{j-\frac{1}{2}}^+ = u_j - \frac{\Delta x}{2} P_{j-\frac{1}{2}}^+.$$

où les pentes $P_{j+\frac{1}{2}}^-$ et $P_{j+\frac{1}{2}}^+$ sont données par des combinaisons de pentes centrées et décentrées:

$$P_{j+\frac{1}{2}}^- = (1 - \beta) \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \right) + \beta \left(\frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} \right),$$

$$P_{j+\frac{1}{2}}^+ = (1 - \beta) \left(\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \right) + \beta \left(\frac{u_{j+2} - u_{j+1}}{\Delta x} \right).$$

Par suite on en déduit:

$$(28) \quad \Phi_{j+\frac{1}{2}}^n - \Phi_{j-\frac{1}{2}}^n = \left((1 - \beta) a \delta^0 u_j + \beta a^+ \delta^- u_j + \beta a^- \delta^+ u_j \right),$$

expression dans laquelle on a noté $a^+ = \max(a, 0)$, $a^- = \min(a, 0)$, et défini les opérateurs suivants:

$$\begin{aligned} \delta^0 &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2}, && \text{opérateur centré,} \\ \delta^+ &= \frac{-u_{j+2}^n + 4u_{j+1}^n - 3u_j^n}{2}, && \text{opérateur décentré à droite,} \\ \delta^- &= \frac{3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2}, && \text{opérateur décentré à gauche;} \end{aligned}$$

Il faut remarquer ici que chacun des opérateurs $\frac{\delta^0}{\Delta x}$, $\frac{\delta^+}{\Delta x}$ et $\frac{\delta^-}{\Delta x}$ approche la dérivée première u_x avec une précision d'ordre 2. Dans (28), $\beta \in [0, 1]$ est un paramètre de décentrage qui permet d'utiliser pour le terme de convection plusieurs schémas, dont les plus connus sont:

$$(29) \quad \begin{aligned} \beta = 0 &: \text{ schéma centré,} \\ \beta = \frac{1}{3} &: \text{ schéma précis au troisième ordre,} \\ \beta = \frac{1}{2} &: \text{ schéma de Fromm,} \\ \beta = 1 &: \text{ schéma totalement décentré d'ordre 2.} \end{aligned}$$

L'étude de la stabilité linéaire du schéma explicite d'ordre 2 est faite ci-dessous en supposant encore que la vitesse de convection a est positive. Le schéma s'écrit alors:

$$(30) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{a}{\Delta x} \left((1 - \beta) \delta^0 u_j + \beta \delta^- u_j \right) = \mu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}.$$

On vérifie facilement que l'application directe des formules de la section 2.2.2. ci-dessus conduit pour l'équation de convection-diffusion (25) au schéma (30) avec $\beta = 0.5$.

Nous étudions comme précédemment la stabilité dans l^2 par la méthode de Fourier. Le facteur d'amplification $g_{\theta_\pm}(\Delta t)$ s'écrit:

$$g_{\theta_k}(\Delta t) = 1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \beta (1 - \cos \theta_k)^2 - \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x^2} (1 - \cos \theta_k) - i \frac{a\Delta t}{\Delta x} \sin \theta_k (1 + \beta (1 - \cos \theta_k)) .$$

Pour simplifier les notations, on posera dans la suite des calculs:

$$\nu = \frac{a\Delta t}{\Delta x} , \quad Re_{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\mu} , \quad Q = \frac{1}{Re_{\Delta x}} ,$$

($Re_{\Delta x}$ représente le nombre de Reynolds de maille), et:

$$y = 1 - \cos \theta_k , \quad s = \sin \theta_k \quad [\text{d'où } s^2 = y(2 - y)] .$$

Le facteur d'amplification $g_{\theta_k}(\Delta t)$ s'écrit alors plus simplement sous la forme:

$$g_{\theta_k}(\Delta t) = 1 - \nu (\beta y^2 + 2Qy + i s(1 + \beta y)) .$$

On peut exprimer la condition de stabilité en fonction du nombre de Courant-Friedrichs-Lewy ν ; cette condition s'écrit:

$$(31) \quad \nu \leq \frac{2(\beta y + 2Q)}{y(\beta y + 2Q)^2 + (2 - y)(1 + \beta y)^2} = F(y, \beta, Q) .$$

Puisque cette condition sur ν doit être vérifiée pour tous les modes de Fourier, cherchons dans un premier temps le minimum de la fonction F pour $y \in [0, 2]$, en considérant $\beta \in [0, 1]$ et $Q > 0$ comme fixés.

Proposition 1 : Le minimum de $F(y, \beta, Q)$ pour $y \in [0, 2]$ est toujours atteint soit en $y = 0$, soit en $y = 2$ (c'est-à-dire pour $\theta_k = 0$ ou $\theta_k = \pi$).

Démonstration:

Posons:

$$(32) \quad F(y, \beta, Q) = \frac{2\beta y + 4Q}{y^2(4\beta Q + 2\beta^2 - 2\beta) + y(4Q^2 + 4\beta - 1) + 2} = \frac{D(y)}{P(y)} .$$

La condition (31) est donc équivalente à:

$$(33) \quad \nu P(y) \leq D(y) .$$

On cherche donc à montrer que, dès que la parabole $z = \nu P(y)$ est sous la droite $z = D(y)$ en $y = 0$ et en $y = 2$, alors la parabole est sous la droite sur tout l'intervalle $[0, 2]$.

Tout d'abord, on peut remarquer que ce résultat est évident si $P''(y) \geq 0$, car P est alors convexe (voir Figure 4). Nous supposons donc $P'' < 0$.

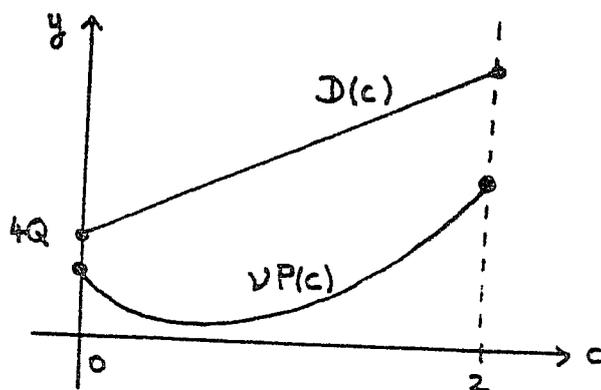


Figure 4

La condition de stabilité sur ν doit être vérifiée pour tout $y \in [0, 2]$ donc a fortiori pour les bornes de cet intervalle; nous obtenons ainsi deux conditions nécessaires de stabilité:

$$\nu \leq F(0, \beta, Q) \text{ et } \nu \leq F(2, \beta, Q),$$

qui s'écrivent aussi:

$$\nu P(0) \leq D(0) \text{ et } \nu P(2) \leq D(2),$$

soit:

$$\nu \leq \nu_0 = 2Q \text{ et } \nu \leq \nu_2 = \frac{1}{2(\beta + Q)},$$

et il faut montrer que ces conditions sont suffisantes.

Nous distinguons alors deux cas:

1^{er} cas: $\nu_0 \leq \nu_2$.

Posons $\nu = \nu_0 = 2Q$. Pour que la parabole $z = \nu P(y)$ soit sous la droite $z = D(y)$ dans l'intervalle $[0,2]$, il suffit que la demi-tangente à droite à la parabole en $y = 0$ soit sous la droite (voir figure 5; on rappelle que l'on suppose $P'' < 0$); il suffit donc que $\nu P'(0) \leq D'(0)$, ce qui s'écrit aussi:

$$\nu(4Q^2 + 4\beta - 1) \leq 2\beta,$$

ou encore, après avoir remplacé ν par sa valeur $2Q$:

$$(34) \quad Q(4Q^2 - 1) \leq \beta(1 - 4Q).$$

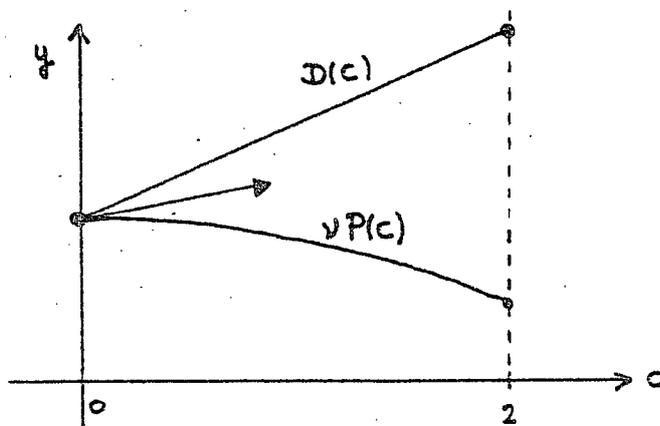


Figure 5

Si $1 - 4Q \geq 0$ alors $4Q^2 - 1 \leq 0$ et l'inégalité (34) est vraie. Si $1 - 4Q < 0$, la condition (34) devient:

$$(35) \quad \beta \leq \frac{Q(1 - 4Q^2)}{4Q - 1};$$

mais l'hypothèse $\nu_0 \leq \nu_2$ impose que:

$$(36) \quad 0 \leq \beta \leq \frac{1 - 4Q^2}{4Q},$$

et il suffit pour vérifier (35) de montrer que:

$$\frac{1 - 4Q^2}{4Q} \leq \frac{Q(1 - 4Q^2)}{4Q - 1},$$

ce qui s'écrit:

$$4Q^2(1-4Q^2) - (4Q-1)(1-4Q^2) \geq 0,$$

c'est-à-dire:

$$(1-4Q^2)(2Q-1)^2 \geq 0,$$

ce qui est vérifié d'après (36).

2^{eme} cas: $\nu_2 \leq \nu_0$.

Posons alors $\nu = \nu_2 = \frac{1}{2(\beta+Q)}$. L'hypothèse $\nu_2 \leq \nu_0$ entraîne:

$$(37) \quad \frac{1-4Q^2}{4Q} \leq \beta \leq 1.$$

Pour que la parabole soit sous la droite dans l'intervalle $[0,2]$, il suffit que la demi-tangente à gauche à la parabole $z = \nu P(y)$ en $y = 2$ soit sous la droite (voir figure 6), c'est-à-dire:

$$\nu P'(2) \geq D'(2),$$

ce qui s'écrit, en utilisant que $\nu = \nu_2$:

$$3\beta Q + \beta^2 - \beta + Q^2 - \frac{1}{4} \geq 0.$$

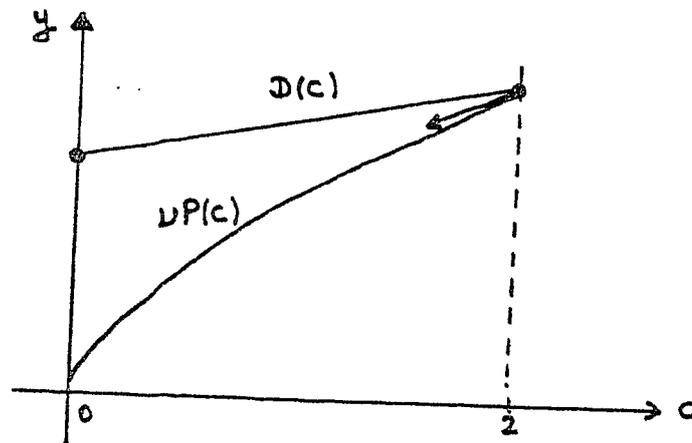


Figure 6

En posant $g(\beta) = \beta^2 + (3Q - 1)\beta + Q^2 - \frac{1}{4}$, il reste alors à montrer que $g(\beta) \geq 0$ lorsque β décrit l'intervalle donné par (37).

Si $Q^2 - \frac{1}{4} \geq 0$, alors $g(\beta) \geq 0$ pour tout $\beta \in [0, 1]$. Supposons donc que $Q^2 - \frac{1}{4} < 0$. L'étude de $g'(\beta)$ montre que g est croissante sur l'intervalle $[\frac{1-3Q}{2}, +\infty[$. Comme l'on a $\frac{1-3Q}{2} < \frac{1-4Q^2}{4Q}$ pour tout $Q > 0$, g est croissante sur l'intervalle $[\frac{1-4Q^2}{4Q}, 1]$, et vérifier que g est positive sur cet intervalle donné par (37) revient à vérifier que $g\left(\frac{1-4Q^2}{4Q}\right) \geq 0$, ce qui est exact puisque:

$$g\left(\frac{1-4Q^2}{4Q}\right) = \left(\frac{1-4Q^2}{16Q^2}\right)(4Q^2 - 4Q + 1).$$

Ceci achève la démonstration de la proposition •

En termes de nombre de Courant, la condition de stabilité du schéma (30) s'écrit donc:

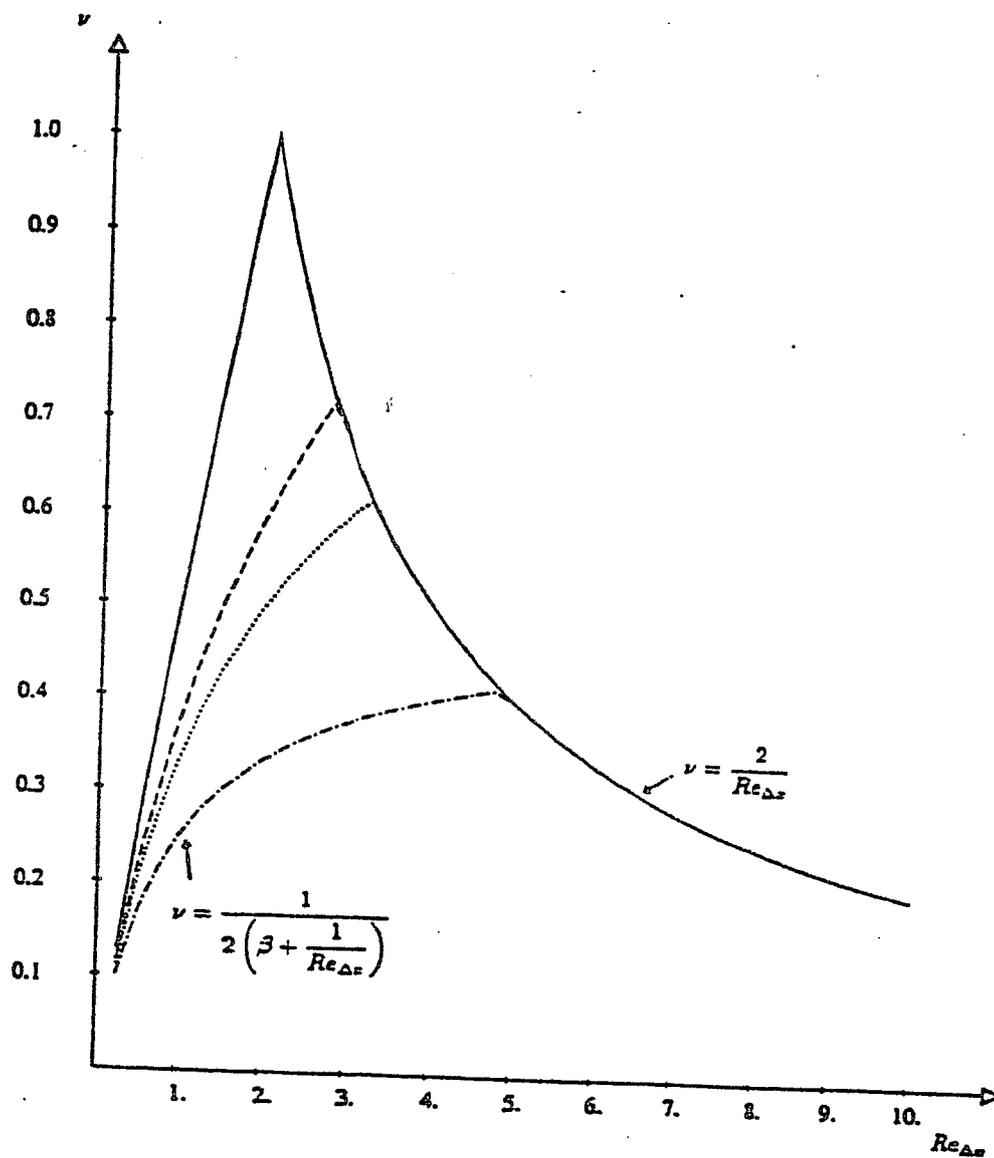
$$\nu \leq \text{Min}[F(0, \beta, Q); F(2, \beta, Q)] = \text{Min}\left[2Q; \frac{1}{2(\beta + Q)}\right].$$

On peut aussi exprimer cette conclusion sous la forme suivante: le schéma (30) est stable pour $\nu \leq \frac{2}{Re_{\Delta x}}$ lorsque l'inégalité $Re_{\Delta x} \geq Re^*(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\beta^2 + 1} - \beta}$ a lieu, et il est stable pour $\nu \leq \frac{1}{2(\beta + Re_{\Delta x}^{-1})}$ dans le cas contraire.

La figure 7 représente le domaine de stabilité du schéma, pour quatre valeurs différentes de β . La valeur limite du nombre de Courant ne dépend pas du paramètre de décentrage β lorsque $Re_{\Delta x} \geq \frac{2}{\sqrt{\beta^2 + 1} - \beta}$. Cette figure montre que, parmi tous les schémas du type (30) lorsque β décrit l'intervalle $[0, 1]$, le schéma centré (correspondant à $\beta = 0$) est le moins restrictif sur le pas de temps.

La figure 8 représente la variation du nombre de Reynolds de maille critique $Re^*(\beta)$ en fonction de β . Au dessus de cette courbe, la condition de stabilité s'écrit $\nu \leq \frac{2}{Re_{\Delta x}}$ (le minimum en y de $F(y, \beta, Q)$ est atteint en $y = 0$); au dessous de cette courbe, le schéma est stable pour $\nu \leq \frac{1}{2(\beta + Re_{\Delta x}^{-1})}$ (le minimum en y de $F(y, \beta, Q)$ est atteint en $y = 2$).

ETUDE DE STABILITE DE $u_t + au_x = \mu u_{xx}$
 SCHEMA EXPLICITE D'ORDRE 2
 TRACE DE LA VALEUR MAXIMALE ADMISSIBLE DU NOMBRE DE COURANT



- $\beta = 0$
- - - $\beta = \frac{1}{3}$
- · · $\beta = \frac{1}{2}$
- · - $\beta = 1$

Figure 7

ETUDE DE STABILITE DE $u_t + au_x = \mu u_{xx}$
 SCHEMA EXPLICITE D'ORDRE 2
 TRACE DU NOMBRE DE REYNOLDS DE MAILLE CRITIQUE $Re^*(\beta)$

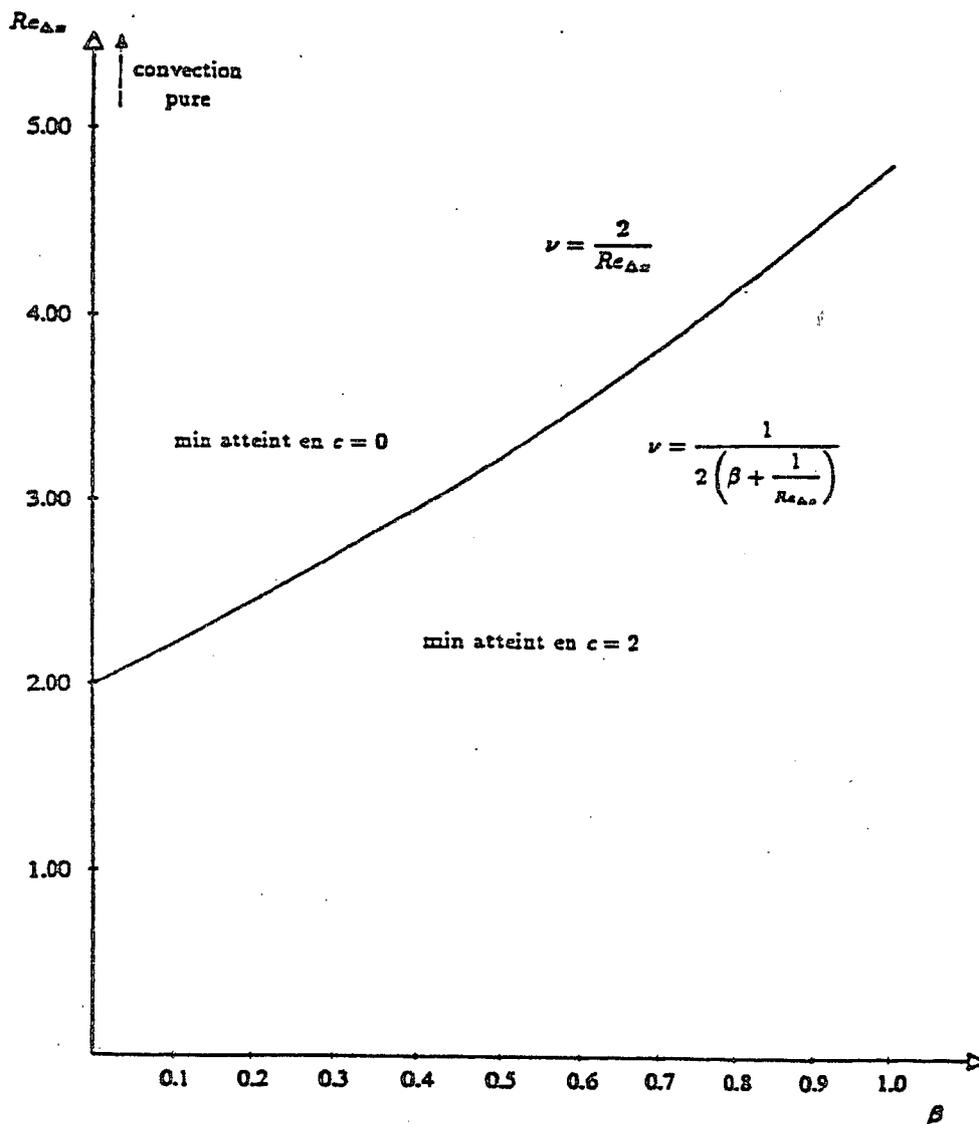


Figure 8

3.2 Schémas implicites

Nous étudions dans cette partie la stabilité linéaire du δ -schéma implicite:

$$(38) \quad M(u^n) \delta u^{n+1} = \widehat{\delta u}, \quad u^{n+1} = u^n + \delta u^{n+1},$$

qui est l'analogie dans le cas de l'équation de convection-diffusion (25) du schéma implicite présenté au chapitre 2 pour les équations de Navier-Stokes. De façon plus précise, la $i^{\text{ème}}$ ligne du système (38) s'écrit:

$$(39) \quad - \left(\sigma a^+ + \frac{\nu}{Re_{\Delta x}} \right) \delta u_{j-1}^{n+1} + \\ \left(1 + \nu \left(1 + \frac{2}{Re_{\Delta x}} \right) \right) \delta u_j^{n+1} + \\ \left(\sigma a^- - \frac{\nu}{Re_{\Delta x}} \right) \delta u_{j+1}^{n+1} = \widehat{\delta u}_j,$$

où l'on a posé:

$$\nu = \frac{|a| \Delta t}{\Delta x}, \quad \sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad Re_{\Delta x} = \frac{|a| \Delta x}{\mu},$$

$$a^+ = \max(a, 0), \quad a^- = \min(a, 0),$$

et:

$$(40) \quad \widehat{\delta u}_j = - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((1 - \beta) a \delta^0 + \beta a^- \delta^+ + \beta a^+ \delta^- \right) \\ + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n).$$

Dans la "phase mathématique" (membre de gauche de (39)) le flux convectif est évalué à partir d'un schéma décentré précis au premier ordre; par conséquent le préconditionneur résultant (convectif + diffusif) est aussi du premier ordre. Par contre, dans la phase physique (second membre de (39)), on discrétise le flux convectif à l'aide du β -schéma introduit au paragraphe précédent ce qui permet d'obtenir une solution stationnaire précise au second ordre en espace.

3.2.1 Stabilité linéaire

On a pour ce schéma les résultats suivants:

Proposition 2: Le schéma (39)-(40) est précis au premier ordre en temps et au second ordre en espace.

Proposition 3: Le schéma implicite linéarisé décentré d'ordre 1 (39)-(40) est inconditionnellement stable.

Démonstration de la proposition 3:

En posant, pour $m = -1, 0$ ou 1 :

$$\delta u_{j+m}^{n+1} = \left(g_{\theta_k}^{cd}(\Delta t) - 1 \right) \exp(im\theta_k) u_j^n$$

(l'indice supérieur cd rappelle que l'on considère une équation de convection-diffusion), et

$$y = 1 - \cos \theta_k,$$

on obtient l'expression du facteur d'amplification:

$$|g_{\theta_k}^{cd}(\Delta t)|^2 = \frac{1 + \nu y (2(1 - \beta y) + \nu y (1 - 2\beta y (1 - \beta)))}{1 + 2\nu(\nu + 1)y + \frac{4\nu y}{Re_{\Delta x}} \left(1 + \nu y \left(1 + \frac{1}{Re_{\Delta x}} \right) \right)}$$

Par rapport à l'expression $|g_{\theta_k}^c(\Delta t)|^2$ que l'on obtiendrait dans le cas de la convection pure (c'est-à-dire l'expression analogue avec " $Re_{\Delta x} = +\infty$ "; voir Stève [30]), on s'aperçoit que le numérateur du facteur d'amplification est inchangé et que le dénominateur est augmenté. On a donc:

$$|g_{\theta_k}^{cd}(\Delta t)| \leq |g_{\theta_k}^c(\Delta t)|.$$

Puisque le schéma analogue à (39)-(40) dans le cas de la convection pure est inconditionnellement stable (voir [30]), c'est a fortiori le cas en présence d'un terme de diffusion:

$$|g_{\theta_k}^{cd}(\Delta t)| \leq 1 \bullet$$

3.2.2 Etude pour les grands pas de temps

Intéressons nous maintenant à la convergence de la solution vers un état stationnaire, en considérant la valeur limite du coefficient d'amplification pour les grands de temps.

Nous avons tracé sur la figure 9 le maximum par rapport aux modes de Fourier θ_k du module du facteur d'amplification $g_{\theta_k}(\Delta t)$, dans le cas où $\beta = \frac{1}{2}$ et pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds de maille $Re_{\Delta x}$. Il apparaît que les schémas correspondants se différencient surtout par leur comportement pour de grandes valeurs du pas de temps: la valeur limite lorsque $\Delta t \rightarrow +\infty$ du maximum du module du facteur d'amplification augmente avec le Reynolds

de maille. Les effets visqueux ont donc pour effet de diminuer la valeur de cette limite et par suite d'améliorer la convergence.

De façon plus précise, posons:

$$F_\alpha(\beta, y) = \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} |g_{\theta_k}^{cd}(\Delta t)| = \sqrt{\frac{y[1 - 2\beta(1 - \beta)y]}{2 + \alpha y}},$$

où on a posé:

$$\alpha = \frac{4}{Re_{\Delta x}} \left(1 + \frac{1}{Re_{\Delta x}} \right).$$

Pour apprécier la convergence vers un état stationnaire, on veut étudier comment les différents modes de Fourier sont atténués par le schéma aux grands pas de temps, c'est-à-dire étudier la quantité:

$$\mathcal{F}_\alpha(\beta) = \max_{y \in [0, 2]} F_\alpha(\beta, y).$$

Plus précisément, cherchons quelle est la valeur du paramètre de décentrage β qui donne la meilleure convergence, en d'autres termes qui réalise le minimum:

$$\min_{\beta \in [0, 1]} \mathcal{F}_\alpha(\beta) = \min_{\beta \in [0, 1]} \max_{y \in [0, 2]} F_\alpha(\beta, y) = G(\alpha).$$

On vérifie facilement que pour $y \in [0, 2]$, $\beta \in [0, 1]$ et pour tout $\alpha > 0$, la fonction $F_\alpha(\beta, y)$ est convexe en β et concave en y ; elle admet donc un point selle (voir par exemple le théorème de Ky-Fan-Sion; [7], p. 195), d'où:

$$G(\alpha) = \max_{y \in [0, 2]} \min_{\beta \in [0, 1]} F_\alpha(\beta, y).$$

On en déduit immédiatement:

$$G(\alpha) = \max_{y \in [0, 2]} F_\alpha\left(\frac{1}{2}, y\right) = \max_{y \in [0, 2]} \sqrt{\frac{2y - y^2}{4 + 2\alpha y}},$$

d'où on tire sans difficulté, pour $\alpha \neq 0$:

$$G(\alpha) = F_\alpha\left(\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{1+\alpha} - 2}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha + 2(1 - \sqrt{1+\alpha})},$$

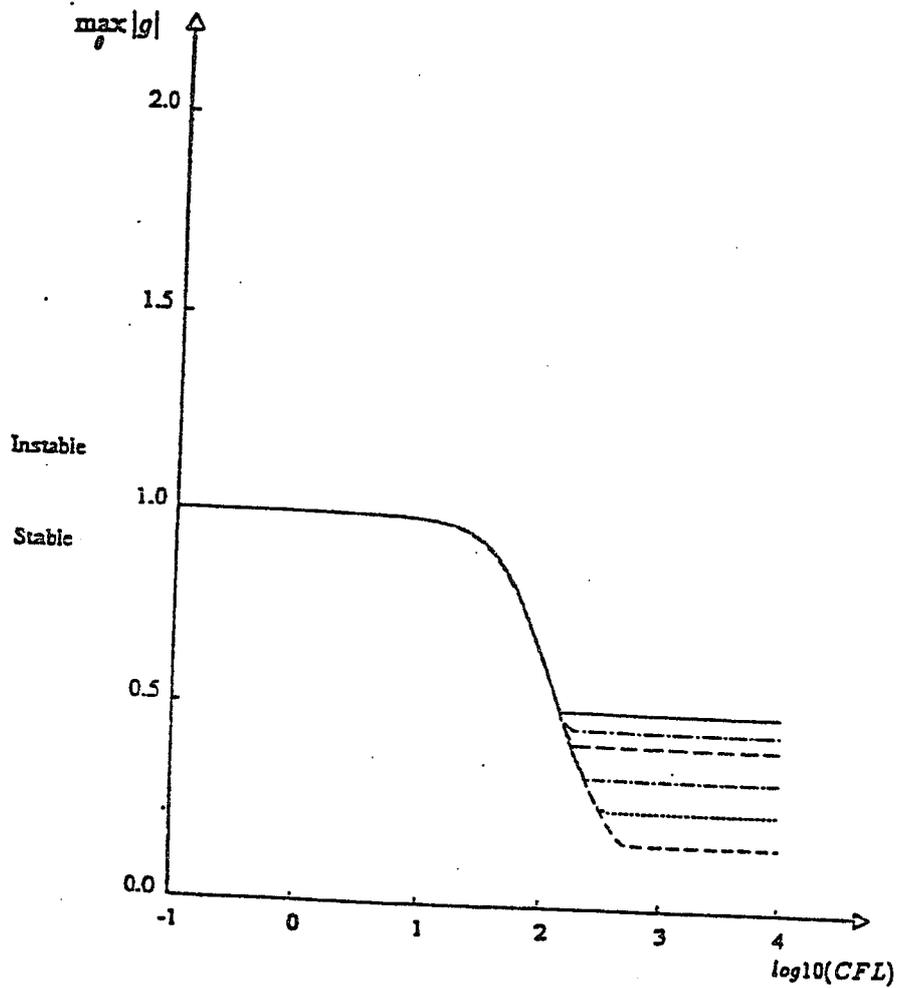
et:

$$G(0) = F_0\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2}$$

(G est continue en 0).

La figure 10 représente le tracé de $G(\alpha)$ en fonction de α (qui dépend de façon monotone du coefficient de diffusion μ). Cette figure redonne les valeurs de la figure 9 pour les grands pas de temps. Comme on pouvait s'y attendre, la convergence vers l'état stationnaire aux grands pas de temps est d'autant meilleure que $Re_{\Delta x}$ est petit, c'est-à-dire que les termes visqueux sont importants.

ETUDE DE STABILITE DE $u_t + au_x = \mu u_{xx}$
 SCHEMA IMPLICITE $\beta = \frac{1}{2}$
 TRACE DU MODULE DU FACTEUR D'AMPLIFICATION



—	$Re_{\Delta x} = 10^8$	$Max = 1.$	$Min = 0.5$
- - -	$Re_{\Delta x} = \frac{1}{2}$	$Max = 1.$	$Min = 0.167$
· · · · ·	$Re_{\Delta x} = 1$	$Max = 1.$	$Min = 0.25$
- · - · -	$Re_{\Delta x} = 2$	$Max = 1.$	$Min = 0.333$
- - - - -	$Re_{\Delta x} = 5$	$Max = 1.$	$Min = 0.417$
- · - · -	$Re_{\Delta x} = 10$	$Max = 1.$	$Min = 0.455$

Figure 9

ETUDE DE STABILITE DE $u_t + au_x = \mu u_{xx}$
 SCHEMA IMPLICITE $\beta = \frac{1}{2}$
 TRACE DE $\max_{k \in [0;N]} \lim_{\Delta t \rightarrow +\infty} |g_{\theta_k}^{cd}(\Delta t)|$

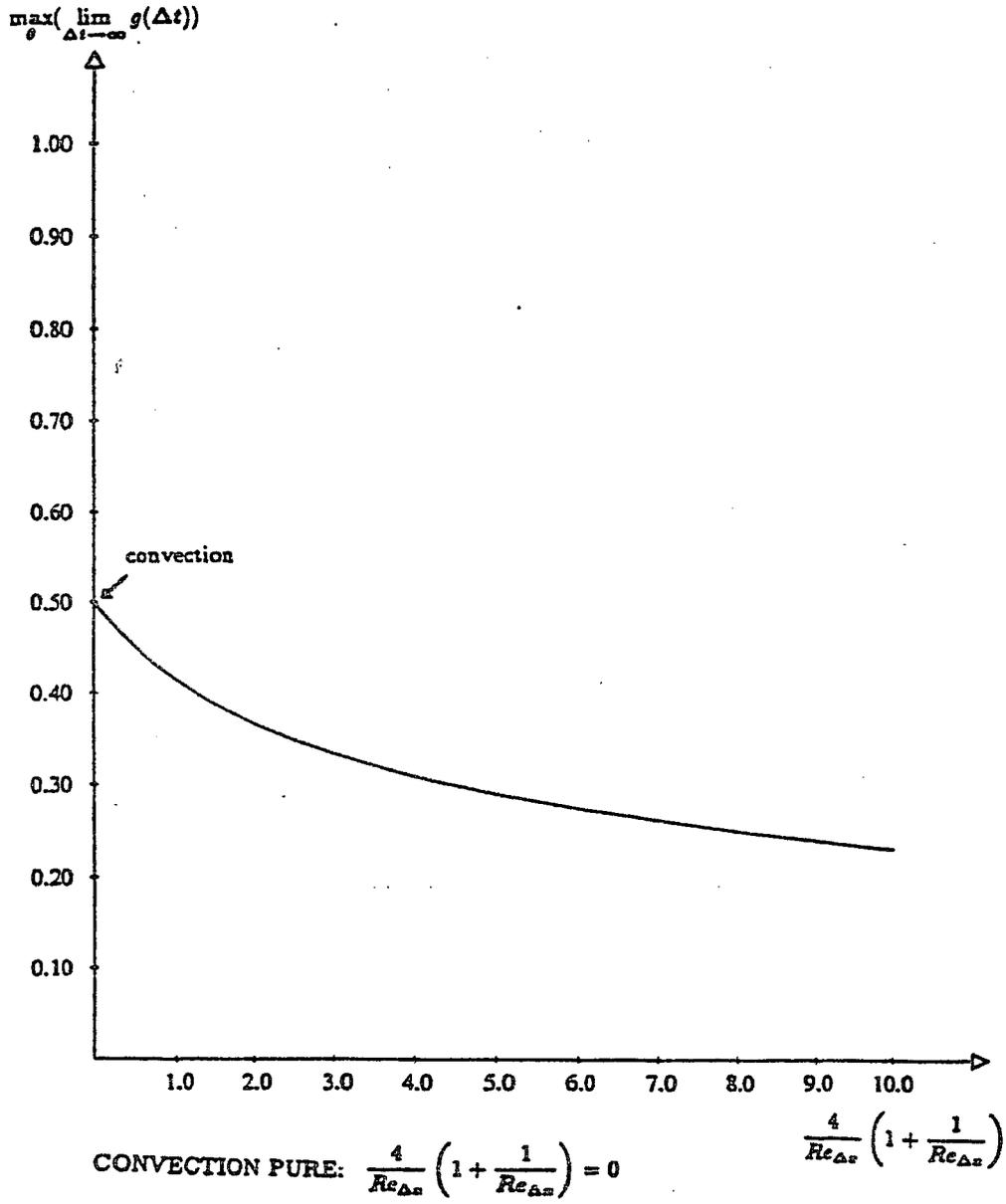


Figure 10

3.3 Résolution des systèmes linéaires

Nous nous intéressons maintenant à la résolution du système linéaire (38), dont nous écrivons la $i^{\text{ème}}$ ligne sous la forme:

$$(41) \quad \begin{aligned} & - \left(\sigma a^+ + \frac{\nu}{Re_{\Delta x}} \right) X_{j-1} + \\ & \left(1 + \nu \left(1 + \frac{2}{Re_{\Delta x}} \right) \right) X_j + \\ & \left(\sigma a^- - \frac{\nu}{Re_{\Delta x}} \right) X_{j+1} = B_j, \end{aligned}$$

dont le second membre B est donné par (40), et où le vecteur inconnu δu^{n+1} est maintenant noté X . Notons $M_{Re_{\Delta x}}$ la matrice:

$$(42) \quad M_{Re_{\Delta x}} = \text{Tridiag}(m_{-1}, m_0, m_{+1}),$$

avec:

$$\begin{aligned} m_{-1} &= - \left(\sigma a^+ + \frac{\nu}{Re_{\Delta x}} \right), \\ m_0 &= 1 + \nu \left(1 + \frac{2}{Re_{\Delta x}} \right), \\ m_{+1} &= \sigma a^- - \frac{\nu}{Re_{\Delta x}}. \end{aligned}$$

En fait, la notation (42) est un peu abusive: le problème considéré étant périodique, la matrice $M_{Re_{\Delta x}}$ est circulante et non tridiagonale, c'est-à-dire que:

$$\begin{aligned} (M_{Re_{\Delta x}})_{j,j-1} &= m_{-1}, \quad (M_{Re_{\Delta x}})_{j,j} = m_0, \\ (M_{Re_{\Delta x}})_{j,j+1} &= m_{+1}, \quad \text{pour } 2 \leq j \leq N-1, \end{aligned}$$

$$(M_{Re_{\Delta x}})_{1,1} = m_0, \quad (M_{Re_{\Delta x}})_{1,2} = m_{+1}, \quad (M_{Re_{\Delta x}})_{1,N} = m_{-1},$$

$$(M_{Re_{\Delta x}})_{N,1} = m_{+1}, \quad (M_{Re_{\Delta x}})_{N,N-1} = m_{-1}, \quad (M_{Re_{\Delta x}})_{N,N} = m_0.$$

On vérifie très simplement que la matrice $M_{Re_{\Delta x}}$ est à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire que:

$$m_0 > |m_{-1}| + |m_{+1}|.$$

Mais la généralisation de cette propriété, vérifiée ici pour l'équation modèle de convection-diffusion monodimensionnelle, au cas des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles résolues sur un maillage non structuré n'est pas immédiate.

Dans le cas des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles résolues à l'aide d'un schéma implicite, on ne cherchera pas à résoudre les systèmes linéaires rencontrés à chaque pas de temps par une méthode directe, pour des raisons liées à la fois au coût du calcul et à l'encombrement de la mémoire de l'ordinateur utilisé. Suivant Stoufflet [32] et Stève [30], on se contentera à chaque pas de temps d'une résolution partielle de ces systèmes effectuée en réalisant quelques itérations de relaxation, en utilisant les méthodes de Jacobi ou Gauss-Seidel. Nous étudions maintenant le comportement de ces méthodes itératives pour la résolution du système (41).

3.3.1 Convergence des méthodes de résolution

Nous notons:

$$D_{Re_{\Delta x}} = \text{Tridiag}(0, m_0, 0) ,$$

$$E_{Re_{\Delta x}} = \text{Tridiag}(m_{-1}, 0, 0) ,$$

$$F_{Re_{\Delta x}} = \text{Tridiag}(0, 0, m_{+1}) ,$$

avec le même abus de notation que plus haut.

Étudions d'abord la méthode de Gauss-Seidel. Une itération de cette méthode peut être réalisée de deux façons: l'itération sera dite *croissante* (resp. *décroissante*) si la boucle sur les noeuds est faite dans le sens ascendant (resp. descendant), le numéro de noeud i variant de 1 à N (resp. de N à 1).

Proposition 4: La méthode de Gauss-Seidel appliquée à la résolution du système linéaire (41) est convergente et l^2 inconditionnellement stable.

Démonstration:

Considérons une itération croissante de la méthode de Gauss-Seidel (plus exactement de la méthode de "Gauss-Seidel périodique", les matrices $E_{Re_{\Delta x}}$ et $F_{Re_{\Delta x}}$ n'étant pas exactement triangulaires):

$$(D_{Re_{\Delta x}} + E_{Re_{\Delta x}}) X^{iter+1} = B - F_{Re_{\Delta x}} X^{iter} .$$

Nous analysons la stabilité l^2 et la convergence de la méthode itérative en évaluant par une analyse de Fourier le facteur d'amplification du pseudo-schéma:

$$(E_{Re_{\Delta x}} + D_{Re_{\Delta x}}) \delta X^{iter+1} = -F_{Re_{\Delta x}} \delta X^{iter},$$

où l'on a noté $\delta X^{iter} = X^{iter+1} - X^{iter}$. Posant encore $Q = \frac{1}{Re_{\Delta x}}$, on obtient l'expression suivante du facteur d'amplification $g_{\theta_k}^{gs}(\Delta t)$ défini par les relations $\delta X_j^{iter} = \exp(ij\theta_k)$, $\delta X_j^{iter+1} = g_{\theta_k}^{gs}(\Delta t) \delta X_j^{iter}$:

$$(43) \quad g_{\theta_k}^{gs}(\Delta t) = \frac{(-\sigma a^- + \nu Q) \exp(i\theta_k)}{1 + \nu(1 + 2Q) - (\sigma a^+ + \nu Q) \exp(-i\theta_k)}.$$

On voit facilement que le mode de Fourier qui maximise $|g_{\theta_k}^{gs}(\Delta t)|$ est $\theta_k = 0$. La condition de Neumann qui assure la stabilité l^2 (et implique la convergence de la méthode itérative) s'écrit donc $|g_{\theta_k=0}^{gs}(\Delta t)|^2 \leq 1$. Cette condition s'écrit:

$$\frac{\nu^2 Q^2}{(1 + \nu Q)^2} \leq 1$$

si $a > 0$, ce qui est toujours réalisé puisque $\nu > 0$ et $Q > 0$, et:

$$\frac{\nu^2 (1 + Q_{\Delta x})^2}{(1 + \nu(1 + Q_{\Delta x}))^2} \leq 1$$

si $a < 0$, ce qui est encore vérifié.

Le cas d'une itération décroissante de Gauss-Seidel se traite de façon analogue, en distinguant encore les cas $a > 0$ et $a < 0$ •

Etudions maintenant la méthode de Jacobi, dont une itération s'écrit:

$$D_{Re_{\Delta x}} X^{iter+1} = B - (E_{Re_{\Delta x}} + F_{Re_{\Delta x}}) X^{iter}.$$

Proposition 5: La méthode de Jacobi appliquée à la résolution du système linéaire (41) est convergente et l^2 inconditionnellement stable.

Démonstration:

On sait déjà que la méthode de Jacobi converge puisque la matrice $M_{Re_{\Delta x}}$ est à diagonale strictement dominante (voir [35]). Il est cependant intéressant d'étudier par analyse de Fourier le facteur d'amplification du pseudo-schéma:

$$D_{Re_{\Delta x}} \delta X^{iter+1} = -(E_{Re_{\Delta x}} + F_{Re_{\Delta x}}) \delta X^{iter}.$$

On obtient:

$$g_{\theta_k}^j(\Delta t) = \frac{\sigma a^+ e^{-i\theta_k} - \sigma a^- e^{i\theta_k} + 2\nu Q \cos \theta_k}{1 + \nu(1 + 2Q)},$$

soit encore:

$$g_{\theta_k}^j(\Delta t) = \frac{\nu(1 + 2Q) \cos \theta_k - i\sigma a \sin \theta_k}{1 + \nu(1 + 2Q)},$$

La condition de stabilité $|g_{\theta_k}^j(\Delta t)| \leq 1$ s'écrit:

$$1 + \nu^2(1 + 2Q)^2 + 2\nu(1 + 2Q) - \nu^2(1 + 2Q)^2 \cos^2 \theta_k - \nu^2 \sin^2 \theta_k \geq 0,$$

c'est-à-dire:

$$1 + \nu^2(1 + 2Q)^2 \sin^2 \theta_k + 2\nu(1 + 2Q) - \nu^2 \sin^2 \theta_k \geq 0,$$

ce qui est toujours réalisé puisque $\nu > 0$ et $Q > 0$. Par conséquent la méthode de Jacobi est l^2 inconditionnellement stable •

3.3.2 Etude pour les grands pas de temps

Nous étudions ici les limites lorsque le pas de temps tend vers l'infini des coefficients d'amplification des méthodes de résolution présentées ci-dessus.

Considérons tout d'abord le cas d'une itération de Gauss-Seidel croissante; on utilise l'expression (43) du facteur d'amplification et on distingue deux cas selon le signe de la vitesse de convection a .

Lorsque $a > 0$, on a:

$$\max_{\theta_k} |g_{\theta_k}^{gs}(\Delta t)|^2 = \frac{\nu^2 Q^2}{(1 + \nu Q)^2},$$

d'où:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \max_{\theta_k} |g_{\theta_k}^{gs}(\Delta t)|^2 = 1.$$

Si $a < 0$, on a de même:

$$\max_{\theta_k} |g_{\theta_k}^{gs}(\Delta t)|^2 = \frac{\nu^2(1 + Q)^2}{(1 + \nu(1 + Q))^2},$$

et donc encore:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \max_{\theta_k} |g_{\theta_k}^{gs}(\Delta t)|^2 = 1.$$

Dans les deux cas, on observe donc un ralentissement de la convergence de la méthode de Gauss-Seidel (avec itérations croissantes) pour de grandes valeurs du pas de temps. Cependant on remarque que, à nombre de Courant ν fixé, même grand, la convergence est nettement meilleure dans le cas $a > 0$ que dans le cas opposé si l'écoulement est à convection dominante ($Re_{\Delta x}$ grand, Q petit; à la limite, dans le cas d'un problème de convection pure ($Q = 0$) avec $a > 0$, la matrice $M_{Re_{\Delta x}}$ est triangulaire et la convergence a lieu en une itération). L'étude d'une itération décroissante de Gauss-Seidel conduirait bien sûr à des conclusions analogues, en remplaçant dans la phrase précédente $a > 0$ par $a < 0$.

Pour illustrer ces résultats, nous avons tracé le comportement du module du facteur d'amplification d'une itération croissante de la méthode de Gauss-Seidel en fonction du nombre de Courant pour des faibles et des grandes valeurs du nombre de Reynolds de maille, dans le cas où la vitesse de convection a est positive (figures 11 et 12).

Pour le système des équations d'Euler ou de Navier-Stokes, les valeurs propres de la matrice (2) (qui jouent le rôle de vitesses de convection) peuvent être de signes différents; on ne peut donc pas déterminer un sens privilégié pour les itérations de relaxation. D'une manière analogue à Stève [30], on utilise un algorithme à deux balayages, composé d'une itération dans le sens croissant des noeuds suivie d'une itération dans le sens décroissant. L'itération s'écrit:

$$(44) \begin{cases} (D_{Re_{\Delta x}} + E_{Re_{\Delta x}}) X^{iter+\frac{1}{2}} = B - F_{Re_{\Delta x}} X^{iter} & \text{(itération croissante)} \\ (D_{Re_{\Delta x}} + F_{Re_{\Delta x}}) X^{iter+1} = B - E_{Re_{\Delta x}} X^{iter+\frac{1}{2}} & \text{(itération décroissante)} \end{cases}$$

Dans le cas des équations non linéaires de Navier-Stokes, on utilisera donc à chaque pas de temps l'algorithme (44) pour résoudre le système linéaire (24). On montrera à travers les expériences numériques qu'une convergence linéaire partielle (quelques itérations de Gauss-Seidel) suffit pour assurer la convergence vers un état stationnaire. Cependant cette convergence globale sera d'autant plus accélérée qu'on aura poussé la résolution des systèmes linéaires par un grand nombre d'itérations du type (44).

Terminons en effectuant l'étude analogue pour la méthode de Jacobi. On obtient cette fois, quelque soit le signe de la vitesse de convection a :

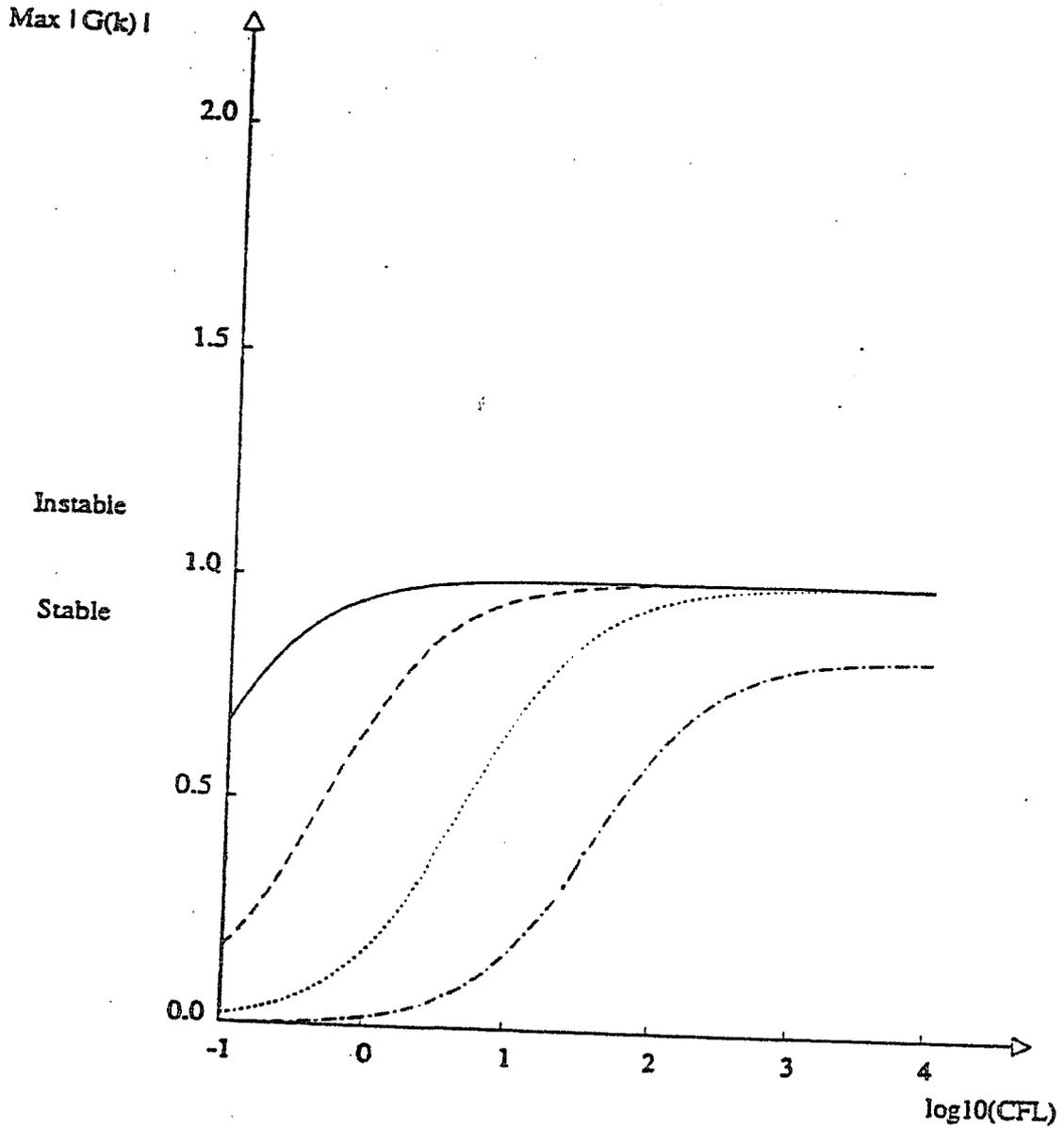
$$\max_{\theta_k} |g_{\theta_k}^j(\Delta t)|^2 = \frac{\nu^2 (1 + 2Q)^2}{(1 + \nu(1 + 2Q))^2},$$

d'où:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \max_{\theta_k} |g_{\theta_k}^j(\Delta t)|^2 = 1 ,$$

ce qui montre que la méthode de Jacobi ne converge plus pour les grands pas de temps, résultat déjà mis en évidence par Stève [30] dans le cas de la convection pure. L'évolution du module du facteur d'amplification de la méthode de Jacobi en fonction du nombre de Courant est montrée sur les figures 13 et 14 pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds de maille.

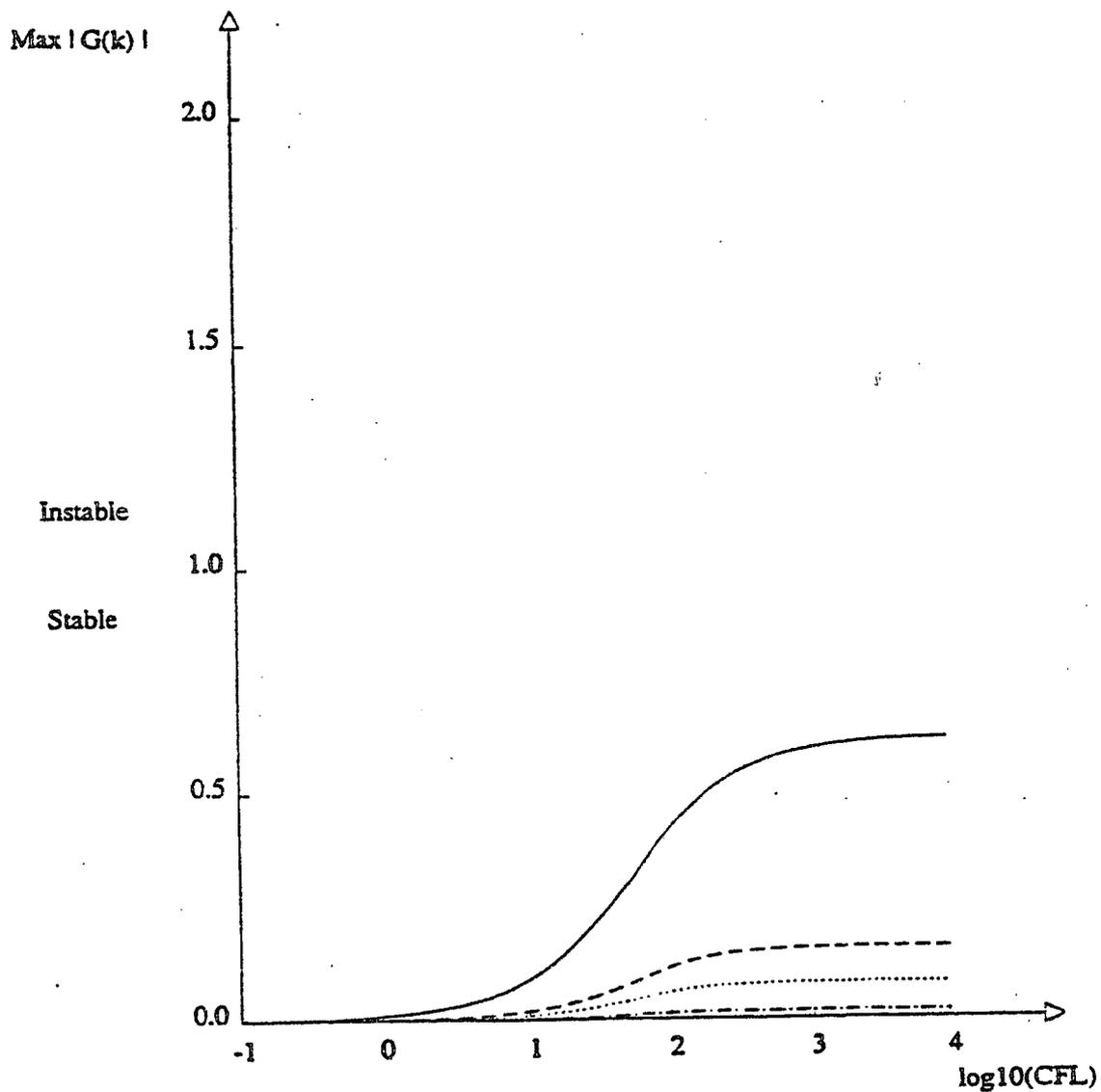
ETUDE DE STABILITE DE $u_t + au_x = \mu u_{xx}$
 RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE
 METHODE DE GAUSS-SEIDEL



—	$Re_{\Delta x} = 0.05$	$Max = 1.$	$Min = 0.667$
- - -	$Re_{\Delta x} = 0.5$	$Max = 1.$	$Min = 0.167$
· · ·	$Re_{\Delta x} = 5.$	$Max = 0.996$	$Min = 0.02$
- · -	$Re_{\Delta x} = 50.$	$Max = 0.837$	$Min = 0.002$

Figure 11

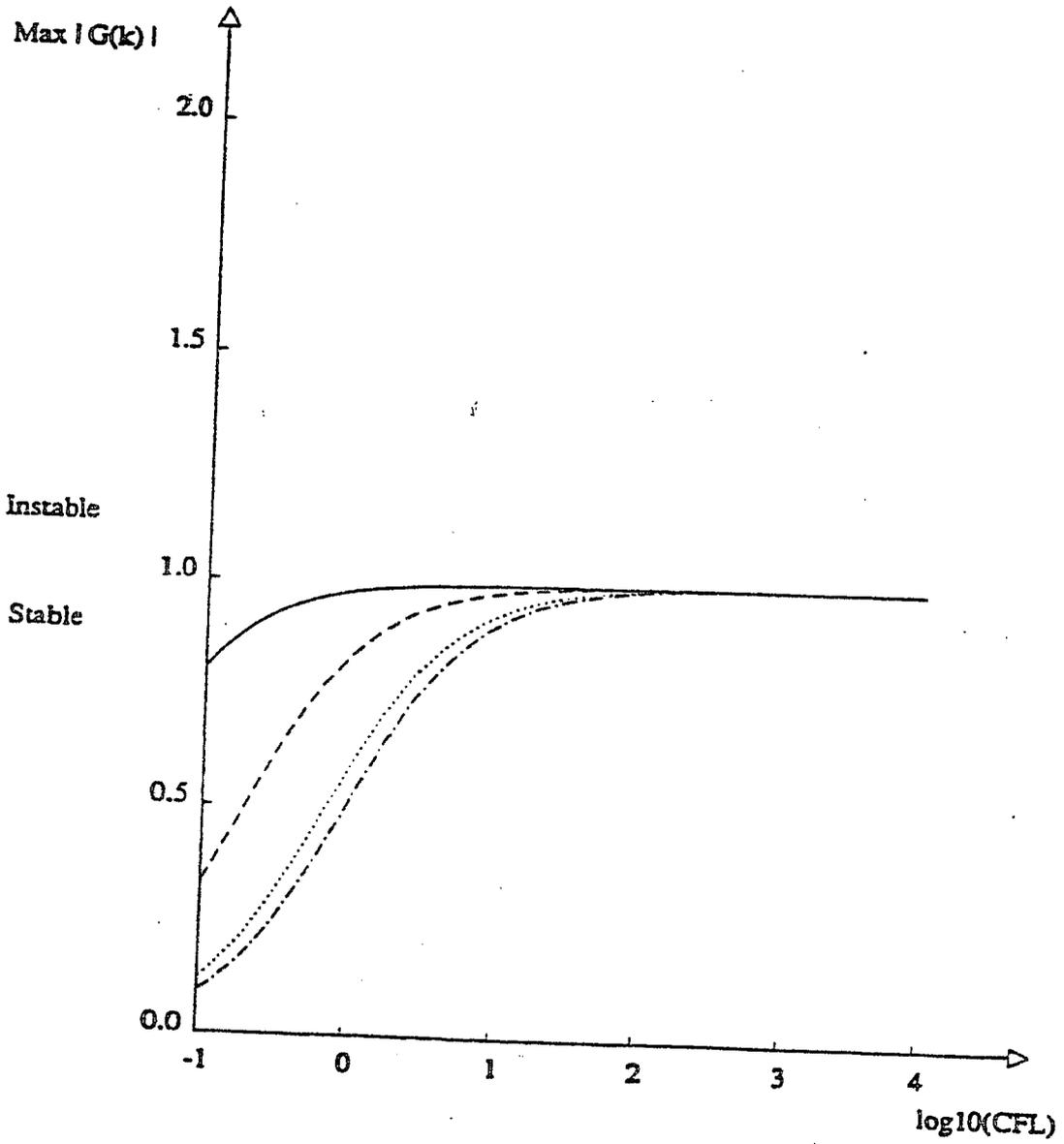
ETUDE DE STABILITE DE $u_t + au_x = \mu u_{xx}$
 RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE
 METHODE DE GAUSS-SEIDEL



————	$Re_{\Delta x} = 100.$	$Max = 0.615$	$Min = 0.001$
-----	$Re_{\Delta x} = 500.$	$Max = 0.157$	$Min = 0.$
.....	$Re_{\Delta x} = 1000.$	$Max = 0.079$	$Min = 0.$
- . - . -	$Re_{\Delta x} = 5000.$	$Max = 0.016$	$Min = 0.$

Figure 12

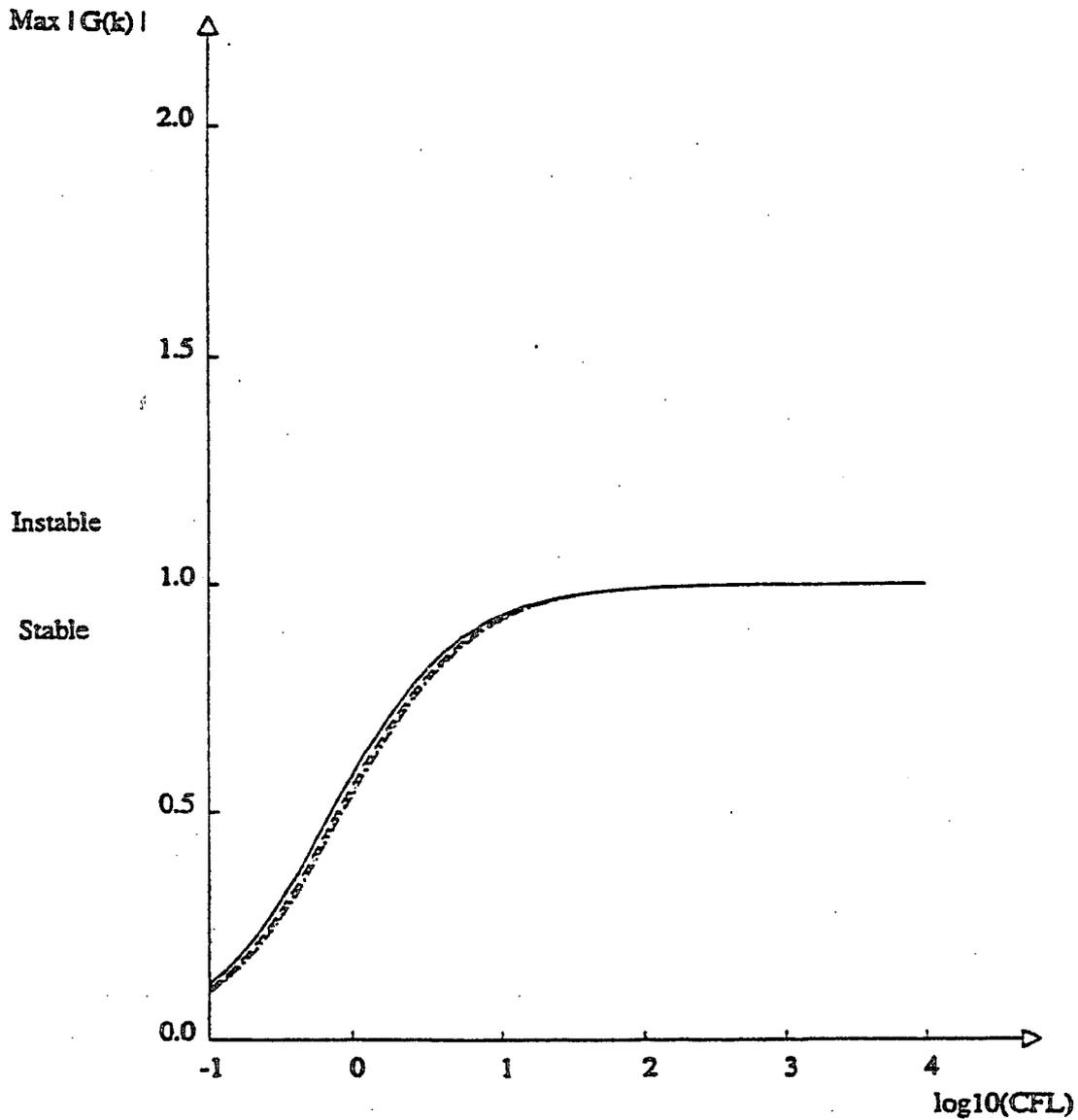
ETUDE DE STABILITE DE $u_t + au_x = \mu u_{xx}$
 RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE
 METHODE DE JACOBI



—	$Re_{\Delta x} = 0.05$	$Max = 1.$	$Min = 0.804$
- - -	$Re_{\Delta x} = 0.5$	$Max = 1.$	$Min = 0.333$
⋯	$Re_{\Delta x} = 5.$	$Max = 1.$	$Min = 0.123$
- · - ·	$Re_{\Delta x} = 50.$	$Max = 1.$	$Min = 0.094$

Figure 13

ETUDE DE STABILITE DE $u_t + au_x = \mu u_{xx}$
 RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE
 JACOBI



—	$Re_{\Delta x} = 5.$	$Max = 1.$	$Min = 0.123$
- - -	$Re_{\Delta x} = 7.5$	$Max = 1.$	$Min = 0.112$
— · — ·	$Re_{\Delta x} = 10.$	$Max = 1.$	$Min = 0.107$
- · - ·	$Re_{\Delta x} = 12.5$	$Max = 1.$	$Min = 0.104$

Figure 14

4 Résultats numériques

Les résultats numériques présentés ont été obtenus sur l'ordinateur CONVEX C1-XP disponible sur le site de l'INRIA Sophia-Antipolis. Cette machine appartient à la classe des calculateurs vectoriels; en particulier il est possible d'utiliser une option du compilateur Fortran conduisant à un code partiellement vectorisé. Dans un premier temps, nous effectuons donc des tests en ne faisant pas appel à des techniques propres au calcul vectoriel et comparons les différents schémas décrits ci-dessus. Une adaptation manuelle du code (utilisant des techniques de coloriage [2] et [31]) est ensuite nécessaire pour obtenir une efficacité maximale du schéma implicite linéarisé.

4.1 Écoulement transsonique autour d'un profil

On considère l'écoulement externe autour d'un profil d'aile d'avion de type NACA0012. On utilise tout d'abord un maillage grossier (800 points et 1514 triangles) pour comparer l'efficacité du schéma implicite linéarisé à celles de deux schémas explicites, le schéma d'Euler décentré et le schéma à quatre pas de Runge-Kutta, avec discrétisation spatiale d'ordre 2. Le calcul est effectué à un nombre de Reynolds de 500, le nombre de Mach infini étant égal à 0.85. La figure 15 représente le maillage utilisé; les courbes de convergence obtenues pour chacun des schémas explicites et implicites sont réunies sur la figure 16. Enfin on compare les temps CPU nécessaires pour diviser le résidu initial par 10^4 sur la figure 17. On a utilisé dans ces expériences un nombre de CFL (basé sur l'expression du critère de stabilité donné en annexe) égal à 0.8 pour le schéma d'Euler explicite, et à 2.2 pour le schéma de Runge-Kutta. En ce qui concerne les schémas implicites, on utilise un CFL variable à chaque itération en temps, donné par la loi (voir [21]):

$$\text{CFL}_n = \max\left(\frac{1}{\text{RES}_n}, 10^\alpha\right),$$

où α est un entier naturel que l'on choisit pour chaque calcul, et où:

$$\text{RES}_n = \frac{\|\delta\hat{W}^n\|}{\|\delta\hat{W}^0\|}$$

(la notation \hat{W} étant définie par (23)). Les nombres de balayages de Jacobi et Gauss-Seidel dans la phase de résolution linéaire étant respectivement fixés à 15 et 10. Remarquons que le nombre de balayages de la méthode de Jacobi légèrement supérieur à celui de la méthode de Gauss-Seidel n'altère pas l'efficacité du schéma implicite. Ceci est en faveur de la méthode de Jacobi dont

on sait qu'elle est vectorisable, ce qui permettra par la suite d'augmenter les performances du schéma implicite.

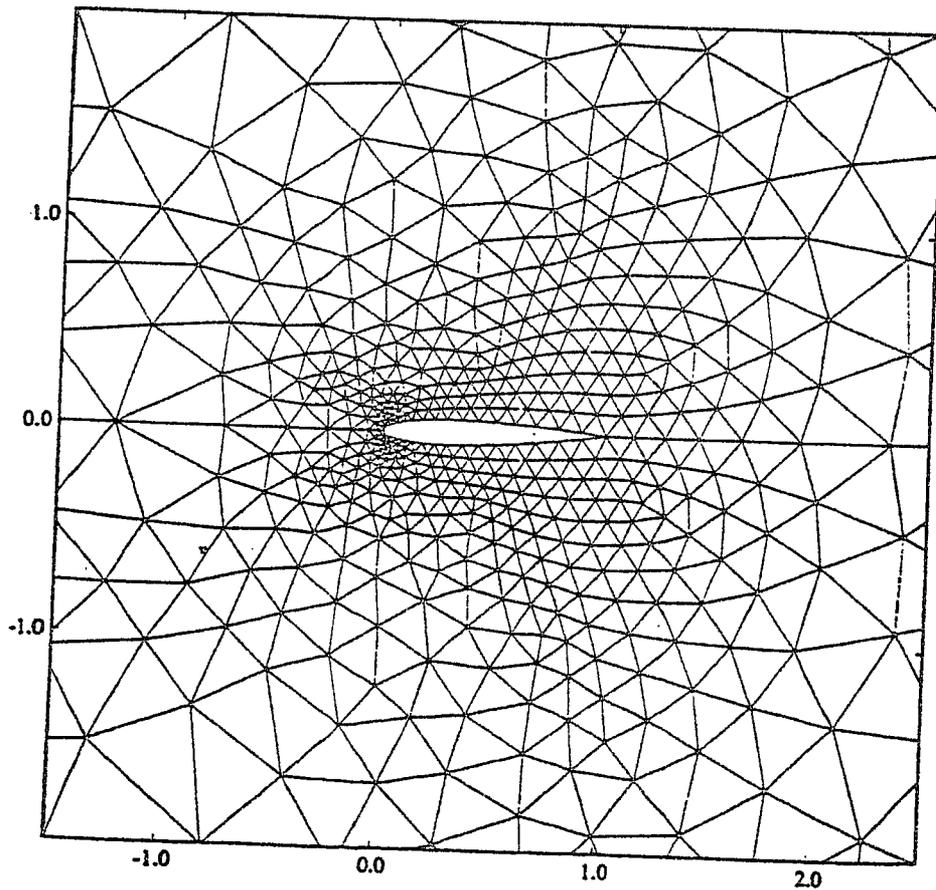
On se propose ensuite d'évaluer l'influence sur la convergence vers l'état stationnaire de la précision avec laquelle le système linéaire est résolu à chaque pas de temps. Pour cela on compare quatre courbes de convergence obtenues avec des nombres de relaxations de Jacobi de 4, 15 et 50. Lorsque la loi de CFL utilisée est celle citée plus haut, l'efficacité du schéma implicite est optimale pour un nombre de balayages fixé à 15. Cependant si ce nombre est porté à 50 et si l'on utilise un CFL constant égal à 10^4 , alors la convergence vers l'état stationnaire est quasi-quadratique (voir figures 18 et 19).

On utilise enfin une grille de 3114 points et 6056 triangles et on présente une solution obtenue avec le schéma implicite. Les lignes iso-Mach sont données sur la figure 21; on peut remarquer que la triangulation dans le sillage (figure 20) n'est pas particulièrement bien adaptée au calcul visqueux. Toutefois ce maillage, qui reste relativement grossier, conduit à une solution très acceptable, comme le montrent encore les lignes iso-densité (figure 22) et le coefficient de pression sur le corps (figure 23). Les figures 24 et 25 permettent de comparer les coûts CPU et les convergences suivant le maillage utilisé, le nombre de relaxations de Jacobi étant fixé à 20.

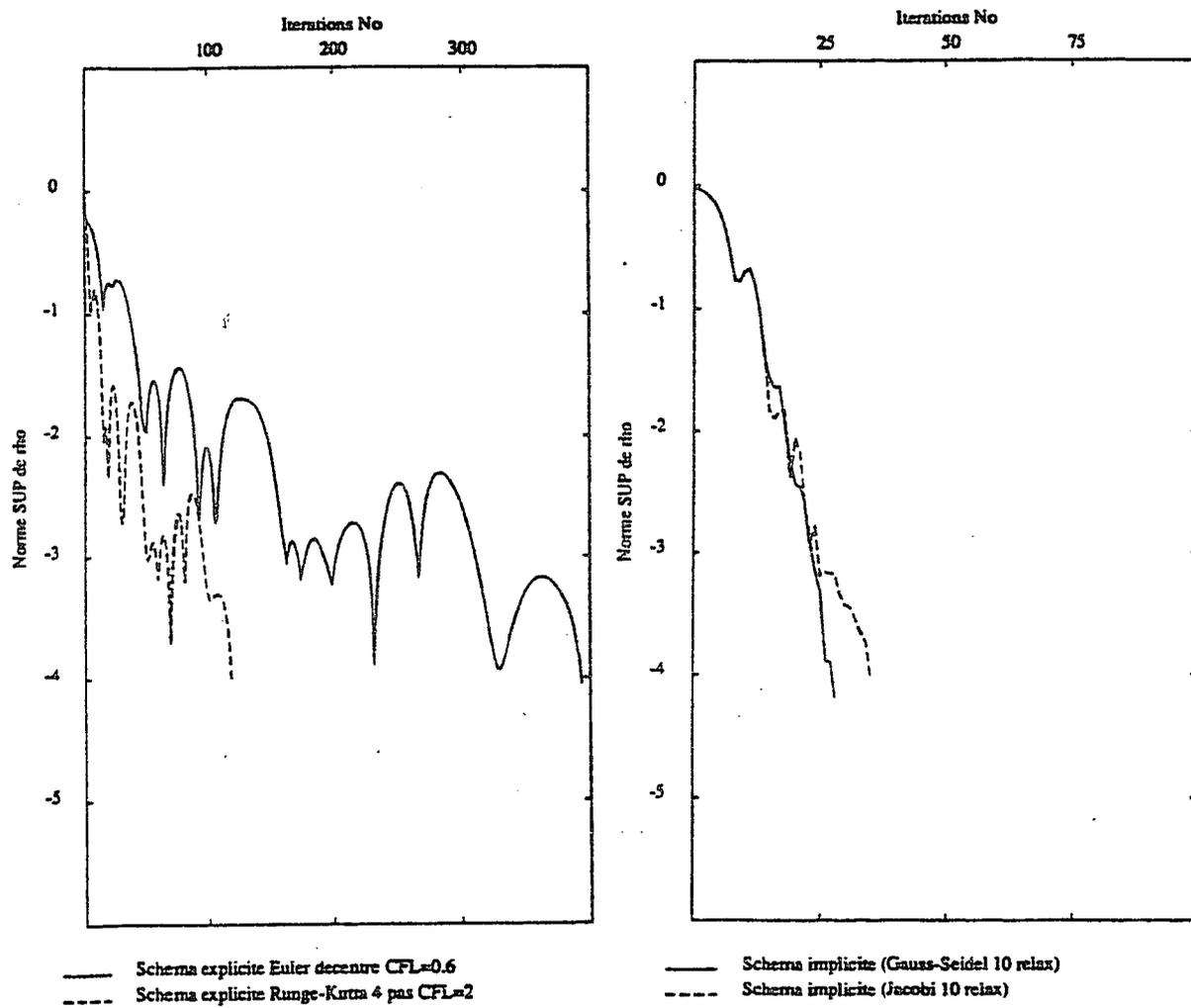
Indiquons pour terminer ce paragraphe que nous avons utilisé ce calcul d'écoulement autour d'un profil pour comparer l'efficacité du code de résolution vectorisé à celle d'un calcul réalisé en mode scalaire. Le code vectorisé utilise des techniques de coloriage (voir [2] et [31]), et emploie uniquement la méthode de Jacobi pour la résolution des systèmes linéaires. Un calcul sur le maillage de 3114 points interrompu lorsque le résidu atteint la valeur 10^{-6} et utilisant 15 balayages de Jacobi à chaque pas de temps nécessite respectivement 48 minutes en mode scalaire et 15 minutes en mode vectoriel sur Convex C1 (rapport d'efficacité égal à 3.2). Le même calcul nécessite 50 secondes sur un processeur de CRAY-2.

Nature du schéma	Coût CPU	Efficacité
Explicite RK1 CFL=0.6	6mn31sec	1.
Explicite RK4 CFL=2.0	6mn11sec	1.05
Implicite Gauss-Seidel 10 relax	3mn54sec	1.65
Implicite Jacobi 10 relax	3mn33sec	1.85

Temps CPU et efficacité des schémas
Figure 17



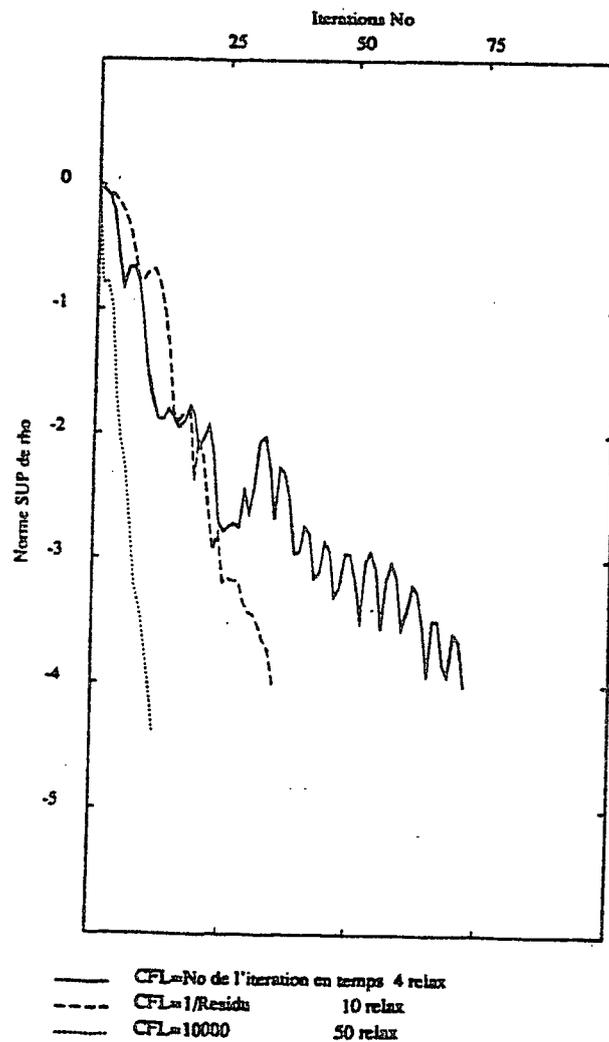
Profil d'aile NACA0012
Maillage 800 points
Figure 15



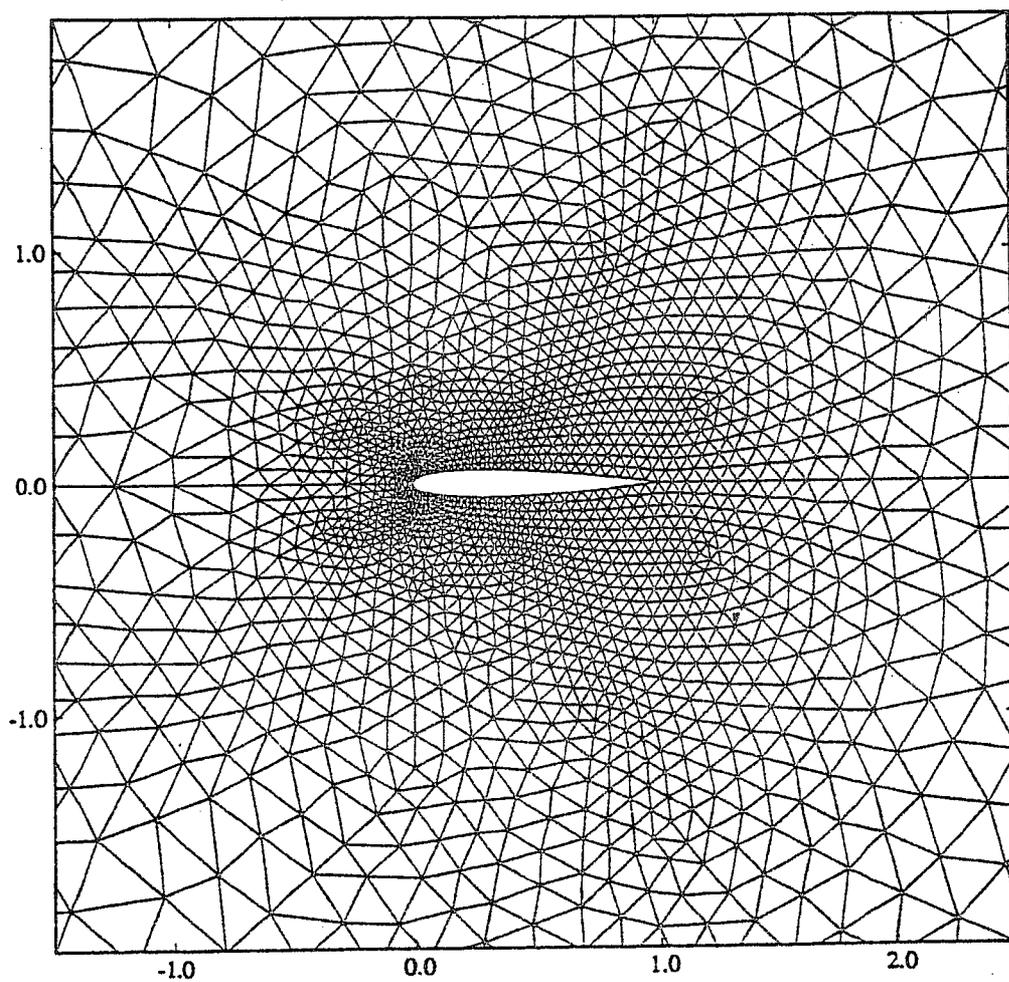
Courbes de convergence des schémas explicites et implicites
Figure 16

CFL(n)	Nbre relaxations	Coût CPU	Efficacité
n	4	6mn28 sec	1.
1/RES(n)	10	3mn33sec	1.8
10000.	50	2mn30sec	2.6

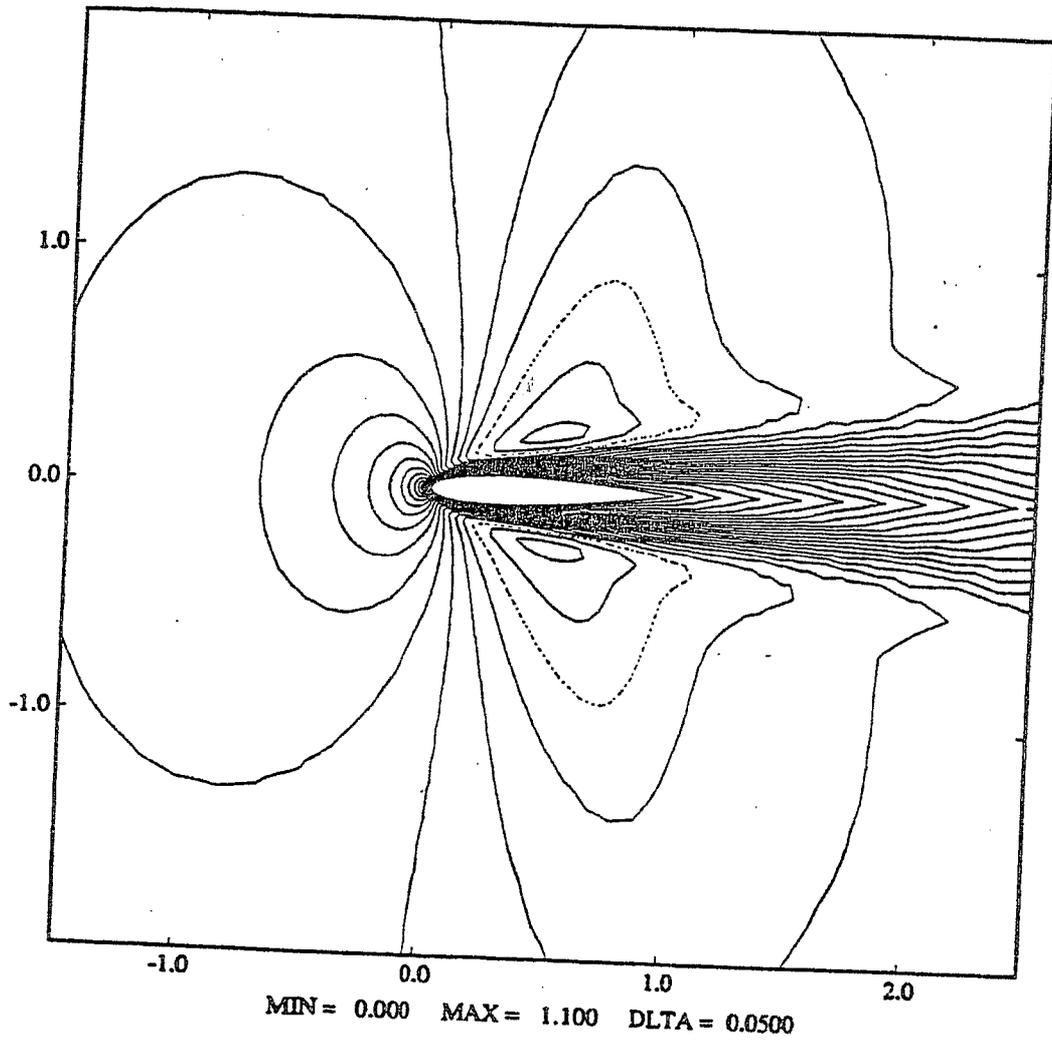
Temps CPU et efficacité des schémas
Figure 18



Résolution du système linéaire
Influence sur la convergence du schéma implicite
Figure 19



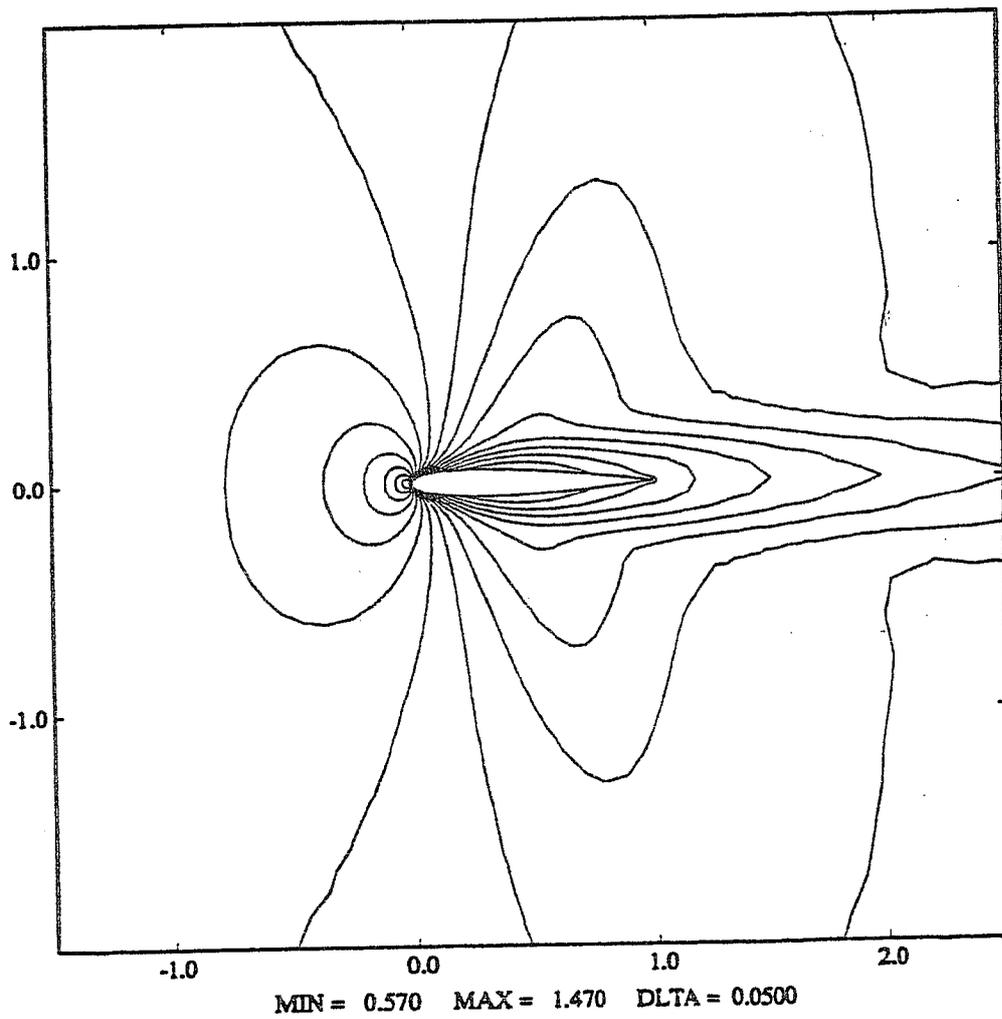
Profil d'aile NACA0012
Maillage 3114 points
Figure 20



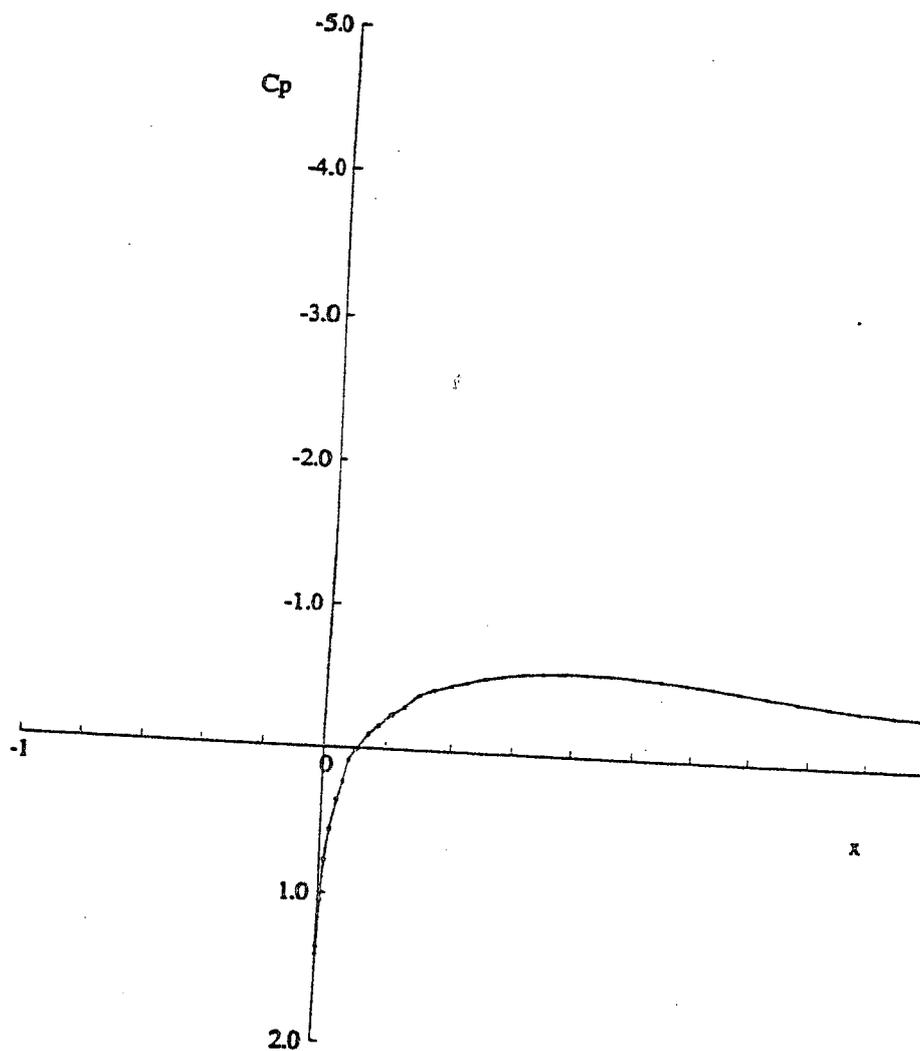
Profil d'aile NACA0012

Lignes iso-Mach

Figure 21



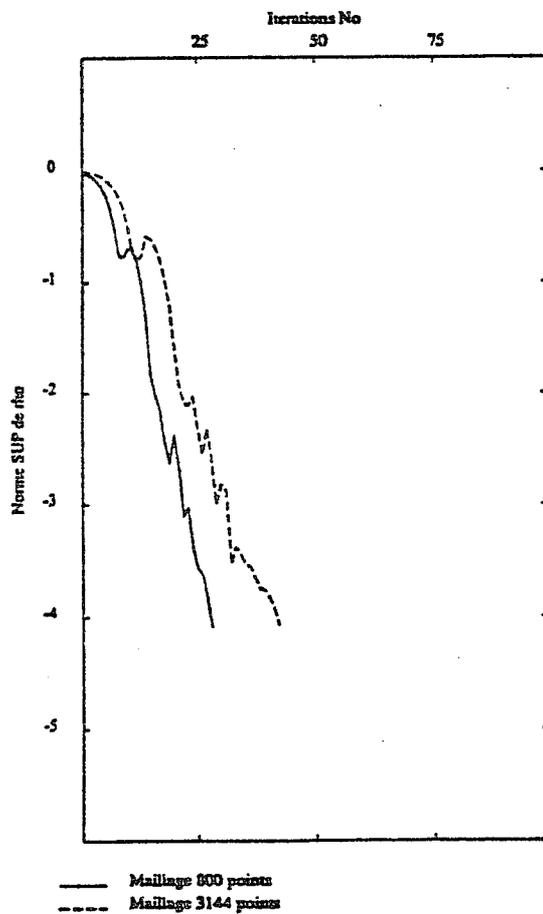
Profil d'aile NACA0012
Lignes iso-densité
Figure 22



Profil d'aile NACA0012
Coefficient de pression
Figure 23

Maillage	Coût CPU	Rapport
800 points	3mn37sec	1.
3144 points	20mn31sec	5.7

Temps CPU et efficacité du schéma implicite
Influence du maillage
Figure 24



Profil d'aile NACA0012
Courbes de convergence
Figure 25

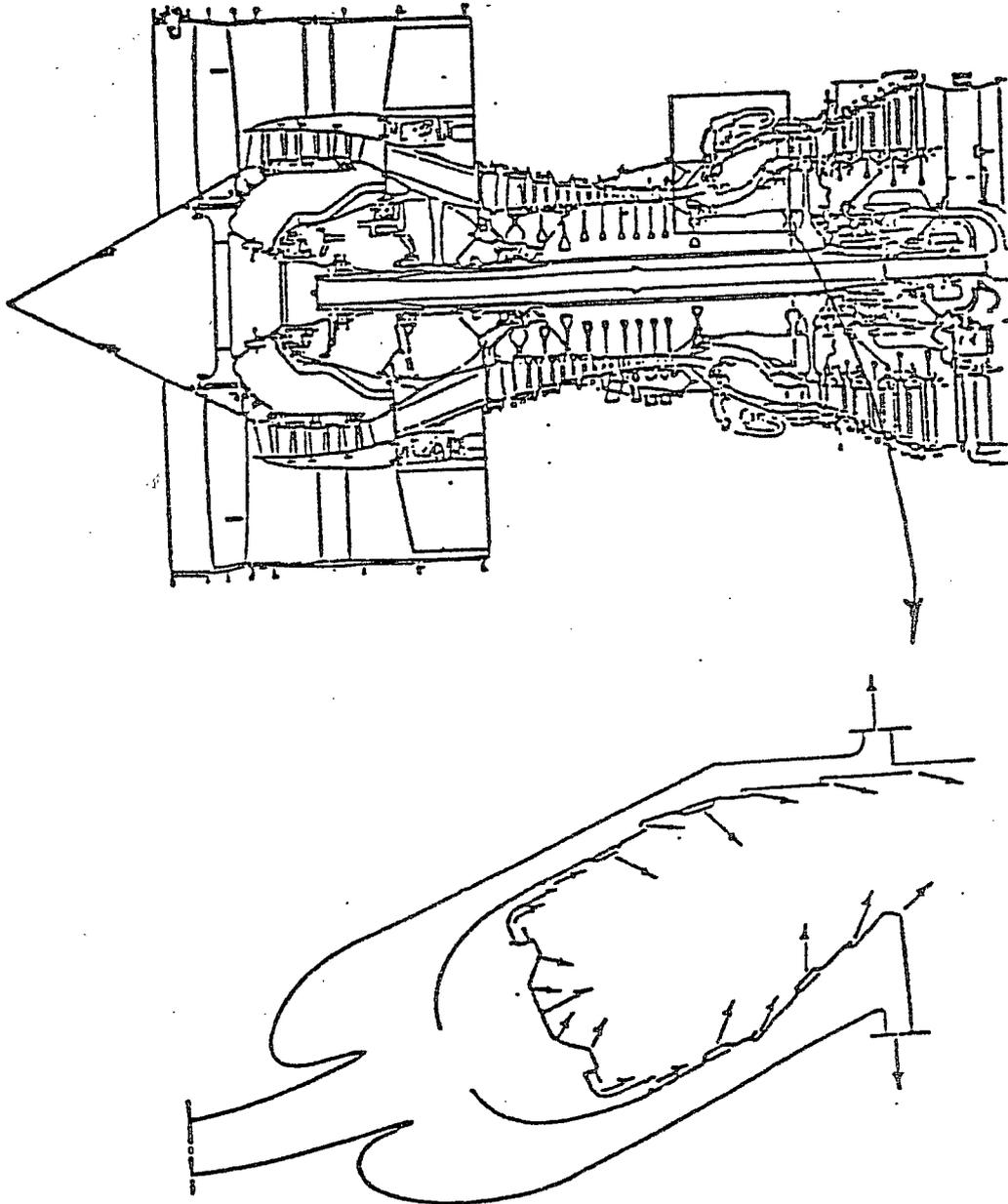
4.2 Écoulement subsonique interne

On considère maintenant l'écoulement subsonique (le nombre de Mach dans la section d'entrée est égal à 0.28) dans une géométrie de tête de chambre à combustion de moteur d'avion.

La simulation numérique de ce type d'écoulement est intéressante à plusieurs titres. D'une part, d'un point de vue pratique, la tête de chambre joue un rôle prépondérant dans le fonctionnement de la chambre à combustion proprement dite. Elle conditionne en effet l'alimentation de la chambre, et donc la combustion des gaz et le bon rendement du moteur dans son ensemble. D'autre part, d'un point de vue numérique, il s'agit là d'un écoulement interne dans une géométrie complexe, ce qui fait apparaître, par rapport à l'écoulement externe considéré ci-dessus, des problèmes nouveaux, comme par exemple les problèmes d'interaction entre les frontières amont et aval et les parois.

Les résultats numériques présentés ont été obtenus pour un nombre de Reynolds modéré: ($Re = 100$). Pour le traitement des frontières amont et aval, on emploie les techniques de décentrage présentées au chapitre 2, en utilisant des profils de vitesse paraboliques pour le champ W_∞ .

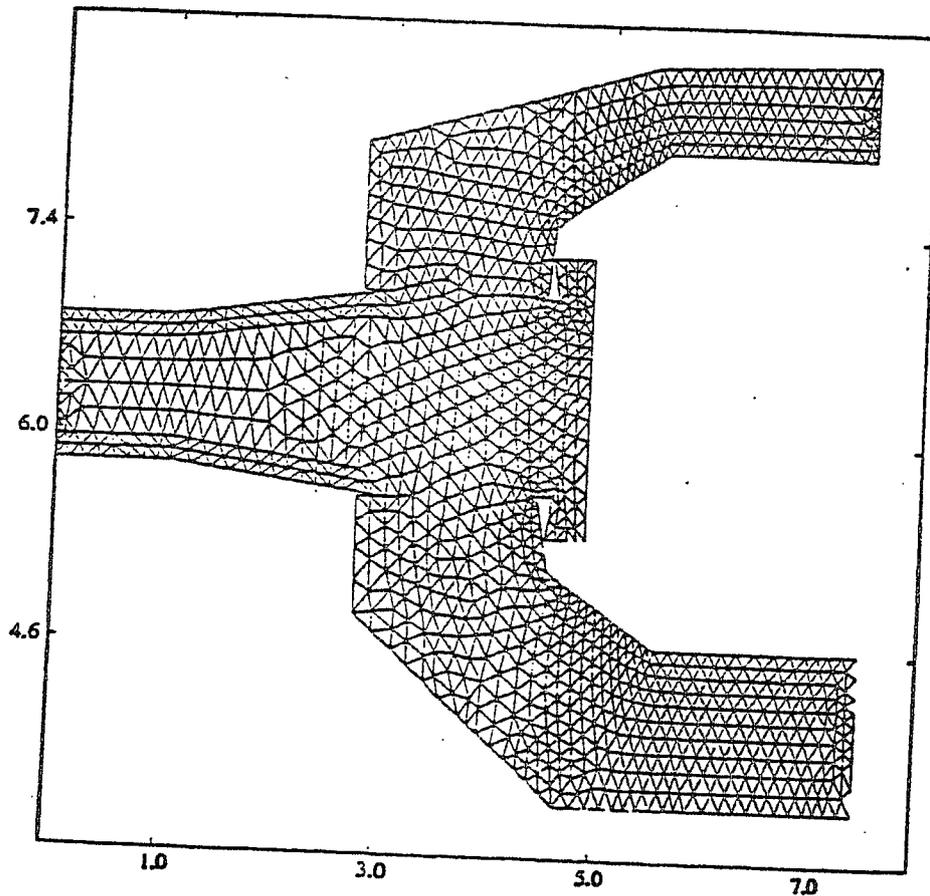
La difficulté de l'écoulement étudié conduit à une dégradation de la convergence de chacun des schémas explicites et implicites; toutefois, l'efficacité (définie comme dans la figure 17) du schéma implicite se trouve être meilleure que celle obtenue dans le cas de l'écoulement externe précédent (figures 28 et 29). Ces résultats ont été obtenus sur une grille grossière de 1185 points et 2112 triangles (figure 27). On montre ensuite une solution calculée sur un maillage fin de 4481 points et 8448 triangles (figure 30). Le champ de vitesse (figure 31) fait clairement apparaître l'intérêt de l'utilisation des profils paraboliques de vitesse dans le traitement de frontières amont et aval; on remarquera aussi l'existence des zones de recirculation qui sont de nature à ralentir la convergence vers l'état stationnaire. Les lignes iso-Mach et iso-densité sont présentées sur les figures 32 et 33. On notera en particulier le bon comportement aux points critiques (intersections entre les frontières amont ou aval et les parois) et la nature quasi incompressible de l'écoulement. On complète ces résultats par les lignes iso- C_p (coefficient de pression) sur la figure 34. Les coûts CPU et les courbes de convergence du schéma implicite sur les deux maillages sont données sur les figures 35 et 36, le système linéaire étant résolu avec 20 balayages de Gauss-Seidel.



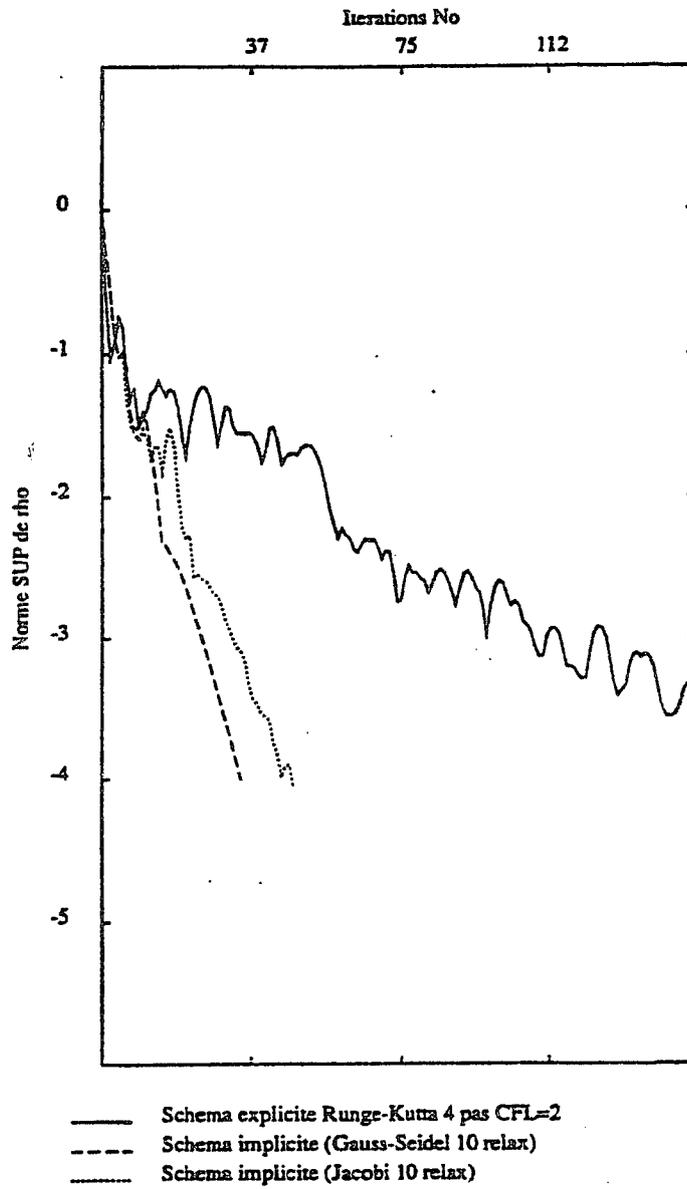
Coupe d'un moteur d'avion
Figure 26

Nature du schéma	Coût CPU	Efficacité
Explicite RK4	30mn12sec	.1.
Implicite Gauss-Seidel 10 relax	5mn59sec	5.05
Implicite Jacobi 15 relax	4mn59sec	6.05

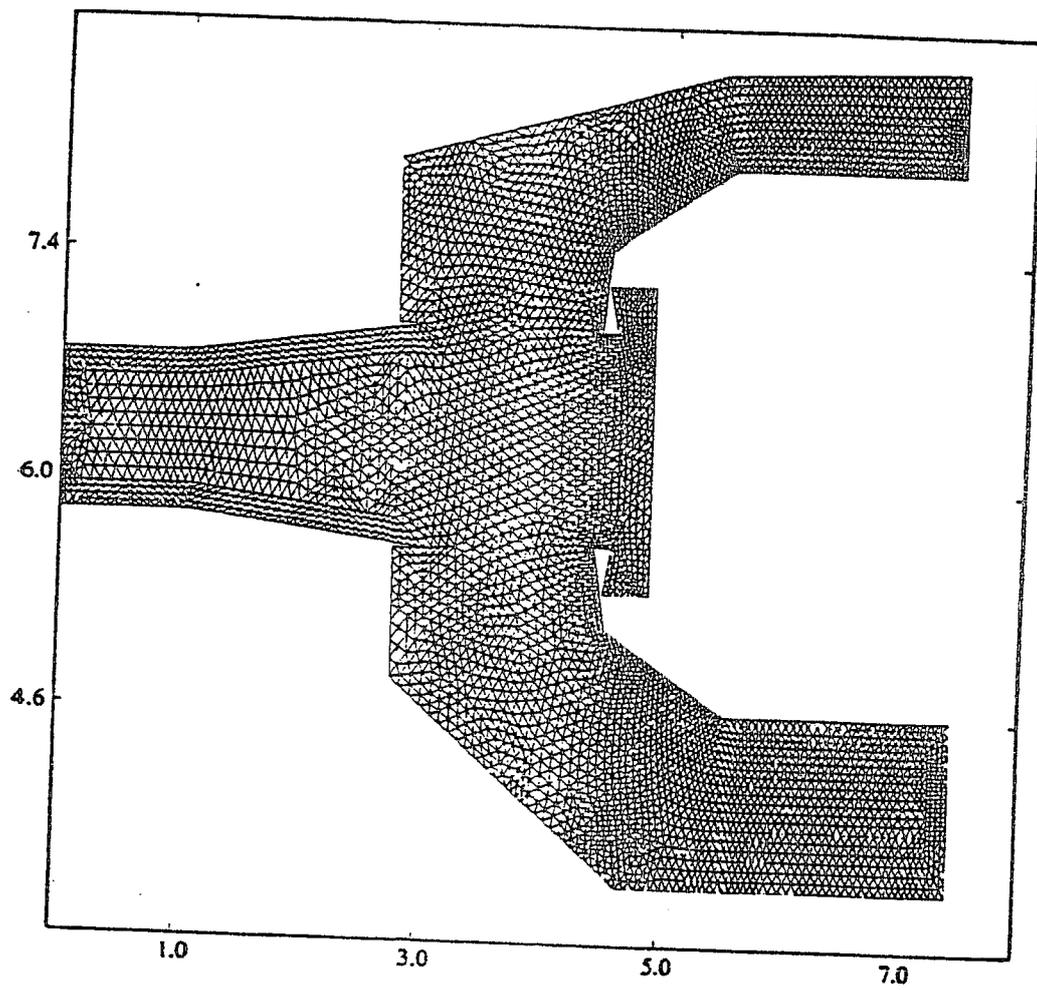
Temps CPU et efficacité des schémas
Figure 27



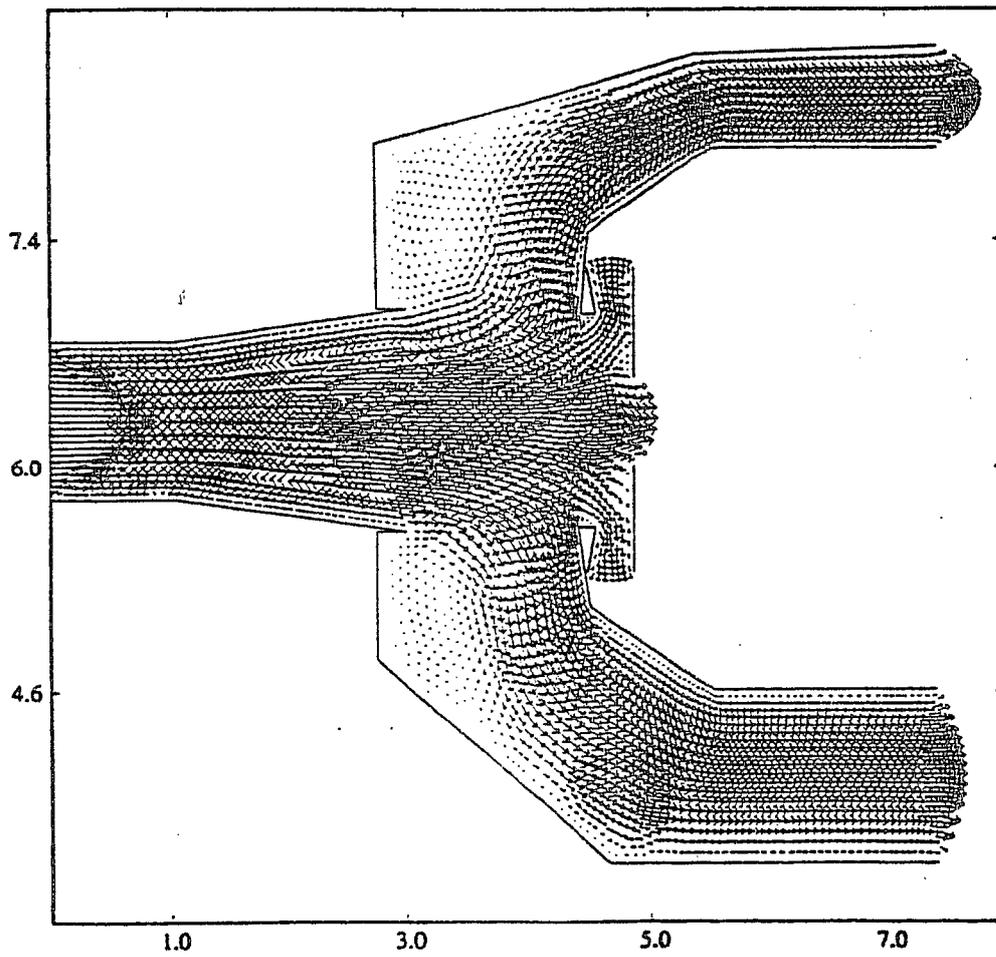
Tete de chambre à combustion
Maillage 1185 points
Figure 28



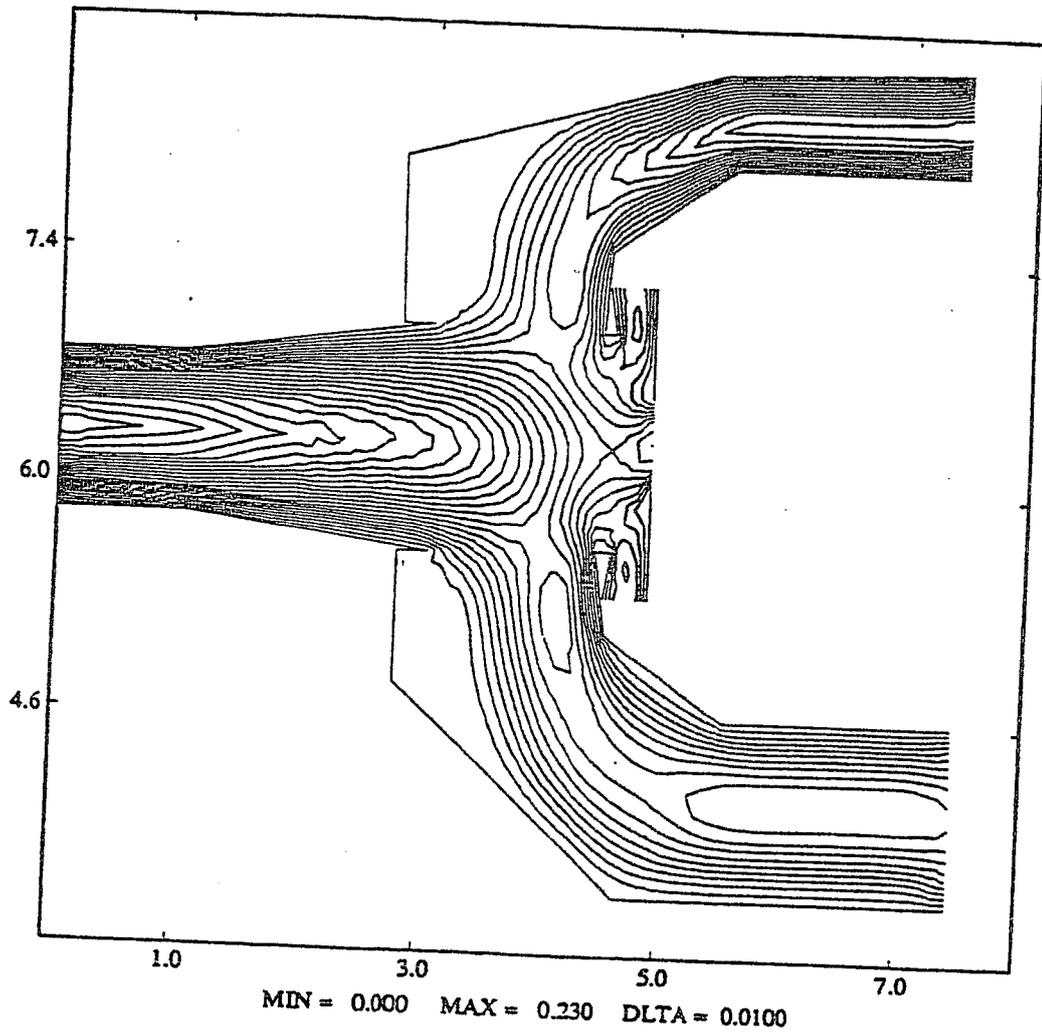
Courbes de convergence des schémas explicites et implicites
Figure 29



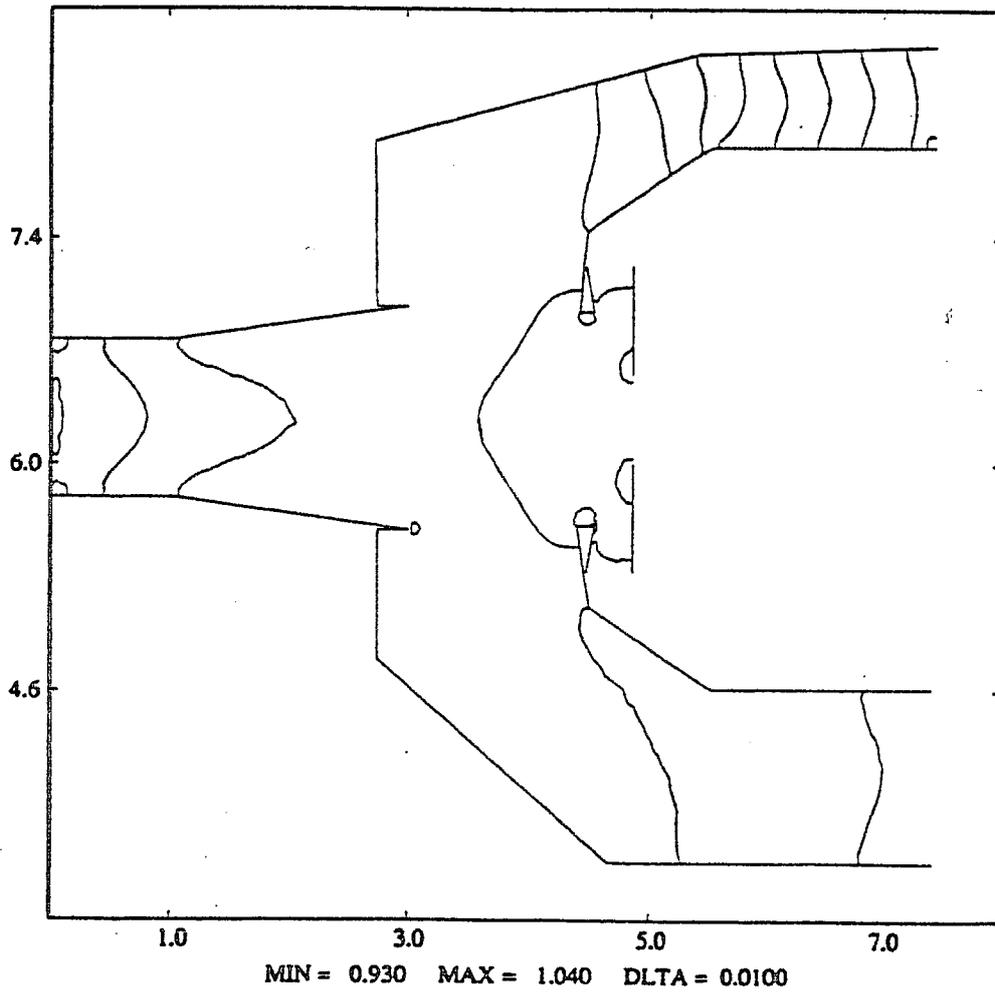
Tete de chambre à combustion
Maillage 4481 points
Figure 30



Tete de chambre à combustion
Champ de vitesse
Figure 31



Tete de chambre à combustion
Lignes iso-Mach
Figure 32



Tete de chambre à combustion
Lignes iso-densité
Figure 33

5 Annexe

5.1 Calcul des matrices Jacobiennes des flux visqueux

On précise dans cette partie le calcul des termes des matrices Jacobiennes des flux visqueux. On pourra se référer à Vijayasundaram [37] pour obtenir les expressions des matrices Jacobiennes des flux d'Euler.

Pour un triangle T de sommets k_1 , k_2 et k_3 on pose:

$$u(T) = \frac{1}{3} \sum_{k \in T} u_k \quad (\text{vitesse horizontale moyenne sur } T),$$

$$v(T) = \frac{1}{3} \sum_{k \in T} v_k \quad (\text{vitesse verticale moyenne sur } T),$$

$$\tau_{xx}(T) = \frac{2}{3} \mu \sum_{k \in T} \left(2u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} - v_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right),$$

$$\tau_{xy}(T) = \mu \sum_{k \in T} \left(u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} + v_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{yy}(T) = \frac{2}{3} \mu \sum_{k \in T} \left(2v_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} - u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right).$$

Les flux visqueux s'expriment alors comme:

$$R(T) = R(W_{k_1}, W_{k_2}, W_{k_3}),$$

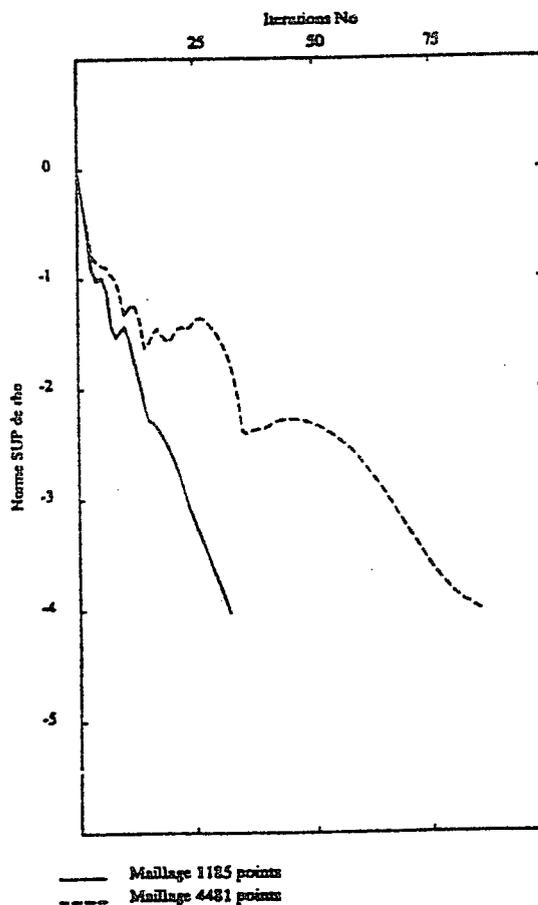
$$S(T) = S(W_{k_1}, W_{k_2}, W_{k_3}),$$

où W_{k_1} , W_{k_2} et W_{k_3} désignent les valeurs du champ des variables conservatives $(\rho, \rho u, \rho v, E)$ en chacun des sommets du triangle T . Les expressions des flux visqueux sont les suivantes:

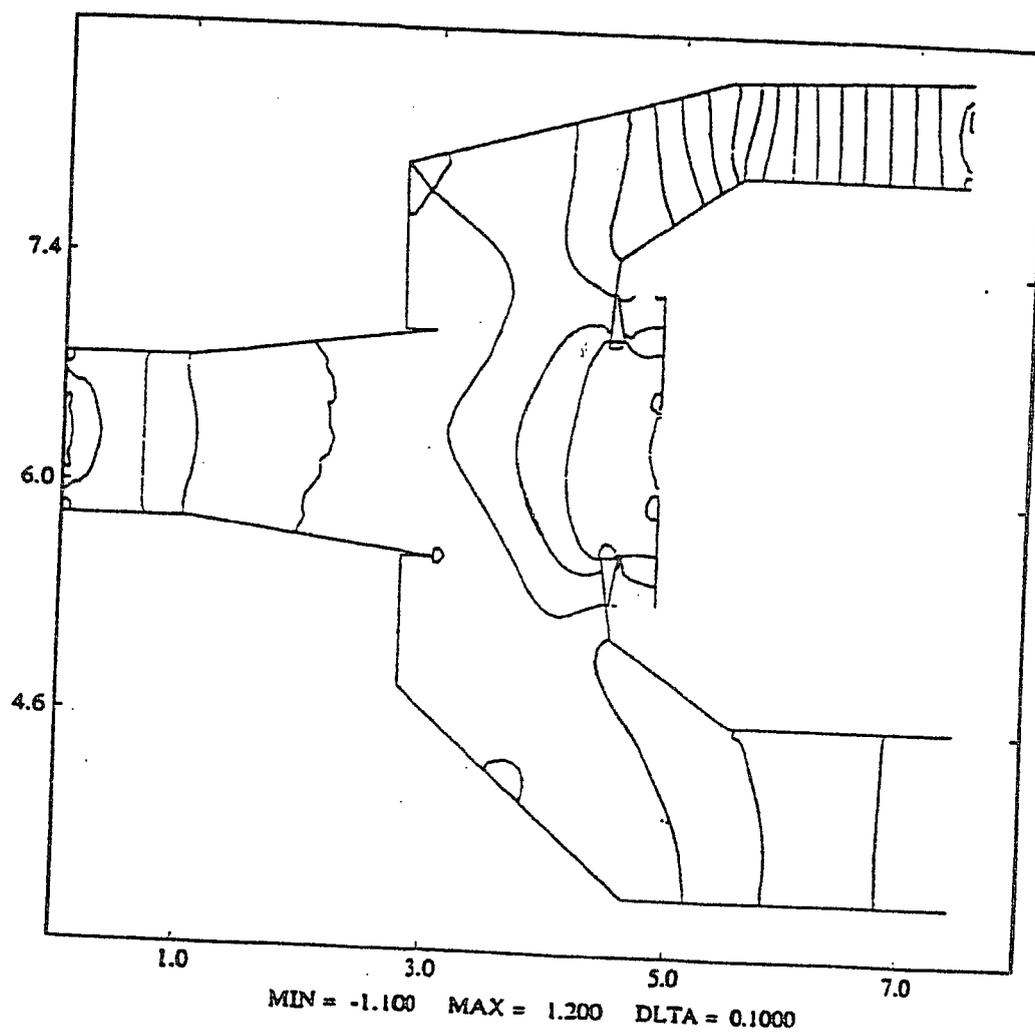
$$R(T) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \tau_{xx}(T) \\ \tau_{xy}(T) \\ u(T)\tau_{xx}(T) + v(T)\tau_{xy}(T) + \frac{\gamma\mu}{Pr} \sum_{k \in T} \epsilon_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \end{array} \right\},$$

Maillage	Coût CPU	Rapport
1185 points	7mn23sec	1.
4481 points	75mn16sec	10.4

Temps CPU et efficacité du schéma implicite
Influence du maillage
Figure 35



Tete de chambre a combustion
Courbes de convergence
Figure 36



Tete de chambre à combustion
Lignes iso- C_p
Figure 34

$$S(T) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \tau_{xy}(T) \\ \tau_{yy}(T) \\ u(T)\tau_{xy}(T) + v(T)\tau_{yy}(T) + \frac{\gamma\mu}{Pr} \sum_{k \in T} \epsilon_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \end{array} \right\}.$$

Les matrices Jacobiennes sont calculées en dérivant les flux $R(T)$ et $S(T)$ par rapport aux variables conservatives:

$$w_1 = \rho, \quad w_2 = \rho u, \quad w_3 = \rho v \quad \text{et} \quad w_4 = E,$$

ce qui donne:

$$u = \frac{w_2}{w_1}, \quad v = \frac{w_3}{w_1} \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{1}{w_1} \left(w_4 - \frac{w_2^2 + w_3^2}{2w_1} \right);$$

nous noterons dans la suite:

$$P^i(T) = \frac{\partial R(T)}{\partial W_i},$$

$$Q^i(T) = \frac{\partial S(T)}{\partial W_i}.$$

Toutes dérivations et simplifications faites, on obtient alors:

$$\begin{aligned} P^i(T)_{1,k} &= \frac{\partial R_1(T)}{\partial w_{k,i}} \\ &= 0 \quad \text{pour } k = 1 \text{ à } 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^i(T)_{2,1} &= \frac{\partial R_2(T)}{\partial w_{1,i}} \\ &= -\frac{2}{3} \mu \frac{1}{w_{1,i}^2} \left(2w_{2,i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - w_{3,i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^i(T)_{2,2} &= \frac{\partial R_2(T)}{\partial w_{2,i}} \\ &= \frac{4}{3} \mu \frac{1}{w_{1,i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^i(T)_{2,3} &= \frac{\partial R_2(T)}{\partial w_{3,i}} \\
 &= -\frac{2}{3} \mu \frac{1}{w_{1,i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^i(T)_{2,4} &= \frac{\partial R_2(T)}{\partial w_{4,i}} \\
 &= 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^i(T)_{3,1} &= \frac{\partial R_3(T)}{\partial w_{1,i}} \\
 &= -\mu \frac{1}{w_{1,i}^2} \left(w_{2,i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + w_{3,i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^i(T)_{3,2} &= \frac{\partial R_3(T)}{\partial w_{2,i}} \\
 &= \mu \frac{1}{w_{1,i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^i(T)_{3,3} &= \frac{\partial R_3(T)}{\partial w_{3,i}} \\
 &= \mu \frac{1}{w_{1,i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^i(T)_{3,4} &= \frac{\partial R_3(T)}{\partial w_{4,i}} \\
 &= 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^i(T)_{4,1} &= \frac{\partial R_4(T)}{\partial w_{1,i}} \\
 &= -\frac{1}{3w_{1,i}^2} (w_{2,i}R_2(T) + w_{3,i}R_3(T)) \\
 &+ u(T)P^i(T)_{2,1} + v(T)P^i(T)_{3,1} \\
 &- \frac{\gamma\mu}{Pr} \frac{1}{w_{1,i}^2} \left(w_{4,i} - \frac{w_{2,i}^2 + w_{3,i}^2}{w_{1,i}} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^i(T)_{4,2} &= \frac{\partial R_4(T)}{\partial w_{2,i}} \\
&= \frac{1}{3w_{1,i}} R_2(T) \\
&+ u(T) P^i(T)_{2,2} + v(T) P^i(T)_{3,2} \\
&- \frac{\gamma \mu w_{2,i}}{Pr w_{1,i}^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^i(T)_{4,3} &= \frac{\partial R_4(T)}{\partial w_{3,i}} \\
&= \frac{1}{3w_{1,i}} R_3(T) \\
&+ u(T) P^i(T)_{2,3} + v(T) P^i(T)_{3,3} \\
&- \frac{\gamma \mu w_{3,i}}{Pr w_{1,i}^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^i(T)_{4,4} &= \frac{\partial R_4(T)}{\partial w_{4,i}} \\
&= \frac{\gamma \mu}{Pr w_{1,i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^i(T)_{1,k} &= \frac{\partial S_1(T)}{\partial w_{k,i}} \\
&= 0 \quad \text{pour } k = 1 \text{ à } 4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^i(T)_{2,k} &= \frac{\partial S_2(T)}{\partial w_{k,i}} \\
&= P^i(T)_{3,k} \quad \text{pour } k = 1 \text{ à } 4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^i(T)_{3,1} &= \frac{\partial S_3(T)}{\partial w_{1,i}} \\
&= -\frac{2}{3} \mu \frac{1}{w_{1,i}^2} \left(2w_{3,i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} - w_{2,i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q^i(T)_{3,2} &= \frac{\partial S_3(T)}{\partial w_{2,i}} \\
&= -\frac{2}{3} \mu \frac{1}{w_{1,i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^i(T)_{3,3} &= \frac{\partial S_3(T)}{\partial w_{3,i}} \\ &= \frac{4}{3} \mu \frac{1}{w_{1,i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^i(T)_{3,4} &= \frac{\partial S_3(T)}{\partial w_{4,i}} \\ &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^i(T)_{4,1} &= \frac{\partial S_4(T)}{\partial w_{1,i}} \\ &= -\frac{1}{3w_{1,i}^2} (w_{2,i}S_2(T) + w_{3,i}S_3(T)) \\ &+ u(T)Q^i(T)_{2,1} + v(T)Q^i(T)_{3,1} \\ &- \frac{\gamma\mu}{Pr} \frac{1}{w_{1,i}^2} \left(w_{4,i} - \frac{w_{2,i}^2 + w_{3,i}^2}{w_{1,i}} \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^i(T)_{4,2} &= \frac{\partial S_4(T)}{\partial w_{2,i}} \\ &= \frac{1}{3w_{1,i}} S_2(T) \\ &+ u(T)Q^i(T)_{2,2} + v(T)Q^i(T)_{3,2} \\ &- \frac{\gamma\mu w_{2,i}}{Pr w_{1,i}^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^i(T)_{4,3} &= \frac{\partial S_4(T)}{\partial w_{3,i}} \\ &= \frac{1}{3w_{1,i}} S_3(T) \\ &+ u(T)Q^i(T)_{2,3} + v(T)Q^i(T)_{3,3} \\ &- \frac{\gamma\mu w_{3,i}}{Pr w_{1,i}^2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^i(T)_{4,4} &= \frac{\partial S_4(T)}{\partial w_{4,i}} \\ &= \frac{\gamma\mu}{Pr} \frac{1}{w_{1,i}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}. \end{aligned}$$

5.2 Calcul du pas de temps

On a vu que l'étude de stabilité réalisée sur l'équation monodimensionnelle d'advection-diffusion, dans le cas d'un schéma décentré précis au premier ordre en espace, conduit au critère de stabilité:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{a\Delta x + 2\mu}.$$

On présente ici une généralisation de cette formule au cas des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles. On s'inspire pour cela des travaux de Bristeau [6]. Nous devons en particulier tenir compte du passage maillage structuré/non structuré, le pas d'espace Δx étant remplacé par la hauteur d'un triangle. Apparaissent aussi dans la formule de pas de temps les nombres sans dimension de Reynolds et de Prandtl. On utilise d'autre part une technique de pas de temps local bien adaptée au calcul d'écoulements stationnaires. La formule du pas de temps s'exprime alors en fonction du CFL par:

$$\Delta t(a_i) = CFL \cdot \min_{T, a_i \in T} \Delta t(T),$$

avec:

$$(45) \quad \Delta t(T) = \frac{h^2(T)}{\left(\|\vec{V}_M(T)\| + c_M(T) \right) h(T) + \frac{2\gamma k}{\rho(T)PrRe}}.$$

Cette formule est basée sur l'expression suivante de l'équation de conservation de l'énergie:

$$E_t + [u(E+p)]_x + [v(E+p)]_y = \frac{\gamma k}{Pr} \Delta \left(\frac{E}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right) + (u\tau_{xx} + v\tau_{xy})_x + (u\tau_{xy} + v\tau_{yy})_y,$$

On rappelle que l'on suppose que le coefficient de conductivité thermique normalisé k est constant et égal à 1; on suppose également que le rapport $\frac{\gamma}{Pr}$ apparaissant dans (45) est supérieur à 1 (dans le cas contraire, on obtient une condition de pas de temps plus sévère en considérant les équations de quantité de mouvement plutôt que l'équation d'énergie). Dans (45), $h(T)$ est la plus petite hauteur du triangle T , $\vec{V}_M(T) = \max_{a_k \in T} \vec{V}(a_k)$ est la vitesse maximale sur le triangle T , $c_M(T) = \max_{a_k \in T} c(a_k)$ est la vitesse du son maximale dans le triangle T , et $\rho(T) = \min_{a_k \in T} \rho(a_k)$ est la masse volumique minimale dans le triangle T .

Références

- [1] ANDERSON D. A. - TANNEHILL J. C. - PLETCHER R. H. , *Computational fluid mechanics and heat transfer*, Hemisphere, Mc Graw-Hill, (1984).
- [2] ANGRAND F. - ERHEL J., *Simulation par éléments finis d'écoulements compressibles sur calculateurs vectoriels*, Rapport de Recherche INRIA No 622, (1987).
- [3] BEAM R.M. - WARMING R.F., *An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations*, AIAA J., 16, (4), pp. 393-402, (1978).
- [4] BRISTEAU M.O. - GLOWINSKI R. - PERIAUX J. - VIVIAND H., *Numerical simulation of compressible Navier-Stokes flows*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, 18, Vieweg, Braunschweig, (1987).
- [5] BRISTEAU M.O. - GLOWINSKI R. - MANTEL B. - PERIAUX J. - PERRIER P., *Numerical methods for incompressible and compressible Navier-Stokes problems*, Finite elements in fluids VI, Gallagher, Carey, Oden and Zienkiewicz éd., pp. 1-41, (1985).
- [6] BRISTEAU M.O. - PERIAUX J., *Finite-element methods for the calculation of compressible viscous flow using mesh refinement*, Lect. Notes in Comp. Fluid Dyn., Von Karman Institute for Fluid Dynamics, (1983).
- [7] CEA J., *Optimisation, théorie et algorithmes*, Dunod, Paris, (1971).
- [8] DERVIEUX A., *Steady Euler simulations using unstructured meshes*, Partial differential equations of hyperbolic type and applications, Geymonat éd., pp. 33-111, World Scientist, Singapore, (1985).
- [9] FEZOUÏ F., *Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis*, Rapport de Recherche INRIA No 358, (1985).
- [10] FEZOUÏ F. - STOUFFLET B., *A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes*, Rapport de Recherche INRIA No 517, (1986).
- [11] HARTEN A. - LAX P. - VAN LEER B., *On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Review, 25, pp. 35-61, (1983).

- [12] HOLLANDERS H. - LERAT A. - PEYRET R., *Three-dimensional calculation of transonic viscous flows by an implicit method*, AIAA J., **23**, (11), pp. 1670-1678, (1985).
- [13] HOLLANDERS H. - VIVIAND H., *The numerical treatment of compressible high Reynolds number flows*, Lect. Notes in Comp. Fluid Dyn., Von Karman Institute for Fluid Dynamics, (1980).
- [14] KOREN B., *Upwind schemes for the Navier-Stokes equations*, proceedings of the Second Int. Conf. on Hyperbolic Problems, Aachen, April 1988, to appear.
- [15] KOREN B., *Multigrid and defect correction for the steady Navier-Stokes equations*, Centrum voor Wiskunde en Informatica Report NM-R8803, (1988).
- [16] MARX Y., *Etude d'algorithmes pour les équations de Navier-Stokes compressible*, Thèse, Université de Nantes, (1987).
- [17] McCORMACK R.W., *A numerical method for solving the equations of compressible viscous flows*, AIAA J., **20**, (9), pp. 1275-1281, (1982).
- [18] McCORMACK R.W., *Current status of numerical solutions of the Navier-Stokes equations*, AIAA paper 85-0032, (1985).
- [19] McCORMACK R.W. - BALDWIN B.S., *A numerical method for solving the Navier-Stokes equation with application to shock-boundary layer interactions*, AIAA paper 75-1, (1975).
- [20] McCORMACK R.W. - LOMAX H., *Numerical solutions of compressible viscous flows*, Ann. Rev. of Fluid Mech. **11**, pp. 289-316, (1979).
- [21] MULDER W. A., *Dynamics of gas in a rotating galaxy*, Thesis, Rotterdam, (1985).
- [22] OSHER S. - SOLOMON F., *Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws*, Math. Comp., **38**, (158), pp. 339-374, (1982).
- [23] PAOLUCCI S. - CHENOWETH D.R., *Stability of the explicit finite differenced transport equation*, J. Comp. Phys., **47**, pp. 489-496, (1982).
- [24] PEYRET R. - VIVIAND H., *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour les fluides compressibles*, Lect. Notes in Comp. Science, **11**, (2), pp. 160-184, (1973).

- [25] PEYRET R., *Numerical simulation of compressible viscous flows*, Notes on Num. Fluid Mech., 18, pp. 41-58, (1987).
- [26] PEYRET R. - TAYLOR T.D., *Computational methods for fluid flows*, Springer Verlag, (1982).
- [27] ROE P.L., *Approximate Riemann solvers, parameters vectors and difference schemes*, J. Comp. Phys., 43, pp. 357-371, (1981).
- [28] ROSTAND P. - STOUFFLET B., *Finite-volume Galerkin methods for viscous gas dynamics*, Rapport de Recherche INRIA No 863, (1988).
- [29] STEGER J. - WARMING R.F., *Flux vector splitting for the inviscid gas dynamic with applications to finite-difference methods*, J. Comp. Phys., 40, (2), pp. 263-293, (1981).
- [30] STEVE H., *Méthodes implicites efficaces pour la résolution des équations d'Euler en éléments finis*, Rapport de Recherche INRIA No 779, (1987).
- [31] STEVE H., *Schémas implicites linéarisés décentrés pour la résolution des équations d'Euler en plusieurs dimensions*, Thèse, Université d'Aix-Marseille I, (1988).
- [32] STOUFFLET B., *Résolution numérique des équations d'Euler des fluides parfaits compressibles par des schémas implicites en éléments finis*, Thèse, Université Paris VI, (1984).
- [33] THOMAS J.L. - WALTERS R.W., *Upwind relaxation algorithms for the Navier-Stokes equations*, AIAA J., 25, (4), pp. 527-534, (1987).
- [34] THOMMEN H. U., *Numerical integration of the Navier-Stokes equations*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 17, pp. 369-384, (1966).
- [35] VARGA R.S., *Matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, Automatic Computation G. Forsythe ed. (1962)
- [36] VAN LEER B., *Towards the ultimate conservative difference scheme I: the quest of monotonicity*, Lect. Notes in Phys., 18, p. 163, (1972).
- [37] VIJAYASUNDARAM G., *Résolution numérique des équations d'Euler pour des écoulements transsoniques avec un schéma de Godunov en éléments finis*, Thèse, Université Paris VI, (1982).

