



**HAL**  
open science

# Manipulateurs paralleles, 4eme partie : mode d'assemblage et cinématique directe sous forme polynomiale

Jean-Pierre Merlet

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Merlet. Manipulateurs paralleles, 4eme partie : mode d'assemblage et cinématique directe sous forme polynomiale. [Rapport de recherche] RR-1135, INRIA. 1990, pp.74. inria-00075424

**HAL Id: inria-00075424**

**<https://inria.hal.science/inria-00075424>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Manipulateurs parallèles, 4eme partie :  
Mode d'assemblage et cinématique directe sous forme  
polynomiale**

**Parallel manipulators, 4th Part:  
Assembly-modes and direct kinematics polynomial  
formulation**

Jean-Pierre MERLET

## Résumé

Dans cette quatrième partie nous allons nous intéresser aux développements récents du problème de la cinématique directe, exprimée sous forme polynomiale, ainsi qu'à son corollaire qui est l'étude des modes d'assemblages, à variables articulaires fixées, des robots parallèles.

Dans une première partie on considère les manipulateurs parallèles plans. On y montre que la cinématique directe peut toujours s'exprimer sous la forme d'un polynôme mono-variable. Pour les robots planaires classiques un majorant du degré de ce polynôme est 6. Une résolution numérique permet de montrer que l'on peut effectivement définir un manipulateur possédant 6 modes d'assemblage.

On considère ensuite le cas d'un manipulateur spatial, à 6 degrés de liberté, où la plate-forme mobile est triangulaire et des longueurs de segment variables (type TSSM). On montre alors géométriquement qu'il y a au plus 16 manières de monter le manipulateur, puis que le problème de la cinématique directe peut se ramener effectivement à la résolution d'un polynôme de degré 16, dont on donne la formulation analytique. On présente un exemple où le nombre de montage maximum est atteint.

On étudie le même problème pour deux architectures nouvelles développées au sein du projet PRISME, ainsi que pour la fameuse plate-forme de Stewart.

On considère ensuite les diverses architectures de robot parallèle proposées dans la littérature pour lesquels l'on établit dans chaque cas un majorant du nombre de montage possible et l'on donne le degré du polynôme qui a pu être trouvé.

Des résultats précédents on déduit l'impossibilité de résoudre analytiquement le problème de la cinématique directe.

## Abstract

In this fourth part we will consider the recent development of the problem of direct kinematics and the corollary problem of the assembly mode of parallel manipulators.

In a first part we consider the case of planar manipulators and we show that the direct kinematics problem can be always expressed as a polynomial. For the case of classical planar manipulators the number of assembly mode is at most 6 and we exhibit a manipulator for which this number is reached

We consider then a 6 d.o.f. spatial manipulator in the case where the mobile plate is a triangle and the links lengths are time-varying. Using geometrical

considerations we show that the number of assembly modes is at most 16 and that the direct kinematics problem is equivalent to the resolution of a sixteenth order polynomial, which is presented. We exhibit one example for which the maximum number of assembly mode is reached.

The same study is done for two others mechanical architectures for which prototypes are currently under development in our laboratory and for the famous Stewart platform.

Then various architectures of parallel manipulators are studied. In each case we establish the maximum number of assembly mode and give the degree of the polynomial which has been found.

From the previous results we deduce that the direct kinematic problem cannot be solved analytically.

## Chapitre 1

# Introduction

Depuis peu on assiste à des développements nombreux sur le problème de la cinématique directe des robots parallèles. Ce problème se pose de la manière suivante : étant donnée une géométrie de robot parallèle est-il possible de déterminer la position et l'orientation du plateau mobile à partir de la connaissance des coordonnées articulaires?

Si la résolution inverse admet une solution triviale, comme nous l'avons vu dans [2], ce problème n'admet, en général, pas de solution analytique comme nous allons le montrer; pourtant il intervient de manière pratique pour le contrôle des robots parallèles, par exemple lors d'une évolution sous capteurs dans un environnement inconnu ou bien si l'on utilise le manipulateur comme capteur d'efforts. A la base de ce problème nous disposons d'un certain nombre d'équations non linéaires (autant que de segments pour les robots pleinement parallèles) caractérisant la cinématique inverse [2]. Les évolutions récentes dans le domaine ont pour but de ramener la résolution de ce système d'équations à celle d'un polynôme mono-variable de degré le plus faible possible.

Une telle approche va permettre de répondre, au moins partiellement, à la question du nombre de mode d'assemblage d'un robot parallèle, c'est-à-dire au nombre de montages différents que l'on peut obtenir pour une géométrie fixée du manipulateur (c'est-à-dire pour des positions de points d'articulations et des coordonnées articulaires fixées). Ce nombre est en effet trivialement lié au degré d'un éventuel polynôme mono-variable permettant de résoudre la cinématique directe. Ce problème est différent de celui des configurations singulières (traité dans [3]) où l'on cherchait à déterminer les configurations du manipulateur où le système d'équations de la cinématique inverse n'admettait pas, localement, une solution unique.

Un des buts de ce rapport est de présenter des méthodes, basées sur la théorie des mécanismes, permettant de calculer effectivement un majorant du nombre de

mode d'assemblage et, par conséquent, de déterminer un majorant du degré du polynôme minimal. On tentera alors de déterminer effectivement un polynôme de ce type pour les différentes architectures proposées dans la littérature. Cela sera possible, le plus souvent, en se ramenant à des mécanismes équivalents de trois type pour lesquelles on peut déterminer un majorant du nombre de montage, ainsi qu'un polynôme permettant de résoudre la cinématique directe.

Nous avons vu dans un précédent rapport [4] que des solutions numériques au problème de la cinématique directe existent et l'on peut se demander si la résolution polynomiale peut apporter un plus à ces méthodes, soit du point de vue du temps de calcul, soit du point de vue de la capacité de trouver effectivement une solution: nous avons en effet proposé des algorithmes itératifs dont la convergence n'est a priori pas prouvée dans tout le domaine de travail du manipulateur (on avait cependant remarqué que dans la plupart des cas pratiques on disposait d'une bonne approximation de la solution et que, par conséquent, le problème de la convergence ne se posait guère). On complète ainsi notre analyse de l'efficacité réelle des méthodes de résolution numérique de la cinématique directe.

On va utiliser dans ce rapport un nombre important de travaux, parfois anciens, sur la théorie des mécanismes. Ce domaine, s'il n'est plus guère en vogue actuellement à notre connaissance, a vu des travaux théoriques conduisant à des résultats puissants. Par exemple dans le cas des robots parallèles planaires un théorème dû à Freudenstein [1] permet d'affirmer que le nombre de montage est fini et que la cinématique directe doit pouvoir s'exprimer sous une forme polynomiale. De plus l'utilisation des systèmes de calcul formel permet parfois de résoudre des problèmes laissés pour compte par ses grands "anciens", en raison de la complexité des calculs à mener. On va d'ailleurs prouver dans ce rapport une conjecture de Hunt sur les mécanismes spatiaux à quatre barres articulés.

Dans le domaine de la cinématique directe des robots parallèles spatiaux les seuls résultats connus sont ceux de Nanua et Waldron [11] établissant un polynôme de degré 24 pour un TSSM, ceux de Charentus et Renaud [12] qui propose un polynôme de degré 16 dans le même cas ( et présente un manipulateur où effectivement 16 modes d'assemblage sont possibles, à partir d'un exemple que nous leur avons fourni), un conjecture de Hunt [14] sur un majorant du nombre de montage d'un TSSM et enfin le principe d'établissement d'un polynôme de degré 16 pour une architecture spécifique proposée par Kohli [18]. Notons aussi qu'aucune comparaison chiffrée n'a été effectuée pour l'évaluation des performances des méthodes numériques de résolution de la cinématique directe.

Le sujet de ce rapport n'était pas prévu dans le déroulement de cette monographie, tel que décrit dans [4] (modélisation dynamique, outil d'aide à la conception et à la commande, expérimentation sur de nouvelles architectures,

6 Mode d'assemblage des robots parallèles et cinématique direct

coopération) mais l'intérêt du sujet et des résultats obtenus a justifié son exposé.

## Chapitre 2

# Les robots parallèles planaires

## 2.1 Une première architecture de robot parallèle planaire

On considère ici le cas des robots parallèles planaires tels que celui décrit dans la figure 2.1. Ce manipulateur dispose de 6 articulations rotoïdes d'axe perpendi-

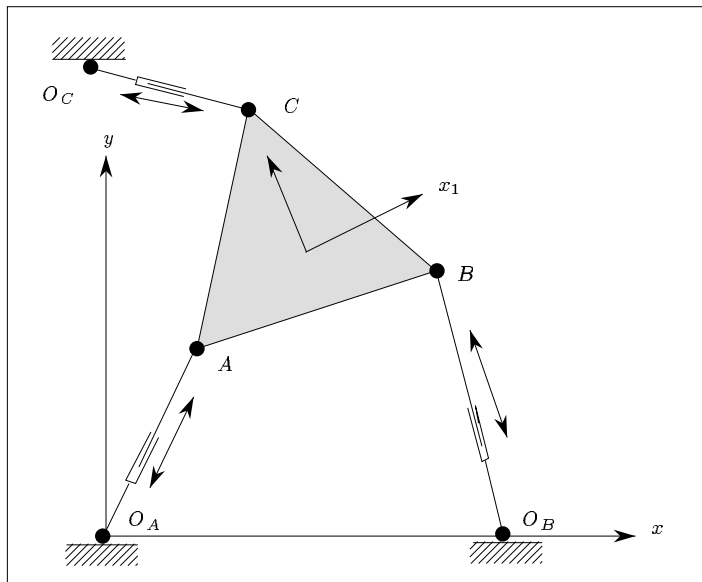


Figure 2.1: Un robot parallèle planaire

culaire au plan en  $O_A$ ,  $O_B$ ,  $O_C$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Le corps mobile est le triangle  $A B C$ . Des vérins permettent de modifier la longueur des trois segments  $O_A A$ ,  $O_B B$ ,  $O_C C$  et ainsi de contrôler la position et l'orientation du plateau mobile.



On définit un repère de référence d'origine  $O_A$  et un repère mobile d'origine un point arbitraire  $G$  du plateau mobile. La matrice de rotation  $R$  permet de passer du repère mobile à un repère d'origine  $G$  d'axe  $x, y$ .

### 2.1.1 Cinématique inverse

Les équations de la cinématique inverse permettent de calculer les longueurs  $r_a, r_b, r_c$  des segments pour une position et une orientation donnée du plateau mobile. En effet on peut calculer les vecteurs  $\mathbf{O}_A\mathbf{A}, \mathbf{O}_B\mathbf{B}, \mathbf{O}_C\mathbf{C}$  par :

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_A\mathbf{A} &= \mathbf{O}_A\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{A} \\ &= \mathbf{O}_A\mathbf{G} + R\mathbf{G}\mathbf{A}_r\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_B\mathbf{B} &= \mathbf{O}_B\mathbf{O}_A + \mathbf{O}_A\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{B} \\ &= \mathbf{O}_B\mathbf{O}_A + \mathbf{O}_A\mathbf{G} + R\mathbf{G}\mathbf{B}_r\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_C\mathbf{C} &= \mathbf{O}_C\mathbf{O}_A + \mathbf{O}_A\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{C} \\ &= \mathbf{O}_C\mathbf{O}_A + \mathbf{O}_A\mathbf{G} + R\mathbf{G}\mathbf{C}_r\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

Chacun des éléments de droite de ces équations est complètement défini soit par la géométrie du manipulateur, soit par la donnée de la position et de l'orientation du plateau mobile. La longueur des segments est alors déterminée par la norme des vecteurs  $\mathbf{O}_A\mathbf{A}, \mathbf{O}_B\mathbf{B}, \mathbf{O}_C\mathbf{C}$ .

### 2.1.2 Cinématique directe

Même pour ce cas plan l'inversion des équations est relativement complexe. On peut d'ailleurs se poser la question de l'unicité de la solution, non pas d'un point de vue local comme dans [3], mais d'un point de vue global. Ce problème consiste à compter le nombre de configurations différentes que peut prendre le plateau mobile pour des valeurs fixées des coordonnées articulaires. En d'autres termes, dans le cas considéré, on fixe les longueurs des segments et la géométrie du manipulateur et on cherche à déterminer les différentes façons de monter le plateau mobile : c'est ce que nous appellerons les *modes d'assemblage*.

Pour tenter d'estimer a priori le nombre de mode d'assemblage dans le cas considéré, l'on va examiner un sous-mécanisme obtenue en désolidarisant un des points d'articulation du plateau mobile du segment correspondant.

### 2.1.3 Le mécanisme à 4 barres

Le mécanisme obtenu est décrit en figure 2.2. Rappelons que le mécanisme considéré ici n'est composé que d'articulations rotoïdes et que, dans le cas de la cinématique directe, les longueurs des segments sont fixées. Le mécanisme possède alors un degré de liberté.

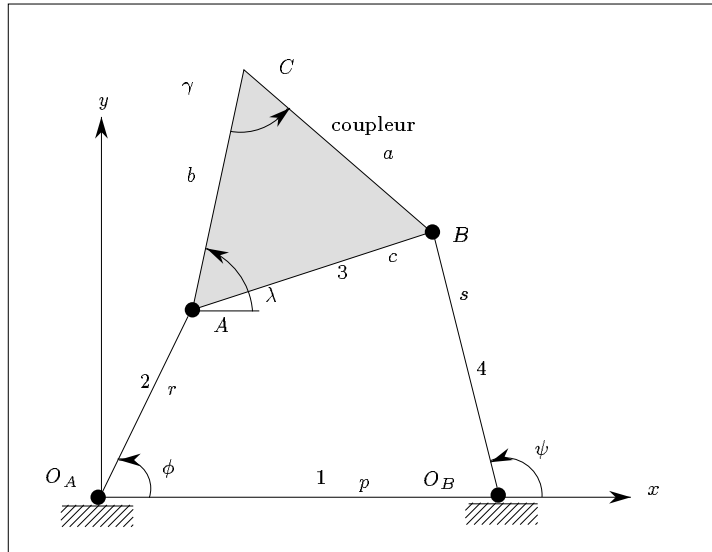


Figure 2.2: Le mécanisme à 4 barres

Ce mécanisme est donc constitué de 4 barres articulées 1, 2, 3, 4. A la barre 3 est rigidement lié un corps que nous appellerons le *coupleur*, dont la géométrie est définie par les longueurs  $a, b$  et l'angle  $\gamma$ . Le reste du mécanisme est défini par les longueurs des barres 1, 2, 4, soit  $p, r, s$ , et par deux angles : l'angle  $\phi$  entre les barres 1 et 2 et l'angle  $\psi$  entre les barres 1 et 4. Si l'on fait varier l'un de ces angles le coupleur décrit une courbe. Pour ce type de mécanisme Freudenstein [1] a établi que cette courbe était forcément algébrique. Le segment restant décrivant un cercle on peut donc d'ores et déjà conclure que le nombre de mode d'assemblage est fini (il sera au plus égal à  $2n$  si  $n$  est le degré de la courbe du coupleur).

### 2.1.3.1 Courbe du coupleur et circularité

Le mécanisme à 4 barres, décrit précédemment, a été particulièrement bien étudié [5,6]. On va supposer qu'un moteur entraîne en rotation le segment 2, modifiant ainsi l'angle  $\phi$  du mécanisme et l'on va s'intéresser aux déplacements du point  $C$ , de coordonnées  $(X, Y)$ , du coupleur. Il est bien connu que ce point décrit une sextique  $\mathcal{S}$  (voir en Annexe 5.1 pour le calcul de la courbe du coupleur). Cette sextique a une propriété particulièrement intéressante pour notre étude : elle est *tricirculaire*, c'est-à-dire qu'elle a trois points doubles sur le cercle imaginaire.

Faisons un rappel de certaines notions sur les intersections des courbes algébriques, qui nous seront très utiles par la suite.

Une courbe algébrique de degré  $n$  intersecte une courbe algébrique de degré  $m$  en général en  $nm$  points. Ce résultat bien connu, peut sembler paradoxal si on l'applique aux cercles: il conduirait à l'existence de 4 points d'intersection. Ce paradoxe s'explique de manière simple que nous allons rappeler pour mémoire. Considérons l'équation d'un cercle, dont les coordonnées du centre sont  $(a, b)$ , de rayon  $r$  :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

que l'on réécrit, en introduisant un nouveau terme, sous la forme :

$$\left(\frac{x}{w} - a\right)^2 + \left(\frac{y}{w} - b\right)^2 - r^2 = 0$$

Le terme  $w$  est simplement un facteur d'échelle. L'équation précédente est dite homogène puisque l'on peut l'écrire sous la forme :

$$(x - aw)^2 + (y - bw)^2 - r^2 w^2 = 0$$

où tous les termes sont maintenant de degré 2. Le système  $xyw$  est alors appelé un système de coordonnées planes homogènes. La ligne définie par  $w = 0$  doit intersecter le cercle en deux points, définis par :

$$x^2 + y^2 = 0 \tag{2.5}$$

c'est-à-dire aux points  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  définis par :

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} w = 0 \\ x = iy \end{cases} \quad \mathcal{S}_2 \begin{cases} w = 0 \\ x = -iy \end{cases}$$

Ces deux points imaginaires sont appelés les *points circulaires imaginaires* et l'équation 2.5 définit le *cercle imaginaire*. Puisque les termes  $a, b, r$  n'interviennent pas dans les coordonnées des points circulaires imaginaires tous les cercles du plan les contiennent. Donc deux cercles du plan ne peuvent s'intersecter en plus de deux points réels.

Si une courbe du plan contient les points  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  comme point double, triple.. on dira alors que cette courbe a une *circularité* de 2, 3...

Revenant à notre sextique  $\mathcal{S}$  le terme tricirculaire signifie simplement que sa circularité est de 3. En effet (voir [6]) l'équation de la sextique exprimée en coordonnées homogènes s'écrit pour  $w = 0$  :

$$(x^2 + y^2)^3 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma) = 0 \tag{2.6}$$

ce qui, en dehors du cas où le quadrilatère  $O_A A B O_B$  est un triangle, se ramène à :

$$(x^2 + y^2)^3 = 0 \tag{2.7}$$

La sextique contient donc les points  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  comme points triples. Remarquons aussi que la circularité de cette courbe est maximale, puisqu'une sextique ne peut avoir une circularité supérieure à 3.

### 2.1.3.2 Points doubles et tacnode

Il est bien connu qu'une courbe de degré  $n$  peut avoir un maximum de  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  points doubles. Dans le cas de la sextique  $\mathcal{S}$  on aura donc un maximum de 10 points doubles. Mais les points  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  génèrent d'ores et déjà 6 points doubles. Il reste donc un maximum de 4 points doubles possibles.

La figure 2.3 illustre quelques exemples de courbes de coupleur qui sont soit unicursal, soit bicursal, avec points doubles ou non.

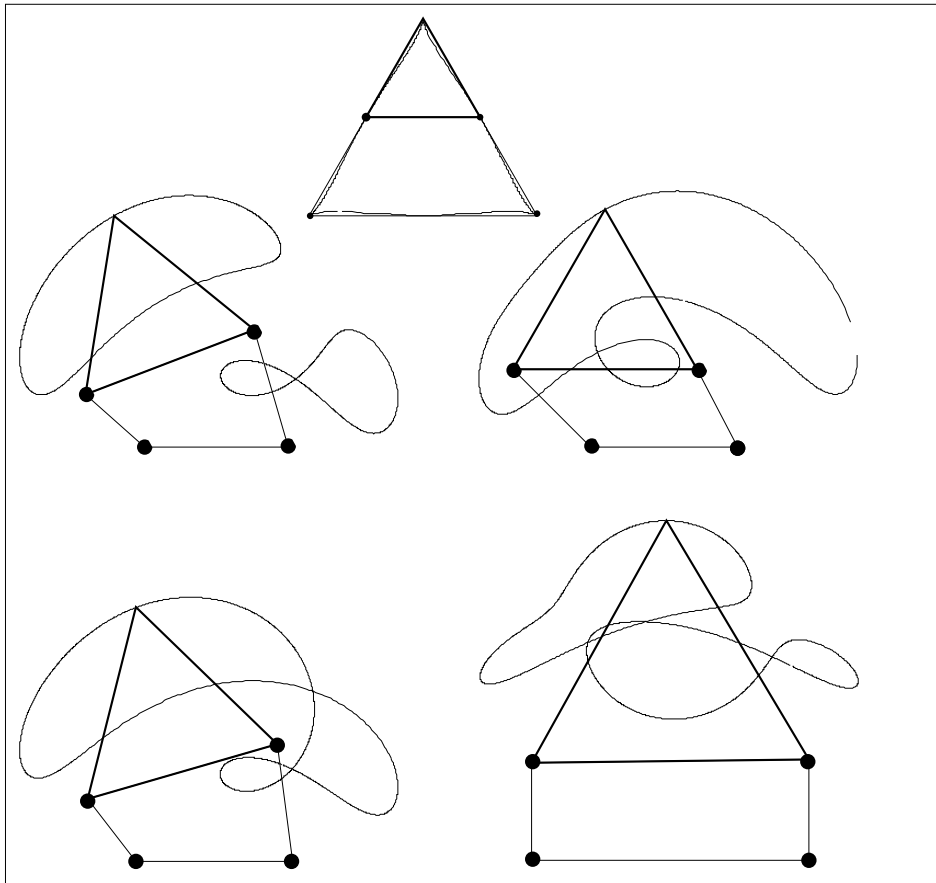


Figure 2.3: Exemple de courbes de coupleur

Deux points doubles réels de la courbe d'un coupleur peuvent être confondus, c'est-à-dire que la courbe du coupleur se touche elle-même: on appelle ces points des *tacnodes*. Par exemple si l'on pose  $\gamma = 0$  ou  $\gamma = \pi$  on peut montrer que les seuls points doubles ont comme coordonnées  $y = 0$ . On montre alors que dans ce cas la courbe du coupleur pour  $y = 0$  se ramène à un polynôme de degré 3 (voir Annexe 5.2 pour ce calcul), qui a donc au moins une racine réelle. De

plus, dans ce cas, la courbe du coupleur est symétrique par rapport à l'axe  $x$  et, par conséquent, le ou les points doubles seront des tacnodes. Il existe donc un maximum de 3 tacnodes et un minimum de 1 pour un coupleur de ce type. La figure 2.4 montre quelques exemples de tacnodes.

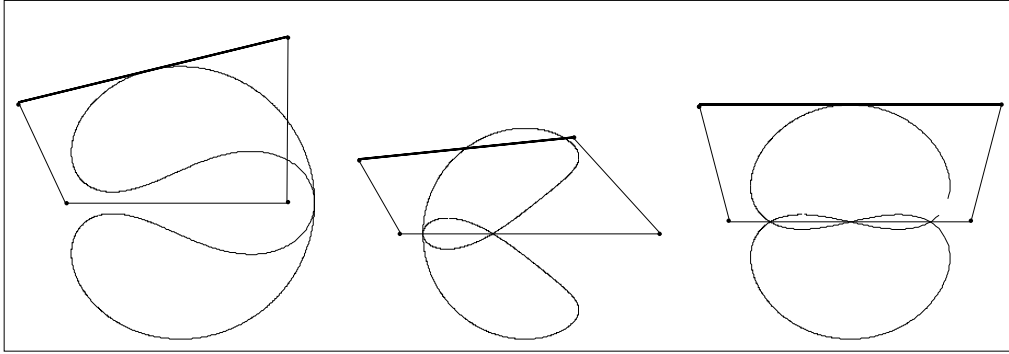


Figure 2.4: Exemple de tacnodes

## 2.1.4 Mode de montage

### 2.1.4.1 Cas général

L'étude des modes de montage consiste à déterminer le nombre d'assemblage possible d'un robot parallèle dont la géométrie est fixée. Nous avons déjà établi que ce nombre était forcément fini. Pour étudier ce problème d'un point de vue théorique on va utiliser les résultats de la section précédente. En effet, si l'on considère le robot parallèle défini en figure 2.1 et que l'on désaccouple le segment  $O_C C$  le reste du mécanisme devient un mécanisme à 4 barres articulées. Le nombre de point d'intersection de la courbe du coupleur  $C$  avec le cercle de centre  $O_C$  et de rayon  $r_c$  donne alors le nombre de montage possible. La courbe décrite par  $C$  est une sextique que l'on intersecte avec un cercle : le nombre de points d'intersection est donc de 12 au maximum. Toutefois les points  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ , étant donné la tricircularité de la sextique, vont compter pour 6 points d'intersection. On peut donc affirmer qu'il existe au plus 6 montages possibles pour ce type de robot parallèle. La figure 2.5 présente un robot parallèle présentant le maximum de montages possible et la figure 2.6 le tracé de la courbe du coupleur du mécanisme à 4 barres associé.

### 2.1.4.2 Cas particulier

On s'intéresse ici au cas où le point  $O_C$  se trouve sur la droite passant par  $O_A$ ,  $O_B$  et le point  $C$  sur la droite passant par  $B$ ,  $A$ . Dans ce cas la courbe du

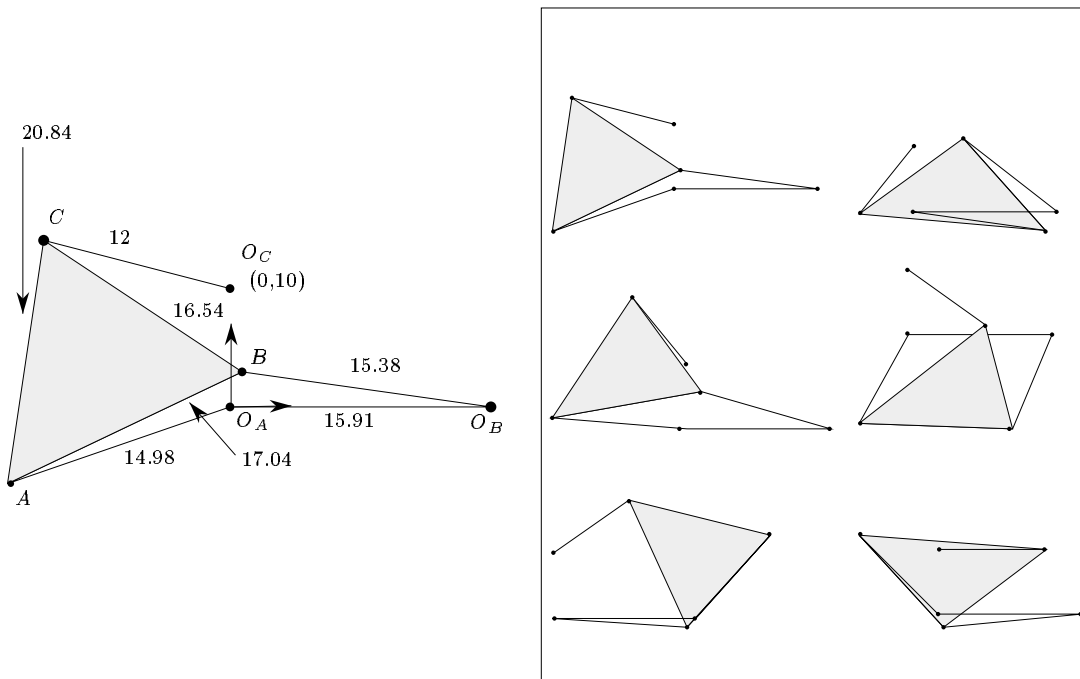


Figure 2.5: Robot parallèle planaire à 6 montages

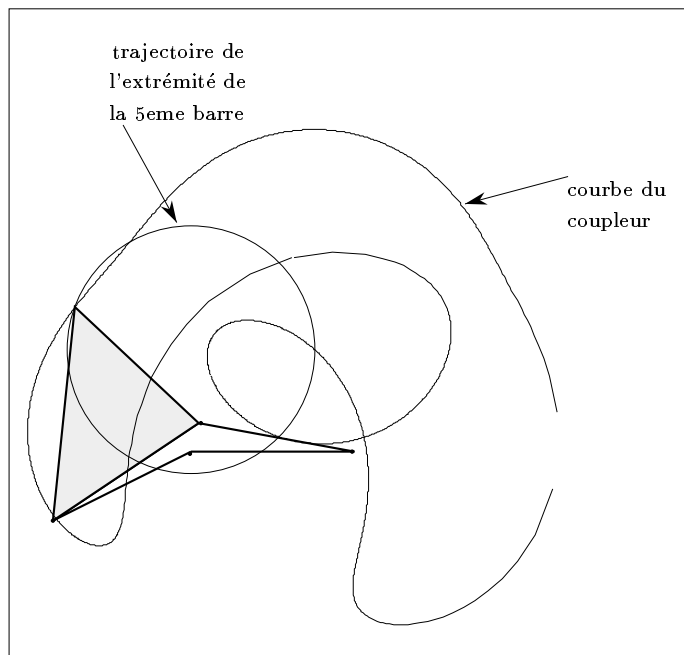


Figure 2.6: Courbe du coupleur du mécanisme précédent

coupleur du mécanisme à 4 barres est symétrique par rapport à l'axe  $x$ . De la symétrie on déduit que le nombre de montage sera, en général, pair, sauf dans le cas particulier où le cercle de centre  $O_C$  et de rayon  $r_c$  passe par un des tacnodes (dans ce cas  $x_c + r_c$  ou/et  $x_c - r_c$  doivent satisfaire l'équation décrite en 5.2).

Il semblerait dans ce cas particulier qu'il ne soit pas possible de trouver un mécanisme possédant 6 montages (donc qu'il y en aurait au maximum 4). Ceci reste cependant une conjecture à établir.

### 2.1.5 Forme polynomiale de la cinématique directe

L'étude du mécanisme à 4 barres va nous permettre d'établir une équation polynomiale de la cinématique directe, ce qui était prévisible selon un théorème du à Kemp [1]. En effet, disposant de l'équation de la sextique, on va poser dans cette équation

$$x = x_c + r_c \cos(\theta) \quad y = y_c + r_c \sin(\theta)$$

et en passant à la tangente de l'angle moitié on arrive alors à une équation polynomiale de degré 12. Cette équation est non minimale mais pour le moment nous n'avons pu trouver, soit par nos propres travaux, soit dans la littérature, de formulation polynomiale minimale. Il semblerait cependant qu'il soit possible de déterminer un polynôme de degré inférieur (8) [10].

## 2.2 Une autre architecture de robot parallèle planaire

Une autre architecture de robot parallèle planaire a été proposée dans [7], [8],[9]. Elle est décrite dans la figure 2.7.

Elle comporte neuf articulations rotoïdes dont trois sont des actionneurs (en  $O_A, O_B, O_C$ ), trois sont fixées sur le plateau mobile (en  $A, B, C$ ) et trois sont des articulations passives (en  $AA, BB, CC$ ).

Il est facile de montrer que le nombre de montage possible pour ce type de manipulateur est aussi de 6. En effet, ayant fixé l'angle des actionneurs en  $O_A, O_B, O_C$  le mécanisme constitué des segments  $AA - A, BB - B$  et du plateau mobile est alors un mécanisme à quatre barres. Le troisième segment  $CC - C$  décrit quant à lui un cercle. On retrouve donc le problème de l'intersection de la sextique tricirculaire et d'un cercle, traité dans la section précédente. Gosselin [8] présente un robot parallèle de ce type où le nombre maximum de mode d'assemblage est atteint. Il semblerait qu'il soit possible de trouver un polynôme de degré 8 pour la cinématique directe [10].

## 2.3 Résumé

La figure 2.8 résume les résultats obtenus pour les robots parallèles planaires.

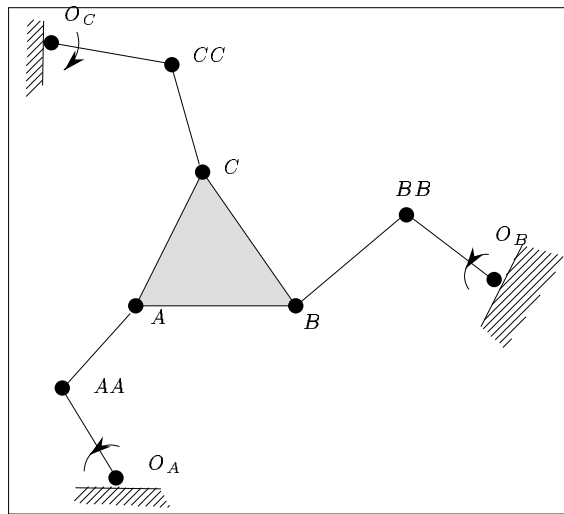


Figure 2.7: Une deuxième architecture de robot parallèle planaire

manipulateur	nombre de montage	degré du polynôme minimal connu
	6	8
	6	8

Figure 2.8: Les robots parallèles planaires, leurs mode d'assemblage et le degré du polynôme minimal connu



## Chapitre 3

# Mécanismes spatiaux

Dans ce chapitre nous allons tout d'abord établir que la cinématique direct d'un manipulateur spatial à 6 degrés de liberté de type TSSM (c'est-à-dire dont le plateau supérieur se présente sous la forme d'un triangle et où les variables articulaires sont les longueurs des segments) peut se ramener à la résolution d'un polynôme mono-variable de degré 16. Puis nous établirons à posteriori, à l'aide de la théorie des mécanismes, que ce degré est effectivement un majorant du nombre de montage. Une résolution numérique de ce polynôme va nous permettre d'exhiber des configurations où il existe effectivement 16 modes d'assemblage possibles pour le manipulateur. Puis nous effectuerons cette même analyse pour deux autres architectures, dont des prototypes sont en cours de développement au sein du projet PRISME, ainsi que pour la fameuse plate-forme de Stewart. Enfin nous considérerons les autres types de mécanismes spatiaux proposés dans la littérature, en établissant seulement un majorant du nombre de montage et le degré du polynôme que l'on peut effectivement calculer.

### 3.1 La cinématique directe d'un TSSM sous forme polynomiale

Le but des calculs présentés ici est d'arriver à exprimer le problème de la cinématique directe d'un TSSM sous la forme de la résolution d'un polynôme unique. La méthode utilisée ici reprend celle de Nanua et Waldron [11], au titre bien ambitieux, qui ont établi une forme polynomiale de degré 24.

On remarque que dans le cas d'un TSSM un point d'articulation sur le mobile et les deux segments qui s'y articule constituent un triangle, dont le seul degré de liberté est une rotation autour de sa base et dont on repère l'orientation par rapport à la base par les 3 angles  $p_{12}, p_{34}, p_{56}$  (figure 3.1)

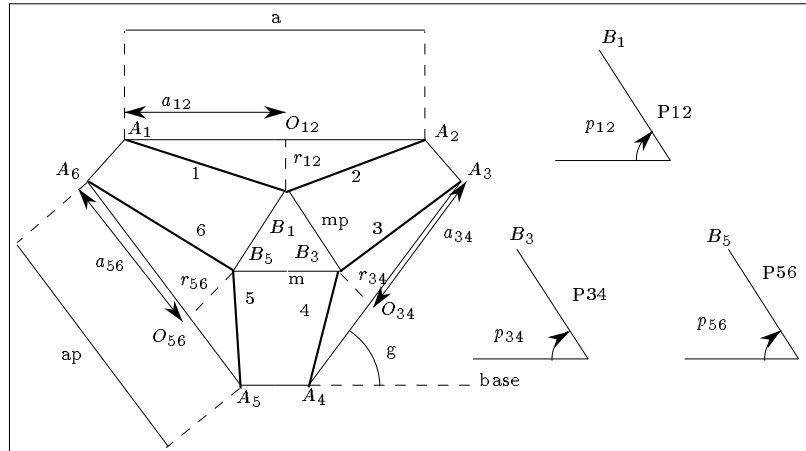


Figure 3.1: Notation

Les points d'articulation  $B_1, B_3, B_5$  du plateau mobile peuvent donc décrire des cercles de centres  $O_{12}, O_{34}, O_{56}$  et de rayon  $r_{12}, r_{34}, r_{56}$ . Les caractéristiques de ces cercles ne dépendent que des longueurs des segments. On peut donc construire un mécanisme équivalent constitué de trois segments (que nous appellerons les *segments équivalents*), dont une extrémité tourne autour d'une articulation rotoïde et dont l'autre extrémité est articulée sur le plateau mobile (figure 3.2).

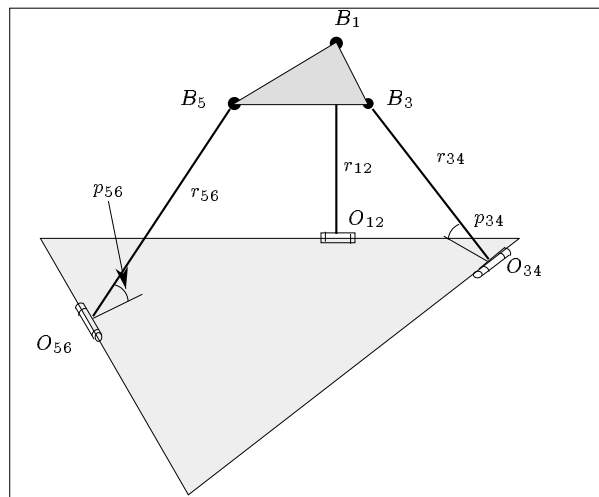


Figure 3.2: Mécanisme équivalent du TSSM

On peut exprimer la position des points d'articulation du mobile uniquement

en fonction des angles  $p_{12}, p_{34}, p_{56}$  et des longueurs segments. On écrit alors que la distance entre les points d'articulation du mobile est connue ce qui nous donne 3 équations de départ. Avec les notations de la figure on a :

$$a_{12} = \frac{\rho_1^2 + a^2 - \rho_2^2}{2a} \quad (3.1)$$

$$a = 2xa_2 \quad (3.2)$$

$$x_{O_{12}} = -xa_2 + a_{12} = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{4xa_2} \quad (3.3)$$

$$y_{O_{12}} = ya_2 \quad (3.4)$$

$$r_{12}^2 = \rho_1^2 - a_{12}^2 \quad (3.5)$$

Si on note  $n_{ij}$  le vecteur unitaire de la droite reliant  $O_{ij}$  au point d'articulation correspondant sur le mobile on a :

$$n_{12} = -\cos(p_{12})\mathbf{j} + \sin(p_{12})\mathbf{k} \quad (3.6)$$

De même :

$$a_{34} = \frac{\rho_3^2 + ap^2 - \rho_4^2}{2ap} \quad (3.7)$$

$$x_{O_{34}} = xa_3 - a_{34} \cos(g) \quad (3.8)$$

$$y_{O_{34}} = ya_3 - a_{34} \sin(g) \quad (3.9)$$

$$r_{34}^2 = \rho_3^2 - a_{34}^2 \quad (3.10)$$

$$n_{34} = -\cos(p_{34}) \sin(g)\mathbf{i} + \cos(p_{34}) \cos(g)\mathbf{j} + \sin(p_{34})\mathbf{k} \quad (3.11)$$

et

$$a_{56} = \frac{\rho_6^2 + ap^2 - \rho_5^2}{2ap} \quad (3.12)$$

$$x_{O_{56}} = xa_6 + a_{56} \cos(g) \quad (3.13)$$

$$y_{O_{56}} = ya_6 - a_{56} \sin(g) \quad (3.14)$$

$$r_{56}^2 = \rho_6^2 - a_{56}^2 \quad (3.15)$$

$$n_{56} = \cos(p_{56}) \sin(g)\mathbf{i} + \cos(p_{56}) \cos(g)\mathbf{j} + \sin(p_{56})\mathbf{k} \quad (3.16)$$

On peut alors écrire :

$$\mathbf{OB}_1 = \mathbf{OO}_{12} + r_{12}\mathbf{n}_{12} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{OB}_3 = \mathbf{OO}_{34} + r_{34}\mathbf{n}_{34} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{OB}_5 = \mathbf{OO}_{56} + r_{56}\mathbf{n}_{56} \quad (3.19)$$

On peut donc exprimer les vecteurs  $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_1\mathbf{B}_5, \mathbf{B}_3\mathbf{B}_5$  dont les normes valent respectivement  $mp, mp$  et  $m$ . Ceci conduit directement aux 3 équations de base.

$$\|B_1 B_3\|^2 - m p^2 = 0 \quad (3.20)$$

$$\|B_1 B_5\|^2 - m p^2 = 0 \quad (3.21)$$

$$\|B_3 B_5\|^2 - m^2 = 0 \quad (3.22)$$

On montre que ces 3 équations peuvent s'écrire sous la forme :

$$K_{11} \sin(p_{34}) \sin(p_{12}) + (K_{21} \cos(p_{34}) + K_{22}) \cos(p_{12}) + K_{32} \cos(p_{34}) + K_{33} = 0 \quad (3.23)$$

$$L_{11} \sin(p_{56}) \sin(p_{12}) + (L_{21} \cos(p_{56}) + L_{22}) \cos(p_{12}) + L_{32} \cos(p_{56}) + L_{33} = 0 \quad (3.24)$$

$$M_{11} \sin(p_{34}) \sin(p_{56}) + (M_{21} \cos(p_{34}) + M_{22}) \cos(p_{56}) + M_{32} \cos(p_{34}) + M_{33} = 0 \quad (3.25)$$

où les coefficients  $K, L, M$  (donnés en Annexe page 67) ne dépendent pas des angles  $p_{12}, p_{34}, p_{56}$ . On peut remarquer que si le triplet  $p_{12}, p_{34}, p_{56}$  est solution de ce système alors le triplet  $-p_{12}, -p_{34}, -p_{56}$  l'est aussi. On remarque ensuite que les équations 3.23, 3.24 sont linéaires en terme de  $\sin(p_{12}), \cos(p_{12})$ . On résoud alors le système et on écrit l'équation :

$$\cos(p_{12})^2 + \sin(p_{12})^2 = 1 \quad (3.26)$$

qui se ramène, après simplification, à une équation de la forme :

$$N_1 \cos(p_{56})^2 + N_2 \sin(p_{56})^2 + N_3 \sin(p_{56}) \cos(p_{56}) + N_4 \cos(p_{56}) + N_5 \sin(p_{56}) + N_6 = 0 \quad (3.27)$$

où les coefficients  $N$  sont donnés en Annexe page 68. On écrit alors l'équation 3.27 sous la forme :

$$(N_1 - N_2) \cos(p_{56})^2 + N_5 \sin(p_{56}) + (N_3 \sin(p_{56}) + N_4) \cos(p_{56}) + N_2 + N_6 = 0 \quad (3.28)$$

De l'équation 3.25 on peut tirer la valeur de  $\sin(p_{56})$ :

$$\sin(p_{56}) = -\frac{(M_{21} \cos(p_{34}) + M_{22}) \cos(p_{56}) + M_{32} \cos(p_{34}) + M_{33}}{M_{11} \sin(p_{34})} \quad (3.29)$$

Jusqu'à maintenant la démarche suivie reprend approximativement celle de Nanua. Nous allons maintenant utiliser une remarque faite par Charentus et Renaud [12], pour le cas où le plateau mobile est un triangle équilatéral. Remarquons que les coefficients de  $\sin(p_{56})$  dans l'équation 3.28 sont  $N_3, N_5$  et que l'on peut écrire ces deux coefficients sous la forme :

$$N_3 = N_3' \sin(p_{34})$$

$$N_5 = N_5' \sin(p_{34})$$

Le terme  $\sin(p_{34})$  intervenant au dénominateur de  $\sin(p_{56})$  on aura donc une simplification si on reporte la valeur de  $\sin(p_{56})$  dans l'équation 3.28. On peut alors écrire les coefficients  $N$  sous la forme abrégée suivante :

$$N_1 = a_0 \sin(p_{34})^2 + a_2 + a_5 \cos(p_{34}) + a_8 \cos(p_{34})^2$$

$$N_2 = b_2 + b_5 \cos(p_{34}) + b_8 \cos(p_{34})^2$$

$$N_3' = c_2 + c_5 \cos(p_{34})$$

$$N_4 = d_0 \sin(p_{34})^2 + d_2 + d_5 \cos(p_{34}) + d_8 \cos(p_{34})^2$$

$$N_5' = e_2 + e_5 \cos(p_{34})$$

$$N_6 = f_0 \sin(p_{34})^2 + f_2 + f_5 \cos(p_{34}) + f_8 \cos(p_{34})^2$$

où les coefficients  $a, b, c, d, e, f$  sont donnés en annexe page 68.

L'équation 3.28 s'écrit alors sous la forme :

$$I_1 \cos(p_{56})^2 + I_2 \cos(p_{56}) + I_3 = 0 \quad (3.30)$$

De même en utilisant l'identité remarquable :

$$\sin(p_{56})^2 + \cos(p_{56})^2 = 1$$

on obtient à partir de l'équation 3.29:

$$H_1 \cos(p_{56})^2 + H_2 \cos(p_{56}) + H_3 = 0 \quad (3.31)$$

Les coefficients  $I_i, H_j$  sont des polynômes du second degré en  $\cos(p_{34})$  seulement, donnés en annexe page 68.

Les deux équations 3.30, 3.31 imposent :

$$\begin{vmatrix} |I_1 H_2| & |I_1 H_3| \\ |I_1 H_3| & |I_2 H_3| \end{vmatrix} = 0 \quad (3.32)$$

où

$$|I_i H_j| = I_i H_j - I_j H_i \quad (3.33)$$

Ces termes sont donc des polynômes de degré 4 en  $\cos(p_{34})$ . En développant l'équation 3.32 on obtient un polynôme d'ordre 8 en  $\cos(p_{34})$  ce qui amène bien à un polynôme  $P$  de degré 16. Toutefois remarquons que ce polynôme est établi en  $\cos(p_{34})$ , ce qui implique que si l'on ramène le calcul en  $x = \tan(\frac{p_{34}}{2})$ , en posant  $\cos(p_{34}) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ , on ne verra apparaître que des puissances paires de  $x$ . On peut donc, pour la résolution, se ramener à un polynôme de degré 8, ce qui était prévisible grâce à la remarque faite sur l'invariance des équations de base si l'on changeait les signes des 3 angles inconnus. Le polynôme  $P$  s'écrit sous la forme :

$$P = \sum_{i=0}^{i=8} T_{i+1} x^{2i}$$

où les coefficients  $T$  sont donnés page 71.

### 3.1.1 Utilisation de la forme polynomiale

Le résultat obtenu renforce évidemment la conjecture stipulant que l'on ne pourrait pas trouver de solution analytique au problème de la cinématique directe. Il reste bien sûr à établir que la valeur un peu "magique" du degré du polynôme (curieusement similaire d'ailleurs à celui établi par Raghavan et Roth [13] pour le problème de la cinématique inverse des manipulateurs sériels : on voit ici se renforcer une notion de dualité complète entre manipulateurs sériels et parallèles qu'il serait bon d'approfondir, mais qui dépasse le cadre de notre propos), est effectivement minimal, ce que nous ferons par la suite.

Nous avons présenté dans [4] différentes méthodes de résolution numérique du problème de la cinématique directe, ainsi que leurs domaines d'application et leurs temps de calcul. Il faut placer la possible utilisation de la forme polynomiale dans ce cadre. Remarquons tout d'abord que ce type de résolution est délicat à implanter. Il nécessite obligatoirement l'usage de la double précision et l'algorithme de résolution du polynôme est très sensible à la valeur des coefficients. Ainsi une différence sur la onzième décimale des coefficients peut induire une différence notable dans les résultats.

Nous avons repris les tests utilisés dans [4] pour établir comment se place la méthode polynomiale par rapport aux autres méthodes proposées. Les méthodes suivantes ont été testées :

- méthode 1: méthode itérative avec jacobienne cinématique
- méthode 2: méthode itérative avec jacobienne des angles d'Euler
- méthode 3: méthode itérative réduite
- méthode 4: méthode polynomiale

Les temps de calcul sont donnés dans la Table 3.1.

numéro de test	0	1	2	3	4	5
méthode						
1	9.3	8.44	6.5	13.83	24.83	17.5
2	7.33	9.5	4.9	10.17	-	-
3	227	3.83	12.83	3.83	-	-
4	183.49	182.3	186.49	187.99	156.83	151.99

Tableau 3.1: Temps de calcul pour différentes méthodes numériques de résolution de la cinématique directe (en ms, le signe - indique la non-convergence de l'algorithme)

Dans la pratique il est clair que la méthode polynomiale ne saurait rivaliser en temps de calcul avec les autres méthodes. Son seul avantage réside, bien sûr,

dans le fait qu'il ne peut y avoir de problème de convergence, toutefois sous la réserve forte de la stabilité numérique de la résolution du polynôme.

### 3.1.2 Exemple

Les figures suivantes présentent un TSSM admettant 16 configurations possibles pour 6 longueurs fixées de ces segments, obtenues par résolution numérique du polynôme  $P$ . La position des points d'articulation est donnée dans le tableau 3.2. La configuration correspond nominalement à  $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 20, \psi =$

$x_a$	$y_a$	$z_a$	x	y	z
9.7	9.1	0.0	0.0	7.3	0.0
12.76	3.9	0.0	4.822	-5.480722	0.0
3.0	-13.0	0.0	4.822	-5.480722	0.0
-3.0	-13.0	0.0	-4.822	-5.480722	0.0
-12.76	3.9	0.0	-4.822	-5.480722	0.0
-9.7	9.1	0.0	0.0	7.3	0.0

Tableau 3.2: Position des points d'articulation de la base et du mobile pour le TSSM à 16 modes de montage

$-10, \theta = -5, \phi = 10$ . Les autres solutions, pour lesquelles le plateau mobile est en position haute, sont données dans la table 3.3.

$x_0$	$y_0$	$z_0$	$\psi$	$\theta$	$\phi$
0.109944	-6.807134	15.157245	178.790092	104.247298	-179.397570
0.0	0.0	20.0	170.000069	4.999992	-170.000069
2.802948	-4.666035	12.740689	55.389531	89.178208	136.199674
1.361778	4.903809	17.382460	-106.331771	149.931849	58.967600
0.160610	5.376522	17.186792	-170.380852	164.013963	7.954509
-0.352493	-3.866344	11.918376	-12.559631	45.110726	-168.301331
-1.413449	4.826228	17.429960	102.640488	147.384474	-61.976868
-2.335532	-4.467979	12.547885	-50.849043	79.039617	-137.353267

Tableau 3.3: Les 16 modes de montage du TSSM considéré

On présente dans les figures 3.3,3.4,3.5 tout d'abord un tracé du polynôme pour illustrer la sensibilité de la méthode aux erreurs numériques, puis les configurations possibles pour ce manipulateur.

On ne montre ici que les 8 configurations où le plateau supérieur se trouve

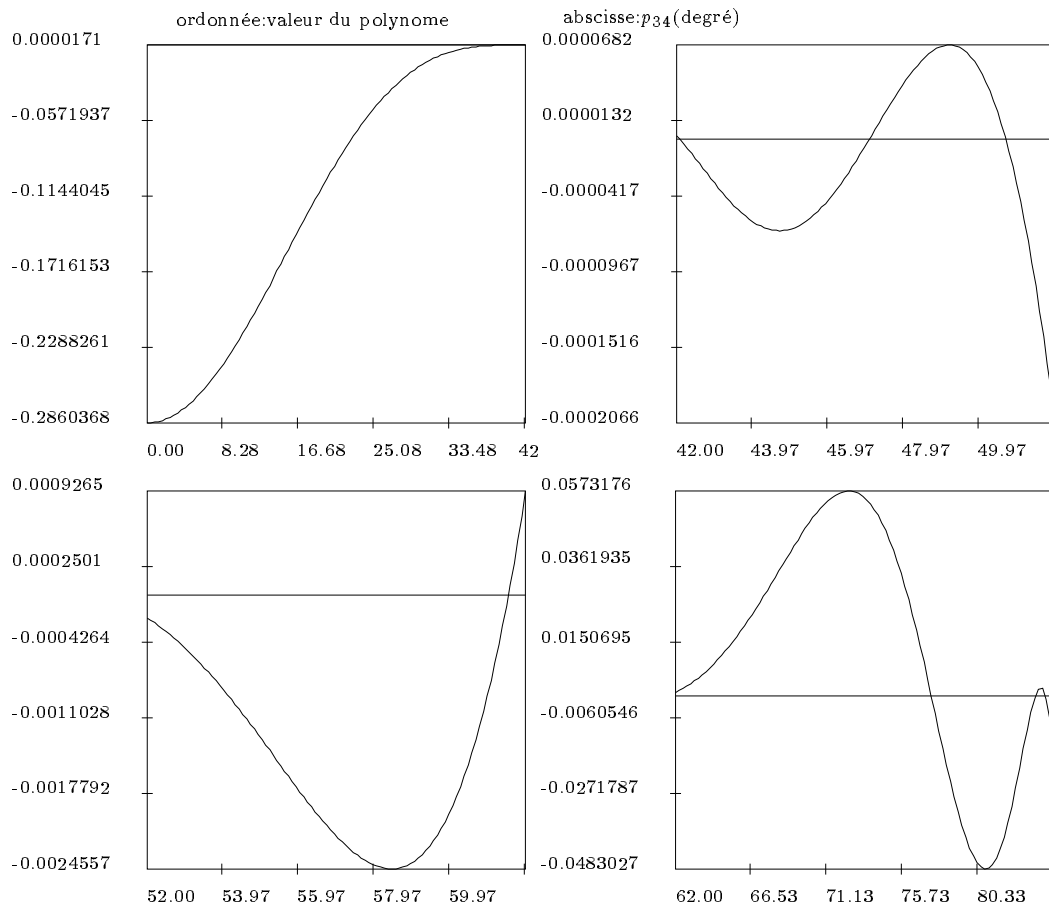


Figure 3.3: Tracé du polynôme associé au TSSM à 16 modes de montage



effectivement au-dessus de la base, étant entendu que les 8 restantes sont simplement les symétriques de ces configurations par rapport à la base.

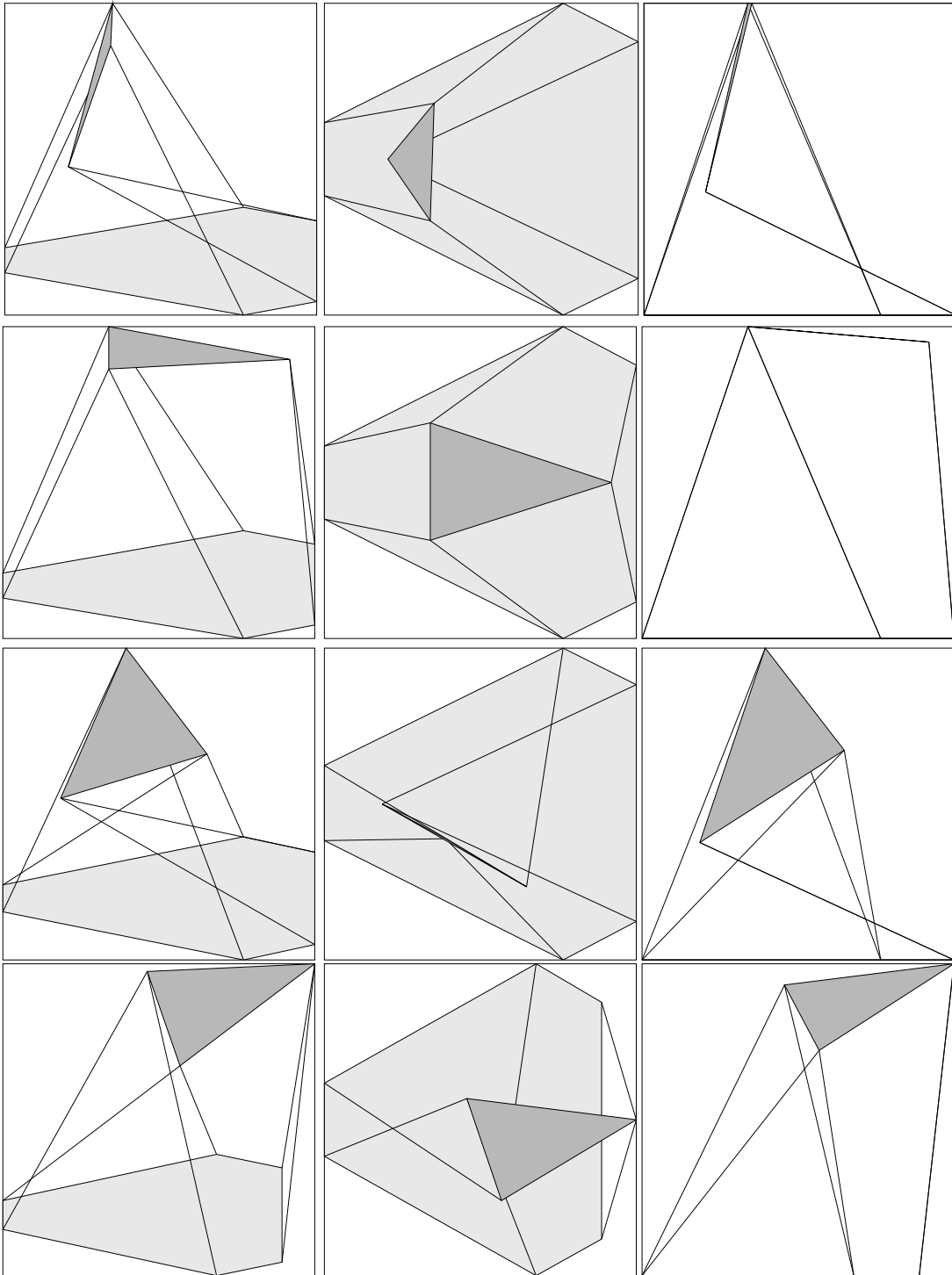


Figure 3.4: Les 4 premiers montages possibles d'un TSSM (vue perspective, de dessus, de côté)

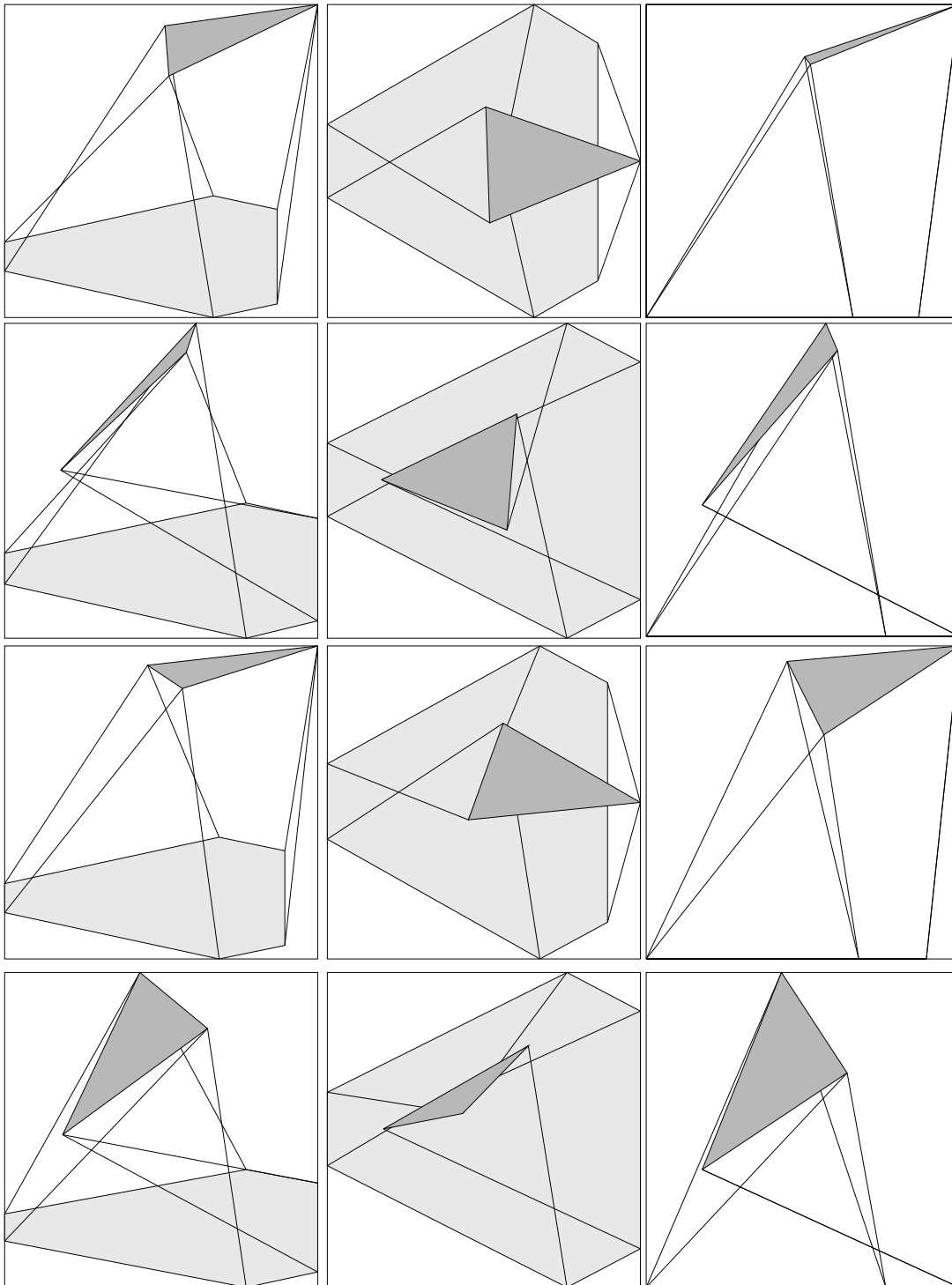


Figure 3.5: Les 4 derniers montages possibles d'un TSSM (vue perspective, de dessus, de côté)

### 3.1.3 Répartition du nombre des solutions

Une étude systématique, à l'aide d'un maillage fin de l'espace de travail, a permis d'établir la répartition du nombre de mode d'assemblage présentée dans le tableau 3.4. Le maillage compte 297381 points pour un grillage compris entre  $\pm 8$ cm pour les coordonnées  $x, y$ , entre 19 et 21 cm pour la coordonnée  $z$ , entre  $\pm 15^\circ$  pour les angles de rotation. La valeur des pas est 1 cm pour les coordonnées  $x, y, z$  et  $5^\circ$  pour les angles de rotation.

nombre de mode d'assemblage	2	4	6	8	10	12	14	16
nombre	2060	77446	31309	134443	11764	31524	3255	5580
en %	0.6927	26.04269	10.5282	45.209	3.9559	10.6	1.0945	1.876

Tableau 3.4: Répartition du nombre de mode d'assemblage dans l'espace de travail pour le TSSM à 16 modes de montage

## 3.2 Degré minimal du polynôme pour un TSSM

Hunt [14] a conjecturé que le nombre maximal de mode d'assemblage pour un TSSM était effectivement de 16. Son raisonnement est le suivant: si l'on détache un des segments du plateau mobile et que l'on considère le reste du mécanisme on obtient un mécanisme spatial à 4 barres (fig. 3.6), constitué de 4 segments reliés par deux articulations rotoïdes à axe concourant et de deux rotules. Ce mécanisme est connu sous le nom générique de RSSR, quelle que soit la position des axes des articulations rotoïdes.

Il est connu que le point  $B$ , de coordonnées  $(X, Y, Z)$ , de ce mécanisme décrit une surface d'ordre 16. Si l'on considère maintenant le nombre d'intersection de cette surface avec le cercle décrit par le segment équivalent que nous avons détaché, on obtient le nombre maximal de mode d'assemblage possible, et, par conséquent, le degré minimal du polynôme. Une surface d'ordre 16 intersecte un cercle en un maximum de 32 points. Mais parmi ces points, certains vont se trouver sur la sphère imaginaire. Ils doivent donc être décomptés du nombre 32. On voit donc que tout va dépendre de la circularité de la surface d'ordre 16 ; Hunt conjecture que cette circularité est 8 ce qui permet alors d'affirmer que 16 points sont imaginaires et donc qu'un majorant du degré minimal du polynôme est 16. Nous allons établir effectivement la conjecture de Hunt. Pour cela on exprime tout d'abord, comme dans la cinématique directe, la position des points  $B_1, B_2$  en fonction des angles  $p_{12}, p_{34}$ . On écrit ensuite que la distance du point  $B$  à ces points est constante, égale à  $d$ .

$$\|BB_1\| = \|BB_2\| = d \quad (3.34)$$

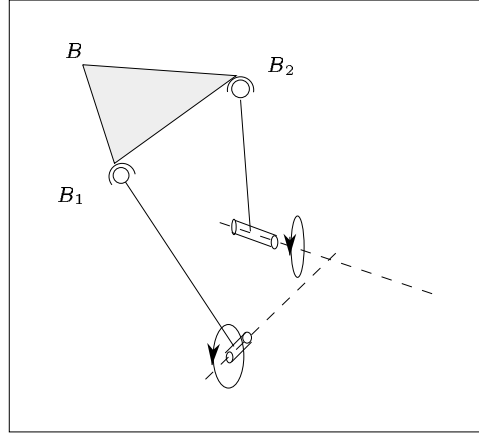


Figure 3.6: Le mécanisme spatial à 4 barres (RSSR) obtenue après coupure d'un segment du mécanisme équivalent du TSSM

Ces équations s'écrivent sous la forme abrégée suivante :

$$E_1 \cos(p_{12}) + E_2 \sin(p_{12}) + E_3 = 0 \quad (3.35)$$

$$F_1 \cos(p_{34}) + F_2 \sin(p_{34}) + F_3 = 0 \quad (3.36)$$

Les coefficients  $E, F$  sont définis en annexe page 65. Ces coefficients s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{11}Y + E_{12} \\ E_2 &= E_{21}Z \\ E_3 &= X^2 + Y^2 + Z^2 + E_{31}X + E_{32}Y + E_{33} \\ F_1 &= F_{11}X + F_{12}Y + F_{13} \\ F_2 &= F_{21}Z \\ F_3 &= X^2 + Y^2 + Z^2 + F_{31}X + F_{32}Y + F_{33} \end{aligned}$$

où les coefficients abrégés sont donnés en annexe page 66. Le degré en  $X, Y, Z$  de  $E_1, E_2, F_1, F_2$  est donc 1 alors que celui de  $E_3, F_3$  est 2.

On écrit maintenant que la distance  $\|B_1B_2\|$  est constante, ce qui revient à écrire l'équation abrégée :

$$K_{11} \sin(p_{34}) \sin(p_{12}) + (K_{21} \cos(p_{34}) + K_{22}) \cos(p_{12}) + K_{32} \cos(p_{34}) + K_{33} = 0 \quad (3.37)$$

Les équations 3.35, 3.37 sont linéaires en terme de  $\sin(p_{12}), \cos(p_{12})$ . On résoud ce système linéaire et l'on écrit que

$$\cos(p_{12})^2 + \sin(p_{12})^2 = 1$$

ce qui donne :

$$N_1 \cos(p_{34})^2 + N_2 \sin(p_{34})^2 + N_3 \sin(p_{34}) \cos(p_{34}) + N_4 \sin(p_{34}) + N_5 \cos(p_{34}) + N_6 = 0 \quad (3.38)$$

que l'on écrit sous la forme :

$$(N_1 - N_2) \cos(p_{34})^2 + N_3 \sin(p_{34}) \cos(p_{34}) + N_4 \sin(p_{34}) + N_5 \cos(p_{34}) + N_6 = 0 \quad (3.39)$$

où les coefficients  $N$  sont donnés en annexe page 66. Ces coefficients s'expriment de manière abrégé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} N_1 &= N_{11} E_1^2 + N_{12} E_1 E_3 + N_{13} E_3^2 + N_{14} E_2^2 \\ N_2 &= N_{21} E_3^2 + N_{22} E_1^2 \\ N_3 &= N_{31} E_2 E_3 + N_{32} E_2 E_1 \\ N_4 &= N_{41} E_2 E_3 + N_{42} E_2 E_1 \\ N_5 &= N_{51} E_1^2 + N_{52} E_1 E_3 + N_{53} E_3^2 + N_{54} E_2^2 \\ N_6 &= N_{61} E_1^2 + N_{62} E_1 E_3 + N_{63} E_3^2 + N_{64} E_2^2 \end{aligned}$$

où les coefficients abrégés sont donnés en annexe page 66. Remarquons que les termes  $N_3, N_4$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} N_3 &= (N_{31} E_{21} E_3 + N_{32} E_{21} E_1) Z = N'_3 Z \\ N_4 &= (N_{41} E_{21} E_3 + N_{42} E_{21} E_1) Z = N'_4 Z \end{aligned}$$

Le degré de ces termes est donc 4 pour  $N_1, N_2, N_5, N_6$  et 3 pour  $N_3, N_4$ . On exprime alors la valeur de  $\sin(p_{34})$  à l'aide de l'équation 3.36:

$$\sin(p_{34}) = - \frac{F_3 + F_1 \cos(p_{34})}{F_2}$$

ou

$$\sin(p_{34}) = - \frac{F_3 + F_1 \cos(p_{34})}{F_{21} Z}$$

Puis l'on écrit que :

$$\sin(p_{34})^2 + \cos(p_{34})^2 = 1$$

ce qui amène une équation du type :

$$H_1 \cos(p_{34})^2 + H_2 \cos(p_{34}) + H_3 = 0 \quad (3.40)$$

On reporte alors la valeur de  $\sin(p_{34})$  dans 3.39, en remarquant que dans cette équation le coefficient de  $\sin(p_{34})$  est  $Z(N'_3 + N'_4)$  alors que le  $\sin(p_{34})$  a  $Z$  au dénominateur. Le terme  $Z$  se simplifie donc, ce qui donne l'équation :

$$I_1 \cos(p_{34})^2 + I_2 \cos(p_{34}) + I_3 = 0 \quad (3.41)$$

où l'on a :

$$\begin{aligned}
I_1 &= N_1 F_{21} - N_2 F_{21} - N_3' F_1 \\
I_2 &= -N_3' B_3 - N_4' F_1 + N_5 F_{21} \\
I_3 &= N_6 F_{21} - N_4' B_3 + N_2 F_{21} \\
H_1 &= F_1^2 + F_2^2 \\
H_2 &= 2F_1 F_3 \\
H_3 &= F_3^2 - F_2^2
\end{aligned}$$

Le degré de ces coefficients est, dans l'ordre, 4, 4, 4, 2, 3, 4. Les deux équations 3.40, 3.41 imposent alors :

$$\begin{vmatrix} |I_1 H_2| & |I_1 H_3| \\ |I_2 H_3| & |I_2 H_3| \end{vmatrix} = 0 \quad (3.42)$$

où

$$|I_i H_j| = I_i H_j - I_j H_i \quad (3.43)$$

En développant les termes  $I_1 H_2, I_2 H_3, I_1 H_3$  on observe des simplifications qui amènent aux degrés suivants pour ces coefficients : 7, 8, 8. Le polynôme ainsi construit aura donc un degré 16, obtenu pour le terme  $I_1 H_3^2$  du déterminant 3.42. Le degré correspond donc au degré minimal prévu par la théorie et l'on peut établir la circularité de la surface ainsi décrite. Pour cela on pose :

$$X = \frac{X_1}{W} \quad Y = \frac{Y_1}{W} \quad Z = \frac{Z_1}{W}$$

Pour le calcul de la circularité on ne considère alors que le terme de plus haut degré du polynôme (puisque l'on va calculer le numérateur de l'expression obtenu et que l'on égale  $W$  à 0, ce qui élimine les termes de degré inférieur au degré maximal). Dans notre cas on obtient alors l'expression suivante pour le polynôme :

$$F_{21}^4 (Y^2 + X^2 + Z^2)^8 (N_{13} - N_{21})^2 = 0 \quad (3.44)$$

Si  $N_{13} = N_{21}$  on a alors  $\cos^2 \gamma = 1$  ce qui revient à dire que la base n'est plus triangulaire. Si  $F_{21}$  est nulle on a  $r_{34} = 0$ ; on peut changer de choix des segments équivalents et remplacer le segment 34 par le segment 56, les deux ne pouvant être nul simultanément (en général la base contient la projection du plateau mobile). En conclusion la circularité de la surface décrite par le coupleur est 8: la conjecture de Hunt est bien vérifiée.

Ceci nous amène au résultat suivant:

**pour un TSSM le degré minimal de la forme polynomiale de la cinématique directe (et par conséquent le nombre maximal de mode de montage) est 16, et l'on peut effectivement calculer un polynôme de degré 16.**

### 3.3 Mécanisme spatial à 3 articulations rotoïdes

Nous avons vu que la recherche du degré minimal du polynôme de la cinématique directe d'un TSSM passait par l'étude de la circularité d'un mécanisme spatial à 3 articulations rotoïdes. Le polynôme est d'ailleurs obtenu par l'étude de ce mécanisme puisqu'il constitue le mécanisme équivalent du TSSM.

Dans ce cas nous avons vu que les 3 axes des articulations rotoïdes étaient coplanaires. Le mécanisme ainsi défini sera appelé un *mécanisme équivalent du type 1*. Par la suite nous allons être amené à considérer des mécanismes du même type, mais dont les axes des articulations rotoïdes ne satisferont pas la contrainte de coplanarité. Nous allons introduire ces quelque variantes et nous appellerons *polynôme équivalent* le polynôme obtenu lorsque l'on arrive à résoudre le mécanisme.

#### 3.3.1 Mécanisme équivalent de type 2

Une manière de relacher la contrainte de coplanarité des axes est de supposer que les axes sont concourants mais non coplanaires. Le mécanisme considéré est représenté en figure 3.7 et sera appelé *mécanisme équivalent du type 2*. On

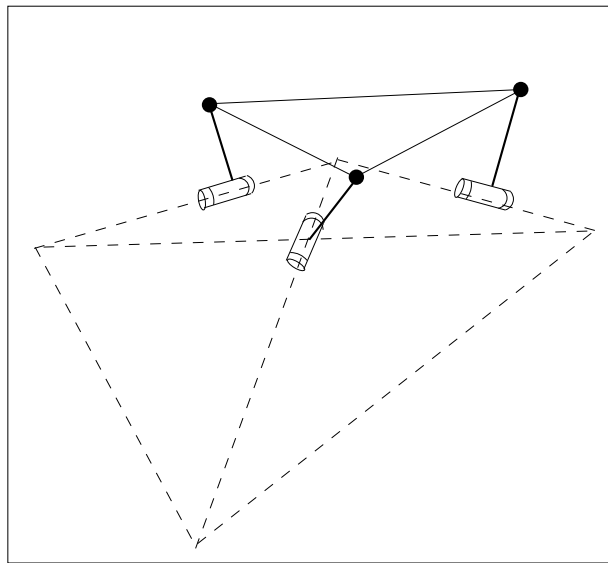


Figure 3.7: Mécanisme spatial à 3 articulations rotoïdes à axes concourants

va considérer un cas particulier de ce mécanisme décrit par la figure 3.8 où les variables d'entrée seront les hauteurs des articulations par rapport au plan de base (variables  $z_a$ , voir les notations). Les notations que nous allons utiliser sont définies dans la figure 3.9.



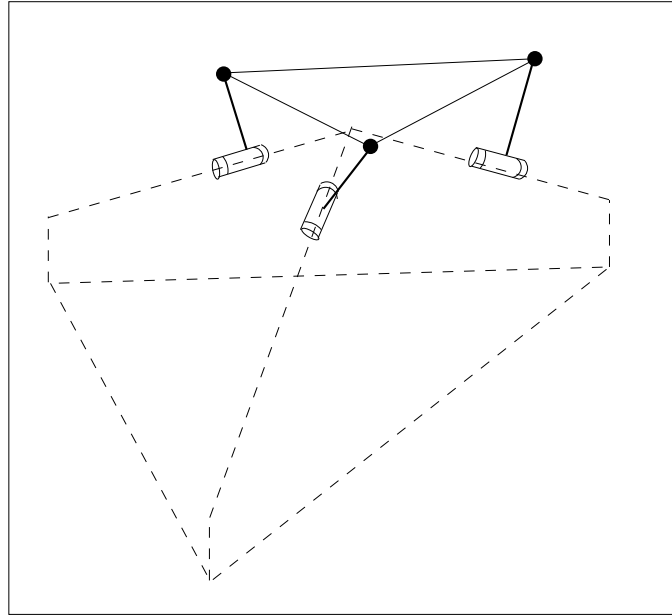


Figure 3.8: Mécanisme équivalent du type 2

On note :

$O, (x, y, z)$  : repère de référence. Le point  $O$  est le centre du cercle inscrit de la base.

$\rho_i$  : longueur du segment  $i$ .

$R$  : rayon du cercle inscrit de la base.

$Z$  : distance entre le plan de base et la rotule.

$L_i$  : distance entre le centre de l'articulation du segment  $i$  liée à la base et le centre de la rotule.

$A_i$  : centre de l'articulation du segment  $i$  liée à la base.

$x a_i, y a_i, z a_i$  : coordonnées dans le repère de référence du point  $A_i$ .

$B_i$  : centre de l'articulation du segment  $i$  liée au plateau mobile.

$O_i$  : centre du cercle  $C_i$  sur lequel se déplace le point  $B_i$ .

$r_i$  : rayon du cercle  $C_i$ .

$l_i$  : distance entre  $O_i$  et  $A_i$ .

$A_i(x_i, y_i, z_i)$  : repère. On passe de ce repère au repère de référence par une rotation d'angle  $\alpha_i$  autour de  $y_i$ , puis par une rotation d'angle  $\gamma_i$  autour du nouveau  $z$ .

$\alpha_i$  : angle entre les plans  $x_i O_i y_i$  et  $x O y$ .

$\gamma_i$  : angle entre les plans  $x_i O_i z_i$  et  $x O z$ .

$r$  : rayon du cercle inscrit du mobile.

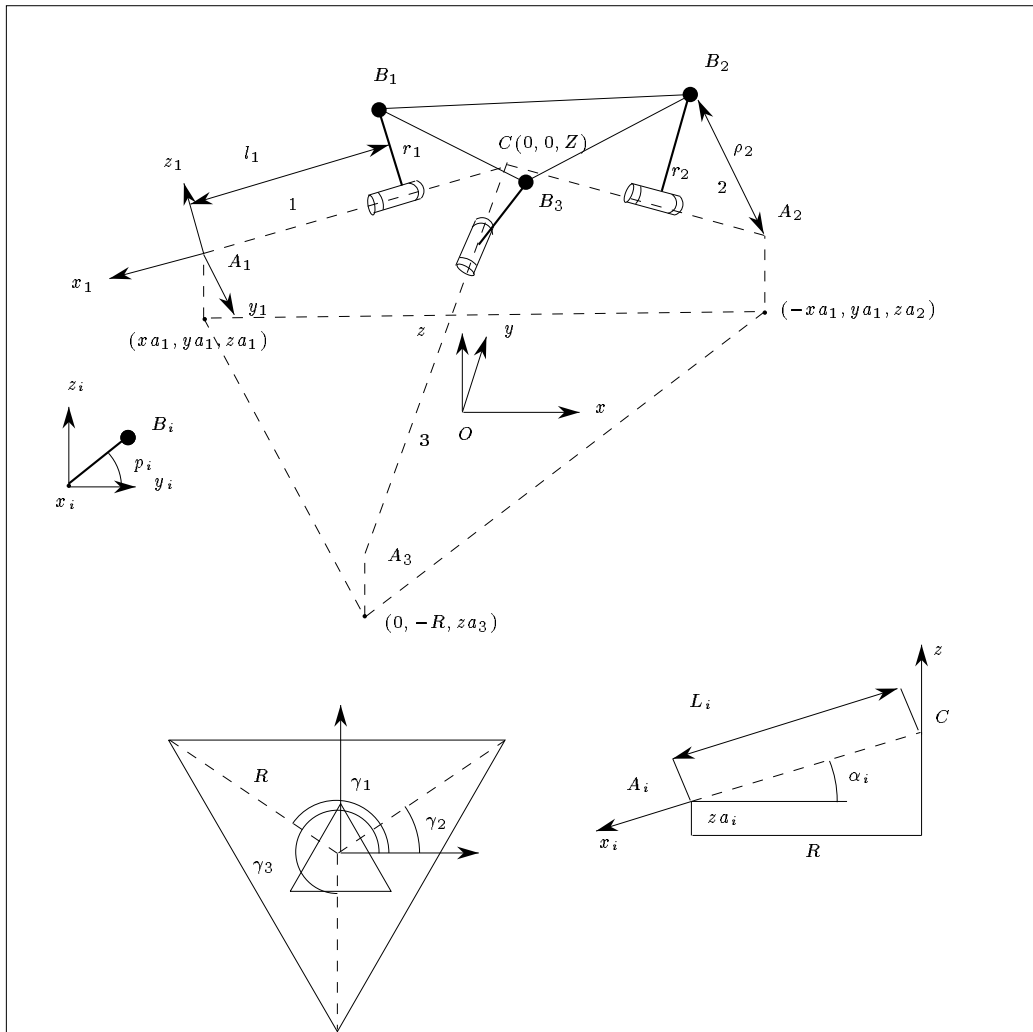


Figure 3.9: Notation

$p_i$  : angle  $O_i y_i O_i B_i$ .

$m_{ij}$  : distance  $B_i B_j$ .

On notera les coordonnées des points, exprimées dans le repère  $x_i y_i z_i$ , par l'indice  $r$ .

### 3.3.1.1 Détermination du polynôme équivalent et de la circularité

On détermine tout d'abord les valeurs des  $l_i$ ,  $r_i$  en fonction des paramètres géométriques du système.

Remarquons que nous avons :

$$L_i = \sqrt{R^2 + (z a_i - Z)^2} \quad (3.45)$$

Si l'on pose

$$ll_i = \frac{(L_i^2 - \rho_i^2 + r^2)}{2L_i}$$

On a alors :

$$l_i = L_i - ll_i \quad (3.46)$$

$$r_i = \sqrt{r^2 - ll_i^2} \quad (3.47)$$

Ces valeurs s'expriment donc simplement à partir des données géométriques du système et des  $z a_i$ .

On peut écrire :

$$A_i B_i r = \begin{pmatrix} -l_i \\ r_i \cos p_i \\ r_i \sin p_i \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Si l'on note  $R_o$  la matrice de passage de  $x_i y_i z_i$  à  $xyz$  on a

$$R_o = \begin{bmatrix} \cos \gamma_i & -\sin \gamma_i & 0 \\ \sin \gamma_i & \cos \gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & 0 & -\sin \alpha_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_i & 0 & \cos \alpha_i \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \sin \gamma_i &= \frac{y a_i}{R} \\ \cos \gamma_i &= \frac{x a_i}{R} \\ \sin \alpha_i &= \frac{z a_i - Z}{L_i} \\ \cos \alpha_i &= \frac{R}{L_i} \end{aligned} \quad (3.50)$$

On peut donc exprimer les coordonnées du point  $B_i$  dans le repère de référence simplement à l'aide des paramètres géométriques et de la donnée de  $z a_i$ .

A partir de cela on exprime les 3 distances  $B_1 B_2$ ,  $B_1 B_3$ ,  $B_2 B_3$ , ce qui s'exprime sous la forme de 3 équations que nous appellerons les équations de base :

$$\begin{aligned} & (K_{11} \sin p_2 + K_{12} \cos p_2 + K_{13}) \sin p_1 + (K_{21} \sin p_2 + K_{22} \cos p_2 + K_{23}) \cos p_1 + \\ & K_{31} \sin p_2 + K_{32} \cos p_2 + K_{33} = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} & (J_{11} \sin p_3 + J_{12} \cos p_3 + J_{13}) \sin p_1 + (J_{21} \sin p_3 + J_{22} \cos p_3 + J_{23}) \cos p_1 + \\ & J_{31} \sin p_3 + J_{32} \cos p_3 + J_{33} = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} & (M_{11} \sin p_3 + M_{12} \cos p_3 + M_{13}) \sin p_2 + (M_{21} \sin p_3 + M_{22} \cos p_3 + M_{23}) \cos p_2 + \\ & M_{31} \sin p_3 + M_{32} \cos p_3 + M_{33} = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Les équations 3.51, 3.52 sont linéaires en terme des variables  $\sin p_1, \cos p_1$ . On résoud le système et on écrit l'équation

$$\sin^2 p_1 + \cos^2 p_1 = 1$$

Cette équation s'écrit sous la forme

$$N_1 \cos^2 p_2 + N_3 \sin p_2 \cos p_2 + N_4 \cos p_2 + N_5 \sin p_2 + N_6 = 0 \quad (3.54)$$

On utilise ensuite l'équation 3.53 pour déterminer la valeur de  $\sin p_2$ . En reportant cette valeur dans l'équation 3.54 on obtient une équation du type

$$I_1 \cos(p_2)^2 + I_2 \cos(p_2) + I_3 = 0 \quad (3.55)$$

En écrivant ensuite l'égalité :

$$\sin^2 p_1 + \cos^2 p_1 = 1$$

on obtient une équation du type :

$$H_1 \cos(p_2)^2 + H_2 \cos(p_2) + H_3 = 0 \quad (3.56)$$

où les coefficients  $I, H$  ne dépendent que de  $p_3$ . Les deux équations 3.55, 3.56 imposent alors :

$$\begin{vmatrix} |I_1 H_2| & |I_1 H_3| \\ |I_1 H_3| & |I_2 H_3| \end{vmatrix} = 0 \quad (3.57)$$

où

$$|I_i H_j| = I_i H_j - I_j H_i \quad (3.58)$$

En posant  $X = \tan \frac{p_2}{2}$  ces derniers termes sont des polynômes de degré 10 en  $X$ . Le polynôme équivalent obtenue est donc de degré 20 en  $X$ . Par la même méthode on montre que la circularité de la courbe du coupleur du mécanisme obtenu en coupant un des segments est de 8.

On peut aussi considérer un cas particulier de ce type de montage, décrit dans la figure 3.10.

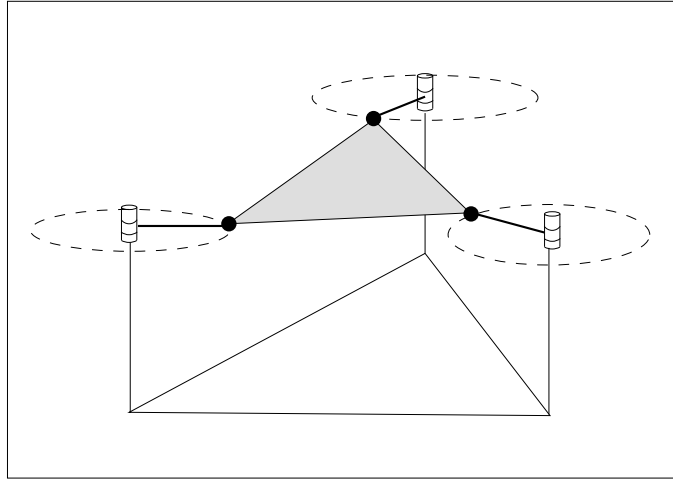


Figure 3.10: Un autre mécanisme équivalent de type 2

Dans ce cas les axes des articulations rotoïdes sont parallèles, les centres de ces articulations se trouvant à des altitudes différentes. Si l'on connaît les positions des axes, leurs altitudes ainsi que la longueur des segments et que l'on se donne en entrée les 3 angles de rotation  $p_1, p_2, p_3$  des segments on peut, là aussi, obtenir un polynôme de degré 20 pour la cinématique directe. Sans rentrer dans le détail de la résolution, exprimer la distance entre les centres d'articulation sur le mobile fournit 3 équations de base du type :

$$(K_{11} \sin p_3 + K_{12}) \sin p_1 + (K_{21} \cos p_3 + K_{22}) \cos p_1 + K_{31} \cos p_3 + K_{32} \sin p_3 + K_{33} = 0 \quad (3.59)$$

$$(J_{11} \sin p_2 + J_{12}) \sin p_1 + (J_{21} \cos p_2 + J_{22}) \cos p_1 + J_{31} \cos p_2 + J_{32} \sin p_2 + J_{33} = 0 \quad (3.60)$$

$$(M_{11} \sin p_2 + M_{12}) \sin p_3 + (M_{21} \cos p_2 + M_{22}) \cos p_3 + M_{31} \cos p_2 + M_{32} \sin p_2 + M_{33} = 0 \quad (3.61)$$

auquel on applique le même traitement que précédemment.

En conclusion un majorant du nombre maximum de montage pour le mécanisme équivalent de type 2 est donc de 16 et l'on peut déterminer un polynôme équivalent de degré 20.

### 3.3.2 Mécanisme équivalent de type 3

On considère le cas général où les axes des 3 articulations sont en position quelconque (figure 3.11) appelé *mécanisme équivalent de type 3*. On va s'intéresser plus spécialement le mécanisme de type 3 décrit par la figure 3.12. Les notations sont définies sur la figure 3.13. Les angles qui nous serviront pour la recherche du

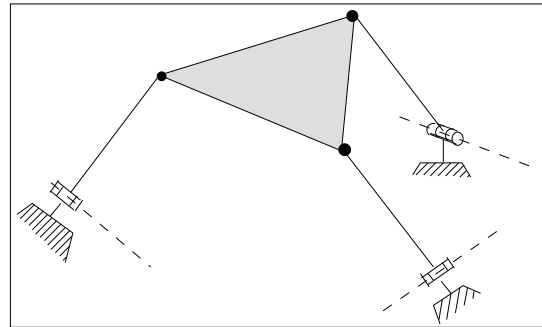


Figure 3.11: Mécanisme équivalent de type 3

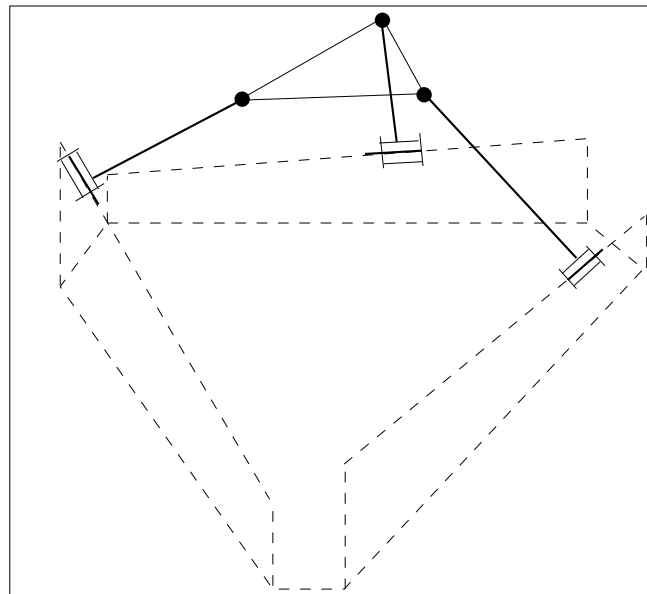


Figure 3.12: Le mécanisme équivalent de type 3 considéré

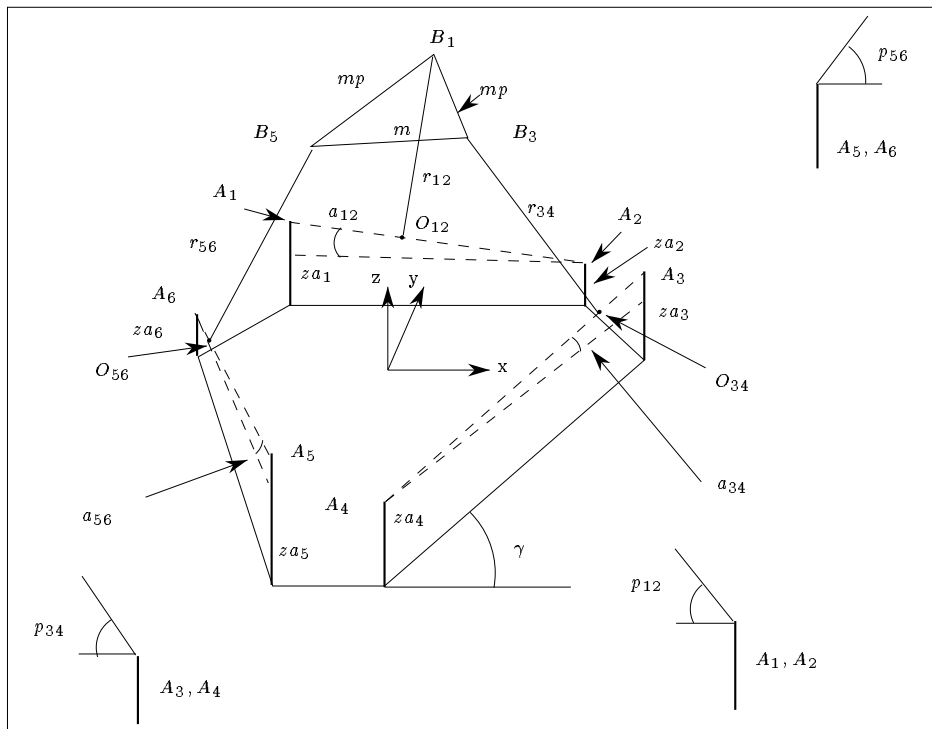


Figure 3.13: Notation

polynôme équivalent sont les angles  $p_{12}, p_{34}, p_{56}$  alors que les variables d'entrée sont, là aussi, les hauteurs des points d'articulations par rapport à la base (variable  $z a$ ).

### 3.3.2.1 Détermination du polynôme équivalent et de la circularité

Par un procédé similaire à celui établi pour le TSSM on va calculer un majorant du degré minimal de la forme polynomiale de la cinématique directe.

Le principe du calcul reste identique à celui exposé pour le TSSM: on va donc se contenter d'en résumer les différences. Si la forme des équations 3.35, 3.36 reste valable, les coefficients  $E, F$  sont toutefois différents :

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_{11}Y + E_{12} \\
 E_2 &= E_{21}X + E_{22}Z + E_{23} \\
 E_3 &= X^2 + Y^2 + Z^2 + E_{31}X + E_{32}Y + E_{33} + E_{34}Z \\
 F_1 &= F_{11}X + F_{12}Y + F_{13} \\
 F_2 &= F_{21}X + F_{22}Z + F_{23} \\
 F_3 &= X^2 + Y^2 + Z^2 + F_{31}X + F_{32}Y + F_{33} + F_{34}Z
 \end{aligned}$$

De même l'équation 3.37 s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 &(K_{11} \sin(p_{34}) + K_{12} \cos(p_{34}) + K_{13}) \sin(p_{12}) + (K_{21} \cos(p_{34}) \\
 &+ K_{22} \sin(p_{34}) + K_{23}) \cos(p_{12}) + K_{32} \cos(p_{34}) + K_{33} \sin(p_{34}) + K_{34} = 0
 \end{aligned}$$

Les équations 3.35, 3.37 restant linéaires en terme des  $\sin(p_{12}), \cos(p_{12})$ , on résoud le système. L'équation 3.39 s'écrit alors sous la forme :

$$N_1 \cos(p_{34})^2 + N_2 \sin(p_{34})^2 + N_3 \sin(p_{34}) \cos(p_{34}) + N_4 \sin(p_{34}) + N_5 \cos(p_{34}) + N_6 = 0$$

avec

$$\begin{aligned}
 N_1 &= E_3^2 K_{12}^2 + E_2^2 K_{32}^2 + K_{21}^2 E_3^2 + E_1^2 K_{32}^2 - E_1^2 K_{12}^2 - K_{21}^2 E_2^2 \\
 &\quad - 2E_1 K_{32} K_{21} E_3 - 2E_2 K_{32} E_3 K_{12} + 2E_1 K_{12} K_{21} E_2 \\
 N_2 &= E_3^2 K_{11}^2 - E_1^2 K_{11}^2 + K_{22}^2 E_3^2 - K_{22}^2 E_2^2 + 2E_1 K_{11} K_{22} E_2 \\
 N_3 &= -2E_1^2 K_{11} K_{12} - 2E_1 K_{32} K_{22} E_3 + 2K_{21} E_3^2 K_{22} - 2E_2 K_{32} E_3 K_{11} \\
 &\quad + 2E_3^2 K_{11} K_{12} + 2E_1 K_{11} K_{21} E_2 + 2E_1 K_{12} K_{22} E_2 - 2K_{21} E_2^2 K_{22} \\
 N_4 &= 2E_3^2 K_{11} K_{13} + 2K_{22} E_3^2 K_{23} - 2E_1^2 K_{11} K_{13} + 2E_1 K_{11} K_{23} E_2 \\
 &\quad + 2E_1 K_{13} K_{22} E_2 - 2K_{22} E_2^2 K_{23} \\
 N_5 &= 2K_{21} E_3^2 K_{23} - 2E_1 K_{32} K_{23} E_3 - 2E_2 K_{32} E_3 K_{13} + 2E_3^2 K_{12} K_{13}
 \end{aligned}$$



$$N_6 = -2E_1^2 K_{12} K_{13} + 2E_1 K_{12} K_{23} E_2 + 2E_1 K_{13} K_{21} E_2 - 2K_{21} E_2^2 K_{23} \\ + K_{23}^2 E_3^2 + E_3^2 K_{13}^2 - E_1^2 K_{13}^2 - K_{23}^2 E_2^2 + 2E_1 K_{13} K_{23} E_2$$

On obtient alors des équations similaires à 3.41, 3.40 dont les coefficients ont comme degré en  $X, Y, Z$  respectivement 6, 7, 8, 2, 3, 4 (nous n'avons plus ici la simplification décrite dans le cas où les axes sont concourants). Toutefois si le développement des termes  $IH$  conduit à un polynôme de degré 20, il n'y a plus de prépondérance du terme  $(I_1 H_3)^2$ . Le terme de plus haut degré du polynôme s'exprime sous la forme:

$$-(Z^2 + Y^2 + X^2)^8 (F_{22} Z + F_{21} X)^4 (N_{21}^2 + N_{13}^2 + N_3^2 - 2N_{21} N_{13}) \quad (3.62)$$

et donc la circularité de la surface est aussi 8.

Pour ce qui concerne la forme polynomiale de la cinématique directe, nous ne développerons pas les calculs, qui sont, dans le principe, similaires à ceux fait pour le TSSM. Toutefois la simplification décrite page 19 n'est plus valable, ce qui conduit à un polynôme de degré 24.

De ces résultats on déduit qu'un **majorant du nombre maximum de montage, pour les mécanismes équivalents de type 3, est de 16** et que l'on peut obtenir un polynôme équivalent de degré 24.

### 3.4 Mécanisme spatial à trois degrés de liberté

On considère maintenant le mécanisme décrit figure 3.14 et plus particulièrement étudié dans [8],[17]. Il s'agit d'un mécanisme à trois segments, de longueurs

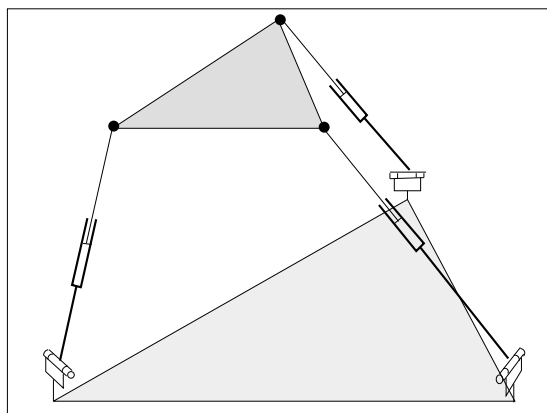


Figure 3.14: Mécanisme spatial à trois degrés de liberté

variables, avec une extrémité liée à la base par une articulation rotoïde, l'autre

étant liée au plateau mobile par une rotule. Ce mécanisme à trois degrés de liberté, du point de vue du nombre de montage est, en fait, le mécanisme équivalent de type 1. On peut donc en conclure que pour ce type d'architecture le nombre de mode d'assemblage est 16 et que la cinématique directe peut s'exprimer effectivement sous la forme d'un polynôme mono-variable de degré 16.

### 3.5 Mécanisme spatial à trois degrés de liberté en rotation

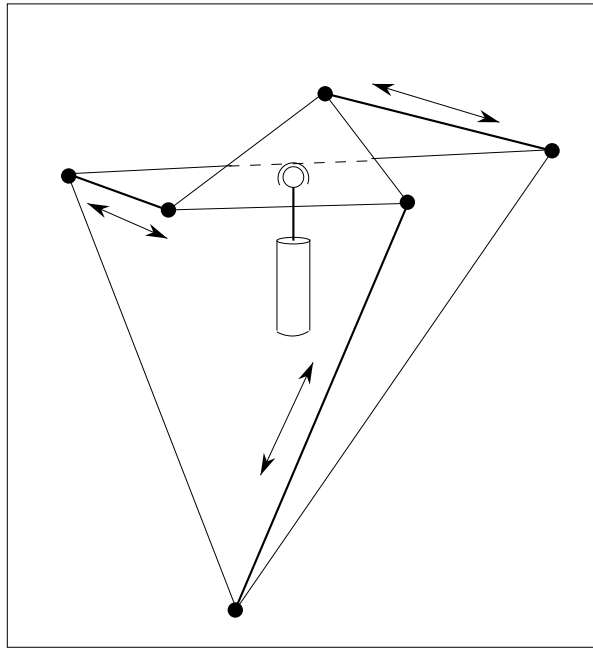


Figure 3.15: Mécanisme spatial à trois degrés de liberté en rotation

On considère maintenant le mécanisme décrit figure 3.15. Il s'agit d'un mécanisme à trois segments de longueurs variables, avec un plateau mobile articulé sur une rotule reliée rigidement à la base. Les segments sont articulés avec des cardans et des rotules. Pour un segment donné, lorsque sa longueur est fixée, le point d'articulation sur le plateau mobile correspondant décrit un cercle dont le centre se trouve sur la droite joignant le centre de la rotule du plateau mobile à l'extrémité du segment sur la base. On peut donc construire le mécanisme équivalent décrit en figure 3.16 qui est de type 2. On en déduit qu'un majorant du nombre de montage est 16 et que l'on peut définir un polynôme de degré 20 pour la cinématique directe.

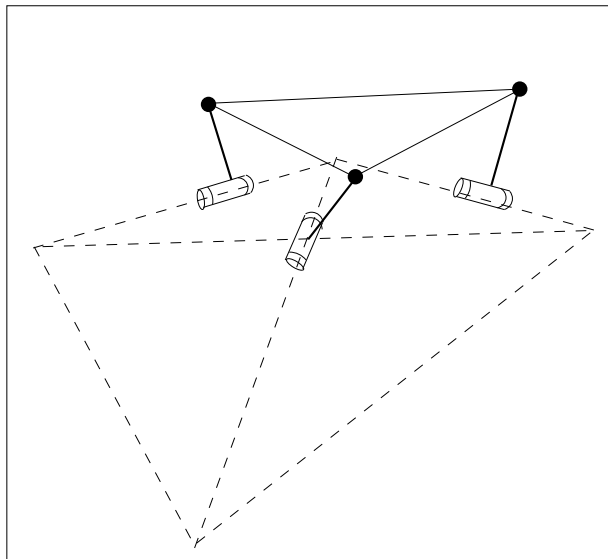


Figure 3.16: Mécanisme équivalent du mécanisme spatial à trois degrés de liberté en rotation

### 3.6 Mécanisme spatial à trois degrés de liberté en rotation, avec segments de longueurs fixes

#### 3.6.1 Mécanisme équivalent

On considère maintenant le mécanisme décrit figure 3.17. Un prototype de ce mécanisme est en cours de développement au sein du projet PRISME (D. Simon). Il s'agit d'un mécanisme à trois segments de longueurs fixes, avec un

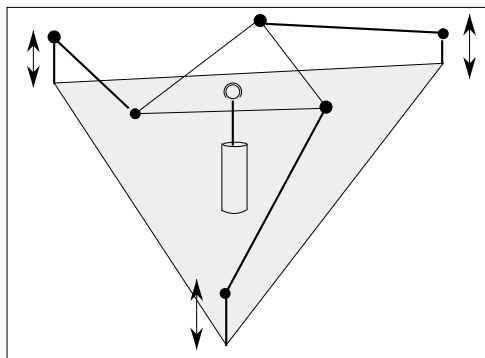


Figure 3.17: Mécanisme spatial à trois degrés de liberté en rotation avec segments de longueurs fixes (Poignet INRIA)

plateau mobile articulé sur une rotule reliée rigidement à la base. La mobilité est donnée en déplaçant les articulations des segments, proches de la base, selon une direction perpendiculaire à celle-ci. Les segments sont articulés avec des cardans et des rotules. Pour un segment donné, lorsque la hauteur de son point d'articulation est fixée, le point d'articulation correspondant sur le plateau mobile décrit un cercle dont le centre se trouve sur la droite joignant le centre de la rotule du plateau mobile au centre de l'articulation du segment proche de la base.

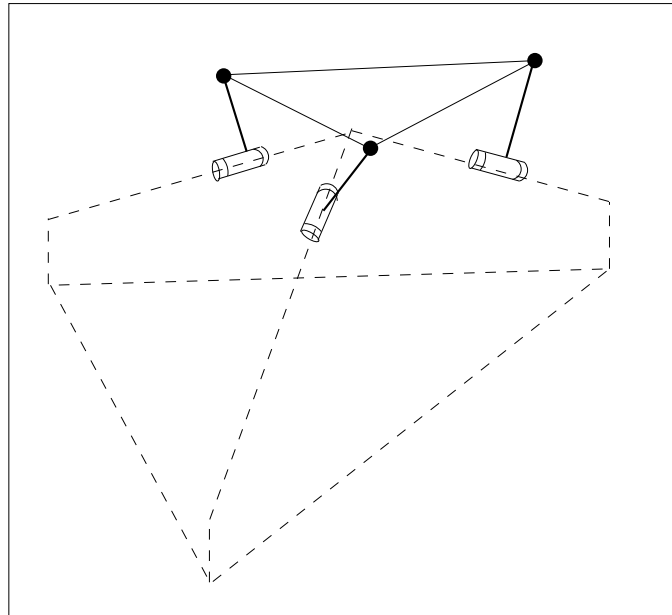


Figure 3.18: Mécanisme équivalent du mécanisme spatial à trois degrés de liberté en rotation avec segments de longueur fixe (Poignet INRIA)

On peut donc construire le mécanisme équivalent décrit en figure 3.18, qui est du type 2 et l'on en déduit qu'un majorant du nombre de montage possible est 16 et que l'on pourra trouver un polynôme pour la cinématique directe de degré 20.

### 3.6.2 8 configurations équivalentes

Un programme de résolution numérique de ce polynôme a été implanté et nous avons pu trouver, pour notre prototype où les plateaux de base et le mobile sont des triangles équilatéraux de rayon respectivement 7 et 5cm avec des segments de longueur 12 cm et un pied de longueur identique, des configurations où 8 modes de montages sont possibles. Par exemple les 8 configurations suivantes, décrites en figures 3.19,3.20, conduisent à des *za* équivalents.

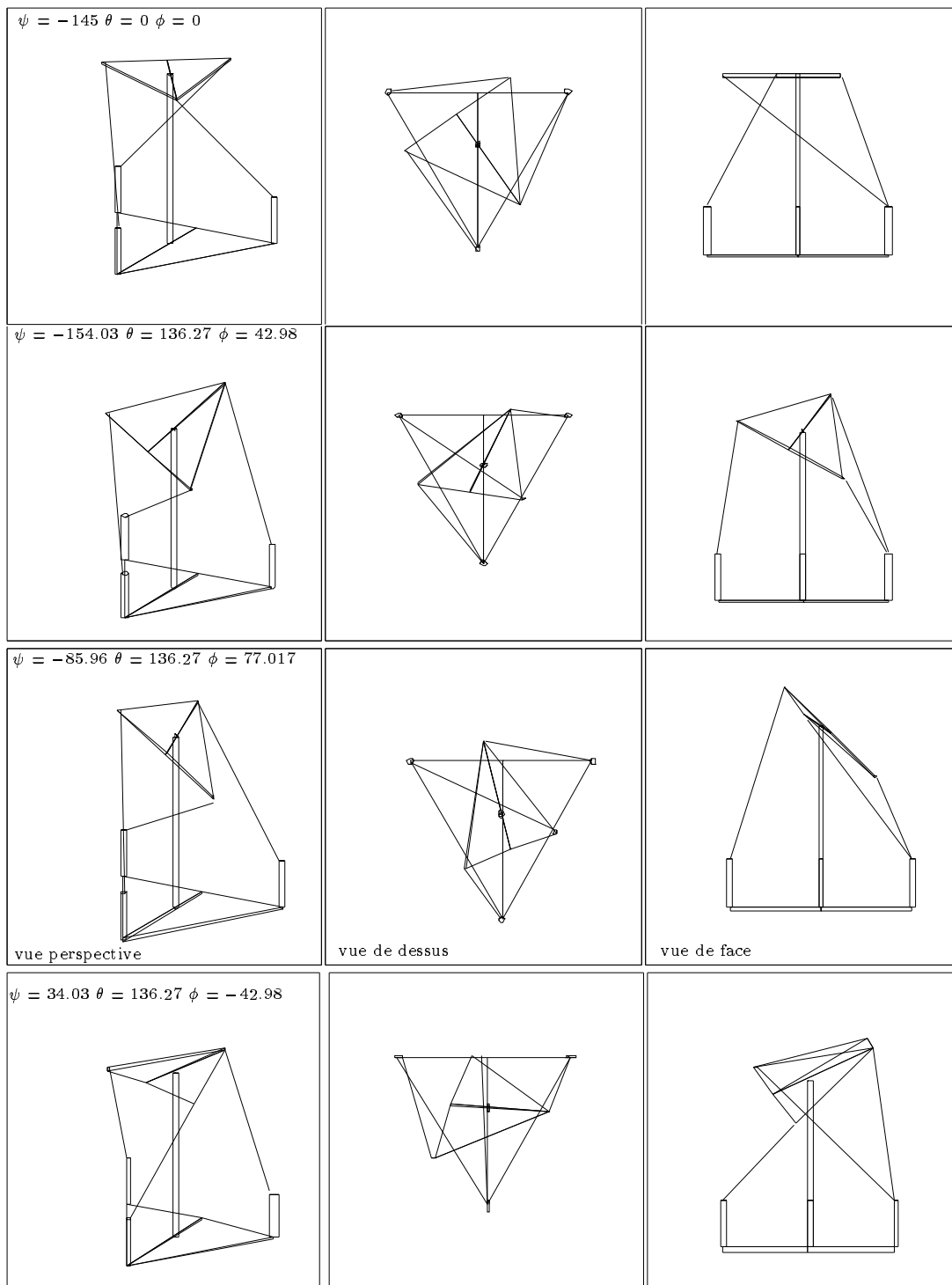


Figure 3.19: Les 4 premiers montages possibles du mécanisme à 3 degrés de liberté en rotation (Poignet INRIA)

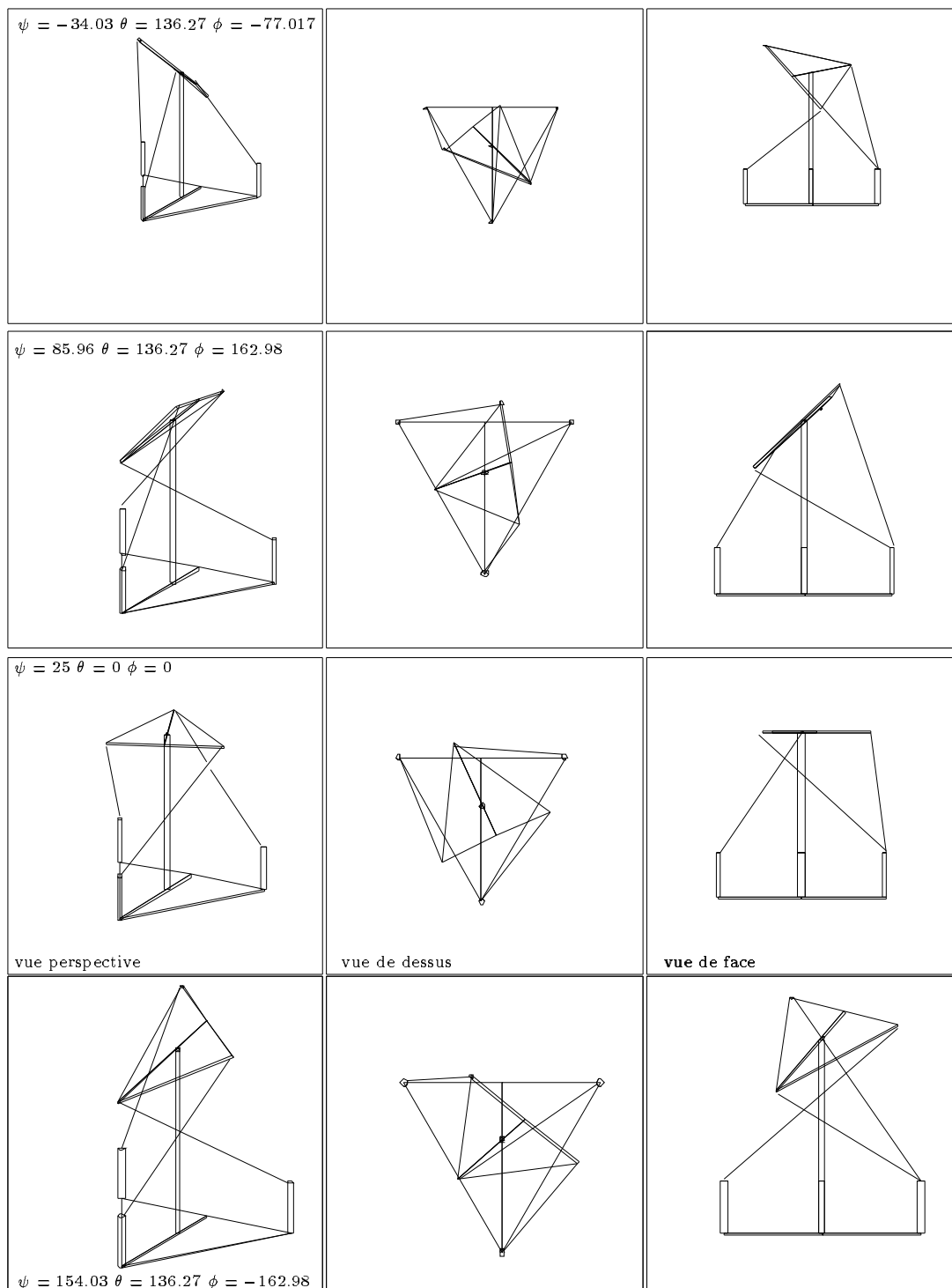


Figure 3.20: Les 4 derniers montages possibles du mécanisme à 3 degrés de liberté en rotation (Poignet INRIA)

$\psi$	$\theta$	$\phi$
-144.999998	0.0	0.0
-154.035628	136.277574	42.982182
-85.964358	136.277574	77.017821
34.035628	136.277574	-42.982186
-34.035639	136.277574	-77.017814
85.964344	136.277574	162.982179
154.035656	136.277574	-162.982179
25.2	0.0	0.0

Tableau 3.5: Poignet INRIA: 8 configurations conduisant à des coordonnées articulaires identiques (angles d'Euler, en degré)

### 3.6.3 Répartition du nombre de solutions

On a étudié la répartition des solutions pour un maillage de l'espace où les angles d'Euler sont compris entre  $\pm 60^\circ$  et discrétisés par pas de  $5^\circ$ . Ceci conduit à un maillage de 13777 points et à une répartition des solutions donnée par la table 3.6.

solutions	1	2	3	4	5	6	7	8
en %	1.575	73.51	2.42	12.62	2.29	4.057	1.183	2.039
en nombre	217	10127	334	1739	315	559	163	281

Tableau 3.6: Poignet INRIA: Répartition du nombre de mode de montage dans l'espace de travail

## 3.7 Mécanisme spatial à 6 degrés de liberté avec actionneurs linéaires

Après la "main gauche" développée il y a maintenant 3 ans nous avons voulu utiliser l'expérience accumulée dans le domaine pour concevoir un nouveau prototype, mais dans l'optique "poignet actif", c'est-à-dire mis au bout d'un robot porteur classique. Les contraintes que cela impose (légèreté, position du centre de masse..) ainsi que l'amélioration des performances (vitesse accrue, espace de travail augmenté pour les rotations, réduction de la masse et de l'inertie de l'équipage mobile) nous a conduit à adopter une architecture mécanique différente, qui a fait l'objet d'un dépôt de brevet. Cette architecture est décrite dans la figure 3.21; le principe de base consiste à utiliser des segments de longueur

fixe, articulés par des doubles rotules sur le plateau mobile, et dont les points d'articulation sur la base se traduisent, en l'occurrence selon une direction verticale. Les avantages de cette formule (à laquelle nous consacrerons un rapport complet) sont évidents : centre de gravité très proche de la base, très faible inertie de l'équipage mobile, risque d'intersection des segments diminué. D'autre part le développement d'actionneurs électriques linéaires appropriés a permis une diminution importante de masse avec de surcroît une gain de vitesse appréciable.

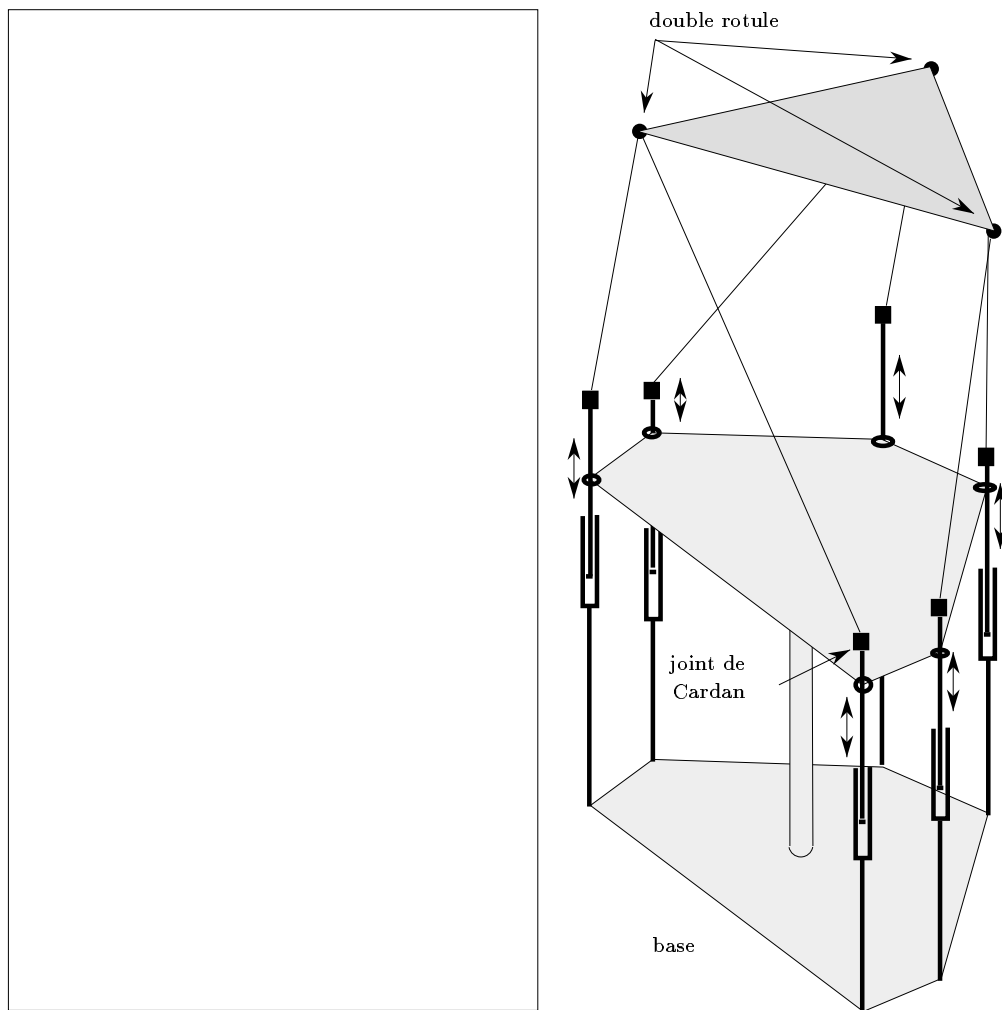


Figure 3.21: Le nouveau prototype et son architecture mécanique



### 3.7.1 Mécanisme équivalent

Une analyse similaire à celle faite pour le TSSM montre que ce mécanisme est équivalent à celui décrit en figure 3.11. Le triangle constitué par deux segments partageant la même double rotule est seulement susceptible d'une rotation autour d'un axe passant par les centres des cardans. On peut alors calculer la position du centre de la double rotule, à l'aide de la position des centres des cardans, et remplacer les deux segments par un segment unique relié à la base par une articulation rotoïde.

Le mécanisme équivalent est donc du type 3. Un majorant du nombre maximum de montage est donc 16 et l'on peut trouver un polynôme de degré 24.

Ce calcul a été implanté et nous avons pu trouver des configurations où 7 modes de montages sont possibles. Par exemple les 7 configurations suivantes (décrites dans les figures 3.22, 3.23) conduisent à des coordonnées articulaires équivalentes.

$x_0$	$y_0$	$z_0$	$\psi$	$\theta$	$\phi$
0.269086	-2.520418	6.054724	169.827721	106.124626	179.510789
0.0	0.000001	8.0	-5.0	0.0	0.0
2.048206	1.493244	6.054722	-70.172215	106.124569	59.510778
0.224361	-0.186721	1.337683	56.868502	31.599601	124.213437
-2.317292	1.027173	6.054722	49.827669	106.124594	-60.489195
0.049521	0.287606	1.337538	176.867839	31.596327	4.213996
0.000002	0.000001	0.219700	-179.668203	0.0	0.0

Tableau 3.7: 7 configurations conduisant à des coordonnées articulaires identiques (angles d'Euler en degré)

### 3.7.2 Répartition du nombre de solutions

On a étudié la répartition des solutions pour un maillage de l'espace où les angles d'Euler sont compris entre  $\pm 20^\circ$  et discrétisés par pas de 5 degré, et les positions  $x$  sont compris entre  $\pm 5$  cm et  $z = 7 - 10$  cm. Ceci conduit à un maillage de 25300 points et à une répartition des solutions donnée par la table 3.8.

## 3.8 Mécanisme de Stewart

### 3.8.1 Mécanisme équivalent

Ce mécanisme fort réputé est décrit en figure 3.24. Il s'agit du mécanisme tel que décrit par Stewart [15] qu'il ne faut pas confondre avec la structure de type

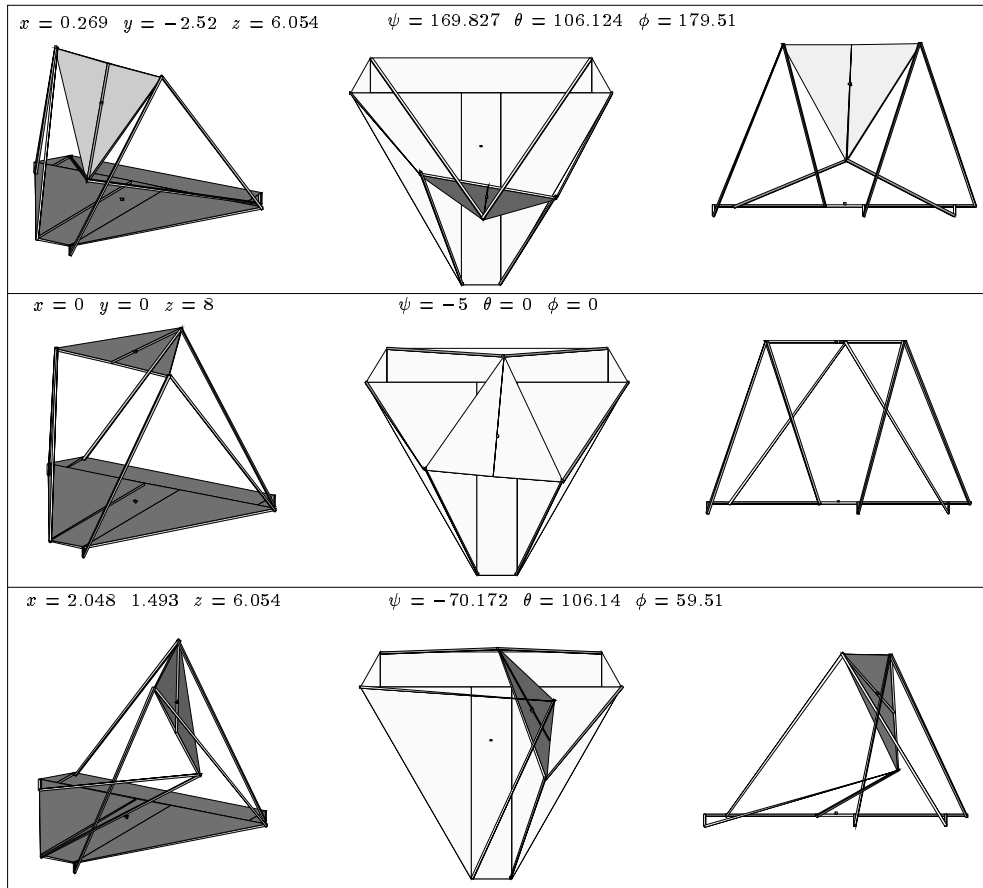


Figure 3.22: Prototype INRIA: 3 configurations à variables articulaires identiques (vue perspective, de dessus et de face)

solutions	1	2	3	4	5	6	7
en %	10.585	28.118	30.1027	20.837	8.268	0.189	0.0189
en nombre	2678	7114	7616	5272	2092	480	48

Tableau 3.8: Prototype INRIA: Répartition du nombre de mode de montage

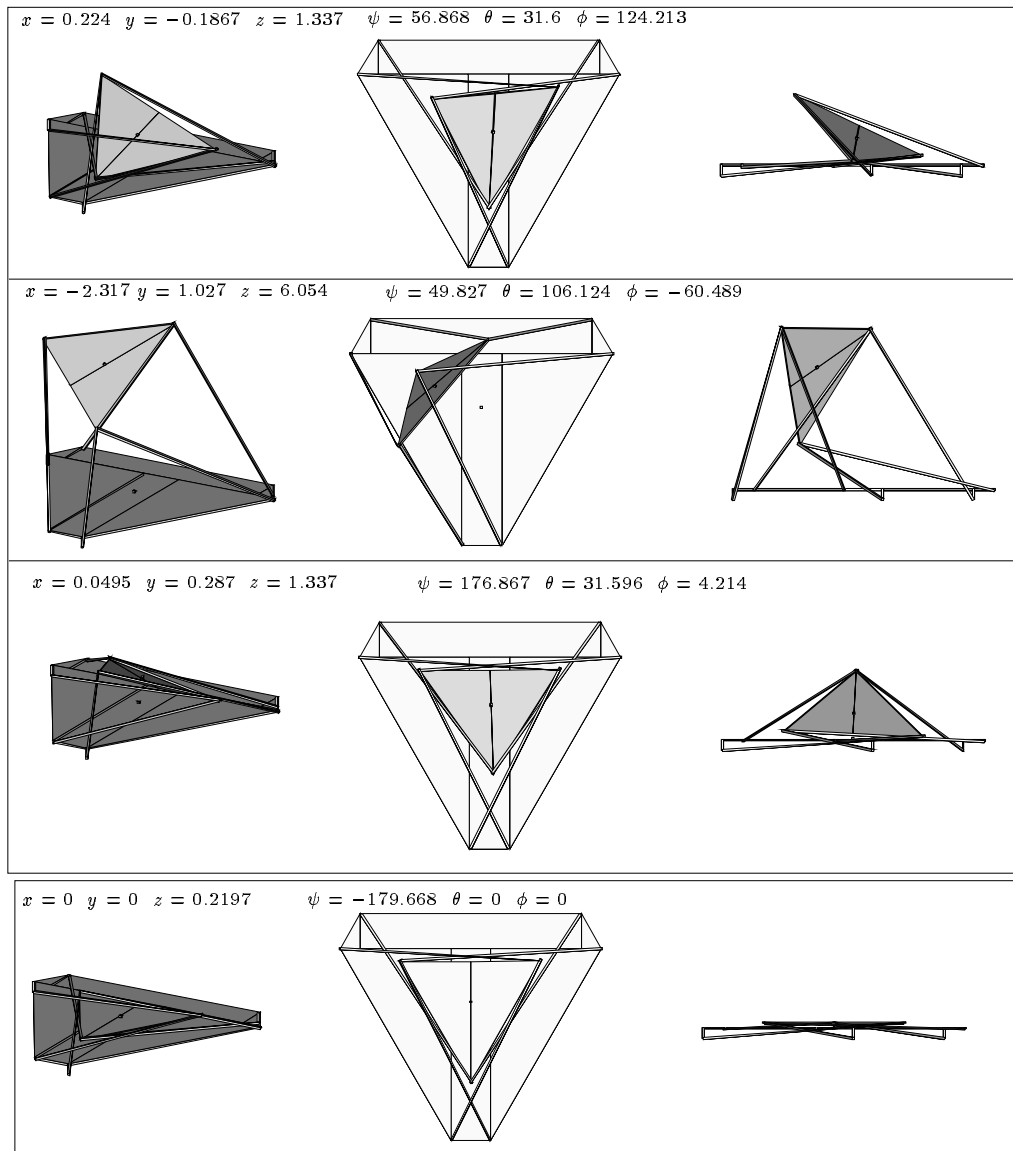


Figure 3.23: Prototype INRIA: 4 autres configurations à variables articulaires identiques (vue perspective, de dessus et de face)

SSM (comme cela est joyeusement fait dans la littérature anglo-saxonne). Dans

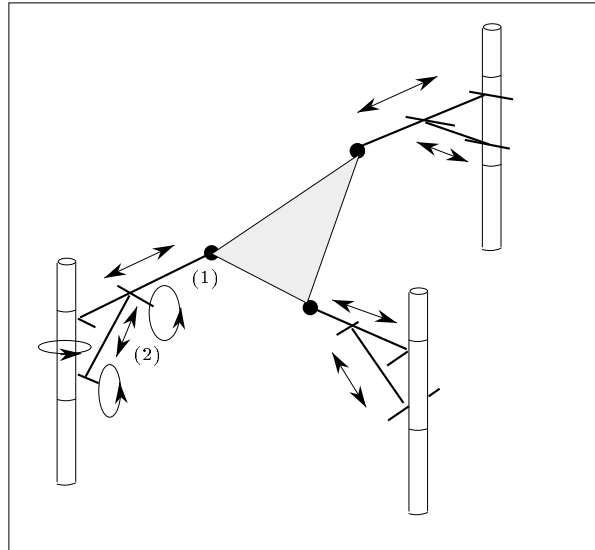


Figure 3.24: Mécanisme de Stewart

ce cas deux vérins sont articulés par des liaisons rotoïdes à un axe susceptible de rotation autour d'un axe vertical. L'autre extrémité d'un des vérins (1) est relié au plateau mobile par des rotules alors que l'autre vérin (2) permet de modifier l'orientation du vérin (1). Pour des longueurs fixes des vérins la seule possibilité de mouvement du point d'articulation est une rotation autour de l'axe vertical. Le mécanisme équivalent du mécanisme de Stewart est donc celui décrit par la figure 3.25, de type 2 (axes parallèles). Un majorant du nombre de montage possible est 16 et l'on pourra trouver un polynôme de degré 20 pour la cinématique directe.

### 3.8.2 8 configurations équivalentes

Un programme de résolution numérique du polynôme de la cinématique directe a été implanté et nous avons pu trouver des configurations où 8 modes de montages sont possibles. Dans l'exemple traité on suppose que les plateaux sont des triangles équilatéraux de rayon 20 pour la base et 5 pour le mobile. Les hauteurs des articulations sur le poteau sont de 5 pour l'articulation 2 et de 10 pour l'articulation 1, les longueurs mortes des segments 1 étant de 5. Dans ce cas les 8 configurations décrites dans la table 3.9 conduisent à des coordonnées articulaires équivalentes.

Les configurations correspondantes sont décrites dans les figures 3.26, 3.27.

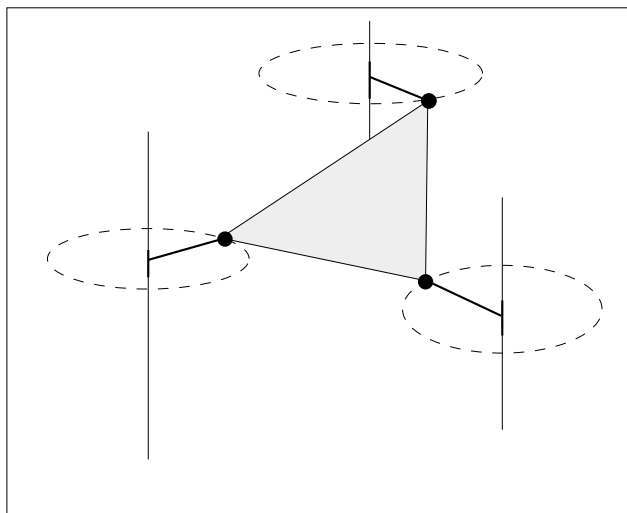


Figure 3.25: Mécanisme équivalent du mécanisme de Stewart

x	y	z	$\psi$	$\theta$	$\phi$
-0.954574	5.98857	10	-70.793887	160	130
1.342928	5.488324	10	-23.016429	160	130
0.107103	0.257609	10	-30.023243	20	130
-5.648898	-2.640058	10	-160.420740	160	130
-5.002486	-3.505835	10	177.103960	160	130
0	0	10	130	20	130
5.127337	-1.195835	10	41.343222	160	130
4.029389	-3.638017	10	95.780739	160	130

Tableau 3.9: Plate-forme de Stewart: Configurations équivalentes (cm et degré)

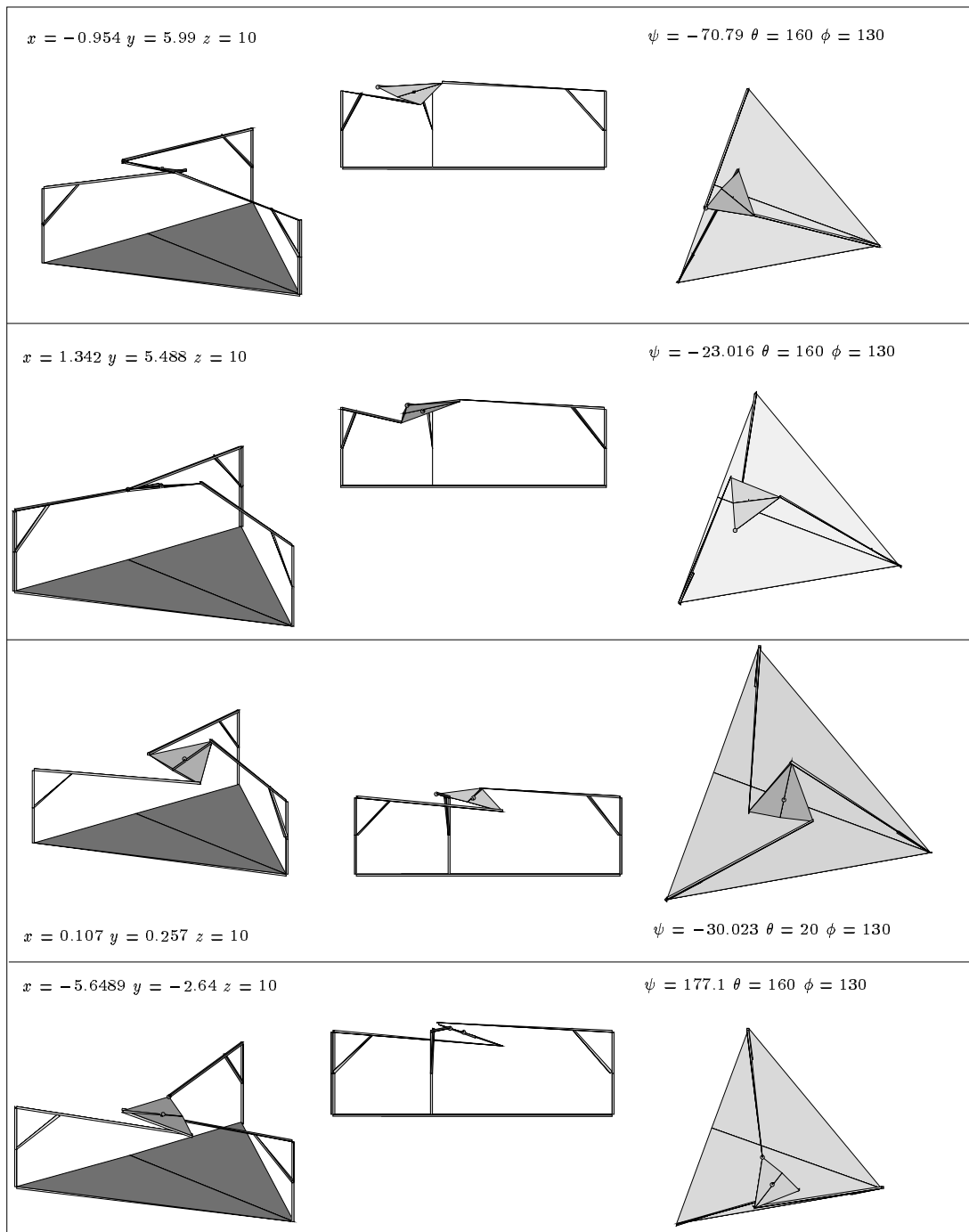


Figure 3.26: Plate-forme de Stewart: les 4 premiers montages possibles (vue perspective, de face et de dessus)

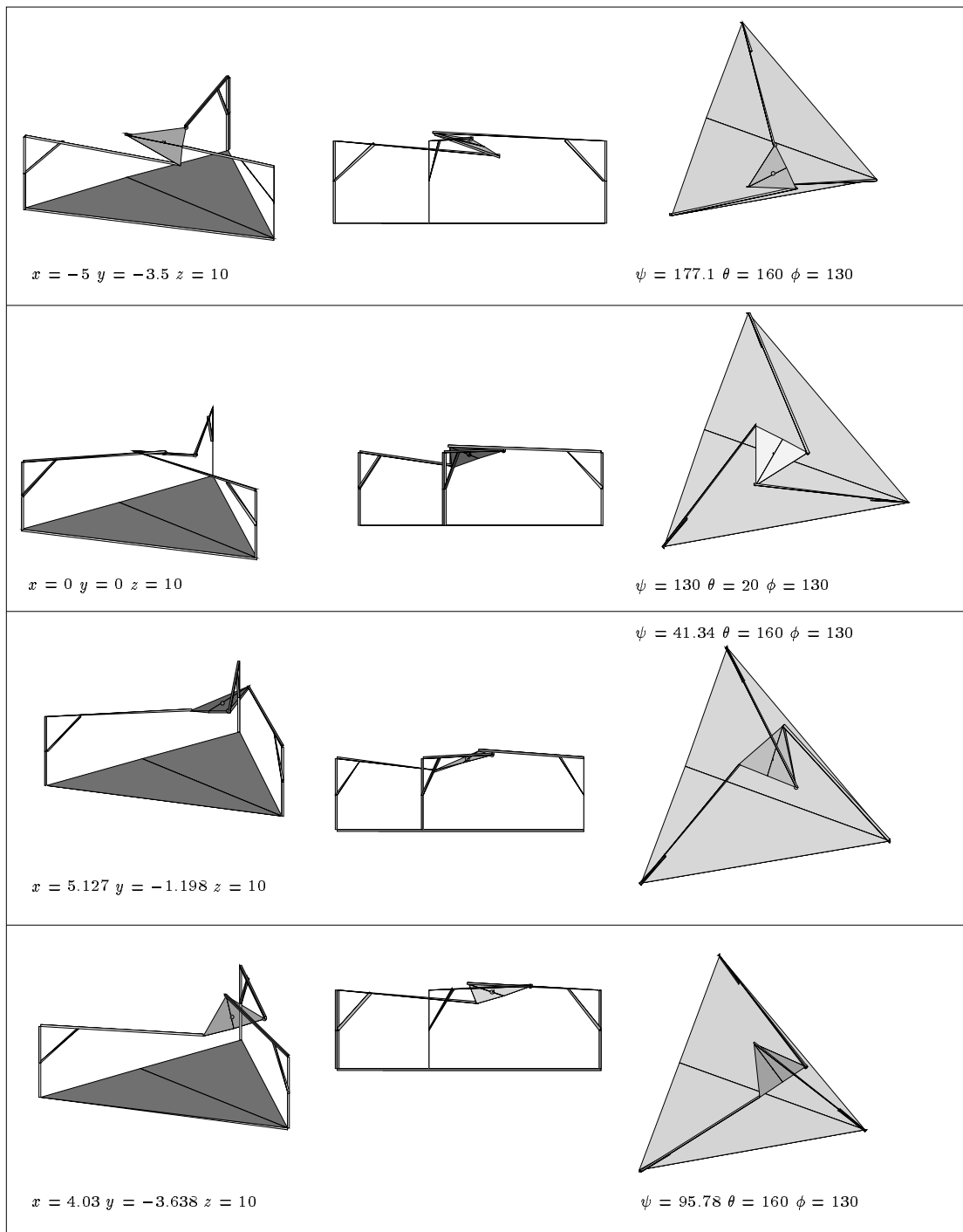


Figure 3.27: Plate-forme de Stewart: les 4 derniers montages possibles (vue perspective, de face et de dessus)

### 3.8.3 Répartition des solutions

On a étudié la répartition des solutions pour un maillage de l'espace où les angles d'Euler sont compris entre  $\pm 60^\circ$  et discrétisés par pas de 10 degré et les coordonnées en  $x, y$  sont compris entre  $\pm 2\text{cm}$  et le  $z$  est fixé à 7. Ceci conduit à un maillage de 15552 points et à une répartition des solutions donnée par la table 3.10.

solutions	1	2	3	4	5	6	7	8
en %	8.500	83.957	0.578	5.619	0.456	0.752	0.0385	0.09
en nombre	1322	13057	90	874	71	117	6	14

Tableau 3.10: Plate-forme de Stewart: Répartition du nombre de mode de montage

## 3.9 Mécanisme spatial à 6 degrés de liberté à actionneurs rotatifs

Une architecture spatiale à 6 degrés de liberté à actionneurs rotatifs a été décrite par Hunt [14] (figure 3.28). Dans ce cas les longueurs des segments sont fixes

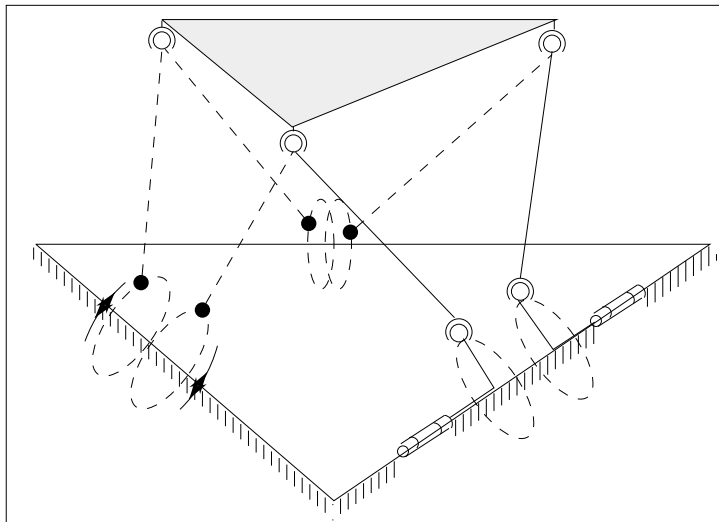


Figure 3.28: Une architecture à 6 degrés de liberté avec actionneurs rotatifs

et leurs articulations à la base sont entraînées par un actionneur rotatif. Pour un angle fixé des actionneurs les points d'articulations du mobile peuvent se déplacer sur des cercles dont le centre de rotation se trouve sur la droite joignant



les points d'articulation correspondant sur la base. Le mécanisme équivalent est donc de type 3 et le majorant du nombre maximum de montage est 16, alors que l'on pourra trouver un polynôme de degré 24 pour la cinématique directe.

### 3.10 Mécanisme spatial à 6 degrés de liberté à base de mécanisme à 4 barres

Ce mécanisme a été décrit par Han [16]. Il reprend le principe du déplacement des points d'articulations liés à la base avec des longueurs de segments fixées. Les articulations liées à la base se trouvent sur les coupleurs de mécanismes à 4 barres se déplaçant dans le plan de la base (figure 3.29). On en présente ici une

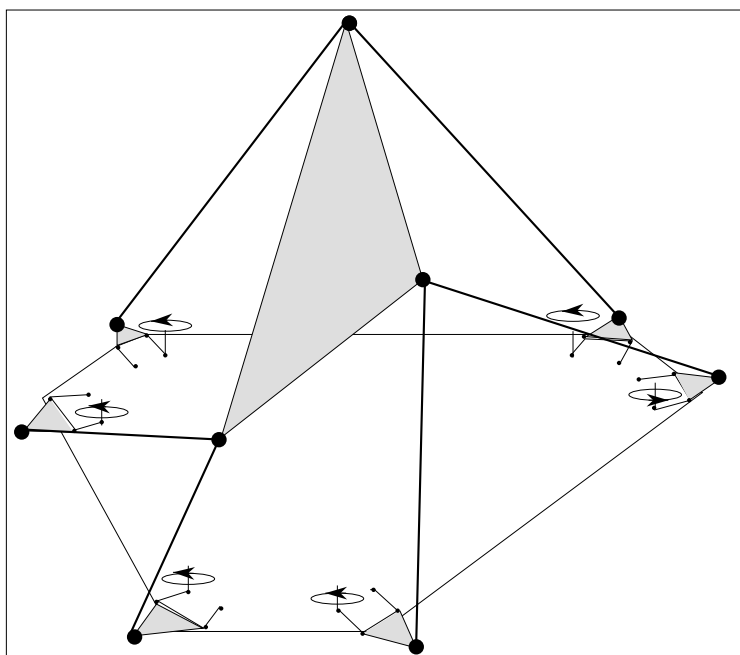


Figure 3.29: Mécanisme spatial à 6 degrés de liberté à base de mécanismes à 4 barres

version simplifiée où les points d'articulation sur le plateau mobile sont réunis par paire pour former des doubles rotules. La position de l'articulation d'entrée des mécanismes à 4 barres étant fixée on peut alors construire un mécanisme équivalent, qui sera identique à celui du TSSM (mécanisme équivalent de type 1). On en déduit que le nombre de mode d'assemblage de ce type de mécanisme est 16 et que l'on peut trouver un polynôme de degré 16 pour la cinématique directe. Il faut toutefois noter que ce mécanisme est ambigu dans la mesure où, pour un angle d'entrée d'un mécanisme à 4 barres, il existe deux solutions pour l'angle de l'articulation de sortie, et donc deux positions possibles pour la

position de l'articulation du segment. Pour les 6 angles d'entrée fixés il existe donc en fait  $2^6$  positions possibles pour les points d'articulation; et pour chacune de ces configurations il existe, au maximum, 16 montages possibles. Donc il existe a priori au maximum  $16 \times 2^6$  modes de montage possibles, soit 1024. L'ambiguïté ne pourra être levée qu'en mesurant l'angle de sortie ou en limitant les déplacements possibles du coupleur, ce qui rend ce mécanisme bien complexe.

### 3.11 Mécanisme spatial à 6 degrés de liberté utilisant des actionneurs rotatifs-linéaires

Kohli [18] propose d'utiliser des actionneurs rotatifs-linéaires pour la construction d'un robot parallèle à 6 degrés de liberté. Ces actionneurs sont constitués d'un arbre cannelé, susceptible d'être entraîné en rotation, sur lequel le segment, dont l'extrémité est, elle aussi, cannelée peut être entraînée en translation. Le segment peut donc être entraîné simultanément en rotation et en translation. A partir de ce type d'actionneurs on peut donc concevoir un robot parallèle à 6 degrés de liberté (figure 3.30). Ce mécanisme est constitué de 6 segments; 3 sont

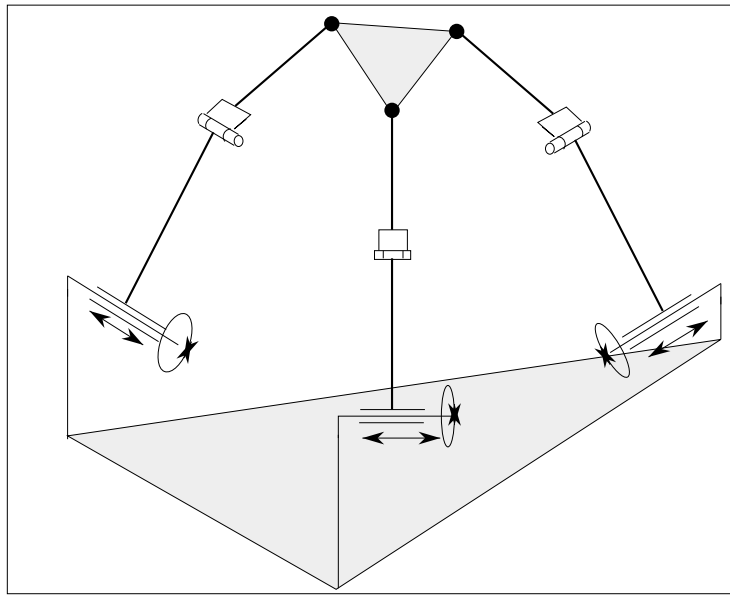


Figure 3.30: Mécanisme spatial à 6 degrés de liberté utilisant des actionneurs rotatifs-linéaires

articulés sur la base par les actionneurs rotatifs-linéaires et sont fixés à l'autre extrémité sur des articulations rotoïdes. Les 3 segments restants sont fixés sur les articulations rotoïdes et au plateau mobile par des rotules. Le mécanisme équivalent est donc de type 1 et, par conséquent, un majorant du nombre de

montage est 16. Kohli, sans entrer dans les détails, montre que l'on peut effectivement trouver un polynôme de degré 16 pour décrire la cinématique directe, en utilisant une méthode similaire à la nôtre (quant à la cinématique inverse elle nécessite la résolution d'équations de degré 4).

### **3.12 Le cas général**

Dans les résultats précédents l'approche de la résolution consiste tout d'abord à définir un mécanisme équivalent, mais dont le nombre d'inconnus est réduit par rapport au mécanisme initial (on passe de 6 à 3 pour le TSSM par exemple). Les équations non-linéaires du système équivalent sont assez simples pour être traitées. Dans le cas général d'un SSM, même s'il existe des méthodes pour diminuer le nombre d'inconnus du système (voir [4]) les équations restantes sont alors épouvantablement complexes. De plus on ne voit pas de mécanisme équivalent simple. Ce cas reste donc ouvert.

### **3.13 Résumé**

Les figures suivantes résument les connaissances actuelles sur le majorant du nombre de mode d'assemblage des mécanismes spatiaux, le degré des polynômes connus de la cinématique directe, ainsi que le nombre maximum de mode de montage connu.

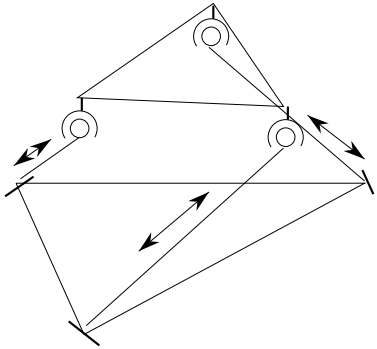
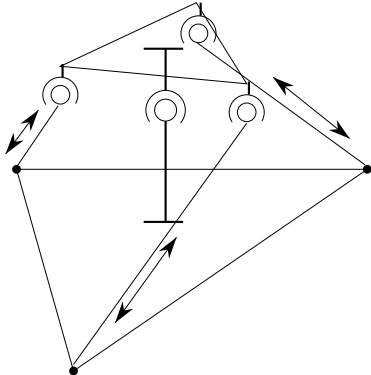
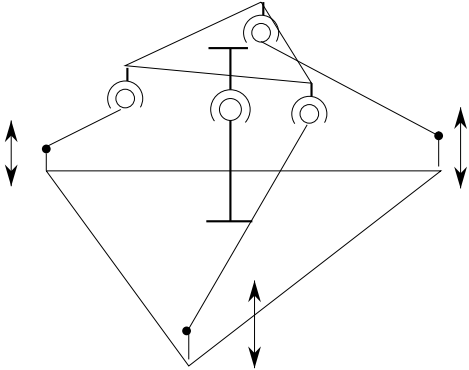
	majorant du nombre de montage	degré du polynôme connu	nombre maximum de mode de montage connu
<p>[8], [17]</p> 	16	16	16
	16	20	
<p>prototype INRIA</p> 	16	20	8

Figure 3.31: Mécanismes spatiaux à 3 degrés de liberté, le majorant du nombre de mode d'assemblage, le degré du polynôme connu pour leur cinématique directe, le nombre maximum de mode de montage connu

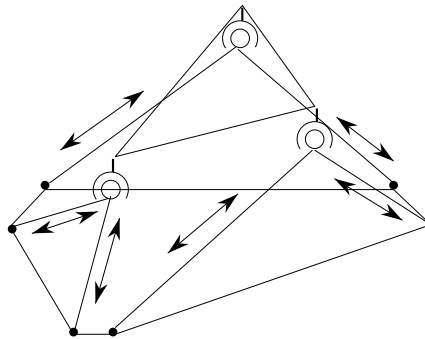
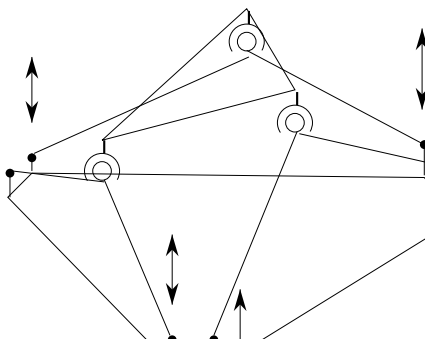
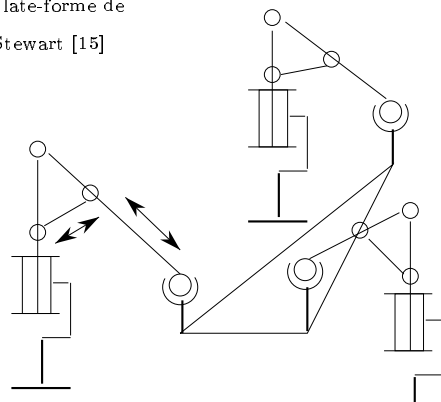
	majorant du nombre de montage	degré du polynôme connu	nombre maximum de mode de montage connu
<p>TSSM</p> 	16	16 uniquement avec des puissances paires	16
<p>prototype INRIA</p> 	16	24	7
<p>Plate-forme de Stewart [15]</p> 	16	20	8

Figure 3.32: Mécanismes spatiaux à 6 degrés de liberté, le majorant du nombre de mode d'assemblage, le degré du polynôme connu pour leur cinématique directe, le nombre maximum de mode de montage connu

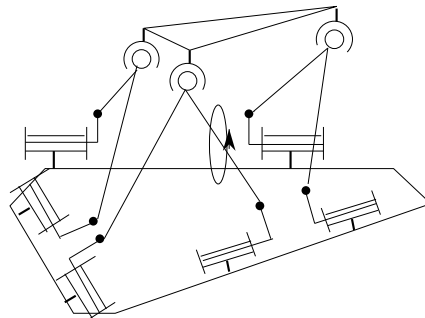
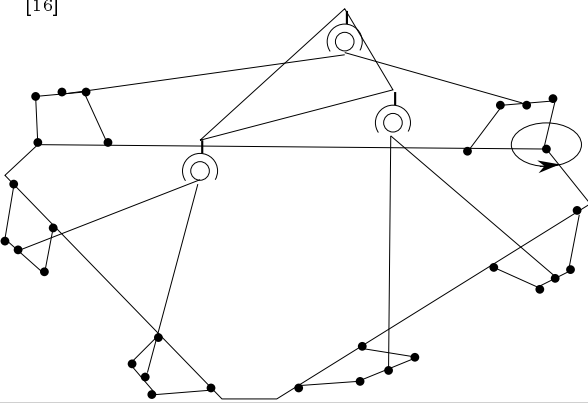
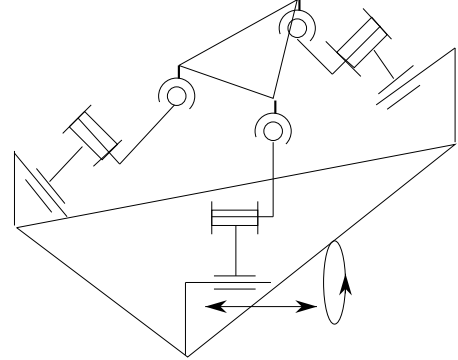
	majorant du nombre de montage	degré du polynome connu	nombre maximum de mode de montage connu
<p>[14]</p> 	16	24	
<p>[16]</p> 	1024	64 de degré	16
<p>[18]</p> 	16	16	

Figure 3.33: Mécanismes spatiaux à 6 degrés de liberté, le majorant du nombre de mode d'assemblage, le degré du polynôme connu pour leur cinématique directe, le nombre maximum de mode de montage connu

## Chapitre 4

# Conclusion

Les conclusions que l'on peut tirer de cette étude sont variées. On a tout d'abord pu, au moins pour un certain nombre de cas, confirmer une conjecture concernant la difficulté d'obtention d'une expression analytique de la cinématique directe. Les expressions polynomiales obtenues, même dans le cas planaire, montrent clairement que cet espoir est, en général, vain. Certes, on a pu établir, pour les mécanismes spatiaux, que le degré du polynôme pouvait être majoré par 16, mais les résolutions numériques montrent que, soit ce majorant est atteint (cas du TSSM), soit que l'on peut trouver numériquement un nombre de mode de montage tel qu'un éventuel polynôme de degré correspondant serait encore non soluble analytiquement.

Du point de vue des applications pratiques la résolution de la cinématique directe par la forme polynomiale ne semble pas pouvoir rivaliser avec les méthodes numériques déjà connues. Toutefois on pourrait peut être faire une exception dans le cas où se posent des problèmes de convergence de celles-ci (en particulier lors de l'initialisation du manipulateur, alors que l'on ne dispose d'aucune estimation de la position actuelle de celui-ci). Se pose alors le problème du choix parmi les diverses solutions possibles; c'est un problème délicat. En effet une méthode de choix devrait être basée sur l'exclusion des configurations ne pouvant être obtenues sans démontage du mécanisme, étant donné une position nominale de celui-ci. Ce problème est quasiment non traité dans la littérature en raison de sa complexité. D'autre part rien ne garantit que ce critère serait suffisamment puissant pour conduire à une configuration unique, auquel cas le choix devient impossible.

Nous avons pu montrer que l'utilisation du calcul formel, fortement guidé par l'utilisateur, pouvait être d'une aide précieuse dans le domaine de la théorie des mécanismes. La conjecture de Hunt, résolue dans cette étude, en est un bon

exemple. L'ampleur des calculs mis en oeuvre exclut, a priori, tout espoir de résolution manuelle.

Enfin il reste le cas général du manipulateur du type SSM : les méthodes employées pour les architectures traitées ici ne sont pas utilisables dans ce cas, qui reste donc complètement ouvert.

Pour terminer, mentionnons le sujet intéressant de la dualité manipulateur parallèle-sériel où le même nombre intervient dans les problèmes duaux de cinématique : la similitude des résultats est trop troublante pour que l'on ne puisse pas espérer établir une relation formelle entre ces deux architectures.



## Chapitre 5

# Annexes

### 5.1 Calcul de la courbe du coupleur d'un mécanisme à 4 barres

Soit  $(x_a, y_a)$  les coordonnées de  $A$ ,  $(x_b, y_b)$  les coordonnées de  $B$  et  $(x, y)$  les coordonnées de  $C$ . En utilisant les notations de la figure 2.2 on peut écrire :

$$\begin{cases} x_a = x - b \cos \lambda \\ y_a = y - b \sin \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x_b = x - a \cos(\gamma + \lambda) \\ y_b = y - a \sin(\gamma + \lambda) \end{cases}$$

La trajectoire des points  $A$  et  $B$  étant des cercles on a :

$$x_a^2 + y_a^2 = r^2 \quad (x_b - p)^2 + y_b^2 = s^2$$

En utilisant les équations précédentes on obtient :

$$\begin{aligned} (x - b \cos \lambda)^2 + (y - b \sin \lambda)^2 &= r^2 \\ ((x - p) - a \cos(\gamma + \lambda))^2 + (y - a \sin(\gamma + \lambda))^2 &= s^2 \end{aligned}$$

Ce qui, développé, donne un système de deux équations linéaires en terme de  $\sin \lambda, \cos \lambda$ . On résoud ce système, puis on écrit l'expression :

$$\sin(\lambda)^2 + \cos(\lambda)^2 = 1$$

qui donne l'équation cherchée en  $x, y$ . Le polynôme s'écrit sous la forme :

$$\sum_{i=0}^{i=6} u_i x^i$$

avec :

$$\begin{aligned} u_0 &= b^2 y^2 s^4 + b^4 a^2 y^2 + y^6 a^2 + b^2 y^6 + b^2 y^2 p^4 + r^4 a^2 y^2 + b^2 y^2 a^4 + a^2 p^2 y^4 + a^2 p^2 b^4 \\ &+ a^2 p^2 r^4 - 2y^4 a^2 r^2 - 2b^2 y^4 s^2 + 2b^2 y^4 p^2 + 4b^2 y^2 a^2 p^2 - 2b^2 y^2 a^2 s^2 \\ &- 2b^2 y^2 p^2 s^2 - 2by^3 a^3 \sin(\gamma)p - 2by^4 a^3 \cos(\gamma) - 2b^3 y^2 p^2 a \cos(\gamma) \\ &+ 2by^2 p^2 a \cos(\gamma)r^2 + 2by^3 s^2 a \sin(\gamma)p + 2b^3 y s^2 a \sin(\gamma)p - 2bys^2 a \sin(\gamma)pr^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2by^4s^2a \cos(\gamma) - 2b^3y^4a \cos(\gamma) - 2b^3ya^3 \sin(\gamma)p + 2bya^3 \sin(\gamma)pr^2 \\
& - 2b^3y^2a^3 \cos(\gamma) - 2by^6a \cos(\gamma) + 2by^2a^3 \cos(\gamma)r^2 - 2by^3p^3a \sin(\gamma) \\
& - 2b^3yp^3a \sin(\gamma) + 2byp^3a \sin(\gamma)r^2 - 2by^4p^2a \cos(\gamma) + 2b^3y^2s^2a \cos(\gamma) \\
& - 2by^2s^2a \cos(\gamma)r^2 - 2by^5a \sin(\gamma)p - 2b^3y^3a \sin(\gamma)p + 2by^3a \sin(\gamma)pr^2 \\
& + 2by^4a \cos(\gamma)r^2 + 8a^2 \sin(\gamma)py^3 \cos(\gamma)b^2 + 4a^2 \cos(\gamma)^2y^4b^2 - 4y^2a^2 \cos(\gamma)^2p^2b^2 \\
& - 2a^2p^2y^2r^2 - 2a^2p^2b^2r^2 - 2b^2a^2y^2r^2 \\
u_1 = & -2p(a^2r^4 - b^3a^3 \cos(\gamma) - 2a^2y^2r^2 + 2b^2y^4 + a^2y^4 + 2b^2y^2p^2 + a^2b^4 \\
& + 4a^2 \cos(\gamma)^2y^2b^2 - 2by^3pa \sin(\gamma) + 2bypa \sin(\gamma)r^2 - 2b^3ypa \sin(\gamma) \\
& - b^3p^2a \cos(\gamma) - 2b^2y^2s^2 - 2a^2b^2r^2 + bp^2r^2a \cos(\gamma) - 3by^4a \cos(\gamma) \\
& + ba^3r^2 \cos(\gamma) - bp^2y^2a \cos(\gamma) - bs^2r^2a \cos(\gamma) - by^2a^3 \cos(\gamma) \\
& - 3b^3y^2a \cos(\gamma) + 4b^2a^2y \cos(\gamma)p \sin(\gamma) + 3by^2a \cos(\gamma)r^2 + bs^2y^2a \cos(\gamma) \\
& + b^3s^2a \cos(\gamma)) \\
u_2 = & -2b^2a^2s^2 - 2b^3a^3 \cos(\gamma) - 2a^2p^2r^2 + a^2r^4 - 4a^2y^2r^2 + 3b^2y^4 + 3a^2y^4 \\
& + 2y^2a^2p^2 - 2b^2p^2s^2 + 8b^2y^2p^2 + a^2b^4 + 8a^2 \cos(\gamma)^2y^2b^2 - 4by^3pa \sin(\gamma) \\
& + 2bypa \sin(\gamma)r^2 - 2b^3ypa \sin(\gamma) - 6b^3p^2a \cos(\gamma) - 4b^2y^2s^2 - 2a^2b^2r^2 \\
& + 6bp^2r^2a \cos(\gamma) - 6by^4a \cos(\gamma) + 2ba^3r^2 \cos(\gamma) - 8bp^2y^2a \cos(\gamma) \\
& - 2bs^2r^2a \cos(\gamma) - 4by^2a^3 \cos(\gamma) - 4b^3y^2a \cos(\gamma) + b^2s^4 + b^2a^4 + b^2p^4 \\
& + 8b^2a^2y \cos(\gamma)p \sin(\gamma) + 4by^2a \cos(\gamma)r^2 + 4bs^2y^2a \cos(\gamma) + 2b^3s^2a \cos(\gamma) \\
& - 2bya^3 \sin(\gamma)p + 2bys^2a \sin(\gamma)p + 4a^2 \cos(\gamma)^2p^2b^2 - 2byp^3a \sin(\gamma) \\
u_3 = & 2p(-2b^2p^2 - 2a^2y^2 + 2a^2r^2 + 2b^2s^2 - 4b^2y^2 + 3b^3a \cos(\gamma) - 3br^2a \cos(\gamma) \\
& + 2bypa \sin(\gamma) + 6ay^2 \cos(\gamma)b + a^3 \cos(\gamma)b + a \cos(\gamma)p^2b - a \cos(\gamma)bs^2 - 4a^2 \cos(\gamma)^2b^2) \\
u_4 = & a^2p^2 - 2b^2s^2 + 3a^2y^2 - 2a^2r^2 + 3b^2y^2 + 6b^2p^2 - 6ay^2 \cos(\gamma)b - 2b^3a \cos(\gamma) \\
& + 2br^2a \cos(\gamma) - 2bypa \sin(\gamma) + 4a^2 \cos(\gamma)^2b^2 + 2a \cos(\gamma)bs^2 - 2a^3 \cos(\gamma)b - 6a \cos(\gamma)p^2b \\
u_5 = & -2p(2b^2 - 3a \cos(\gamma)b + a^2) \\
u_6 = & a^2 + b^2 - 2a \cos(\gamma)b
\end{aligned}$$

## 5.2 Points doubles

Lorsque le coupleur est défini par  $\gamma = 0$  ou  $\gamma = \pi$  les points doubles ont obligatoirement leur coordonnées  $y = 0$ . Le polynôme du coupleur se réduit alors à la forme :

$$(b^2ax - ba^2x - bx^3 + ax^3 - b^2ap + 2bx^2p - ax^2p - bxp^2 - axr^2 + ar^2p + bxs^2)^2 = 0$$

pour  $\gamma = 0$  ou :

$$(bx^3 - 2bx^2p + bxp^2 + b^2xa + x^3a - b^2ap - x^2ap + ba^2x - bxs^2 - xar^2 + r^2ap)^2 = 0$$

pour  $\gamma = \pi$

## 5.3 Circularité de la courbe du coupleur du mécanisme à 4 barres

### 5.3.1 Coefficients $E, F$

$$\begin{aligned}
E_1 &= 2r_{12}Y - 2r_{12}o_{12}y \\
E_2 &= -2r_{12}Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_3 &= o12x^2 - 2o12xX + X^2 + o12y^2 - 2o12yY + Y^2 + r_{12}^2 + Z^2 - d^2 \\
F_1 &= 2r_{34} \sin(\gamma)X - 2r_{34} \sin(\gamma)o34x + 2r_{34} \cos(\gamma)o34y - 2r_{34} \cos(\gamma)Y \\
F_2 &= 2r_{34} \sin(\gamma)X - 2r_{34} \sin(\gamma)o34x + 2r_{34} \cos(\gamma)o34y - 2r_{34} \cos(\gamma)Y \\
F_3 &= o34x^2 - 2o34xX + X^2 + o34y^2 - 2o34yY + Y^2 + r_{34}^2 + Z^2 - d^2
\end{aligned}$$

### 5.3.2 Coefficients abrégés de $E, F$

$$\begin{aligned}
E_{11} &= 2r_{12} \\
E_{12} &= -2r_{12}o12y \\
E_{21} &= -2r_{12} \\
E_{31} &= -2o12x \\
E_{32} &= -2o12y \\
E_{33} &= o12x^2 + o12y^2 + r_{12}^2 - d^2 \\
F_{11} &= 2r_{34} \sin(\gamma) \\
F_{12} &= -2r_{34} \cos(\gamma) \\
F_{13} &= 2r_{34} \cos(\gamma)o34y - 2r_{34} \sin(\gamma)o34x \\
F_{21} &= -2r_{34} \\
F_{31} &= -2o34x \\
F_{32} &= -2o34y \\
F_{33} &= o34x^2 + o34y^2 + r_{34}^2 - d^2
\end{aligned}$$

### 5.3.3 Coefficients $N$

$$\begin{aligned}
N_1 &= K_{21}^2 E_3^2 - 2K_{21} E_3 E_1 K_{32} + E_1^2 K_{32}^2 + E_2^2 K_{32}^2 - K_{21}^2 E_2^2 \\
N_2 &= E_3^2 K_{11}^2 - E_1^2 K_{11}^2 \\
N_3 &= 2E_1 K_{11} K_{21} E_2 - 2E_2 K_{32} E_3 K_{11} \\
N_4 &= 2E_1 K_{11} K_{22} E_2 - 2E_2 K_{33} E_3 K_{11} \\
N_5 &= 2E_1^2 K_{33} K_{32} - 2E_1 K_{33} K_{21} E_3 + 2K_{21} E_3^2 K_{22} - 2E_1 K_{32} K_{22} E_3 + 2E_2^2 K_{33} K_{32} - 2K_{21} E_2^2 K_{22} \\
N_6 &= E_1^2 K_{33}^2 - 2E_1 K_{33} K_{22} E_3 + K_{22}^2 E_3^2 + E_2^2 K_{33}^2 - K_{22}^2 E_2^2
\end{aligned}$$

### 5.3.4 Coefficients abrégés $N$

$$\begin{aligned}
N_{11} &= K_{32}^2 \\
N_{12} &= -2K_{21} K_{32} \\
N_{13} &= K_{21}^2 \\
N_{14} &= K_{32}^2 - K_{21}^2 \\
N_{21} &= K_{11}^2 \\
N_{22} &= -K_{11}^2 \\
N_{31} &= -2K_{32} K_{11} \\
N_{32} &= 2K_{11} K_{21} \\
N_{41} &= -2K_{33} K_{11} \\
N_{42} &= 2K_{11} K_{22} \\
N_{51} &= 2K_{33} K_{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{52} &= -2K_{33}K_{21} - 2K_{32}K_{22} \\
N_{53} &= 2K_{21}K_{22} \\
N_{54} &= 2K_{33}K_{32} - 2K_{21}K_{22} \\
N_{61} &= K_{33}^2 \\
N_{62} &= -2K_{33}K_{22} \\
N_{63} &= K_{22}^2 \\
N_{64} &= K_{33}^2 - K_{22}^2
\end{aligned}$$

## 5.4 Calcul des coefficients de la forme polynomiale pour un TSSM

### 5.4.1 Expressions des coefficients des équations de base

Equation 3.20 :

$$\begin{aligned}
K_{11} &= -2r_{12}r_{34} \\
K_{21} &= 2\cos(g)r_{12}r_{34} \\
K_{22} &= -2y_{O_{12}}r_{12} + 2y_{O_{34}}r_{12} \\
K_{32} &= -2\cos(g)y_{O_{12}}r_{34} + 2\cos(g)y_{O_{34}}r_{34} \\
&\quad + 2\sin(g)x_{O_{12}}r_{34} - 2\sin(g)x_{O_{34}}r_{34} \\
K_{33} &= -mp^2 + x_{O_{12}}^2 - 2x_{O_{12}}x_{O_{34}} + y_{O_{12}}^2 - 2y_{O_{12}}y_{O_{34}} \\
&\quad + x_{O_{34}}^2 + y_{O_{34}}^2 + r_{12}^2 + r_{34}^2
\end{aligned}$$

Equation 3.21

$$\begin{aligned}
L_{11} &= -2r_{12}r_{56} \\
L_{21} &= 2\cos(g)r_{12}r_{56} \\
L_{22} &= -2y_{O_{12}}r_{12} + 2y_{O_{56}}r_{12} \\
L_{32} &= -2\cos(g)y_{O_{12}}r_{56} + 2\cos(g)y_{O_{56}}r_{56} \\
&\quad - 2\sin(g)x_{O_{12}}r_{56} + 2\sin(g)x_{O_{56}}r_{56} \\
L_{33} &= -mp^2 + x_{O_{12}}^2 - 2x_{O_{12}}x_{O_{56}} + y_{O_{12}}^2 - 2y_{O_{12}}y_{O_{56}} \\
&\quad + x_{O_{56}}^2 + y_{O_{56}}^2 + r_{12}^2 + r_{56}^2
\end{aligned}$$

Equation 3.22

$$\begin{aligned}
M_{11} &= -2r_{34}r_{56} \\
M_{21} &= -2\cos^2(g)r_{34}r_{56} + 2\sin^2(g)r_{34}r_{56} \\
M_{22} &= -2\cos(g)y_{O_{34}}r_{56} + 2\cos(g)y_{O_{56}}r_{56} \\
&\quad - 2\sin(g)x_{O_{34}}r_{56} + 2\sin(g)x_{O_{56}}r_{56} \\
M_{32} &= 2\cos(g)y_{O_{34}}r_{34} - 2\cos(g)y_{O_{56}}r_{34} \\
&\quad - 2\sin(g)x_{O_{34}}r_{34} + 2\sin(g)x_{O_{56}}r_{34} \\
M_{33} &= -m^2 + x_{O_{34}}^2 - 2x_{O_{34}}x_{O_{56}} + y_{O_{34}}^2 - 2y_{O_{34}}y_{O_{56}} \\
&\quad + x_{O_{56}}^2 + y_{O_{56}}^2 + r_{34}^2 + r_{56}^2
\end{aligned}$$

### 5.4.2 Expressions des coefficients N

Equation 3.28:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \cos^2(p_{34}) K_{21}^2 L_{32}^2 - 2 \cos^2(p_{34}) K_{21} K_{32} L_{21} L_{32} \\
&\quad + \cos^2(p_{34}) K_{32}^2 L_{21}^2 + 2 \cos(p_{34}) K_{21} K_{22} L_{32}^2 \\
&\quad - 2 \cos(p_{34}) K_{21} K_{33} L_{21} L_{32} \\
&\quad - 2 \cos(p_{34}) K_{22} K_{32} L_{21} L_{32} + 2 \cos(p_{34}) K_{32} K_{33} L_{21}^2 \\
&\quad - \sin^2(p_{34}) K_{11}^2 L_{21}^2 + \sin^2(p_{34}) K_{11}^2 L_{32}^2 \\
&\quad + K_{22}^2 L_{32}^2 - 2 K_{22} K_{33} L_{21} L_{32} + K_{33}^2 L_{21}^2 \\
N_2 &= - (K_{11} L_{21} \cos(p_{34}) + K_{22} L_{11} + \cos(p_{34}) L_{11} K_{32} + L_{11} K_{33}) \\
&\quad (K_{11} L_{21} \cos(p_{34}) + K_{22} L_{11} - \cos(p_{34}) L_{11} K_{32} - L_{11} K_{33}) \\
N_3 &= 2 \cos(p_{34}) \sin(p_{34}) K_{11}^2 L_{21}^2 - 2 \cos(p_{34}) \sin(p_{34}) K_{11} K_{32} L_{11} L_{32} \\
&\quad + 2 \sin(p_{34}) K_{11} K_{22} L_{11} L_{21} - 2 \sin(p_{34}) K_{11} K_{33} L_{11} L_{32} \\
N_4 &= 2 \cos^2(p_{34}) K_{21}^2 L_{32} L_{33} - 2 \cos^2(p_{34}) K_{21} K_{32} L_{21} L_{33} - 2 \cos^2(p_{34}) K_{21} K_{32} L_{22} L_{32} \\
&\quad + 2 \cos^2(p_{34}) K_{32}^2 L_{21} L_{22} + 4 \cos(p_{34}) K_{21} K_{22} L_{32} L_{33} - 2 \cos(p_{34}) K_{21} K_{33} L_{21} L_{33} \\
&\quad - 2 \cos(p_{34}) K_{21} K_{33} L_{22} L_{32} - 2 \cos(p_{34}) K_{22} K_{32} L_{21} L_{33} \\
&\quad - 2 \cos(p_{34}) K_{22} K_{32} L_{22} L_{32} + 4 \cos(p_{34}) K_{32} K_{33} L_{21} L_{22} - 2 \sin^2(p_{34}) K_{11}^2 L_{21} L_{22} \\
&\quad + 2 \sin^2(p_{34}) K_{11}^2 L_{32} L_{33} + 2 K_{22}^2 L_{32} L_{33} \\
&\quad - 2 K_{22} K_{33} L_{21} L_{33} - 2 K_{22} K_{33} L_{22} L_{32} + 2 K_{33}^2 L_{21} L_{22} \\
N_5 &= 2 \cos(p_{34}) \sin(p_{34}) K_{11}^2 L_{21} L_{22} - 2 \cos(p_{34}) \sin(p_{34}) K_{11} K_{32} L_{11} L_{33} \\
&\quad + 2 \sin(p_{34}) K_{11} K_{22} L_{11} L_{22} - 2 \sin(p_{34}) K_{11} K_{33} L_{11} L_{33} \\
N_6 &= \cos^2(p_{34}) K_{21}^2 L_{33}^2 - 2 \cos^2(p_{34}) K_{21} K_{32} L_{22} L_{33} \\
&\quad + \cos^2(p_{34}) K_{32}^2 L_{22}^2 + 2 \cos(p_{34}) K_{21} K_{22} L_{33}^2 - 2 \cos(p_{34}) K_{21} K_{33} L_{22} L_{33} \\
&\quad - 2 \cos(p_{34}) K_{22} K_{32} L_{22} L_{33} + 2 \cos(p_{34}) K_{32} K_{33} L_{22}^2 \\
&\quad - \sin^2(p_{34}) K_{11}^2 L_{22}^2 + \sin^2(p_{34}) K_{11}^2 L_{33}^2 + K_{22}^2 L_{33}^2 - 2 K_{22} K_{33} L_{22} L_{33} + K_{33}^2 L_{22}^2
\end{aligned}$$

### 5.4.3 Coefficients I et H

$$\begin{aligned}
I_1 &= N_1 M_{11} - N_2 M_{11} - N_3' M_{21} \cos(p_{34}) - N_3' M_{22} \\
I_2 &= -N_5' M_{21} \cos(p_{34}) - N_5' M_{22} - N_3' M_{32} \cos(p_{34}) - N_3' M_{33} + N_4 M_{11} \\
I_3 &= -N_5' M_{32} \cos(p_{34}) - N_5' M_{33} + N_2 M_{11} + N_6 M_{11} \\
H_1 &= M_{21}^2 \cos(p_{34})^2 + 2 M_{21} \cos(p_{34}) M_{22} + M_{22}^2 + M_{11}^2 - M_{11}^2 \cos(p_{34})^2 \\
H_2 &= 2 M_{21} \cos(p_{34})^2 M_{32} + 2 M_{21} \cos(p_{34}) M_{33} + 2 M_{22} M_{32} \cos(p_{34}) + 2 M_{22} M_{33} \\
H_3 &= M_{32}^2 \cos(p_{34})^2 + 2 M_{32} \cos(p_{34}) M_{33} + M_{33}^2 - M_{11}^2 + M_{11}^2 \cos(p_{34})^2
\end{aligned}$$

### 5.4.4 Coefficients a, b, c, d, e, f

$$\begin{aligned}
a_0 &= K_{11}^2 L_{32}^2 - K_{11}^2 L_{21}^2 \\
a_2 &= K_{22}^2 L_{32}^2 + K_{33}^2 L_{21}^2 - 2 K_{22} L_{32} K_{33} L_{21} \\
a_5 &= 2 K_{21} L_{32}^2 K_{22} - 2 K_{21} L_{32} K_{33} L_{21} - 2 K_{22} L_{32} K_{32} L_{21} + 2 K_{32} L_{21}^2 K_{33} \\
a_8 &= K_{21}^2 L_{32}^2 - 2 K_{21} L_{32} K_{32} L_{21} + K_{32}^2 L_{21}^2 \\
b_2 &= L_{11}^2 K_{33}^2 - K_{22}^2 L_{11}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_5 &= 2L_{11}^2 K_{32} K_{33} - 2K_{11} L_{21} K_{22} L_{11} \\
b_8 &= L_{11}^2 K_{32}^2 - K_{11}^2 L_{21}^2 \\
c_2 &= 2K_{11} L_{21} K_{22} L_{11} - 2K_{11} K_{33} L_{11} L_{32} \\
c_5 &= 2K_{11}^2 L_{21}^2 - 2K_{11} L_{32} L_{11} K_{32} \\
d_0 &= 2K_{11}^2 L_{32} L_{33} - 2K_{11}^2 L_{21} L_{22} \\
d_2 &= 2K_{22}^2 L_{32} L_{33} - 2K_{22} L_{32} K_{33} L_{22} - 2K_{33} L_{21} K_{22} L_{33} + 2K_{33}^2 L_{21} L_{22} \\
d_5 &= 4K_{21} L_{32} K_{22} L_{33} - 2K_{21} L_{32} K_{33} L_{22} - 2K_{21} L_{33} K_{33} L_{21} - 2K_{22} L_{32} K_{32} L_{22} \\
&\quad - 2K_{32} L_{21} K_{22} L_{33} + 4K_{32} L_{21} K_{33} L_{22} \\
d_8 &= 2K_{21}^2 L_{32} L_{33} - 2K_{21} L_{32} K_{32} L_{22} - 2K_{21} L_{33} K_{32} L_{21} + 2K_{32}^2 L_{21} L_{22} \\
e_2 &= 2K_{11} L_{22} L_{11} K_{22} - 2K_{11} K_{33} L_{11} L_{33} \\
e_5 &= 2K_{11}^2 L_{21} L_{22} - 2K_{11} L_{33} L_{11} K_{32} \\
f_0 &= K_{11}^2 L_{33}^2 - K_{11}^2 L_{22}^2 \\
f_2 &= K_{22}^2 L_{33}^2 + K_{33}^2 L_{22}^2 - 2K_{22} L_{33} K_{33} L_{22} \\
f_5 &= 2K_{21} L_{33}^2 K_{22} - 2K_{21} L_{33} K_{33} L_{22} - 2K_{32} L_{22} K_{22} L_{33} + 2K_{32} L_{22}^2 K_{33} \\
f_8 &= K_{32}^2 L_{22}^2 + K_{21}^2 L_{33}^2 - 2K_{21} L_{33} K_{32} L_{22}
\end{aligned}$$

### 5.4.5 Coefficients $IH$

$$\begin{aligned}
I_1 H_2 &= q_0 + q_2 - q_2 \cos(p_{34})^2 + q_6 \cos(p_{34}) + q_8 \cos(p_{34}) - q_8 \cos(p_{34})^3 \\
&\quad + q_{12} \cos(p_{34})^2 + q_{14} \cos(p_{34})^2 - q_{14} \cos(p_{34})^4 + q_{18} \cos(p_{34})^3 + q_{24} \cos(p_{34})^4 \\
I_2 H_3 &= r_0 + r_2 - r_2 \cos(p_{34})^2 + r_6 \cos(p_{34}) + r_8 \cos(p_{34}) - r_8 \cos(p_{34})^3 \\
&\quad + r_{12} \cos(p_{34})^2 + r_{14} \cos(p_{34})^2 - r_{14} \cos(p_{34})^4 + r_{18} \cos(p_{34})^3 + r_{24} \cos(p_{34})^4 \\
I_1 H_3 &= s_0 + s_2 - s_2 \cos(p_{34})^2 + s_6 \cos(p_{34}) + s_8 \cos(p_{34}) - s_8 \cos(p_{34})^3 \\
&\quad + s_{12} \cos(p_{34})^2 + s_{14} \cos(p_{34})^2 - s_{14} \cos(p_{34})^4 + s_{18} \cos(p_{34})^3 + s_{24} \cos(p_{34})^4
\end{aligned}$$

### 5.4.6 Coefficients $q, r, s$

$$\begin{aligned}
q_0 &= 2a_2 M_{11} M_{22} M_{33} - c_2 M_{22}^2 M_{33} - 2b_2 M_{11} M_{22} M_{33} + M_{22}^3 \varepsilon_2 \\
&\quad - M_{11}^3 d_2 - M_{22}^2 d_2 M_{11} + M_{11}^2 \varepsilon_2 M_{22} + M_{11}^2 c_2 M_{33} \\
q_2 &= 2a_0 M_{11} M_{22} M_{33} - M_{11}^3 d_0 - M_{22}^2 d_0 M_{11} \\
q_6 &= 2a_2 M_{11} M_{21} M_{33} + 2a_2 M_{11} M_{22} M_{32} + 2a_5 M_{11} M_{22} M_{33} \\
&\quad - 2b_2 M_{11} M_{21} M_{33} - 2b_2 M_{11} M_{22} M_{32} - 2b_5 M_{11} M_{22} M_{33} - 2c_2 M_{21} M_{22} M_{33} \\
&\quad - c_2 M_{22}^2 M_{32} - c_5 M_{22}^2 M_{33} + 3M_{21} M_{22}^2 \varepsilon_2 + M_{22}^3 \varepsilon_5 \\
&\quad - M_{11}^3 d_5 - 2M_{21} M_{22} d_2 M_{11} - M_{22}^2 d_5 M_{11} \\
&\quad + M_{11}^2 \varepsilon_2 M_{21} + M_{11}^2 \varepsilon_5 M_{22} + M_{11}^2 c_2 M_{32} + M_{11}^2 c_5 M_{33} \\
q_8 &= 2a_0 M_{11} M_{21} M_{33} + 2a_0 M_{11} M_{22} M_{32} - 2M_{21} M_{22} d_0 M_{11} \\
q_{12} &= 3M_{21}^2 \varepsilon_2 M_{22} - M_{21}^2 d_2 M_{11} \\
&\quad + 3M_{21} M_{22}^2 \varepsilon_5 + M_{11}^3 d_2 - M_{11}^2 \varepsilon_2 M_{22} - M_{11}^2 c_2 M_{33} \\
&\quad - c_2 M_{21}^2 M_{33} - c_5 M_{22}^2 M_{32} - M_{22}^2 d_8 M_{11} + M_{11}^2 \varepsilon_5 M_{21} + M_{11}^2 c_5 M_{32} \\
&\quad - M_{11}^3 d_8 + 2a_2 M_{11} M_{21} M_{32} + 2a_5 M_{11} M_{21} M_{33} + 2a_5 M_{11} M_{22} M_{32} \\
&\quad + 2a_8 M_{11} M_{22} M_{33} - 2b_8 M_{11} M_{22} M_{33} - 2b_2 M_{11} M_{21} M_{32} - 2b_5 M_{11} M_{21} M_{33} \\
&\quad - 2b_5 M_{11} M_{22} M_{32} - 2c_2 M_{21} M_{22} M_{32} - 2c_5 M_{21} M_{22} M_{33} - 2M_{21} M_{22} d_5 M_{11} \\
q_{14} &= M_{11}^3 d_0 + 2a_0 M_{11} M_{21} M_{32} - M_{21}^2 d_0 M_{11} \\
q_{18} &= 2a_5 M_{11} M_{21} M_{32} + 2a_8 M_{11} M_{21} M_{33} + 2a_8 M_{11} M_{22} M_{32} + M_{21}^3 \varepsilon_2 \\
&\quad - 2b_5 M_{11} M_{21} M_{32} - 2b_8 M_{11} M_{21} M_{33} - 2b_8 M_{11} M_{22} M_{32} - c_2 M_{21}^2 M_{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_5 M_{21}^2 M_{33} - 2c_5 M_{21} M_{22} M_{32} + 3M_{21}^2 e_5 M_{22} - M_{21}^2 d_5 M_{11} + M_{11}^3 d_5 \\
& -2M_{21} M_{22} d_8 M_{11} - M_{11}^2 e_2 M_{21} - M_{11}^2 e_5 M_{22} - M_{11}^2 c_2 M_{32} - M_{11}^2 c_5 M_{33} \\
q_{24} = & 2a_8 M_{11} M_{21} M_{32} + M_{21}^3 e_5 - 2b_8 M_{11} M_{21} M_{32} - c_5 M_{21}^2 M_{32} \\
& -M_{21}^2 d_8 M_{11} + M_{11}^3 d_8 - M_{11}^2 e_5 M_{21} - M_{11}^2 c_5 M_{32} \\
r_0 = & -2b_2 M_{11} M_{22} M_{33} - M_{11}^3 d_2 + M_{11}^2 e_2 M_{22} + M_{11}^2 c_2 M_{33} \\
& + e_2 M_{22} M_{33}^2 + d_2 M_{11} M_{33}^2 - c_2 M_{33}^3 - 2f_2 M_{11} M_{22} M_{33} \\
r_2 = & d_0 M_{11} M_{33}^2 - M_{11}^3 d_0 - 2f_0 M_{11} M_{22} M_{33} \\
r_6 = & -2b_2 M_{11} M_{21} M_{33} - 2b_2 M_{11} M_{22} M_{32} - 2b_5 M_{11} M_{22} M_{33} - M_{11}^3 d_5 \\
& + M_{11}^2 e_2 M_{21} + M_{11}^2 e_5 M_{22} + M_{11}^2 c_2 M_{32} + M_{11}^2 c_5 M_{33} - c_5 M_{33}^3 + e_2 M_{21} M_{33}^2 \\
& + 2e_2 M_{22} M_{32} M_{33} + e_5 M_{22} M_{33}^2 - 3c_2 M_{32} M_{33}^2 + 2d_2 M_{11} M_{32} M_{33} + d_5 M_{11} M_{33}^2 \\
& - 2f_2 M_{11} M_{21} M_{33} - 2f_2 M_{11} M_{22} M_{32} - 2f_5 M_{11} M_{22} M_{33} \\
r_8 = & 2d_0 M_{11} M_{32} M_{33} - 2f_0 M_{11} M_{21} M_{33} - 2f_0 M_{11} M_{22} M_{32} \\
r_{12} = & d_8 M_{11} M_{33}^2 + M_{11}^3 d_2 - M_{11}^2 e_2 M_{22} - M_{11}^2 c_2 M_{33} + M_{11}^2 e_5 M_{21} \\
& + M_{11}^2 c_5 M_{32} - M_{11}^3 d_8 - 2b_8 M_{11} M_{22} M_{33} \\
& - 2b_2 M_{11} M_{21} M_{32} - 2b_5 M_{11} M_{21} M_{33} - 2b_5 M_{11} M_{22} M_{32} + e_2 M_{22} M_{32}^2 \\
& + e_5 M_{21} M_{33}^2 - 3c_2 M_{32}^2 M_{33} \\
& - 3c_5 M_{32} M_{33}^2 + 2e_2 M_{21} M_{32} M_{33} + 2e_5 M_{22} M_{32} M_{33} + d_2 M_{11} M_{32}^2 \\
& + 2d_5 M_{11} M_{32} M_{33} - 2f_2 M_{11} M_{21} M_{32} \\
& - 2f_5 M_{11} M_{21} M_{33} - 2f_5 M_{11} M_{22} M_{32} - 2f_8 M_{11} M_{22} M_{33} \\
r_{14} = & M_{11}^3 d_0 + d_0 M_{11} M_{32}^2 - 2f_0 M_{11} M_{21} M_{32} \\
r_{18} = & -2b_5 M_{11} M_{21} M_{32} - 2b_8 M_{11} M_{21} M_{33} - 2b_8 M_{11} M_{22} M_{32} + M_{11}^3 d_5 - M_{11}^2 e_2 M_{21} \\
& - M_{11}^2 e_5 M_{22} - M_{11}^2 c_2 M_{32} - M_{11}^2 c_5 M_{33} - c_2 M_{32}^3 \\
& + e_2 M_{21} M_{32}^2 + 2e_5 M_{21} M_{32} M_{33} + e_5 M_{22} M_{32}^2 - 3c_5 M_{32}^2 M_{33} + d_5 M_{11} M_{32}^2 \\
& + 2d_8 M_{11} M_{32} M_{33} - 2f_5 M_{11} M_{21} M_{32} - 2f_8 M_{11} M_{21} M_{33} - 2f_8 M_{11} M_{22} M_{32} \\
r_{24} = & -c_5 M_{32}^3 - 2b_8 M_{11} M_{21} M_{32} + M_{11}^3 d_8 - M_{11}^2 e_5 M_{21} - M_{11}^2 c_5 M_{32} \\
& + e_5 M_{21} M_{32}^2 + d_8 M_{11} M_{32}^2 - 2f_8 M_{11} M_{21} M_{32} \\
s_0 = & M_{22}^2 e_2 M_{33} - a_2 M_{11}^3 - M_{22}^2 b_2 M_{11} + a_2 M_{11} M_{33}^2 - b_2 M_{11} M_{33}^2 \\
& - c_2 M_{22} M_{33}^2 + c_2 M_{22} M_{11}^2 - M_{11}^3 f_2 - M_{22}^2 f_2 M_{11} + M_{11}^2 e_2 M_{33} \\
s_2 = & a_0 M_{11} M_{33}^2 - a_0 M_{11}^3 - M_{11}^3 f_0 - M_{22}^2 f_0 M_{11} \\
s_6 = & 2a_2 M_{11} M_{32} M_{33} - a_5 M_{11}^3 + a_5 M_{11} M_{33}^2 - 2b_2 M_{11} M_{32} M_{33} - b_5 M_{11} M_{33}^2 - c_2 M_{21} M_{33}^2 \\
& + c_2 M_{21} M_{11}^2 - 2c_2 M_{22} M_{32} M_{33} - M_{11}^3 f_5 - c_5 M_{22} M_{33}^2 + c_5 M_{22} M_{11}^2 + 2M_{21} M_{22} e_2 M_{33} \\
& - 2M_{21} M_{22} b_2 M_{11} - 2M_{21} M_{22} f_2 M_{11} + M_{22}^2 e_2 M_{32} \\
& + M_{22}^2 e_5 M_{33} - M_{22}^2 b_5 M_{11} - M_{22}^2 f_5 M_{11} + M_{11}^2 e_2 M_{32} + M_{11}^2 e_5 M_{33} \\
s_8 = & 2a_0 M_{11} M_{32} M_{33} - 2M_{21} M_{22} f_0 M_{11} \\
s_{12} = & a_8 M_{11} M_{33}^2 - M_{11}^2 e_2 M_{33} - b_2 M_{11} M_{32}^2 + M_{11}^2 e_5 M_{32} - c_2 M_{22} M_{11}^2 \\
& - M_{21}^2 b_2 M_{11} - M_{22}^2 b_8 M_{11} - M_{22}^2 f_8 M_{11} + a_2 M_{11} M_{32}^2 + M_{22}^2 e_5 M_{32} \\
& - M_{21}^2 f_2 M_{11} - b_8 M_{11} M_{33}^2 + c_5 M_{21} M_{11}^2 \\
& - c_5 M_{21} M_{33}^2 - c_2 M_{22} M_{32}^2 + M_{21}^2 e_2 M_{33} + a_2 M_{11}^3 + M_{11}^3 f_2 - M_{11}^3 f_8 - a_8 M_{11}^3 \\
& - 2M_{21} M_{22} b_5 M_{11} - 2b_5 M_{11} M_{32} M_{33} + 2a_5 M_{11} M_{32} M_{33} \\
& - 2c_5 M_{22} M_{32} M_{33} - 2c_2 M_{21} M_{32} M_{33} \\
& + 2M_{21} M_{22} e_2 M_{32} + 2M_{21} M_{22} e_5 M_{33} - 2M_{21} M_{22} f_5 M_{11} \\
s_{14} = & a_0 M_{11}^3 + a_0 M_{11} M_{32}^2 + M_{11}^3 f_0 - M_{21}^2 f_0 M_{11} \\
s_{18} = & a_5 M_{11}^3 + a_5 M_{11} M_{32}^2 + 2a_8 M_{11} M_{32} M_{33} - b_5 M_{11} M_{32}^2 \\
& - 2b_8 M_{11} M_{32} M_{33} - c_2 M_{21} M_{32}^2 \\
& - c_2 M_{21} M_{11}^2 - 2c_5 M_{21} M_{32} M_{33} - c_5 M_{22} M_{32}^2 + M_{11}^3 f_5 \\
& - c_5 M_{22} M_{11}^2 + M_{21}^2 e_2 M_{32} + M_{21}^2 e_5 M_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -M_{21}^2 b_5 M_{11} - M_{21}^2 f_5 M_{11} + 2M_{21} M_{22} \varepsilon_5 M_{32} \\
& -2M_{21} M_{22} b_8 M_{11} - 2M_{21} M_{22} f_8 M_{11} - M_{11}^2 \varepsilon_2 M_{32} - M_{11}^2 \varepsilon_5 M_{33} \\
s_{24} = & a_8 M_{11}^3 + a_8 M_{11} M_{32}^2 - b_8 M_{11} M_{32}^2 - c_5 M_{21} M_{32}^2 - c_5 M_{21} M_{11}^2 + M_{11}^3 f_8 \\
& + M_{21}^2 \varepsilon_5 M_{32} - M_{21}^2 b_8 M_{11} - M_{21}^2 f_8 M_{11} - M_{11}^2 \varepsilon_5 M_{32}
\end{aligned}$$

#### 5.4.7 Coefficients du polynôme

$$\begin{aligned}
T_1 &= A_1 B_1 - C_1^2 \\
T_2 &= A_1 B_2 + A_2 B_1 - 2C_1 C_2 \\
T_3 &= A_2 B_2 - C_2^2 + A_1 B_3 + A_3 B_1 - 2C_1 C_3 \\
T_4 &= A_4 B_1 + A_2 B_3 + A_3 B_2 + A_1 B_4 - 2C_2 C_3 - 2C_1 C_4 \\
T_5 &= A_2 B_4 - C_3^2 + A_3 B_3 + A_4 B_2 + A_1 B_5 + A_5 B_1 - 2C_2 C_4 - 2C_1 C_5 \\
T_6 &= A_2 B_5 + A_3 B_4 + A_4 B_3 + A_5 B_2 - 2C_2 C_5 - 2C_3 C_4 \\
T_7 &= A_3 B_5 - C_4^2 + A_4 B_4 + A_5 B_3 - 2C_3 C_5 \\
T_8 &= A_4 B_5 + A_5 B_4 - 2C_4 C_5 \\
T_9 &= A_5 B_5 - C_5^2
\end{aligned}$$

#### 5.4.8 Coefficients A, B, C

$$\begin{aligned}
A_1 &= q_0 + q_6 + q_{12} + q_{18} + q_{24} \\
A_2 &= 4q_2 + 2q_6 + 4q_8 + 4q_{14} - 2q_{18} - 4q_{24} + 4q_0 \\
A_3 &= -2q_{12} - 8q_{14} + 6q_{24} + 6q_0 + 8q_2 \\
A_4 &= 4q_{14} + 2q_{18} - 4q_{24} + 4q_0 + 4q_2 - 2q_6 - 4q_8 \\
A_5 &= q_{24} + q_0 - q_6 + q_{12} - q_{18} \\
B_1 &= r_{24} + r_{12} + r_{18} + r_0 + r_6 \\
B_2 &= 4r_2 + 2r_6 + 4r_8 + 4r_{14} - 2r_{18} - 4r_{24} + 4r_0 \\
B_3 &= -2r_{12} - 8r_{14} + 6r_{24} + 6r_0 + 8r_2 \\
B_4 &= 4r_{14} + 2r_{18} - 4r_{24} + 4r_0 + 4r_2 - 2r_6 - 4r_8 \\
B_5 &= r_{24} + r_0 - r_6 + r_{12} - r_{18} \\
C_1 &= s_0 + s_6 + s_{24} + s_{12} + s_{18} \\
C_2 &= 4s_2 + 2s_6 + 4s_8 + 4s_{14} - 2s_{18} - 4s_{24} + 4s_0 \\
C_3 &= -2s_{12} - 8s_{14} + 6s_{24} + 6s_0 + 8s_2 \\
C_4 &= 4s_{14} + 2s_{18} - 4s_{24} + 4s_0 + 4s_2 - 2s_6 - 4s_8 \\
C_5 &= s_{24} + s_0 - s_6 + s_{12} - s_{18}
\end{aligned}$$



# Bibliographie

- [1] Freudenstein F. "On the variety of motion generated by mechanisms", Transaction of the ASME, Février 1962, pp. 156-160
- [2] Merlet J-P. "Parallel Manipulator", Part 1: Theory, Design, Kinematics and Control, Rapport de Recherche INRIA n°646, Mars 1987.
- [3] Merlet J-P. "Parallel Manipulator, Part 2: Singular configurations and Grassmann geometry", Rapport de Recherche INRIA, n°791, Février,1988
- [4] Merlet J-P. "Manipulateurs parallèles. 3eme partie : Applications" , Rapport de Recherche INRIA n°1003, Mars 1989
- [5] Hartenberg R.S., Denavit J. "Kinematic synthesis of linkages", McGraw-Hill, New-York, 1964
- [6] Hunt K.H. "Kinematic geometry of mechanisms", Clarendon Press, Oxford, 1978
- [7] Gosselin. C., Angeles. J. "The optimum kinematic design of a planar three-degree-of-freedom parallel manipulator", *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. **110**, No. 1, pp. 35-41, 1988
- [8] Gosselin. C. "Kinematic analysis, optimization and programming of parallel robotic manipulators", Ph. D. thesis, McGill University, Montréal, Québec, Canada, 1988
- [9] Ma Ou "Direct Kinematics and Dynamics of a Planar Three-DOF Parallel Manipulator",1989 ASME Design and Automation Conference, Vol.3 pp.313-320.
- [10] Ma Ou, Université Mc Gill, Communication personnelle.
- [11] Nanua P., Waldron K.J. "Direct kinematic Solution of a Stewart Platform", IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Scottsdale, Arizona, May 14-19 1989,pp. 431-437.
- [12] Charentus S., Renaud M. "Calcul du modèle géométrique direct de la plate-forme de Stewart", LAAS Report n° 89260, Juillet 1989, Toulouse, France.
- [13] Raghavan M., Roth B. "Kinematic Analysis of the 6R Manipulator of general geometry", 5th Int. Symp. of Robotics Research, August 28-31, 1989, Tokyo, pp. 314-320
- [14] Hunt K.H. Structural kinematics of in Parallel Actuated Robot Arms . *Trans. of the ASME, J. of Mechanisms, Transmissions, and Automation in design* Vol 105: 705-712.
- [15] Stewart D. "A platform with 6 degrees of freedom",*Proc. of the institution of mechanical engineers* 1965-66, Vol 180, part 1, number 15, pp.371-386.
- [16] Han C-S, Tesar D., Traver A. "The optimum design of a 6 dof fully parallel micromanipulator for enhanced robot accuracy", ASME Design Automation, Montréal, 1989, pp. 357-363
- [17] Lee K-M, Shah D.K. "Kinematic analysis of a three-degrees-of-freedom In-parallel actuated manipulator", IEEE J. of Robotics and Automation, Vol 4, n° 3, juin 1988, pp. 354-360
- [18] Kohli D., Lee S-H, Tsai K-Y, Sandor G.N. "Manipulator configurations based on Rotary-Linear (R-L) actuators and their Direct and Inverse Kinematics", J. of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol 110, Décembre 1988, pp. 397-404.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Les robots parallèles planaires</b>	<b>7</b>
2.1	Une première architecture de robot parallèle planaire . . . . .	7
2.1.1	Cinématique inverse . . . . .	8
2.1.2	Cinématique directe . . . . .	8
2.1.3	Le mécanisme à 4 barres . . . . .	8
2.1.3.1	Courbe du coupleur et circularité . . . . .	9
2.1.3.2	Points doubles et tacnode . . . . .	11
2.1.4	Mode de montage . . . . .	12
2.1.4.1	Cas général . . . . .	12
2.1.4.2	Cas particulier . . . . .	12
2.1.5	Forme polynomiale de la cinématique directe . . . . .	14
2.2	Une autre architecture de robot parallèle planaire . . . . .	14
2.3	Résumé . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Mécanismes spatiaux</b>	<b>16</b>
3.1	La cinématique directe d'un TSSM sous forme polynomiale . . . . .	16
3.1.1	Utilisation de la forme polynomiale . . . . .	21
3.1.2	Exemple . . . . .	22
3.1.3	Répartition du nombre des solutions . . . . .	27
3.2	Degré minimal du polynôme pour un TSSM . . . . .	27
3.3	Mécanisme spatial à 3 articulations rotoïdes . . . . .	31
3.3.1	Mécanisme équivalent de type 2 . . . . .	31
3.3.1.1	Détermination du polynôme équivalent et de la circularité . . . . .	34
3.3.2	Mécanisme équivalent de type 3 . . . . .	36
3.3.2.1	Détermination du polynôme équivalent et de la circularité . . . . .	39
3.4	Mécanisme spatial à trois degrés de liberté . . . . .	40
3.5	Mécanisme spatial à trois degrés de liberté en rotation . . . . .	41
3.6	Mécanisme spatial à trois degrés de liberté en rotation, avec segments de longueurs fixes . . . . .	42
3.6.1	Mécanisme équivalent . . . . .	42
3.6.2	8 configurations équivalentes . . . . .	43
3.6.3	Répartition du nombre de solutions . . . . .	46
3.7	Mécanisme spatial à 6 degrés de liberté avec actionneurs linéaires . . . . .	46
3.7.1	Mécanisme équivalent . . . . .	48
3.7.2	Répartition du nombre de solutions . . . . .	48
3.8	Mécanisme de Stewart . . . . .	48
3.8.1	Mécanisme équivalent . . . . .	48
3.8.2	8 configurations équivalentes . . . . .	51
3.8.3	Répartition des solutions . . . . .	55
3.9	Mécanisme spatial à 6 degrés de liberté à actionneurs rotatifs . . . . .	55
3.10	Mécanisme spatial à 6 degrés de liberté à base de mécanisme à 4 barres . . . . .	56
3.11	Mécanisme spatial à 6 degrés de liberté utilisant des actionneurs rotatifs-linéaires . . . . .	57
3.12	Le cas général . . . . .	58
3.13	Résumé . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>62</b>

<b>5</b>	<b>Annexes</b>	<b>64</b>
5.1	Calcul de la courbe du coupleur d'un mécanisme à 4 barres	64
5.2	Points doubles	65
5.3	Circularité de la courbe du coupleur du mécanisme à 4 barres	65
5.3.1	Coefficients $E, F$	65
5.3.2	Coefficients abrégés de $E, F$	66
5.3.3	Coefficients $N$	66
5.3.4	Coefficients abrégés $N$	66
5.4	Calcul des coefficients de la forme polynomiale pour un TSSM	67
5.4.1	Expressions des coefficients des équations de base	67
5.4.2	Expressions des coefficients $N$	68
5.4.3	Coefficients $I$ et $H$	68
5.4.4	Coefficients $a, b, c, d, e, f$	68
5.4.5	Coefficients $IH$	69
5.4.6	Coefficients $q, r, s$	69
5.4.7	Coefficients du polynôme	71
5.4.8	Coefficients $A, B, C$	71
5.5	Bibliographie	72