



HAL
open science

Etude de la reflexion d'une onde electromagnetique par un metal recouvert d'un revetement metallise

Yves Achdou

► **To cite this version:**

Yves Achdou. Etude de la reflexion d'une onde electromagnetique par un metal recouvert d'un revetement metallise. [Rapport de recherche] RR-1136, INRIA. 1989. inria-00075423

HAL Id: inria-00075423

<https://inria.hal.science/inria-00075423>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

UNITE DE RECHERCHE
IRIA-ROCOUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1136

*Programme 7
Calcul Scientifique,
Logiciels Numériques et Ingénierie Assistée*

ETUDE DE LA REFLEXION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE PAR UN METAL RECOUVERT D'UN REVETEMENT METALLISE

Yves ACHDOU

Décembre 1989



ETUDE DE LA REFLEXION D'UNE ONDE ELECTROMAGNETIQUE PAR UN METAL RECOUVERT D'UN REVETEMENT METALLISE

Yves Achdou (*)

Résumé

Nous allons étudier l'effet d'un revêtement contenant des composants métalliques sur la réflexion d'une onde électromagnétique. Le système considéré est un plan métallique, recouvert d'une couche de billes métalliques, disposées périodiquement. On suppose que la taille de la période est de ε , que le diamètre des billes est de l'ordre de ε ; ε est donc la taille caractéristique de la peinture, que nous supposons petite devant la longueur d'onde dans le milieu extérieur. Nous sommes donc susceptibles de mener un développement asymptotique du champ électrique E^ε .

Dans une première partie, nous voyons, qu'avec une précision $o(1)$, la présence des billes n'affecte pas la solution, c'est à dire que la solution du problème avec les billes métalliques, E^ε , converge dans H_{rot} fort vers la solution E du problème de réflexion par le seul plan métallique.

Dans une deuxième partie, nous allons chercher à obtenir une meilleure approximation de E^ε , c'est à dire des correcteurs. Pour cela, nous devons faire un développement asymptotique soigneux de la solution. Nous devons d'abord trouver le premier correcteur de couche limite pour trouver le correcteur d'ordre un en ε .

Dans une troisième partie, nous donnons une méthode pour approcher numériquement le premier correcteur.

REFLEXION OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE BY A METAL COATED BY A LAYER CONTAINING METALLIC COMPONENTS

Abstract

We study the effect of a coating containing metallic components on the reflexion of an electromagnetic wave. We consider a metallic plane, coated by a layer of metallic balls, periodically laid. The period size is ε , and the size of the metallic balls is of order ε . Hence, ε is the characteristic size of the coating; we take ε small compared to the wavelenght. So, we are able to carry out an asymptotic development of the electric field E^ε .

In the first part, we show that, with precision $o(1)$, the metallic balls don't modify the solution, i.e. E^ε converges strongly in H_{rot} towards the solution E of the reflexion by the sole metallic plane.

In the second part, we seek a better approximation of E^ε , i.e. correctors. To do it, we have to carry out a careful development of the solution : to get the first corrector, we have to find first a boundary layer .

In the third part, we show how to compute numerically the first corrector.

(*)

Laboratoire d'analyse numérique
Tour 55-65, 5^{ème} étage
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France .

Introduction

Il y a un intérêt croissant à pouvoir calculer la réflexion d'une onde électromagnétique par des parois métalliques munies d'un revêtement composite de petite épaisseur. Ce problème se pose si l'on veut estimer l'effet d'une peinture dans la signature radar d'un avion. On s'intéresse ici à un revêtement constitué de billes métalliques de faible diamètre, disposées périodiquement, ce revêtement recouvrant un milieu métallique.

Si la longueur d'onde est de l'ordre de grandeur des hétérogénéités, alors le problème est difficile à résoudre, et une méthode à suivre est exposée dans Nedelec-Starling. Mais si la longueur d'onde est grande devant la taille ε des hétérogénéités, alors le problème peut être considéré comme un problème à deux échelles : le but de cette étude est de mettre en oeuvre les techniques de développement asymptotique utilisées par JL Lions et E Sanchez-Palencia, pour approximer le champ électromagnétique : on donne dans cette étude un développement asymptotique dont les termes se calculent facilement, permettant d'approcher la solution exacte en commettant une erreur de l'ordre de $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, et de trouver une condition aux limites équivalente à l'ordre 1 en ε , pour un observateur situé à distance fixe de la frontière métallisée.

I. Généralités et convergence

Description géométrique

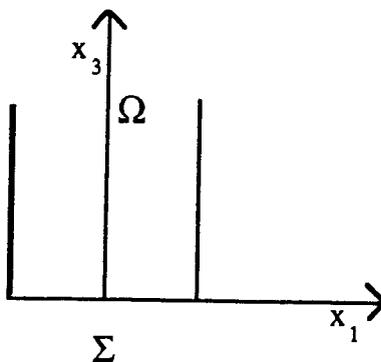


figure 1

Soit $(0, e_1, e_2, e_3)$ repère orthonormé de \mathbb{R}^3 , auquel on associe le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) .

On note Ω l'ensemble $\{-\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq x_2 \leq \frac{1}{2}, 0 < x_3\}$
et on note Σ l'ensemble $\{-\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq x_2 \leq \frac{1}{2}, x_3 = 0\}$

Soit B un fermé de \mathbb{R}^3 , non nécessairement sphérique, de frontière régulière, de diamètre $\frac{1}{2}$, centré en 0 (0 est le milieu du plus grand diamètre de B). Pour plus de simplicité, on suppose que B n'a qu'une composante connexe, mais tout ce qui suit est valable si B a plusieurs composantes connexes. On appelle B^ε le fermé obtenu en faisant subir à B une homothétie de rapport ε , de centre 0 . On prend $\varepsilon = \frac{1}{N}$.

Dans le plan $x_3 = \varepsilon$, on dispose périodiquement suivant les directions x_1 et x_2 , un réseau de points $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, avec $A_0 = (\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)$ et une période ε dans chaque direction. Pour chaque i , on appelle B_i^ε le fermé obtenu par la translation de B^ε de vecteur $O\vec{A}_i$.

On appelle Ω^ε l'ensemble $\Omega \setminus (\cup_{i \in \mathbb{N}} B_i^\varepsilon)$

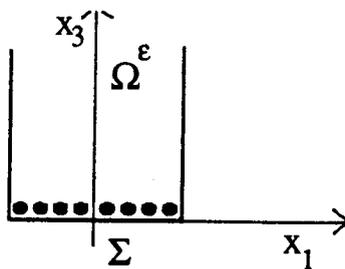


figure 2

Ω^ε peut être découpé en N^2 périodes élémentaires, que nous dilatoons dans un rapport $\frac{1}{\varepsilon}$ pour obtenir G , cellule élémentaire :

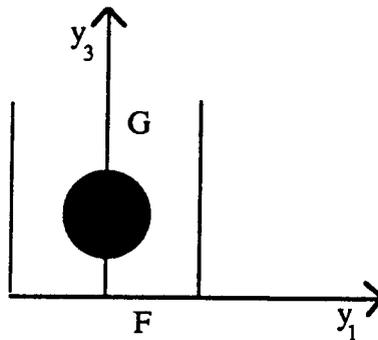


figure 3

On appelle F l'ensemble : $\{-\frac{1}{2} \leq y_1 \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq y_2 \leq \frac{1}{2}, y_3 = 0\}$

Equations de Maxwell

Nous considérons les équations de Maxwell stationnaires en temps, dans le domaine Ω^ε . Nous supposons que la conductivité du milieu non métallique dans Ω^ε , σ , est strictement positive. Cette hypothèse n'est pas du tout fondamentale : elle vise seulement à nous donner de la coercivité dans la formulation variationnelle.

Dans toute la suite, les fonctions et distributions vectorielles utilisées seront à valeurs dans \mathbb{C}^3 . Les équations de Maxwell sur le champ électrique E^ε s'écrivent :

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} E^\varepsilon - (k^2 + i\sigma) E^\varepsilon = f & \Omega^\varepsilon \\ E^\varepsilon \times n = 0 & \partial\Omega^\varepsilon \\ E^\varepsilon \text{ 1 périodique en } x_1, x_2 \end{cases}$$

Cette hypothèse de périodicité n'est pas non plus fondamentale : elle évite des difficultés non essentielles quand x_1 et x_2 tendent vers l'infini. On prend $f \in C^\infty$ à support compact dans Ω .

Formulation variationnelle

$$H_{rot}(\Omega^\varepsilon) = \{u \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3; \operatorname{rot} u \in (L^2(\Omega^\varepsilon))^3\}.$$

$H_{rot}(\Omega^\varepsilon)$, muni de la norme $|u|_{H_{rot}(\Omega^\varepsilon)} = (|u|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^3}^2 + |\operatorname{rot} u|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))^3}^2)^{1/2}$, est un Hilbert.

L'espace des fonctions où l'on cherche des solutions de (1) est

$$W^\varepsilon = \{v \in H_{rot}(\Omega^\varepsilon), v \text{ 1 périodique en } x_1, x_2, v \times n = 0 \text{ sur } F \text{ et } \partial B_i^\varepsilon\}$$

qui, muni de la norme H_{rot} est un Hilbert.

On notera aussi W l'ensemble $\{v \in H_{rot}(\Omega), v \text{ 1 périodique en } x_1, x_2, v \times n = 0 \text{ sur } F\}$ qui, muni de la norme H_{rot} est un Hilbert.

Une formulation variationnelle de (1) est :

$$(2) \quad \begin{cases} E^\varepsilon \in W^\varepsilon \\ \forall v \in W^\varepsilon, \int_{\Omega^\varepsilon} \operatorname{rot} E^\varepsilon \cdot \operatorname{rot} v \, dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega^\varepsilon} E^\varepsilon \cdot v \, dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f \cdot v \, dx \end{cases}$$

Lemme 1. *Le problème (1) admet une solution unique dans W^ε , et $|E^\varepsilon|_{W^\varepsilon}$ est bornée indépendamment de ε .* □

La preuve du lemme 1 est donnée dans le chapitre *démonstrations*. Elle repose sur la coercivité et la continuité de la forme bilinéaire dans le membre de gauche de (2).

Prolongement et convergence

On appelle $p^\varepsilon E^\varepsilon$ le prolongement de E^ε par 0 à l'intérieur des billes métalliques B_i^ε . Comme au bord des billes, $E^\varepsilon \times n = 0$, ce prolongement est dans W et vérifie :

$$|p^\varepsilon E^\varepsilon|_W = |E^\varepsilon|_W.$$

Par suite, on peut extraire une sous-suite de $p^\varepsilon E^\varepsilon$ tendant vers E dans W faible. En prenant comme test dans la formulation variationnelle (2), les fonctions vectorielles C^∞ , à support compact dans Ω , et en passant à la limite, on voit que :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E - (k^2 + i\sigma)E = f \quad \Omega$$

Or la solution du problème :

$$(3) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} E - (k^2 + i\sigma) E = f & \Omega \\ E \times n = 0 & \Sigma \\ E \text{ 1 périodique en } x_1, x_2 \end{cases}$$

existe et est unique.

L'unicité de la limite E implique que toute la suite converge faiblement vers E . En fait, on a un meilleur résultat :

Lemme 2. $p^\varepsilon E^\varepsilon$ converge vers E dans W fort. □

La preuve de ce lemme est dans le chapitre *démonstrations*. Nous allons maintenant estimer l'erreur $|E^\varepsilon - E|_{H_{\operatorname{rot}}(\Omega^\varepsilon)}$.

II Estimation d'erreur

Nous savons que E est régulier.

Remarque 1 Si on fait la différence $E^\varepsilon - E$, on constate que $(E^\varepsilon - E) \times n \neq 0$ sur ∂B_ε^c . D'autre part, on voit que sur Σ , E est parallèle à e_3 . Comme les billes sont contenues dans la bande $\{0 \leq x_3 \leq 2\varepsilon\}$, il est clair qu'à l'ordre 0 en ε , E est parallèle à e_3 sur ∂B_ε^c . \square

Grâce à cette remarque, nous allons pouvoir nous "débarasser" de ce terme d'ordre 0 en ε , en ajoutant à $E^\varepsilon - E$ une fonction $E_{BL}^{0,0}$ qui tend vers 0 quand $\frac{x_3}{\varepsilon}$ tend vers l'infini, plus vite que toute fonction rationnelle de $\frac{x_3}{\varepsilon}$ (et même comme une exponentielle de $-\frac{x_3}{\varepsilon}$) : on dit qu'une telle fonction est à décroissance rapide en $\frac{x_3}{\varepsilon}$. Pour la suite, on introduit les ensembles suivants :

$$S_G = \left\{ \begin{array}{l} \text{fonction de } G \text{ dans } \mathbb{C}, C^\infty \text{ dans un voisinage de } y_3 = \infty, \\ \text{à décroissance rapide en } y_3 \end{array} \right\}$$

$$S_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} \text{fonction de } \Omega^\varepsilon \text{ dans } \mathbb{C}^3, C^\infty \text{ dans un voisinage de } \frac{x_3}{\varepsilon} = \infty, \\ \text{à décroissance rapide en } \frac{x_3}{\varepsilon} \end{array} \right\}$$

On définit aussi l'ensemble $W^1(G)$ par :

$$W^1(G) = \left\{ v \in H_{loc}^1(G), \frac{v}{\sqrt{1+y_3^2}} \in L^2(G), \text{grad } v \in (L^2(G))^3 \right\}$$

Pour montrer l'existence de $E_{BL}^{0,0}$, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3. Il existe $\chi \in (H^1(G))^3$, telle que :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_y \chi = 0 \quad G \\ \text{div}_y \chi = 0 \quad G \\ \chi \times n = 0 \quad F \\ \chi \times n = e_3 \times n \quad \partial B \\ \chi \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{array} \right.$$

On peut définir $E_{BL}^{0,0}$ par :

$$(5) \quad E_{BL}^{0,0}(x) = -E_3(x_1, x_2, 0) \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$E_{BL}^{0,0}$ vérifie :

$$\begin{cases} E_{BL}^{0,0} \in S_\varepsilon \\ E_{BL}^{0,0} \times n = 0 \quad F \\ E_{BL}^{0,0} \times n = -E \times n + \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} (E - E_3(x_1, x_2, 0) e_3) \right) \times n \quad \partial B_i^\varepsilon \\ E_{BL}^{0,0} \text{ 1 périodique en } x_1, x_2 \end{cases}$$

Remarque 3 Il existe $C > 0$ tel que $|E_{BL}^{0,0}|_{H_{rot}(\Omega^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Cela vient du fait que : $rot_y \chi = 0$. □

Grâce à cette remarque, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 5. Il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, |E^\varepsilon - E|_{H_{rot}(\Omega^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

□

La preuve de cette proposition est dans le chapitre *démonstrations*. L'erreur commise en approchant E^ε par E tend lentement vers 0 quand ε tend vers 0. On va donc tenter d'améliorer l'approximation en introduisant des correcteurs, et en faisant un développement asymptotique de E^ε .

avec de plus,

- a) $\chi \in (S_G)^3$.
- b) χ s'obtient comme le gradient
d'une fonction régulière au voisinage de $y_3 = 0$ et $y_3 = \infty$.
- c) $\int_F \chi \cdot e_3 \, dy_1 \, dy_2 = 0$.

Avec la condition c), χ est unique. □

Remarque 2 Ici, on exige $\int_F \chi \cdot e_3 \, dy_1 \, dy_2 = 0$; ceci ne sera utile que pour l'étude du développement asymptotique. □

La preuve du lemme 3 est dans le chapitre *démonstrations*. Pour montrer l'unicité de χ , on utilise le lemme suivant :

Lemme 4. Les fonctions de $(W^1(G))^3$ vérifiant :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} E = 0 & G \\ \operatorname{div} E = 0 & G \\ E \times n = 0 & \partial B \text{ et } F \\ E \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

forment un espace vectoriel N de dimension 2, qui est l'ensemble suivant :

$$N = \{c_1 e_3 + \operatorname{grad}(\varphi_{c_1, c_2}), (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

où $\varphi_{c_1, c_2} \in W^1(G)$ est défini par :

$$\begin{cases} \Delta \varphi_{c_1, c_2} = 0 & G \\ \varphi_{c_1, c_2} = -c_1 y_3 + c_2 & \partial B \\ \varphi_{c_1, c_2} = 0 & F \\ \varphi_{c_1, c_2} \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

□

La preuve du lemme 4 est dans le chapitre *démonstrations*.

III Développement asymptotique de E^ε .

On appelle $r^{0,\varepsilon}$ le reste $r^{0,\varepsilon} = E^\varepsilon - E - E_{BL}^{0,0}$. Il est aisé de voir que $r^{0,\varepsilon}$ vérifie :

$$(6) \quad \begin{cases} \text{rot rot } r^{0,\varepsilon} - (k^2 + i\sigma) r^{0,\varepsilon} = \varepsilon^{-1}(\text{terme} \in S_\varepsilon) + (\text{terme} \in S_\varepsilon) & \Omega^\varepsilon \\ r^{0,\varepsilon} \times n = 0 & \Sigma \\ r^{0,\varepsilon} \times n = -\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} (E - E_3(x_1, x_2, 0) e_3) \right) \times n & \partial B_i^\varepsilon \\ r^{0,\varepsilon} \text{ 1 périodique en } x_1, x_2 \end{cases}$$

Il est légitime de se poser la question : qu'a t'on gagné avec $r^{0,\varepsilon}$?

Certes, on a une condition aux limites sur le bord des billes en $O(\varepsilon)$, mais on a introduit dans l'équation aux dérivées partielles dans (6), un terme du type : $\varepsilon^{-1}(\text{terme} \in S_\varepsilon)$, dont la norme L^2 est de l'ordre de $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$.

Toutefois, $r^{0,\varepsilon}$ permet d'amorcer le développement asymptotique.

Termes d'ordre 1 en ε dans le développement asymptotique

Nous allons chercher des nouveaux termes dans le développement asymptotique de E^ε , qui "suppriment" les termes en $\frac{1}{\varepsilon}$ dans (6). Il va y avoir essentiellement deux termes ; l'un qui "supprimera" le terme de bord $r^{0,\varepsilon} \times n$ sur le bord des billes métalliques, l'autre qui "supprimera" le terme en $\varepsilon^{-1}(\text{terme} \in S_\varepsilon)$, dans (6).

1) Suppression du terme de bord : premier correcteur d'ordre 1

Il faut tout d'abord écrire explicitement $r^{0,\varepsilon} \times n$ au bord des billes :

$$(7) \quad r^{0,\varepsilon} \times n = -\varepsilon y_3 \left[\frac{\partial E_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) e_1 + \frac{\partial E_2}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) e_2 \right] \times n + O(\varepsilon^2)$$

On obtient (7) car :

a)

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, 0) = 0 & \frac{\partial E_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, 0) = 0 \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, 0) = 0 & \frac{\partial E_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, 0) = 0 \\ \operatorname{div} E = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_3}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) = 0 \end{cases}$$

b) On a déjà pris en compte les variations de E_3 par rapport à x_1 et x_2 dans $E_{BL}^{0,0}$.

On a besoin du lemme suivant :

Lemme 6. $\forall i \in \{1, 2\}$, il existe $\begin{cases} \alpha_i \in (W^1(G))^3 \\ c_i \in \mathbb{C}^3 \end{cases}$, tels que :

$$(8) \quad \begin{cases} \operatorname{rot}_y \operatorname{rot}_y \alpha_i = 0 & G \\ \operatorname{div}_y \alpha_i = 0 & G \\ \alpha_i \times n = 0 & F \\ \alpha_i \times n = y_3 e_i \times n & \partial B \\ \alpha_i \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \\ \alpha_i - c_i \in (S_G)^3 \end{cases}$$

avec de plus, $e_3 \times c_i$ unique. □

La preuve du lemme 6 est dans le chapitre *démonstrations*.

On peut définir $E_{BL}^{0,1}$ par :

$$(9) \quad E_{BL}^{0,1} = -\varepsilon \sum_{i=1}^2 (\alpha_i(\frac{x}{\varepsilon}) - c_i) \frac{\partial E_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0),$$

où $c_i \cdot n = 0$, et α_i est une solution correspondante de (8). Ce choix est arbitraire; il conviendrait peut-être d'en faire un autre si l'on voulait pousser le développement asymptotique.

2) Second correcteur d'ordre 1

Il faut tout d'abord écrire explicitement le terme en ε^{-1} (terme $\in S_\varepsilon$) dans (6) : son expression exacte est :

$$(10) \quad -\varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial E_3}{\partial x_i} \frac{\partial \chi}{\partial y_i}$$

on a besoin du lemme suivant :

Lemme 6. $\forall i \in \{1, 2\}$, il existe $\left\{ \begin{array}{l} \tau_i \in (W^1(G))^3 \\ d_i \in \mathbb{C}^3 \end{array} \right.$, tels que

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot}_y \text{rot}_y \tau_i = \frac{\partial \chi}{\partial y_i} \quad G \\ \text{div}_y \tau_i = 0 \quad G \\ \tau_i \times n = 0 \quad F \\ \tau_i \times n = 0 \quad \partial B \\ \tau_i \text{ 1 p\'eriodique en } y_1, y_2 \\ \tau_i - d_i \in (S_G)^3 \end{array} \right.$$

avec de plus, $e_3 \times d_i$ unique. □

La preuve du lemme 7 est dans le chapitre *démonstrations*. Elle tient au fait que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}_y \frac{\partial \chi}{\partial y_i} = 0, \quad i \in \{1, 2\} \\ \int_F \frac{\partial \chi}{\partial y_i} \cdot e_3 \, d\sigma = 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial y_i} \left\{ \begin{array}{l} \text{1 p\'eriodique en } y_1, y_2, \\ \text{se d\'eveloppe en s\'erie de Fourier pour } y_3 \text{ assez grand} \end{array} \right. \\ \frac{\partial \chi}{\partial y_i} \in (S_G)^3 \end{array} \right.$$

On peut d\'efinir $E_{BL}^{0,2}$ par :

$$(12) \quad E_{BL}^{0,2} = -\varepsilon \sum_{i=1}^2 \left(\tau_i \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) - d_i \right) \frac{\partial E_3}{\partial x_i} (x_1, x_2, 0).$$

où $d_i \cdot n = 0$, et τ_i est une solution correspondante de (11). Ce choix est arbitraire; il conviendrait peut-être d'en faire un autre si l'on voulait pousser le développement asymptotique.

Et $r^{1,\varepsilon} = r^{0,\varepsilon} - E_{BL}^{0,1} - E_{BL}^{0,2}$ vérifie :

$$(13) \quad \begin{cases} \text{rot rot } r^{1,\varepsilon} - (k^2 + i\sigma) r^{1,\varepsilon} = (\text{terme} \in S_\varepsilon) \quad \Omega^\varepsilon \\ r^{1,\varepsilon} \times n = \varepsilon \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) c_i + \frac{\partial E_3}{\partial x_i}(x_1, x_2, 0) d_i \right) \right] \times n \quad \Sigma \\ r^{1,\varepsilon} \times n = \varepsilon \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) c_i + \frac{\partial E_3}{\partial x_i}(x_1, x_2, 0) d_i \right) \right] \times n + O(\varepsilon^2) \quad \partial B_i^\varepsilon \\ r^{1,\varepsilon} \text{ 1 périodique en } x_1, x_2 \end{cases}$$

On peut donc démontrer le théorème :

Théorème 8. *Il existe $C > 0$ tel que :*

$$\text{pour } \varepsilon \text{ assez petit, } |r^{1,\varepsilon}|_{H_{rot}(\Omega^\varepsilon)} \leq C \varepsilon.$$

où

$$r^{1,\varepsilon} = E^\varepsilon - E - E_{BL}^{0,0} - E_{BL}^{0,1} - E_{BL}^{0,2}$$

et

$$E_{BL}^{0,0}, E_{BL}^{0,1}, E_{BL}^{0,2}$$

sont respectivement donnés par (5), (9), (12). □

La preuve de ce théorème est dans le chapitre *démonstrations*.

Remarque 4 $E_{BL}^{0,0}, E_{BL}^{0,1}, E_{BL}^{0,2}$, ont tous trois des normes $H_{rot}(\Omega^\varepsilon)$ de l'ordre de $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. □

Remarque 5 C'est pour démontrer ce théorème que la propriété (c) du lemme 3 est utilisée. □

Soit E^1 la solution du problème :

$$(14) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} E^1 - (k^2 + i\sigma) E^1 = 0 & \Omega \\ E^1 \times n = \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_3} (x_1, x_2, 0) c_i + \frac{\partial E_3}{\partial x_i} (x_1, x_2, 0) d_i \right) \right] \times n & \Sigma \\ E^1 \text{ 1 p\u00e9riodique en } x_1, x_2 \end{cases}$$

On peut prouver, exactement de la m\u00eame fa\u00e7on que la proposition 5, le th\u00e9or\u00e8me suivant :

Th\u00e9or\u00e8me 8. *Il existe $C > 0$ tel que pour ε assez petit,*

$$| E^\varepsilon - E - E_{BL}^{0,0} - E_{BL}^{0,2} - E_{BL}^{0,2} - \varepsilon E^1 |_{H_{rot}(\Omega^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

□

Comme la preuve du th\u00e9or\u00e8me 9 est similaire \u00e0 celle de la proposition 5, nous ne la donnons pas.

Conclusion

Soit un ouvert ω de Ω , (pris comme un cylindre). Les termes $E_{BL}^{0,0}$, $E_{BL}^{0,1}$, $E_{BL}^{0,2}$ tendent vers 0 en norme $H_{rot}(\omega)$ plus vite que toute puissance de ε^{-1} ; par suite,

$$| E^\varepsilon - E - \varepsilon E^1 |_{H_{rot}(\omega)} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

On montrerait m\u00eame, en poussant le d\u00e9veloppement asymptotique plus loin que cette expression est de l'ordre de ε^2 . Ceci veut dire que le d\u00e9veloppement asymptotique permet d'obtenir une condition aux limites \u00e9quivalente \u00e0 l'ordre 2 en ε , pour un observateur situ\u00e9 \u00e0 une distance fix\u00e9e de la fronti\u00e8re m\u00e9tallis\u00e9e. En effet, pour un ouvert ω de Ω , on a :

$$| E^\varepsilon - \mathcal{E} |_{H_{rot}(\omega)} \leq C \varepsilon^2$$

o\u00f9 \mathcal{E} est la solution unique du probl\u00e8me :

$$(15) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathcal{E} - (k^2 + i\sigma) \mathcal{E} = f & \Omega \\ \mathcal{E} \times n = \varepsilon \left[\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_3} (x_1, x_2, 0) c_i + \frac{\partial E_3}{\partial x_i} (x_1, x_2, 0) d_i \right) \right] \times n & \Sigma \\ \mathcal{E} \text{ 1 p\u00e9riodique en } x_1, x_2 \end{cases}$$

où E est défini par :

$$(3) \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} E - (k^2 + i\sigma) E = f & \Omega \\ E \times n = 0 & \Sigma \\ E \text{ 1 périodique en } x_1, x_2 \end{cases}$$

On a donc dû faire un développement asymptotique de E^ε au voisinage de la frontière métallique, pour pouvoir trouver une condition aux limites équivalente à l'ordre 2 en ε . \square

Remarque 6 Une fois trouvé $-\varepsilon E^1$, on peut reprendre la démarche effectuée jusqu'ici et pousser le développement asymptotique plus loin. C'est ainsi que l'on peut prouver que l'erreur commise en approximant E^ε par \mathcal{E} est de l'ordre de ε^2 , pour un observateur situé à une distance fixée de la frontière métallisée. On est en mesure d'écrire pour E^ε le développement suivant :

$$E^\varepsilon = E + E_{BL}^0 + \varepsilon(E^1 + E_{BL}^1) + \dots + \varepsilon^m(E^m + E_{BL}^m),$$

où

$$|E^m|_{H_{\operatorname{rot}}(\Omega^\varepsilon)} = O(1)$$

et

$$|E_{BL}^m|_{H_{\operatorname{rot}}(\Omega^\varepsilon)} = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

\square

Conjecture Nous pensons que l'approximation décrite dans cette étude dans le cas d'une conductivité $\sigma > 0$ est valable dans le cas où $\sigma = 0$. \square

IV Démonstrations

Preuve du lemme 1

Il est aisé de voir que :

$$\left. \begin{array}{l} E^\varepsilon \text{ vérifie (1)} \\ E^\varepsilon \in W^\varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow E^\varepsilon \text{ vérifie (2).}$$

Montrons que (2) a une solution unique :

$\forall (u, v) \in (W^\varepsilon)^2$, $(u, v) \rightarrow \int_{\Omega^\varepsilon} \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} v \, dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega^\varepsilon} u \cdot v \, dx$
est une forme bilinéaire continue sur W^ε .

Elle est coercive ? $\forall u \in W^\varepsilon$, regardons

$$\int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{rot} u|^2 \, dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega^\varepsilon} |u|^2 \, dx$$

En ne prenant que la partie imaginaire, on voit que :

$$\left| \int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{rot} u|^2 \, dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega^\varepsilon} |u|^2 \, dx \right| \geq \sigma |u|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))}^2$$

En prenant la partie réelle, on voit que :

$$\left(1 + \frac{k^2}{\sigma}\right) \left| \int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{rot} u|^2 \, dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega^\varepsilon} |u|^2 \, dx \right| \geq |\operatorname{rot} u|_{(L^2(\Omega^\varepsilon))}^2$$

Par suite, il existe $\alpha > 0$, tel que, $\forall u \in W^\varepsilon$,

$$\left| \int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{rot} u|^2 \, dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega^\varepsilon} |u|^2 \, dx \right| \geq \alpha |u|_{W^\varepsilon}^2$$

et α est indépendant de ε .

La forme bilinéaire figurant dans la formulation variationnelle (2) est coercive. Par le lemme de Lax Milgram, le problème (2) admet une solution unique dans W^ε . Par des arguments classiques, on montre que la solution de (2) est solution de (1).

La coercivité du problème (2), avec une constante de coercivité indépendante de ε , montre que $|E^\varepsilon|_{W^\varepsilon}$ est borné indépendamment de ε . \square

Preuve du lemme 2

On sait que :

$$\int_{\Omega} |\text{rot } p^\varepsilon E^\varepsilon|^2 dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega} |p^\varepsilon E^\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega} f \cdot p^\varepsilon E^\varepsilon dx .$$

Comme $f \in (L^2(\Omega))^3$, $\int_{\Omega} f \cdot p^\varepsilon E^\varepsilon dx$ converge vers $\int_{\Omega} f \cdot E dx$.

D'autre part,

$$\int_{\Omega} |\text{rot } E|^2 dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega} |E|^2 dx = \int_{\Omega} f \cdot E dx .$$

Donc

$$\int_{\Omega} |\text{rot } p^\varepsilon E^\varepsilon|^2 dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega} |p^\varepsilon E^\varepsilon|^2 dx$$

converge vers

$$\int_{\Omega} |\text{rot } E|^2 dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega} |E|^2 dx$$

Ceci, et la convergence faible de $p^\varepsilon E^\varepsilon$ vers E dans W , donne :

$$\int_{\Omega} |\text{rot } (p^\varepsilon E^\varepsilon - E)|^2 dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega} |p^\varepsilon E^\varepsilon - E|^2 dx \text{ tend vers } 0 .$$

Le lemme est prouvé . □

Preuve du lemme 3

On va d'abord montrer l'existence de $\psi_{a,b} \in W^1(G)$, solution du problème :

$$(P_{a,b}) \quad \begin{cases} \Delta_{yy} \psi_{a,b} = 0 & G \\ \psi_{a,b} = y_3 + a & \partial B \\ \psi_{a,b} = b & F \\ \psi_{a,b} \text{ 1 p\'eriodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

On va montrer, en adaptant une d\'emonstration expos\'ee dans (Nedelec, Starling) que la solution d'un tel probl\eme existe et est unique.

Problème tronqué

Loin de ∂B , $\psi_{a,b}$, si elle existe, est C^∞ . On peut développer $\psi_{a,b}$ en série de Fourier en y_1 et y_2 , et le fait que $\psi_{a,b}$ est harmonique pour z_0 assez grand, implique que : $\forall y_3 \geq z_0$,

$$(*) \quad \begin{cases} \psi_{a,b} = \sum_{p_1, p_2 \geq 0} \psi_{a,b}^{p_1, p_2}(z_0) e^{2i\pi(p_1 y_1 + p_2 y_2)} e^{-2\pi\sqrt{p_1^2 + p_2^2}(y_3 - z_0)} \\ \frac{\partial \psi_{a,b}}{\partial y_3} = \sum_{p_1, p_2 \geq 0} -2\pi\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \psi_{a,b}^{p_1, p_2}(z_0) e^{2i\pi(p_1 y_1 + p_2 y_2)} e^{-2\pi\sqrt{p_1^2 + p_2^2}(y_3 - z_0)} \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{a,b}}{\partial y_3}(y_3 = z_0) &= \sum_{p_1, p_2 \geq 0} -2\pi\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \psi_{a,b}^{p_1, p_2}(z_0) e^{2i\pi(p_1 y_1 + p_2 y_2)} \\ &= T \psi_{a,b}(y_3 = z_0). \end{aligned}$$

Nedelec, Starling montrent que l'on peut étendre T en un opérateur continu de $H_p^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{z_0})$ dans $[H_p^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{z_0})]'$, où

$$\Sigma_{z_0} = \{y \in G, y_3 = z_0\},$$

$$H_p^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{z_0}) = \{f \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{z_0}), f \text{ 1 périodique en } y_1, y_2\}.$$

On va maintenant étudier l'existence et l'unicité des solutions du problème tronqué (P_{a,b,z_0}) :

$$(P_{a,b,z_0}) \quad \begin{cases} \Delta_{yy} \psi_{a,b,z_0} = 0 & G_{z_0} \\ \psi_{a,b,z_0} = y_3 + a & \partial B \\ \psi_{a,b,z_0} = b & F \\ \frac{\partial \psi_{a,b,z_0}}{\partial n} = T \psi_{a,b,z_0} & \Sigma_{z_0} \\ \psi_{a,b,z_0} \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

Si on a montré l'existence et l'unicité d'une solution de (P_{a,b,z_0}) alors, on décompose la trace de cette solution sur la section Σ_{z_0} en série de Fourier, et le prolongement défini par $(*)$ donne une solution du problème $(P_{a,b})$.

Existence et unicité pour le problème (P_{a,b,z_0}) .

Soit $\varphi_{a,b}$ une fonction C^∞ , à support compact dans $\overline{G_{z_0}} \setminus \Sigma_{z_0}$, telle que :

$$\begin{cases} \varphi_{a,b} = y_3 + a & \partial B \\ \varphi_{a,b} = b & F \\ \varphi_{a,b} \text{ 1 p\u00e9riodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

Si $\phi_{a,b} = \psi_{a,b,z_0} - \varphi_{a,b}$, $\phi_{a,b}$ v\u00e9rifie :

$$(P'_{a,b}) \quad \begin{cases} -\Delta_{yy} \phi_{a,b} = g & G_{z_0} \\ \phi_{a,b} = 0 & \partial B \\ \phi_{a,b} = 0 & F \\ \frac{\partial \phi_{a,b}}{\partial n} = T \phi_{a,b} & \Sigma_{z_0} \\ \phi_{a,b} \text{ 1 p\u00e9riodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

o\u00f9 $G_{z_0} = \{y \in G, y_3 \leq z_0\}$,

g est C^∞ , 1 p\u00e9riodique en y_1, y_2 . On appelle H_{z_0} l'ensemble

$$\{v \in H^1(G_{z_0}), v \text{ 1 p\u00e9riodique en } y_1, y_2, v = 0 \text{ sur } \partial B \text{ et } F\}$$

qui, muni de la norme H^1 est un Hilbert.

Une formulation variationnelle de $(P'_{a,b})$ est :

$$\begin{cases} \phi_{a,b} \in H_{z_0} \\ \forall v \in H_{z_0}, \int_{G_{z_0}} \text{grad } \phi_{a,b} \cdot \text{grad } v \, dx - \langle T \phi_{a,b}, v \rangle = \int_{G_{z_0}} g \cdot v \, dx \end{cases}$$

Or, $-\langle T v, v \rangle \geq 0$, pour $v \in H_{z_0}$.

La forme bil\u00e9aire figurant dans la formulation variationnelle ci-dessus est donc coercive.

Par le lemme de Lax Milgram, le probl\u00e8me variationnel admet une solution unique dans

H_{z_0} . Donc, le probl\u00e8me $(P'_{a,b})$ admet une solution unique, ainsi que le probl\u00e8me $(P_{a,b})$.

Existence de χ

La solution de $(P_{a,b})$ \u00e9tant assez r\u00e9guli\u00e8re au voisinage de F , on peut d\u00e9finir une application m , de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , telle que

$$m(a,b) = \int_F \frac{\partial \psi_{a,b}}{\partial y_3} \, d\sigma$$

Soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2) , tels que :

$$\begin{cases} m(a_1, b_1) \neq 0 \\ m(a_2, b_2) \neq 0 \\ \lambda = \frac{m(a_1, b_1)}{m(a_2, b_2)} \neq 1 \end{cases}$$

Il existe un unique $\alpha \neq 1$, tel que $\frac{\alpha}{(1-\alpha)} = -\lambda$
alors, si $(a, b) = \alpha(a_2, b_2) + (1 - \alpha)(a_1, b_1)$,

$$\int_F \frac{\partial \psi_{a,b}}{\partial y_3} d\sigma = 0.$$

$\chi = \text{grad} \psi_{a,b}$ remplit toutes les conditions du lemme (3).

Unicité de χ

Soient deux solutions du problème (4), appelons ξ leur différence : ξ vérifie :

$$\begin{cases} \text{rot } \xi = 0 & G \\ \text{div } \xi = 0 & G \\ \xi \times n = 0 & \partial B \text{ et } F \\ \xi \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

De plus,

$$\begin{cases} \xi \in (S_G)^3 \\ \int_F \xi \cdot e_3 d\sigma = 0 \end{cases}$$

D'après le lemme 4, $\xi = \text{grad} \varphi$ où φ vérifie :

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & G \\ \varphi = c & \partial B \\ \varphi = 0 & F \\ \varphi \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

Exploitions maintenant la condition $\int_F \xi \cdot e_3 d\sigma = 0$. Elle implique que :

$$\int_F \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0$$

Donc,

$$\int_{\partial B} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0$$

φ est solution du problème tronqué :

$$\begin{cases} -\Delta_{yy} \varphi = g & G_{z_0} \\ \varphi = c & \partial B \\ \varphi = 0 & F \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = T\varphi & \Sigma_{z_0} \\ \varphi \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

Ceci implique que :

$$\int_{G_{z_0}} |\text{grad} \varphi|^2 dx - \langle T\varphi, \varphi \rangle = \int_{\partial B} c \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Donc, comme T est un opérateur positif, $\text{grad} \varphi = 0$ dans G_{z_0} . Par suite $\xi = 0$.
Le lemme 3 est prouvé. □

Preuve du lemme 4

Soit $E \in (W^1(G))^3$ vérifiant :

$$\begin{cases} \text{rot } E = 0 & G \\ \text{div } E = 0 & G \\ E \times n = 0 & \partial B \text{ et } F \\ E \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

Prolongeons E par 0 dans B . Soit \tilde{E} ce prolongement : \tilde{E} vérifie : $\text{rot } \tilde{E} = 0$ dans $G \cup B$, car la composante tangentielle de \tilde{E} ne saute pas.

Pour tout ψ , C^∞ à support compact dans $G \cup B$, (pris comme un cylindre),

$$\langle \text{div} \tilde{E}, \psi \rangle = - \int_{G \cup B} \tilde{E} \cdot \text{grad} \psi dy = - \int_G E \cdot \text{grad} \psi dy = - \int_{\partial B} (E \cdot n) \bar{\psi} ds.$$

Donc

$$\text{div} \tilde{E} \in (W^1(G))'$$

et,

$$\forall \psi \in W^1(G), \psi \text{ 1 p\u00e9riodique, : } | \langle \operatorname{div} \tilde{E}, \psi \rangle | \leq |E \cdot n|_{L^2(\partial B)} |\psi|_{W^1(G)}$$

On veut trouver φ dans $W^1(G \cup B)$, tel que :

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = \operatorname{div} \tilde{E} & G \\ \varphi = 0 & F \\ \varphi \text{ 1 p\u00e9riodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

En appliquant la m\u00e9thode de troncature du lemme 3, on obtient l'existence et l'unicit\u00e9 d'un tel φ .

Si on appelle $w = \tilde{E} - \operatorname{grad} \varphi$, w v\u00e9rifie : $w \in (W^1(G \cup B))^3$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} w = 0 & G \cup B \\ \operatorname{div} w = 0 & G \cup B \\ w \text{ 1 p\u00e9riodique en } y_1, y_2 \\ w \times n = 0 & F \end{cases}$$

w est une fonction harmonique, p\u00e9riodique, temp\u00e9r\u00e9e; et comme $w \in (W^1(G \cup B))^3$, on montre facilement qu' w est un vecteur constant.

Le fait que $w \times n = 0$ sur F implique que $w = c_1 e_3$, $c_1 \in \mathbb{C}$

Donc $E = c_1 e_3 + \operatorname{grad} \varphi$, o\u00f9 φ v\u00e9rifie :

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & G \\ \varphi = 0 & F \\ \varphi \text{ 1 p\u00e9riodique en } y_1, y_2 \\ \varphi \in W^1(G) \end{cases}$$

comme $E \times n = 0$ sur ∂B , $\varphi = -c_1 y_3 + c_2$.

Le lemme 4 est prouv\u00e9. □

Preuve de la proposition 5

Pour tout i , on peut relever $-\frac{1}{\varepsilon} (E - E_3(x_1, x_2, 0)) e_3$ sur B_i^ε par une fonction μ r\u00e9guli\u00e8re, \u00e0 support compact dans la boule de centre A_i et de rayon $\frac{\varepsilon}{3}$. La fonction $\varepsilon \mu$ v\u00e9rifie donc,

pour ε assez petit :

$$\begin{cases} \varepsilon \mu \times n = -\varepsilon \left[\frac{1}{\varepsilon} (E - E_3(x_1, x_2, 0) e_3) \right] \times n & \partial B_i^\varepsilon \\ |\varepsilon \mu| \leq C\varepsilon \\ |\varepsilon \operatorname{rot} \mu| \leq C \\ \varepsilon \mu \text{ est à support dans } \cup_{i \in \mathbb{N}} B(A_i, \frac{\varepsilon}{2}) \end{cases}$$

par suite, $|\varepsilon \mu|_{H_{\operatorname{rot}}(\Omega^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{3}}$.

$E^\varepsilon - E - E_{BL}^{0,0} - \varepsilon \mu$ est une fonction-test admissible pour (2); donc :

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \operatorname{rot}(E^\varepsilon - E) \cdot \operatorname{rot}(E^\varepsilon - E - E_{BL}^{0,0} - \varepsilon \mu) dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega^\varepsilon} (E^\varepsilon - E) \cdot (E^\varepsilon - E - E_{BL}^{0,0} - \varepsilon \mu) dx = 0$$

Ce qui implique que :

$$\left| \int_{\Omega^\varepsilon} |\operatorname{rot}(E^\varepsilon - E)|^2 dx - (k^2 + i\sigma) \int_{\Omega^\varepsilon} |E^\varepsilon - E|^2 dx \right| \leq C |E^\varepsilon - E|_{H_{\operatorname{rot}}(\Omega^\varepsilon)} |E_{BL}^{0,0} + \varepsilon \mu|_{H_{\operatorname{rot}}(\Omega^\varepsilon)}$$

Par suite

$$|E^\varepsilon - E|_{H_{\operatorname{rot}}(\Omega^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

La proposition est prouvée. □

Preuves des lemmes 6 et 7

Ces deux lemmes font appel à la même technique de démonstration que le lemme 3, mais cette fois-ci dans le cas vectoriel. La différence avec le cas scalaire est qu'ici, la forme bilinéaire dans la formulation variationnelle du problème tronqué n'est plus coercive, mais possède un noyau. Nous devons donc faire appel à l'alternative de Fredholm.

Preuve du lemme 6

On va montrer l'existence de α_1 .

Soit $\varphi(y_3)$ une fonction C^∞ à support compact dans $]0, +\infty[$, et telle que $\varphi(y_3) = 1$ dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. $\varphi(y_3) y_3 e_1$ est alors un relèvement de $y_3 e_1$ sur ∂B , vérifiant :

$$\operatorname{div}_y(\varphi(y_3) y_3 e_1) = 0, \text{ et } \varphi(y_3) y_3 e_1 \text{ 1 périodique en } y_1, y_2.$$

On va chercher à résoudre le problème : chercher $\alpha \in (W^1(G))^3$, tel que :

$$(P) \quad \begin{cases} \operatorname{rot}_y \operatorname{rot}_y \alpha = -\operatorname{rot}_y \operatorname{rot}_y (\varphi(y_3) y_3 e_1) = g & G \\ \operatorname{div}_y \alpha = 0 & G \\ \alpha \times n = 0 & \partial B \\ \alpha \times n = 0 & F \\ \alpha \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

On va appliquer, sans donner tous les détails, la méthode de troncature.

Problème tronqué

Par le même raisonnement qu'au lemme 3, on peut écrire, pour z_0 assez grand, tel que

$$\begin{cases} \operatorname{support}(g) \subset F \times]0, z_0[, \\ B \subset F \times]0, z_0[\end{cases}$$

que, $\forall y_3 \geq z_0$, α et $\frac{\partial \alpha}{\partial y_3}$ se développent de la façon suivante :

$$(*) \quad \begin{cases} \alpha(y) = \sum_{p_1, p_2 \geq 0} \alpha_{p_1, p_2}(z_0) e^{2i\Pi(p_1 y_1 + p_2 y_2)} e^{-2\Pi\sqrt{p_1^2 + p_2^2}(y_3 - z_0)} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y_3}(y) = \sum_{p_1, p_2 \geq 0} -2\Pi\sqrt{p_1^2 + p_2^2} \alpha_{p_1, p_2}(z_0) e^{2i\Pi(p_1 y_1 + p_2 y_2)} e^{-2\Pi\sqrt{p_1^2 + p_2^2}(y_3 - z_0)} \end{cases}$$

De même qu'au lemme 3, $\frac{\partial \alpha}{\partial y_3}(z_0) = T(\alpha(z_0))$

où T est un opérateur continu de $(H_p^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{z_0}))^3$ dans $[(H_p^{\frac{1}{2}}(\Sigma_{z_0}))^3]'$.

On va donc chercher à résoudre le problème tronqué suivant :

Chercher $\alpha \in (H^1(G_{z_0}))^3$, tel que :

$$(P_{z_0}) \quad \begin{cases} -\Delta_{yy} \alpha = g & G_{z_0} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y_3} = T \alpha & \Sigma_{z_0} \\ \alpha \times n = 0 & F \text{ et } \partial B \\ \gamma_0(\operatorname{div}_y \alpha) = 0 & F \text{ et } \partial B \\ \alpha \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

Remarque

Ici, $\gamma_o(\operatorname{div}_y \alpha)$ représente la trace de $\operatorname{div}_y \alpha$ sur ∂B ou F . Ceci a un sens ; en effet :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \alpha \in L^2(G_{z_0}) \\ \Delta_{yy}(\operatorname{div}_y \alpha) \in L^2(G_{z_0}) \end{cases}$$

Ce qui donne un sens à $\gamma_o(\operatorname{div}_y \alpha)$, par la méthode de transposition de Lions. \square

On appelle $H_{z_0}^3$ l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in (H^1(G_{z_0}))^3, v \times n = 0 \quad \partial B \text{ et } F, \\ v \quad 1 \text{ périodique en } y_1, y_2 \end{array} \right\}$$

qui, muni de la norme H^1 , est un Hilbert.

Comme on le voit dans (Bendali), ou dans (Nedelec-Starling), le problème P_{z_0} admet la formulation variationnelle :

$$(P'_{z_0}) \quad \begin{cases} \alpha \in H_{z_0}^3, \\ \forall \beta \in H_{z_0}^3, \\ \int_{G_{z_0}} \operatorname{grad} \alpha \cdot \operatorname{grad} \beta \, dy - \langle T\alpha, \beta \rangle + \int_{\partial B} \mathcal{H} \alpha \cdot \beta \, d\sigma = \int_{G_{z_0}} g \cdot \beta \, dy \end{cases}$$

où \mathcal{H} représente la courbure principale de la surface ∂B .

On a ici besoin d'un lemme intermédiaire, que nous démontrerons juste après le lemme 6.

Lemme 10 Le noyau N_{z_0} est égal au noyau N du problème P . \square

L'opérateur figurant dans la formulation variationnelle (P'_{z_0}) s'écrit :

$$\left[\int_{G_{z_0}} \alpha \cdot \beta \, dy + \int_{G_{z_0}} \operatorname{grad} \alpha \cdot \operatorname{grad} \beta \, dy - \langle T\alpha, \beta \rangle \right] + \left[- \int_{G_{z_0}} \alpha \cdot \beta \, dy + \int_{\partial B} \mathcal{H} \alpha \cdot \beta \, d\sigma \right]$$

Le premier crochet ci-dessus est un opérateur coercif.

Le second crochet ci-dessus est un opérateur compact.

On peut donc appliquer l'alternative de Fredholm : si

$$\forall \beta \in N_{z_0} = N, \quad \int_{G_{z_0}} g \cdot \beta \, dy = 0,$$

alors le problème (P'_{z_0}) admet une solution unique aux fonctions de N près. Or g , dans le cas du lemme 6 est bien orthogonal aux fonctions de N : en effet :

$$\begin{aligned} & \int_{G_{z_0}} \text{rot}_y \text{rot}_y (y_3 \varphi(y_3) e_1) \cdot [\text{grad}_y \varphi_{c_1 c_2} + c_1 e_3] dy \\ &= - \int_{\partial B} \text{rot}_y (y_3 \varphi(y_3) e_1) \cdot [\text{grad}_y \varphi_{c_1 c_2} + c_1 e_3] \times n d\sigma \\ & \quad - \int_F \text{rot}_y (y_3 \varphi(y_3) e_1) \cdot [\text{grad}_y \varphi_{c_1 c_2} + c_1 e_3] \times e_3 d\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'existence de solutions pour le problème variationnel (P'_{z_0}) est prouvée.

Existence de α_1

En prolongeant une solution de (P'_{z_0}) par la formule (*), on obtient une solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta_{yy} \alpha = g & G \\ \gamma_0 (\text{div}_y \alpha) = 0 & \partial B \text{ et } F \\ \alpha \times n = 0 & \partial B \text{ et } F \\ \alpha \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

Le fait que $\text{div}_y g = 0$, et la méthode de transposition de Lions, que l'on détaillera à la preuve du lemme 10, permettent d'affirmer que $\text{div}_y \alpha = 0$, et donc que α est solution du problème (P) . De plus, une fonction u de N vérifie $(u \times e_3) \in (S_G)^3$.

Donc $\lim_{y_3 \rightarrow +\infty} (\alpha \times e_3)$ existe d'après (*), et ne dépend pas de la solution α choisie. $\alpha_1 = \alpha + \varphi(y_3) y_3 e_1$ remplit toutes les conditions du lemme 6. \square

Preuve du lemme 10

Il est clair que $N \subset N_{z_0}$.

Réciproquement, si $u \in N_{z_0}$, u vérifie $\frac{\partial u}{\partial y_3}(z_0) = Tu(z_0)$.

On peut prolonger u par (*), et ainsi obtenir une fonction u de $(W^1(G))^3$, telle que :

$$\begin{cases} \Delta_{yy} u = 0 & G \\ \gamma_0 (\text{div}_y u) = 0 & \partial B \text{ et } F \\ u \times n = 0 & \partial B \text{ et } F \\ u \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

On a la formule de Green suivante : $\forall \varphi \in W_0^1(G)$, 1 périodique en y_1, y_2 , telle que $grad_y \varphi \in (H^1(G))^3$,

$$\int_G (div_y u \Delta_{y,y} \varphi - \varphi \Delta_{y,y} div_y u) dx = \langle \gamma_0(div_y u), \frac{\partial \varphi}{\partial n} \rangle.$$

où le crochet correspond à la dualité $H^{-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}}$.

Soit ϕ une fonction positive C^∞ à support compact en y_3 , 1 périodique en y_1, y_2 , on peut appliquer la formule de Green à la solution de

$$\begin{cases} \Delta_{yy} v = \phi div_y u & G \\ v = 0 & F \text{ et } \partial B \\ v \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

Donc :

$$\int_G \phi |div_y u|^2 dx = 0.$$

Ce qui implique que : $div_y u = 0$, et que $u \in N$. □

Preuve du lemme 7

On va donner une démonstration moins détaillée que celle du lemme 6, de nombreux points étant semblables.

On cherche à résoudre:

$$(P) \quad \begin{cases} rot_y rot_y \eta = f & G \\ div_y \eta = 0 & G \\ \eta \times n = 0 & \partial B \\ \eta \times n = 0 & F \\ \eta \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

avec $f = \frac{\partial \chi}{\partial y_1}$ ou $f = \frac{\partial \chi}{\partial y_2}$.

Problème tronqué

χ est harmonique, 1 périodique en y_1, y_2 et vérifie $\operatorname{div}_y \chi = 0$. Par suite, pour z_0 assez grand :

$$\begin{cases} \forall y_3 \geq z_0, & f(y) = \sum_{p_1, p_2 \geq 0} f_{p_1, p_2}(z_0) e^{2i\pi(p_1 y_1 + p_2 y_2)} e^{-2\pi\sqrt{p_1^2 + p_2^2}(y_3 - z_0)} \\ \frac{\partial f}{\partial y_3} = \sum_{p_1, p_2 \geq 0} & -2\pi\sqrt{p_1^2 + p_2^2} f_{p_1, p_2}(z_0) e^{2i\pi(p_1 y_1 + p_2 y_2)} e^{-2\pi\sqrt{p_1^2 + p_2^2}(y_3 - z_0)} \end{cases}$$

Comme dans les lemmes 3 et 6, on introduit un problème tronqué à G_{z_0} ; la difficulté vient ici du fait que f n'est pas à support compact dans G_{z_0} , mais décroît exponentiellement à l'infini. Le problème tronqué s'écrit :

Chercher $\eta \in (H^1(G_{z_0}))^3$, tel que :

$$\begin{cases} \Delta_{yy} \eta = -f \\ \gamma_0(\operatorname{div}_y \eta) = 0 \quad \partial B \quad \text{et} \quad F \\ \frac{\partial \eta}{\partial n} = T\eta + c_f \quad \Sigma_{z_0} \\ \eta \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

$\gamma_0(\operatorname{div}_y \eta)$ a ici un sens car

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \eta \in (L^2(G_{z_0})) \\ \operatorname{div}_y f = 0 \Rightarrow \Delta_{yy} \operatorname{div}_y \eta = 0 \end{cases}$$

où T est l'opérateur défini dans la preuve du lemme 6.

$c(f)$ est défini par :

$$c(f) = \sum_{p_1^2 + p_2^2 > 0} \frac{f_{p_1, p_2}(z_0)}{4\pi\sqrt{p_1^2 + p_2^2} e^{2i\pi(p_1 y_1 + p_2 y_2)}}$$

La formulation variationnelle du problème (P_{z_0} est :

$$\begin{cases} \eta \in H_{z_0}^3 \\ \forall \beta \in H_{z_0}^3, \\ \int_{G_{z_0}} \operatorname{grad} \eta \cdot \operatorname{grad} \beta \, dy - \langle T \eta, \beta \rangle + \int_{\partial B} \mathcal{H} \eta \cdot \beta \, d\sigma = \int_{G_{z_0}} f \cdot \beta \, dy + \langle c(f), \beta \rangle \end{cases}$$

Comme pour le lemme 6, il faut montrer que, pour tout v dans N , noyau du problème (P), on a :

$$\int_{G_{z_0}} f.v \, dy + \langle c(f).v \rangle = 0.$$

Or

$$\forall v \in N, \int_G f.v \, dy = 0.$$

En effet,

$$\int_G f.v \, dy = \int_G f.[c_1 e_3 + \text{grad} \varphi_{c_1 c_2}] \, dy = \int_{\partial B} (f.n) c_2 \, d\sigma$$

Or f vérifie :

a) $\int_F (f.n) \, d\sigma = 0$ car $f = \frac{\partial \chi}{\partial y_i}$ et χ est périodique en y_i

b) $\text{div}_y f = 0$

c) f décroît exponentiellement à l'infini.

Donc

$$\int_{\partial B} f.n \, d\sigma = 0.$$

Par suite,

$$\int_{G_{z_0}} f.v \, dy = - \int_{y_3 \leq z_0} f.v \, dy$$

Or f admet le développement *, et $v \in N$ admet aussi un tel développement : donc

$$\int_{y_3 \leq z_0} f.v \, dy = \sum_{p_1^2 + p_2^2 > 0} \frac{f_{p_1 p_2} \cdot v_{p_1 p_2}}{4\pi \sqrt{p_1^2 + p_2^2}} = \langle c(f), v \rangle$$

Par suite,

$$\int_{G_{z_0}} f.v \, dy = - \langle c(f).v \rangle$$

La forme linéaire du membre de droite dans (P'_{z_0}) est orthogonale à N : l'alternative de Fredholm s'applique : (P'_{z_0}) à une solution η , unique aux fonctions de N près.

En prolongeant cette solution à G , par la méthode utilisée au lemme 6, on obtient une fonction η vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta \eta = -f & G \\ \gamma_0(\text{div} \eta) = 0 & \partial B \text{ et } F \\ \eta \times n = 0 & \partial B \text{ et } F \\ \eta & \text{1 périodique en } y_1, y_2 \end{cases}$$

Comme $\operatorname{div} f = 0$, la méthode de transposition de Lions donne $\operatorname{div} \eta = 0$. η est solution du problème (P).

De plus, pour chaque élément de N , $v \times e_3 \in (S_G)^3$.

Donc $\lim_{y_3 \rightarrow +\infty} \eta \times e_3$ est indépendante de la solution choisie. Le lemme 7 est prouvé. \square

Preuve du théorème 8

Nous donnons la preuve du théorème 8 sans faire tous les calculs.

Nous commençons par écrire explicitement le terme $\in S_\varepsilon$ dans (13) : ce terme vaut :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, 0) [\operatorname{grad} \tau_{1_1} + \chi_1 e_1] + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, 0) [\operatorname{grad} \tau_{2_1} + \chi_2 e_2] \\ & + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, 0) [\operatorname{grad} \tau_{1_2} + \chi_2 e_1 + \operatorname{grad} \tau_{2_1} + \chi_1 e_2] \\ & + \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) \operatorname{grad} \alpha_{1_1} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) \operatorname{grad} \alpha_{1_2} \\ & + \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) \operatorname{grad} \alpha_{2_1} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) \operatorname{grad} \alpha_{2_2} \\ & - \chi [\Delta_{x_1, x_2} E_3 - (k^2 + i\sigma) E_3](x_1, x_2, 0) \end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} & A(y) \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) + B(y) \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) \\ & + C(y) \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) + D(y) \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) + \\ & F(y) \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, 0) + G(y) \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, 0) + H(y) \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, 0). \end{aligned}$$

avec pour chaque coefficient : ($A(y)$ par exemple) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(y) \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \\ \operatorname{div}_y A = 0 \quad G \\ \int_F A \cdot e_3 \, d\sigma = 0 \\ A \in (S_G)^3 \end{array} \right.$$

Remarque Ceci se vérifie par des calculs simples, qui sont donnés en annexe. C'est ici que la condition c) du lemme 3 :

$$\int_F \chi \cdot e_3 d\sigma = 0,$$

est utile. □

D'après le lemme 7, il existe $\begin{cases} u_A \in (W^1(G))^3 \\ a_A \in C^3 \end{cases}$, tels que :

$$\begin{cases} \operatorname{rot}_y \operatorname{rot}_y u_A = A(y) & G \\ \operatorname{div}_y u_A = 0 & G \\ u_A \times n = a_A \times n & F \\ u_A \times n = a_A \times n & \partial B \\ u_A \text{ 1 périodique en } y_1, y_2 \\ u_A \in S_G \end{cases}$$

Par suite, si on retranche :

$$\varepsilon^2 \left[u_A \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) + u_B \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) + u_C \dots \right]$$

de $r^{1\varepsilon}$, on obtient une fonction $r^{2\varepsilon}$ vérifiant:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} r^{2,\varepsilon} - (k^2 + i\sigma)r^{2,\varepsilon} = \varepsilon(\text{terme} \in S_\varepsilon) & \Omega^\varepsilon \\ r^{2,\varepsilon} \times n = \varepsilon \left[\sum_{i=1}^2 \frac{\partial E_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0)C_i + \frac{\partial E_3}{\partial x_i}(x_1, x_2, 0)D_i \right] \times n & F \\ r^{2,\varepsilon} \times n = \varepsilon \left[\sum_{i=1}^2 \frac{\partial E_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0)C_i + \frac{\partial E_3}{\partial x_i}(x_1, x_2, 0)D_i \right] \times n + O(\varepsilon^2) & \partial B_i^\varepsilon \\ r^{2,\varepsilon} \text{ 1 périodique en } x_1, x_2 \end{cases}$$

en prenant comme fonction test :

$$r^{2,\varepsilon} - \varepsilon \varphi \left[\sum_{i=1}^2 \frac{\partial E_i}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0)C_i + \frac{\partial E_3}{\partial x_i}(x_1, x_2, 0)D_i \right] - \mu$$

où φ est une fonction de $[0, \infty[$ dans \mathbb{R} , C^∞ à support compact, valant 1 au voisinage de 0, et μ est un relèvement de $O(\varepsilon^2)$ sur ∂B_i^ε , de norme

$$|\mu|_{H_{\operatorname{rot}}(\Omega^\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}},$$

on obtient que

$$|r^{2,\varepsilon}|_{H_{rot}(\Omega^\varepsilon)} \leq C\varepsilon$$

et comme

$$\varepsilon^2 |u_A \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, 0) + u_B \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) + \dots|_{H_{rot}(\Omega^\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}},$$

$$|r^{1,\varepsilon}|_{H_{rot}(\Omega^\varepsilon)} \leq C\varepsilon$$

Le théorème 8 est prouvé. □

V Expérience numérique.

Dans cette partie, nous nous proposons d'évaluer numériquement les constantes c_i et d_i . La méthode de démonstration des lemmes 6 et 7 fournit une méthode numérique pour résoudre les problèmes (8) et (11), en obtenant des problèmes tronqués équivalents. Cependant, la condition aux limites absorbante, permettant de tronquer le domaine tout en obtenant un problème équivalent, est coûteuse. Nous nous proposons donc de résoudre un problème voisin, beaucoup moins coûteux en dimension 2, qui n'est certes pas équivalent au problème tronqué, mais qui donne une bonne approximation de c_i et de d_i .

1) Problème voisin de (8).

Nous avons choisi d'approcher le problème (8) par le problème (8') :

$$(8') \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot}_y \operatorname{rot}_y \alpha = 0 \quad G_{z_0} \\ \operatorname{div}_y \alpha = 0 \quad G_{z_0} \\ \alpha \times n = 0 \quad F \\ \alpha \times n = y_2 e_1 \times n \quad \partial B \\ \alpha \times n = c \quad \Sigma_{z_0} \\ \alpha \text{ 1 périodique en } y_1 \\ \int_{\Sigma_{z_0}} \frac{\partial \alpha_1}{\partial n} d\sigma = 0 \end{array} \right.$$

On retranche $y_2 e_1$ à α : la différence, que nous appelons encore α vérifie :

$$(8'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot}_y \operatorname{rot}_y \alpha = 0 \quad G_{z_0} \\ \operatorname{div}_y \alpha = 0 \quad G_{z_0} \\ \alpha \times n = 0 \quad F \\ \alpha \times n = 0 \quad \partial B \\ \alpha \times n = c \quad \Sigma_{z_0} \\ \alpha \text{ 1 périodique en } y_1 \\ \int_{\Sigma_{z_0}} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial n} - 1 \right) d\sigma = 0 \end{array} \right.$$

Principe de la méthode numérique

Le problème (8'') peut être résolu directement, mais il donne alors un très gros système linéaire, car α est un vecteur. Pour minimiser l'encombrement mémoire, nous allons procéder de la façon suivante : on cherche $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, tel que :

$$\begin{cases} \Delta_y \alpha_1 = 0 & ; \Delta_y \alpha_2 = 0 & G_{z_0} \\ \alpha_1 = 0 & ; \frac{\partial \alpha_2}{\partial n} = 0 & F \\ \alpha = \varphi n & \partial B \\ \alpha_1 = c & ; \frac{\partial \alpha_2}{\partial n} = 0 & \Sigma_{z_0} \\ \alpha_1 \text{ 1 périodique en } y_1 \end{cases}$$

où φ et c sont à ajuster de sorte que $\operatorname{div} \alpha = 0$ et que

$$\int_{\Sigma_{z_0}} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial n} - 1 \right) d\sigma = 0$$

La méthode numérique consiste donc à résoudre une succession de problèmes scalaires, c'est à dire à découpler les problèmes en α_1 et α_2 , puis à les recoupler grâce à la condition de divergence nulle et à la condition :

$$\int_{\Sigma_{z_0}} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial n} - 1 \right) d\sigma = 0$$

Méthode numérique

Nous allons chercher une approximation P_1 de la solution de (8''). Dans la suite, tous les problèmes vont être approchés par des éléments finis P_1 , conformes triangulaires.

Première étape

Pour chaque point k de la triangulation situé sur ∂B , on résout le problème vectoriel aux coordonnées découplées : $\forall k \in \{1, \dots, n_{\partial B}\}$, chercher α^k tel que :

$$\begin{cases} \Delta_h \alpha_1^k = 0 & ; \Delta_h \alpha_2^k = 0 & G_{z_0} \\ \alpha_1^k = 0 & ; \frac{\partial \alpha_2^k}{\partial n} = 0 & F \\ \alpha^k = \delta_{i,k} n(i) & \partial B \\ \alpha_1^k = 0 & ; \frac{\partial \alpha_2^k}{\partial n} = 0 & \Sigma_{z_0} \\ \alpha^k \text{ 1 périodique en } y_1 \end{cases}$$

où $n_{\partial B}$ est le nombre de points de la triangulation appartenant à ∂B ,
 où Δ_h représente le laplacien discret,
 où $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker,
 et où $n(i)$ est le vecteur normal sortant à ∂B , au point de la triangulation i .
 C'est à dire, sous forme variationnelle,
 $\forall w^j$ fonction chapeau nulle sur F , Σ_{z_0} , et ∂B

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \text{grad } w^j \cdot \text{grad}(\alpha_1^k - n_1(k)w^k) dx = 0$$

et $\forall w^j$ fonction chapeau nulle sur ∂B

$$\sum_{K \in T_h} \int_K \text{grad } w^j \cdot \text{grad}(\alpha_2^k - n_2(k)w^k) dx = 0$$

On résout un problème supplémentaire : chercher α^a tel que :

$$\begin{cases} \Delta_h \alpha_1^a = 0 & G_{z_0} \\ \alpha_1^a = 0 & F \\ \alpha_1^a = 0 & \partial B \\ \alpha_1^a = 1 & \Sigma_{z_0} \\ \alpha_1^a \text{ 1 périodique en } y_1 \end{cases}$$

et

$$\alpha_2^a = 0$$

Alors, tout champ α , P_1 , vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta_h \alpha_1 = 0 ; \Delta_h \alpha_2 = 0 & G_{z_0} \\ \alpha_1 = 0 ; \frac{\partial \alpha_2}{\partial n} = 0 & F \\ \alpha \times n = 0 & \partial B \\ \alpha_1 = c ; \frac{\partial \alpha_2}{\partial n} = 0 & \Sigma_{z_0} \\ \alpha \text{ 1 périodique en } y_1, \end{cases}$$

s'écrit sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{n_{\partial B}} \varphi(k) \alpha^k + c \alpha^a$$

Il faut donc déterminer les inconnues : $\varphi(k)$ et c , pour avoir, dans un sens à préciser :

$$\operatorname{div} \alpha = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Sigma_{z_0}} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial n} - 1 \right) d\sigma = 0$$

deuxième étape

On sait qu'il suffit d'imposer $\operatorname{div} \alpha|_{\partial B} = 0$ pour avoir $\operatorname{div} \alpha = 0$ dans G_{z_0} . Nous devons donc traduire cette condition sous forme faible.

Soit ξ solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta_y \xi = \operatorname{div}_y \alpha & G_{z_0} \\ \xi = 0 & F \\ \frac{\partial \xi}{\partial n} = 0 & \partial B \\ \xi = 0 & \Sigma_{z_0} \\ \xi \text{ 1 périodique en } y_1 \end{cases}$$

Alors $\operatorname{div} \alpha = 0$ équivaut à : $\xi = 0 \quad \partial B$

Une fois trouvés α^k et α^a , la deuxième étape consiste à résoudre les problèmes suivants:

$\forall k \in \{1, \dots, n_{\partial B}\}$, chercher ξ^k tel que :

$$\begin{cases} -\Delta_y \xi^k = \operatorname{div}_y \alpha^k & G_{z_0} \\ \xi^k = 0 & F \\ \frac{\partial \xi^k}{\partial n} = 0 & \partial B \\ \xi^k = 0 & \Sigma_{z_0} \\ \xi^k \text{ 1 périodique en } y_1 \end{cases}$$

chercher ξ^a tel que :

$$\begin{cases} -\Delta_y \xi^a = \operatorname{div}_y \alpha^a & G_{z_0} \\ \xi^a = 0 & F \\ \frac{\partial \xi^a}{\partial n} = 0 & \partial B \\ \xi^a = 0 & \Sigma_{z_0} \\ \xi^a \text{ 1 p\u00e9riodique en } y_1 \end{cases}$$

La formulation faible du probl\u00e8me de divergence nulle est donc :

$$\forall i \in \{1, \dots, n_{\partial B}\}, \quad \sum_{k=1}^{n_{\partial B}} \varphi(k) \xi^k(i) + c \xi^a(i) = 0$$

Ceci donne $n_{\partial B}$ \u00e9quations lin\u00e9aires pour $n_{\partial B} + 1$ inconnues.

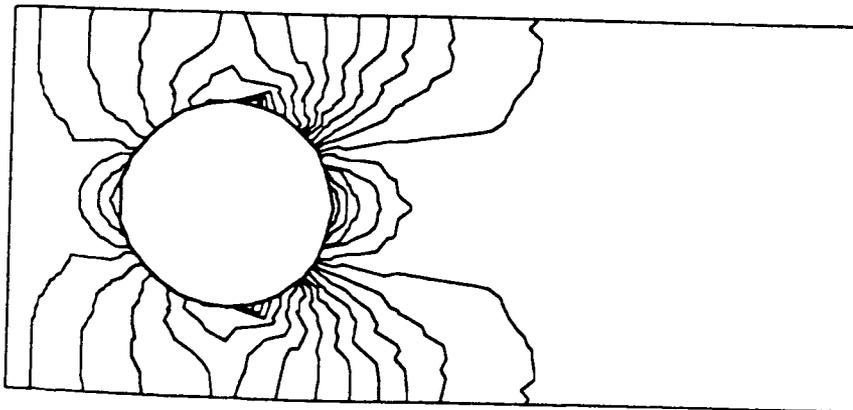
L'\u00e9quation suppl\u00e9mentaire vient de la condition :

$$\int_{\Sigma_{z_0}} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial n} - 1 \right) d\sigma = 0$$

Le syst\u00e8me obtenu n'est pas sym\u00e9trique; on le r\u00e9sout par une m\u00e9thode de Gauss.

On obtient ainsi les approximations suivantes pour α :

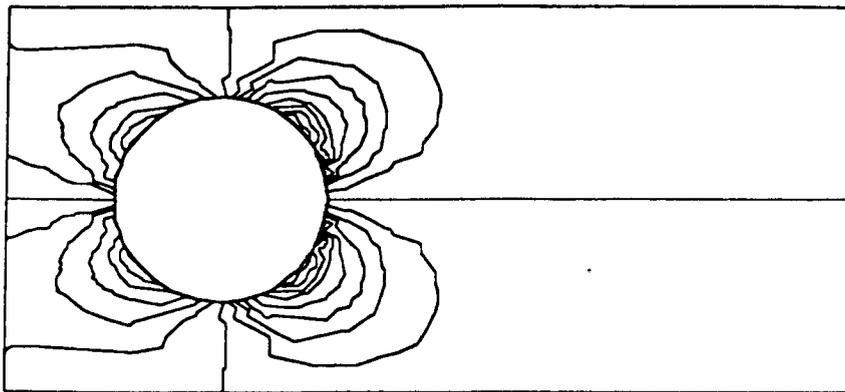
figure 4. Lignes de niveau de α_1



1	min:-13846E-4
2	---+---:12588E-4
19	max: 88000E-5
15h47	6/11/1989
alpha1	

Cette composante est bien symétrique, comme prévu. On voit bien sur cette figure que α_1 tend vers une constante quand y_2 tend vers ∞ .

figure 5. Lignes de niveau de α_2



1	min:-12678E-4
2	--+--:-11269E-4
19	max: 12678E-4
15h48	6/11/1989
alpha2	

Cette composante est bien antisymétrique, comme prévu.

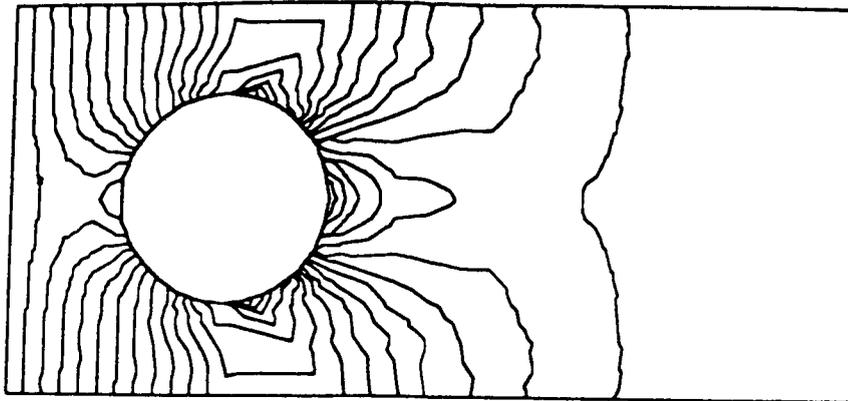
2) Problème voisin de (11).

On adopte exactement la même démarche que précédemment, sauf qu'à la place de $y_2 e_1$, on retranche à τ le champ θ , solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_h \theta = \frac{\partial \chi}{\partial y_1} G_{z_0} \\ \theta_1 = 0 ; \frac{\partial \theta_2}{\partial n} = 0 \quad F \\ \theta = 0 \quad \partial B \\ \theta_1 = 0 ; \frac{\partial \theta_2}{\partial n} = 0 \quad \Sigma_{z_0} \\ \theta \text{ 1 périodique en } y_1 \end{array} \right.$$

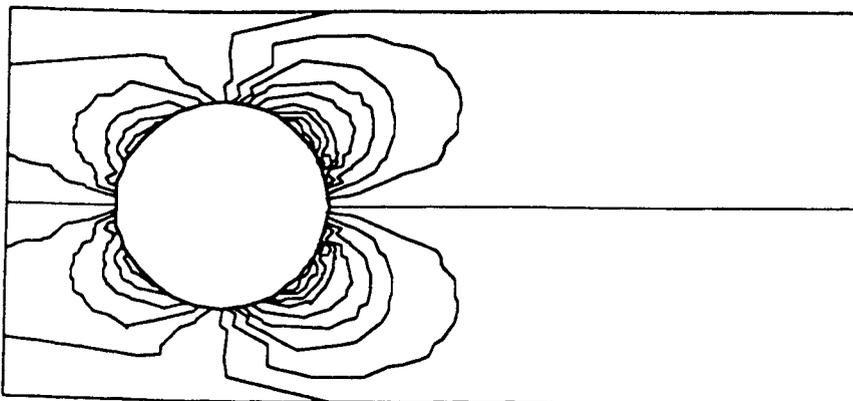
où χ est obtenu numériquement en suivant exactement la méthode de démonstration du lemme 3. On obtient ainsi les approximations suivantes pour τ :

figure 6. Lignes de niveau de τ_1



1	min: 00000 00
2	--+--: 15392E-5
19	max: 27706E-4
16h0	6/11/1989
tau1	

figure 7. Lignes de niveau de τ_2



1	min:-18118E-4
2	--+--:-16104E-4
19	max: 18118E-4
16h1	6/11/1989
tau2	

Annexe à la preuve du théorème 8

Rappelons l'expression du terme $\in S_\epsilon$ dans (13) : ce terme vaut :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, 0) [\text{grad } \tau_{1_1} + \chi_1 e_1] + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, 0) [\text{grad } \tau_{2_1} + \chi_2 e_2] \\ & + \frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2, 0) [\text{grad } \tau_{1_2} + \chi_2 e_1 + \text{grad } \tau_{2_1} + \chi_1 e_2] \\ & + \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) \text{grad } \alpha_{1_1} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) \text{grad } \alpha_{1_2} \\ & + \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) \text{grad } \alpha_{2_1} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x_1, x_2, 0) \text{grad } \alpha_{2_2} \\ & + \chi \left[\frac{\partial^2 E_3}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, 0) \right] \end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire :

$$\sum_{i,j,k} A_{i,j}^k(y) \frac{\partial^2 E_k}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, 0)$$

Il est facile de vérifier que chaque coefficient $A_{i,j}^k$ a une divergence nulle; il faut maintenant montrer que pour chaque coefficient, on a

$$\int_F A_{i,j}^k \cdot e_3 \, d\sigma = 0$$

Pour le coefficient $A_{3,3}^3$, c'est facile : χ a été spécialement choisi pour que :

$$\int_F \chi \cdot e_3 \, d\sigma = 0$$

Pour les autres coefficients, le résultat n'est pas immédiat; la démonstration étant la même pour chaque coefficient, nous nous contentons de la donner pour le cas de

$$A_{1,1}^3 = \text{grad}_y \tau_{1_1} + \chi_1 e_1$$

$$\int_F (\text{grad}_y \tau_{1_1} + \chi_1 e_1) \cdot e_3 \, d\sigma = \int_F \text{rot}_y \tau_{1_1} \cdot e_2 \, d\sigma$$

Soit $y_{1,0}$ un réel compris entre $\frac{-1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, tel que

$$B \cap \{y_1 = y_{1,0}\} = \emptyset$$

En appliquant le théorème de Stokes à $\text{rot}_y \tau_1$ sur la surface $\Sigma_{y_1} = \{\sigma_1 \in (y_1, y_{1,0})\} \cap F$, on obtient que :

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_1 = y_1} \text{rot}_y \tau_1 \cdot e_2 \, dy_2 - \int_{\sigma_1 = y_{1,0}} \text{rot}_y \tau_1 \cdot e_2 \, dy_2 &= \int_{\Sigma_{y_1}} \text{rot}_y \text{rot}_y \tau_1 \cdot e_3 \, d\sigma \\ &= \int_{\Sigma_{y_1}} \frac{\partial \chi}{\partial \sigma_1} \cdot e_3 \, d\sigma \\ &= \int_{\sigma_1 = y_1} \chi \cdot e_3 \, dy_2 - \int_{\sigma_1 = y_{1,0}} \chi \cdot e_3 \, dy_2 \end{aligned}$$

Montrons que

$$\int_{\sigma_1 = y_{1,0}} \text{rot}_y \tau_1 \cdot e_2 \, dy_2 - \int_{\sigma_1 = y_{1,0}} \chi \cdot e_3 \, dy_2 = 0$$

Pour cela, on applique encore le théorème de Stokes à $\text{rot}_y \tau_1$ sur la surface

$$\Sigma'_{y_{1,0}} = \{\sigma_1 = y_{1,0}, \sigma_3 > 0\}$$

Ceci est permis, compte tenu de la décroissance rapide de $\text{rot}_y \tau_1$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_1 = y_{1,0}} \text{rot}_y \tau_1 \cdot e_2 \, dy_2 &= \int_{\Sigma'_{y_{1,0}}} \frac{\partial \chi}{\partial \sigma_1} \cdot e_1 \, d\sigma \\ &= \int_{\Sigma'_{y_{1,0}}} \frac{\partial^2 \varphi_{a,b}}{\partial y_1^2} \, d\sigma \\ &= - \int_{\Sigma'_{y_{1,0}}} \frac{\partial^2 \varphi_{a,b}}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{a,b}}{\partial y_3^2} \, d\sigma \\ &= \int_{\sigma_1 = y_{1,0}} \chi \cdot e_3 \, dy_2 \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\sigma_1 = y_1} \text{rot}_y \tau_1 \cdot e_2 \, dy_2 - \int_{\sigma_1 = y_1} \chi \cdot e_3 \, dy_2 = 0$$

Par suite,

$$\int_F \text{rot}_y \tau_1 \cdot e_2 \, d\sigma = \int_F \chi \cdot e_3 \, d\sigma = 0$$

Remerciements

L'auteur remercie F. Murat, J.C. Nedelec, O. Pironneau, pour les précieux conseils qu'ils lui ont prodigués. Les calculs ont été effectués sur Macintosh 2, et les graphiques ont été réalisés avec le logiciel MacFem. Cette étude a été réalisée en collaboration avec l'INRIA sur un contrat D.R.E.T .

Bibliographie

A. BENDALI : Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques, Thèse d'état (1984).

C.CONCA : Etude d'un fluide traversant une paroi perforée I et II, J. Math. pures et appl., 66 (I) pp.1-43, (II) pp. 45-70 (1987).

J.L. LIONS : Some methods in the mathematical analysis of systems and their control, Science Press. Beijing (1981).

J.L. LIONS, E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod 1966).

J.C. NEDELEC, F. STARLING : Integral equation methods in quasi-periodic diffraction problem for the time harmonic Maxwell equations , Rapport interne CMAP 179, Ecole Polytechnique (1988) .

O. PIRONNEAU, C. SAGUEZ : Asymptotic behavior with respect to the domain of solutions of partial differential equations, Rapport de Recherche 218, INRIA (1977).

E. SANCHEZ-PALENCIA : Non homogeneous media and vibration theory, Lecture notes in physics 127 , Springer-Verlag .Berlin (1980) .

E. SANCHEZ-PALENCIA : Ecoulement d'un fluide à travers une paroi perforée, Collection de la direction des études et recherches d'EDF , 57, Eyrolles.

