



HAL
open science

Quelques méthodes et résultats récents en théorie de la contrôlabilité exacte

Alain Haraux

► **To cite this version:**

Alain Haraux. Quelques méthodes et résultats récents en théorie de la contrôlabilité exacte. [Rapport de recherche] RR-1317, INRIA. 1990, pp.34. inria-00075242

HAL Id: inria-00075242

<https://inria.hal.science/inria-00075242>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-LORRAINE

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1317

*Programme 7
Calcul Scientifique,
Logiciels Numériques et Ingénierie Assistée
par Ordinateur*

QUELQUES METHODES ET RESULTATS RECENTS EN THEORIE DE LA CONTROLABILITE EXACTE

Alain HARAUX

Octobre 1990



QUELQUES METHODES ET RESULTATS RECENTS EN THEORIE DE LA CONTROLABILITE EXACTE

Alain HARAUX *

Résumé

Dans cet article de synthèse, on rappelle d'abord la méthode HUM de J.L.Lions qui établit un lien commode entre observabilité et contrôlabilité exacte des systèmes distribués décrits par une équation d'évolution du deuxième ordre en temps. On s'intéresse ensuite à la contrôlabilité interne, ponctuelle ou spectrale de divers systèmes usuels (membranes ou cordes vibrantes, poutres et plaques). Un accent particulier est mis sur l'utilisation récente d'outils élaborés d'analyse harmonique, avec un effort de pédagogie et parfois des démonstrations remaniées par rapport aux articles originaux.

SOME RECENT METHODS AND RESULTS IN THE THEORY OF EXACT CONTROLLABILITY

Abstract

In this survey paper, we first recall the HUM method of J.L.Lions which provides a convenient relationship between observability and exact controllability of some distributed systems governed by a second order evolution equation. Then we study the internal, pointwise or spectral controllability of various usual systems (vibrating strings or membranes, beams and plates). A special emphasis is brought to the recent use of rather elaborate tools from harmonic analysis, with some pedagogical efforts and sometimes slightly adapted proofs compared with those of the corresponding research papers.

(*) Analyse Numérique, Tour 55-65, 5ème étage, Université Pierre et Marie Curie, 4 , Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05.

INTRODUCTION

La théorie de la contrôlabilité exacte des systèmes distribués de type oscillant (membranes, plaques, etc...) a pour but d'étudier la possibilité d'enrayer les vibrations naturelles de ces systèmes en agissant soit sur une partie du domaine, soit à la frontière de ce domaine. Du point de vue strictement mécanique, la distinction paraît sans doute bien subtile avec la contrôlabilité approchée dont le but est d'arrêter "à peu près" les vibrations, c'est à dire de rendre leur énergie insignifiante. Indépendamment du fait qu'une mesure est toujours approchée, dans la vie courante toute vibration suffisamment faible finit en effet par disparaître eu égard aux nombreux mécanismes de dissipation (frottements) agissant sur tout système "réel".

L'envoi dans l'espace vide de diverses structures flexibles ou articulées au cours de ces dernières années oblige, semble-t-il, à reconsidérer le problème du contrôle en faisant abstraction des frottements. On voit alors que d'un point de vue purement mathématique, le premier argument pour se limiter au contrôle "approché" présente un caractère discutable. C'est pourquoi ces dernières années ont vu un regain d'intérêt pour la théorie de la contrôlabilité exacte des systèmes distribués dont les difficultés mathématiques sont, disons-le tout de suite, sans commune mesure avec celles apparaissant dans l'étude de la contrôlabilité approchée.

Dans ce travail, divisé en trois chapitres, nous décrirons assez rapidement, et sur des modèles particulièrement simples, les trois principales méthodes en cours de développement dans cette théorie: la méthode des multiplicateurs, la théorie de la propagation des ondes et l'analyse harmonique. La synthèse de ces trois méthodes reste à faire, et faute de cette synthèse il n'existe pas à l'heure actuelle de résultats optimaux réellement utilisables pour des systèmes bi ou tri-dimensionnels. On peut sans doute se consoler en disant que l'étude systématique de ces problèmes est assez récente.

Il existe au moins un point commun entre les diverses situations examinées ici: toutes les démonstrations reposent au départ sur la méthode HUM de J.L.Lions qui établit un lien commode entre la contrôlabilité exacte d'un état $[y^0, y^1]$ du système et une certaine forme d'observabilité de l'état $[y^1, -y^0]$. Cette similitude n'est, bien évidemment, pas fortuite.

Ce papier a fait l'objet d'une des conférences invitées aux journées de Besançon - Nancy de mars 1990, organisées par Philippe Bénilan et Michel Pierre dans le cadre du projet NUMATH de l'INRIA - Lorraine. Je profite de l'occasion pour les remercier de leur accueil.

CHAPITRE 1: CONTROLE INTERNE DES SYSTEMES DISTRIBUES.

0. Introduction.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N et A un opérateur auto-adjoint positif dans $H = L^2(\Omega)$. Etant donné un ouvert $\omega \subset \Omega$, $T > 0$ et $[y^0, y^1]$ donnés dans $D(A^{1/2}) \times L^2(\Omega)$, on s'intéresse à l'existence d'un contrôle $h = h(t, x)$ tel que $\text{supp}(h) \subset [0, T] \times \omega$ et pour lequel la solution unique y du problème

$$(1) \quad y'' + Ay = h \text{ dans }]0, T[, \quad y(0, x) = y^0(x) \text{ et } y'(0, x) = y^1(x) \text{ dans } \Omega$$

vérifie $y(T, x) = y'(T, x) = 0$ dans Ω .

Il est raisonnable (mais pas obligatoire) d'imposer la condition $h \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Si un tel contrôle h existe, on conviendra de dire que " $[y^0, y^1]$ est L^2 - contrôlable dans ω au temps T ".

La méthode "HUM" de J.L. LIONS, dont nous expliquons dans la partie 1 l'application à ce problème dit de "contrôlabilité exacte interne", permet de ramener l'étude des états " L^2 - contrôlables dans ω au temps T " à celle de propriétés du problème linéaire homogène associé.

Dans la partie 2 nous indiquerons les résultats donnés par la méthode dite "des multiplicateurs". La partie 3 décrit les résultats obtenus à l'heure actuelle par la méthode dite "de propagation". Enfin les techniques de séries de Fourier anharmoniques deviennent utiles dans l'étude du contrôle des plaques vibrantes où elles donnent des résultats meilleurs que la technique des multiplicateurs alors qu'ici les méthodes de propagation semblent mal adaptées. Ceci fera l'objet du chapitre 2.

1. Rappel sur la méthode "HUM" de J.L. LIONS .

La possibilité de résoudre le problème de "contrôlabilité exacte interne" est liée à la quantité d'informations contenue dans la restriction à $]0, T[\times \omega$ d'une solution quelconque du problème linéaire homogène

$$(2) \quad \phi'' + A\phi = 0 \text{ dans }]0, T[, \quad \phi \in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; H)$$

avec $V = D(A^{1/2})$, $H = L^2(\Omega)$. En particulier on a la condition nécessaire suivante

Proposition 1.1. Si tout $[y^0, y^1]$ d'une partie *dense* Z de $V \times H$ est L^2 - contrôlable dans ω au temps T , toute solution ϕ du problème homogène (2) nulle sur $]0, T[\times \omega$ est identiquement nulle.

Démonstration.

Soit ϕ une solution du problème homogène (2) nulle sur $]0, T[\times \omega$. Alors pour tout $[y^0, y^1] \in Z$, il existe $h \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ avec $\text{supp}(h) \subset [0, T] \times \omega$ et pour lequel la solution unique y du problème

$$y'' + Ay = h \text{ dans }]0, T[, \quad y(0, x) = y^0(x) \text{ et } y'(0, x) = y^1(x) \text{ dans } \Omega$$

vérifie $y(T, x) = y'(T, x) = 0$ dans Ω . En particulier on a en posant $\phi(0) = \phi^0$, $\phi'(0) = \phi^1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (y^0 \phi^1 - y^1 \phi^0) dx &= \left(\int_{\Omega} (y' \phi - y \phi') dx \right)_0^T = \int_0^T \int_{\Omega} (y'' \phi - y \phi'') dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} h \phi dx dt = \int_0^T \int_{\omega} h \phi dx dt = 0. \end{aligned}$$

Par densité de Z dans $V \times H$ on en déduit $\phi^0 = \phi^1 = 0$. Ceci achève la démonstration.

La Proposition 1.1. admet une **réciproque** qui a d'importantes conséquences .

Théorème 1.2. (Théorème de contrôlabilité exacte de J.L.LIONS) Supposons que toute solution ϕ du problème homogène (2) nulle sur $]0, T[\times \omega$ est identiquement nulle.

Alors un état donné $[y^0, y^1] \in V \times H$ est L^2 - contrôlable dans ω au temps T si, et seulement si il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$(3) \quad \forall [\phi^0, \phi^1] \in V \times H, \quad \left| \int_{\Omega} (y^0 \phi^1 - y^1 \phi^0) dx \right| \leq C \left\{ \int_Q \phi^2(t, x) dx dt \right\}^{1/2},$$

où ϕ est la solution de l'équation (2) de données initiales $[\phi^0, \phi^1]$ et $Q :=]0, T[\times \omega$.

De plus l'ensemble des états L^2 - contrôlables dans ω au temps T est alors dense dans $V \times H$.

Démonstration. Pour tout $(\phi^0, \phi^1) \in V \times H$, on introduit la semi - norme

$$(4) \quad p(\phi^0, \phi^1) = \left\{ \int_Q \phi^2(t, x) dx dt \right\}^{1/2},$$

Sous l'hypothèse du théorème 1.2 on a

(5) p est une **norme** sur $V \times H$,

on peut donc définir

(6) $F =$ complété de $V \times H$ pour la **norme** p .

En identifiant $H \times H$ avec son dual on a les inclusions évidentes

(7) $V \times H \subset H \times H \subset H \times V' \subset F$,

algébriquement et topologiquement. Donc par dualité on a aussi

(8) $F' \subset H \times V$

On peut alors raisonner comme suit

a) Soit $[y^0, y^1] \in V \times H$ un état L^2 - contrôlable dans ω au temps T et $h \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ avec $\text{supp}(h) \subset [0, T] \times \omega$ un contrôle correspondant. Pour tout $[\phi^0, \phi^1] \in V \times H$, on a en désignant par ϕ la solution de l'équation (2) de données initiales $[\phi^0, \phi^1]$:

$$(9) \quad \int_{\Omega} (y^1 \phi^0 - y^0 \phi^1) dx = - \int_0^T \int_{\omega} h \phi dx dt .$$

Il est clair que la formule (9) implique (3) avec $C = \{ \int_Q h^2(t, x) dx dt \}^{1/2}$.

b) Pour démontrer l'implication **réciroque**, on utilise la méthode HUM de J. L. LIONS [20, 21] de la façon suivante. Pour tout $[\phi^0, \phi^1] \in V \times H$, désignons encore par ϕ la solution de l'équation (2) de données initiales $[\phi^0, \phi^1]$: par définition de F il est clair que l'opérateur linéaire

$$[\phi^0, \phi^1] \mapsto \phi \chi_{\omega} = L(\phi^0, \phi^1)$$

est continu pour la topologie de F à valeurs dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. On peut donc l'étendre par continuité en un opérateur **continu** (abstrait) unique

$$L: F \rightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

On introduit alors l'opérateur $\Lambda: F \rightarrow H \times V$ défini par

$$\Lambda(f) = [-y'(0), y(0)]$$

où $y \in C(0,T; V) \cap C^1(0,T; H)$ est la solution de

$$y'' + Ay = L(f) \text{ dans }]0,T[, \quad y(T) = y'(T) = 0.$$

Pour tout $[\psi^0, \psi^1] \in V \times H$, désignons par ψ la solution de l'équation (2) de données initiales $[\psi^0, \psi^1]$: pour tout $[\phi^0, \phi^1] \in V \times H$ on a alors, puisque $L(\phi^0, \phi^1) = \phi \chi_\omega$ la formule

$$(10) \quad \langle \Lambda(\phi^0, \phi^1), (\psi^0, \psi^1) \rangle = \int_{\Omega} (y(0)\psi^1 - y'(0)\psi^0) dx = \int_0^T \int_{\omega} \phi \psi dx dt.$$

En particulier

$$\forall [\phi^0, \phi^1] \in V \times H, \quad \Lambda(\phi^0, \phi^1) \in F'.$$

De plus la formule (10) montre que $\Lambda: V \times H \rightarrow F'$ coïncide sur $V \times H$ avec l'application de dualité: $F \rightarrow F'$. Comme cette application de dualité est en particulier continue de F dans $H \times V$, on a par densité les propriétés

$$(11) \quad \Lambda(F) \subset F'.$$

$$(12) \quad \Lambda \text{ est l'application de dualité: } F \rightarrow F'.$$

Etant donné $[y^0, y^1] \in V \times H$ vérifiant (3), on a $[y^1, -y^0] \in F'$ et on peut donc résoudre l'équation

$$(13) \quad v \in F, \quad \Lambda(v) = [-y^1, y^0].$$

Alors le contrôle $h = L(v)$ est solution du problème: on a donc

$$(14) \quad [y^0, y^1] \text{ est } L^2 \text{-contrôlable dans } \omega \text{ au temps } T.$$

Pour achever la démonstration du Théorème 1.2, il suffit maintenant d'établir que F' est dense dans $H \times V$. Soit donc $\zeta \in H \times V' \subset F'$ tel que l'on ait: $\forall v \in F', \langle v, \zeta \rangle = 0$. En choisissant $v = \Lambda(\zeta)$ on trouve: $(\|\zeta\|_{F'})^2 = 0$, donc $\zeta = 0$. Puisque toute forme linéaire continue sur $H \times V$ qui s'annule

sur F' est nulle, on obtient bien la densité de F' dans $H \times V$.

Remarque 1.3. La dernière assertion du Théorème 1.2 est importante **en soi**. En particulier, on en déduit immédiatement que dès que p est une norme sur $V \times H$, pour **tout** état $[y^0, y^1] \in V \times H$ il existe des **contrôles approchés** h_ε à support dans $]0, T[\times \omega$ qui ramènent à l'instant T cet état dans un ε -voisinage de $(0, 0)$ dans $V \times H$. Cette propriété de contrôlabilité approchée est en pratique presque aussi importante que la contrôlabilité exacte, et la méthode "HUM" la ramène **exactement** à une propriété d'injectivité de l'opérateur "trace des solutions de l'équation homogène sur $]0, T[\times \omega$ ".

2. Méthode des multiplicateurs .

Cette méthode, mise en oeuvre pour l'étude du **contrôle frontière** par plusieurs auteurs dont J.L.LIONS, L.F. HO, I.LASIECKA & R.TRIGGIANI, J. LAGNESE, implique aussi des résultats positifs de contrôlabilité exacte interne comme l'a remarqué E. ZUAZUA (cf [22]). La technique est applicable aussi bien pour les membranes (cas $A = -\Delta$) que les plaques vibrantes (cas $A = \Delta^2$) mais seulement pour des ouverts ω assez **gros**. Quand elle est applicable, c'est clairement la meilleure méthode (la plus simple conceptuellement et la plus "stable").

Le cas le plus simple d'application de cette méthode est celui où $\omega = \Omega$, qui intervient aussi parfois (sous la forme de la Proposition 2.2) comme outil technique dans l'étude de cas plus compliqués. On a ainsi

Proposition 2.1. Pour tout A comme dans l'introduction et tout $T > 0$, tout état $[y^0, y^1] \in V \times H$ est L^2 -contrôlable dans Ω au temps T .

Démonstration. Pour tout état $[y^0, y^1] \in V \times H$, soit z la solution de

$$z'' + A z = 0 \quad \text{dans }]0, T[, \quad z \in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; H)$$

telle que $z(0) = y^0$ et $z'(0) = y^1$. Soit $k \in C^2(0, T)$ une fonction telle que

$$(15) \quad k(0) = 1, \quad k'(0) = 0, \quad k(T) = k'(T) = 0.$$

Alors la fonction $w \in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; H)$ définie par

$$(16) \quad w(t,x) = k(t) z(t,x)$$

est solution de

$$(17) \quad w'' + A w = h(t,x) := 2k'(t) z'(t,x) + k''(t) z(t,x) \quad \text{dans }]0,T[,$$

et vérifie évidemment les conditions initiale et finale:

$$(18) \quad w(0) = y^0, \quad w'(0) = y^1, \quad w(T) = w'(T) = 0.$$

En vertu du Théorème 1.2, on peut en déduire la

Proposition 2.2. Pour tout A comme dans l'introduction et tout $T > 0$, il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$(19) \quad \forall [\phi^0, \phi^1] \in V \times H, \quad \|\phi^0\|^2 + \|\phi^1\|^2 \leq C \int_Q \phi'^2(t,x) \, dx \, dt,$$

où ϕ est la solution de l'équation (2) de données initiales (ϕ^0, ϕ^1) et $Q :=]0,T[\times \Omega$.

Démonstration. Le Théorème 1.2 et la Proposition 2.1 entraînent $F = H \times V'$. Alors le Théorème du graphe fermé et l'inclusion topologique de $H \times V'$ dans F entraînent l'équivalence des normes de F et $H \times V'$. En appliquant ce résultat à ϕ' on obtient l'inégalité annoncée.

Plus élaborée est la démonstration du résultat suivant (cf. [22] pour les détails)

Théorème 2.3. (E. ZUAZUA, cf. [22]) . Si $A = -\Delta$ et $V = H^1_0(\Omega)$, tout état $[y^0, y^1] \in V \times H$ est L^2 -contrôlable dans ω au temps T dès que $\omega = \Omega \cap U$ où U est un ouvert de \mathbf{R}^N contenant un ensemble de la forme $\{x \in \partial\Omega, (x - \xi, \nu(x)) \geq 0\}$ pour un certain ξ de \mathbf{R}^N et que T dépasse le diamètre de la plus petite boule de centre ξ contenant Ω .

3. Equation des ondes et Méthodes de Propagation .

Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^N , ω ouvert $\subset \Omega$ et $T > 0$: Pour $[y^0, y^1]$ donnés dans $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on s'intéresse à l'existence d'un contrôle $h = h(t,x)$ tel que $\text{supp}(h) \subset [0, T] \times \omega$ et pour lequel la solution unique solution y du problème

$$(20) \quad y'' - \Delta y = h \text{ dans }]0, T[\times \Omega, \quad y = 0 \text{ sur } [0, T] \times \partial\Omega$$

telle que

$$(21) \quad y(0, x) = y^0(x) \text{ et } y'(0, x) = y^1(x) \text{ dans } \Omega$$

vérifie

$$y(T, x) = y'(T, x) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Il est raisonnable (mais pas obligatoire) d'imposer la condition $h \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. La possibilité de résoudre ce problème de " L^2 - contrôlabilité exacte interne " est liée à la quantité d'informations contenue dans la restriction à $]0, T[\times \omega$ d'une solution quelconque du problème linéaire homogène

$$(22) \quad \phi'' - \Delta \phi = 0 \text{ dans }]0, T[\times \Omega, \quad \phi = 0 \text{ sur } [0, T] \times \partial\Omega$$

En particulier (Proposition 1.1) si le problème a une solution pour tout $[y^0, y^1]$ d'une partie dense de $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$, toute solution de (22) nulle sur $]0, T[\times \omega$ est identiquement nulle. Pour cela il est nécessaire en général, à cause de la **propagation à vitesse finie** dans l'équation des ondes, que T soit **assez grand**. Le résultat d'unicité nécessaire est une conséquence du Théorème d'Holmgren (cf.[10]) et peut aussi se démontrer assez simplement par des estimations locales d'énergie après passage en coordonnées polaires. On obtient alors (avec p définie par (4)) le

Théorème 3.1. (cf.[5]) Soit $\delta(\Omega, \omega) := \text{Sup}_{x \in \Omega} \{ \text{Inf}_{y \in \omega} \{ \text{longueur d'une ligne brisée joignant } x \text{ à } y \text{ dans } \Omega \} \}$. Si $\delta(\Omega, \omega) < +\infty$, alors p est une norme dès que $T > 2\delta(\Omega, \omega)$.

Ce résultat est en un sens optimal, cf. T. CAZENAVE [4].

Le Théorème 1.2 implique que *dès que p est une norme*, la L^2 - contrôlabilité exacte au temps T dans ω a lieu pour tout $[y^0, y^1]$ d'un certain sous-espace dense de $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Il est naturel de se demander si cet espace n'est pas "souvent" égal à $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tout entier. Lorsque $N = 1$ on peut montrer assez simplement le théorème 3.1 par un argument concret de propagation de l'énergie après échange des variables x et t . Cette même méthode permet de montrer aussi le résultat suivant (cf. [5, 7] pour une démonstration détaillée)

Proposition 3.2. Si $N = 1$ et $\Omega =]0, \pi[$, pour tout $T > 2\delta(\Omega, \omega)$, p est une norme sur $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et tout état $[y^0, y^1]$ de $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ est L^2 - contrôlable au temps T dans ω .

Dans le cas $N > 1$, en utilisant les techniques de l'analyse microlocale, C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH [2] ont établi que la L^2 - contrôlabilité exacte au temps T dans ω de tout état $[y^0, y^1]$ de $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ est essentiellement équivalente au fait que tout "rayon" associé à l'équation homogène rencontre la région de contrôle ω en un temps $\leq T$.

En particulier si Ω est un rectangle de \mathbb{R}^2 et ω une "tranche" du rectangle, cette condition n'est jamais vérifiée et il existe donc des états $[y^0, y^1]$ de $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ non L^2 - contrôlables au temps T dans ω . Dans le cas plus difficile où ω est un disque intérieur à Ω , j'ai montré en 1987 le résultat suivant:

Théorème 3.3. Supposons que T est strictement supérieur au diamètre du plus petit disque concentrique à ω et contenant Ω . Alors pour tout $[y^0, y^1] \in H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ on peut trouver un contrôle h très singulier (du type fonctionnelle analytique en x) avec $\text{supp}(h) \subset [0, T] \times \omega$ qui ramène à zéro (dans un espace de fonctionnelles analytiques en x) l'état initial $[y^0, y^1]$ à l'instant T .

Pour l'énoncé précis et la démonstration du théorème 3.3, cf.[6, 7].

Remarque 3.4. Le problème de la détermination effective d'un sous-espace de données L^2 - contrôlables en temps fini dense dans $H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ est en général ouvert et semble très important. Il serait notamment intéressant de savoir si les états dont les deux composantes sont des combinaisons linéaires finies de fonctions propres de $(-\Delta)$ dans $H^1_0(\Omega)$ sont toujours L^2 - contrôlables en temps fini dans ω .

CHAPITRE 2: SERIES LACUNAIRES
ET VIBRATIONS DES POUTRES ET DES PLAQUES .

0.Introduction.

Considérons le problème modèle suivant: Ω est un ouvert borné de \mathbf{R}^N , ω un ouvert $\subset \Omega$ et $T > 0$: Pour $[y^0, y^1]$ donnés dans $(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times L^2(\Omega)$, on s'intéresse à l'existence d'un contrôle $h = h(t, x)$ tel que $\text{supp}(h) \subset [0, T] \times \omega$ et pour lequel la solution unique solution y du problème

$$(1) \quad y'' + \Delta^2 y = h \text{ dans }]0, T[\times \Omega, \quad y = \Delta y = 0 \text{ sur } [0, T] \times \partial\Omega$$

telle que

$$(2) \quad y(0, x) = y^0(x) \text{ et } y'(0, x) = y^1(x) \text{ dans } \Omega$$

vérifie

$$y(T, x) = y'(T, x) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Les méthodes de propagation (cf. Lebeau [19]) montrent essentiellement la L^2 - contrôlabilité exacte de tout $[y^0, y^1] \in (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ en un temps $T > 0$ arbitrairement petit dans les domaines ω où la L^2 - contrôlabilité exacte de tout $[y^0, y^1] \in H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ en un certain temps $T_0 > 0$ avait déjà lieu pour l'équation des membranes vibrantes .

Ce résultat, contrairement au cas des membranes, n'est pas optimal pour tous les ouverts Ω . En particulier si Ω est le carré $]0, \pi[\times]0, \pi[$ de \mathbf{R}^2 et ω une "tranche" de la forme $]0, c[\times]0, \pi[$ avec $c < \pi$, on peut montrer très facilement que si $T = 2\pi$, l'espace F de la méthode HUM est égal à $H \times V'$. En effet les fonctions propres de Δ^2 dans $H^2(\Omega)$ avec les conditions aux limites $u = \Delta u = 0$ sur $\partial\Omega$ sont les fonctions

$$w_{m,n}(x, y) = \sin mx \sin ny$$

et on a

$$\int_{\Omega} w_{m,n}^2(x, y) dx dy = \left(\int_0^{\pi} \sin^2 mx dx \right) \left(\int_0^{\pi} \sin^2 ny dy \right) = \frac{\pi^2}{4} =: c_0 > 0.$$

tandis que

$$\int_{\omega} w_{m,n}^2(x,y) dx dy \geq c_1 > 0 \quad \forall (m,n).$$

La forme générale des solutions de l'équation homogène est

$$v(t,x,y) = \sum_{m,n} v_{m,n} \cos[t(m^2+n^2) + \alpha_{m,n}] w_{m,n}(x,y)$$

Pour des raisons triviales d'orthogonalité on a alors la formule

$$\int_0^{2\pi} \int_{\omega} v^2(t,x,y) dx dt = \pi^2 \sum_{m,n} v_{m,n}^2 \int_{\omega} w_{m,n}^2(x,y) dx dy \geq \pi^2 c_1 \sum_{m,n} v_{m,n}^2,$$

qui implique immédiatement l'équivalence de la semi-norme p et de la norme dans $H \times V'$.

En utilisant des résultats de J. P. KAHANE [14] sur les fonctions pseudo-périodiques (variante d'un certain type de presque-périodicité uniforme pour des fonctions à plusieurs variables), S. JAFFARD a établi le résultat suivant que nous démontrerons au §3.

Théorème 0.1 (S. JAFFARD , cf.[12]) Si on considère le problème (1) avec Ω un rectangle de \mathbf{R}^2 et ω un ouvert non vide quelconque dans Ω , tout état $[y^0, y^1] \in (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ est L^2 -contrôlable dans ω en un temps $T > 0$ arbitrairement petit .

Ce résultat a été généralisé au cas d'un pavé dans \mathbf{R}^N par V. KOMORNIK[18] . Pour comprendre les démonstrations de ces résultats, il est préférable de commencer par le cas plus simple des vibrations des poutres (contrôle interne). On est alors conduit à étudier les bases de Riesz de $L^2(0, T)$ formées de fonctions du type $\exp(i \mu t)$ avec μ réel.

1. Les inégalités d' Ingham.

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction définie par une formule du type (3):

$$(3) \quad f(t) = \sum_n a_n e^{i \mu_n t}$$

où $\{\mu_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ est une suite fixée de nombres réels et $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ est une suite quelconque de nombres complexes, disons avec un nombre fini de termes a_n non nuls pour simplifier. Etant donné un intervalle J de \mathbf{R} on cherche dans quelles conditions la trace de f sur J permet d'évaluer correctement la "taille" de la fonction f . Lorsque $\mu_n = n\lambda$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ et un certain $\lambda > 0$, il est clair que cette propriété a lieu si, et seulement si $|J| \geq 2\pi/\lambda$. Le résultat suivant, obtenu par A.

E.Ingham [6] en 1936, constitue une généralisation simple et puissante de cette remarque.

Théorème 1.1. Soit J un intervalle borné de \mathbf{R} et une constante $\gamma > 0$. Supposons que l'on ait

$$(4) \quad \mu_{n+1} - \mu_n \geq \gamma \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z}.$$

$$(5) \quad |J| > 2\pi/\gamma.$$

Alors il existe des constantes positives c, C telles que pour toute suite $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ de nombres complexes ayant un nombre fini de termes non nuls, on ait les inégalités

$$(6) \quad c \sum_n |a_n|^2 \leq \int_J |f(t)|^2 dt \leq C \sum_n |a_n|^2.$$

Idée de la démonstration. (pour les détails se reporter à A. E.Ingham [6]) Par translation et changement d'échelle, on se ramène au cas où $J = [-\pi, +\pi]$ et $\gamma = 1 + \delta$, $\delta > 0$. Pour toute fonction $k \in L^1(\mathbf{R})$ on introduit la transformée de Fourier K :

$$K(u) = \int_{\mathbf{R}} k(t) e^{i tu} dt, \quad \forall u \in \mathbf{R}.$$

On vérifie immédiatement la formule

$$(7) \quad \int_{\mathbf{R}} k(t) |f(t)|^2 dt = \sum_{m, n} a_m a_n^* K(\mu_n - \mu_m).$$

Pour que la série au deuxième membre de (7) converge bien sous l'hypothèse (4), on recherche $k(t)$ de façon telle que $|K(u)|$ tende vers 0 comme $|u|^{-2}$ pour $|u|$ grand. Une solution simple de ce problème est donnée par

$$(8) \quad k(t) = \cos(t/2) \text{ pour } |t| \leq \pi; \quad k(t) = 0 \text{ pour } |t| > \pi.$$

On obtient alors facilement

$$(9) \quad K(u) = \frac{4 \cos \pi u}{1 - 4u^2}, \quad \forall u \in \mathbf{R}.$$

K est en fait partout définie, paire et *analytique* sur \mathbf{R} avec $K(0) = \text{Max}_{\mathbf{R}} \{ |K(u)| \} = 4$.

Il résulte en particulier de l'hypothèse (4) que l'on a

$$(10) \quad |\mu_m - \mu_n| \geq |m - n| (1 + \delta) > 1 \quad \text{pour tous } (m, n) \in \mathbf{Z} \text{ avec } m \neq n.$$

De (10) on déduit aisément que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la série de terme général $K(\mu_m - \mu_n)$ est absolument convergente, et de (7) on déduit alors par des calculs élémentaires l'encadrement

$$(11) \quad 4\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \sum_n |a_n|^2 \leq \int_{\mathbf{R}} k(t) |f(t)|^2 dt \leq 4\left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \sum_n |a_n|^2.$$

Ceci implique évidemment l'inégalité de gauche dans (6). Pour celle de droite (en un sens plus banale) il suffit de remarquer que la fonction $k(t)$ est minorée sur tout compact de $]-\pi, +\pi[$: on a donc l'inégalité de droite avec J remplacé par un J' arbitraire fortement inclus dans J , et du fait que l'inégalité (5) est **a fortiori** satisfaite on remplace J par un intervalle plus grand, on achève facilement la démonstration.

Remarques 1.2.

1) L'inégalité de droite dans (6) est en fait beaucoup plus robuste que celle de gauche, et grâce à l'invariance par translation en t de l'espace des fonctions f de la forme (3), on voit facilement qu'il y a équivalence logique entre les deux propriétés suivantes:

$$i) \quad \exists \tau > 0, \exists C_0 > 0 \int_0^\tau |f(t)|^2 dt \leq C_0 \sum_n |a_n|^2 \text{ pour tout } f \text{ de la forme (3)}$$

$$ii) \quad \forall T > 0, \exists C(T) > 0 \int_0^T |f(t)|^2 dt \leq C(T) \sum_n |a_n|^2 \text{ pour tout } f \text{ de la forme (3)}$$

Il résulte alors de la démonstration ci-dessus que la propriété ii) (donc l'inégalité de droite dans (6)) est en fait vérifiée dès que $\text{Inf} \{ \mu_{n+1} - \mu_n, n \in \mathbf{Z} \} = \alpha > 0$ sans aucune condition liant $|J|$ et α .

2) On sait que les conditions (4)-(5) sont optimales en un sens très fort pour l'inégalité de gauche dans (6). (Exemple dû également à A. E. Ingham dans le cas où $|J| = 2\pi/\gamma$)

3) Il résulte clairement de (8) et (11) que les constantes positives c et C ne dépendent en fait que du nombre positif $\varepsilon := \gamma|J|/2\pi - 1$.

2. Séries asymptotiquement lacunaires. Application à la poutre.

L'objet principal de ce paragraphe est de démontrer la généralisation suivante du Théorème 1.1, due à J.M. Ball et M. Slemrod [1].

Théorème 2.1. Soit J un intervalle borné de \mathbf{R} et une constante $\gamma > 0$. Supposons que l'on ait

$$(12) \quad \mu_{n+1} - \mu_n \geq \gamma \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z} \text{ tel que } |n| \geq N$$

$$(5) \quad |J| > 2\pi/\gamma.$$

Alors il existe des constantes positives c, C telles que pour toute suite $\{a_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ de nombres complexes ayant un nombre fini de termes non nuls, on ait, avec f défini par (3), les inégalités

$$(6) \quad c \sum_n |a_n|^2 \leq \int_J |f(t)|^2 dt \leq C \sum_n |a_n|^2.$$

Démonstration. L'inégalité de droite est une conséquence immédiate du Théorème 1.1 puisqu'on n'ajoute qu'un nombre fini de fréquences. Démontrons l'inégalité de gauche par *récurrence* sur le nombre p d'indices $n \in \mathbf{Z}$ tels que $\mu_{n+1} - \mu_n < \gamma$. Si $p = 0$, le résultat est donné par le Théorème 1.1.

Supposons donc $p > 0$ avec $\mu_1 - \mu_0 < \gamma$: par l'hypothèse de récurrence le résultat est donc vrai pour les fonctions de la forme

$$g(t) = \sum_{n \neq 0} a_n e^{i\mu_n t}$$

Il est clair d'autre part que l'on peut se ramener au cas où $\mu_0 = 0$ en factorisant $\exp(i\mu_0 t)$ et en remplaçant tous les exposants μ_n par $\mu_n - \mu_0$. Supposons pour fixer les idées que $J = [0, T]$. Fixons $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $T' = T - \varepsilon > 2\pi/\gamma$. On a l'identité

$$(13) \quad f(t+\eta) - f(t) = \sum_{n \neq 0} a_n (e^{i\mu_n \eta} - 1) e^{i\mu_n t} \quad \text{pour tout } \eta \in [0, \varepsilon].$$

En intégrant (13) sur $(0, \varepsilon)$ on obtient la formule

$$(14) \quad \int_0^\varepsilon [f(t+\eta) - f(t)] d\eta = \sum_{n \neq 0} a_n \left[\frac{e^{i\mu_n \varepsilon} - 1}{i\mu_n} - \varepsilon \right] e^{i\mu_n t} \quad \text{pour tout } t \in J'.$$

Du simple fait que $|\mu_n| \geq \rho > 0$, il existe $\delta = \delta(\rho) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on ait l'inégalité

$$(15) \quad |e^{i\mu_n \varepsilon} - 1| = 2 \left| \sin \left(\frac{\mu_n \varepsilon}{2} \right) \right| \leq \varepsilon |\mu_n| (1 - \delta).$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à la fonction $g(t)$ donnée par le second membre de (14) on déduit de (14) et (15) l'estimation

$$(16) \quad \sum_{n \neq 0} |a_n|^2 \leq \frac{1}{c\varepsilon^2\delta^2} \int_{J'} \left| \int_0^\varepsilon [f(t+\eta) - f(t)] d\eta \right|^2 dt.$$

On a d'autre part l'inégalité évidente

$$(17) \quad \int_J \left| \int_0^\varepsilon [f(t+\eta) - f(t)] d\eta \right|^2 dt \leq C_1 \int_J |f(t)|^2 dt$$

En combinant (16) et (17) on obtient

$$(18) \quad \sum_{n \neq 0} |a_n|^2 \leq C_2 \int_J |f(t)|^2 dt.$$

Pour conclure la démonstration il nous suffit d'estimer $|a_0|$. Or on a la formule

$$a_0 - f(t) = - \sum_{n \neq 0} a_n e^{i\mu_n t} =: g_1(t).$$

et d'après l'inégalité de droite dans (6) on en déduit

$$(19) \quad \int_J |a_0 - f(t)|^2 dt = \int_J |g_1(t)|^2 dt \leq C_3 \sum_{n \neq 0} |a_n|^2.$$

De (18) et (19) on déduit

$$(20) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq C_4 \int_J |f(t)|^2 dt.$$

La démonstration est donc achevée par récurrence.

Application à la poutre encastree.

Soit $\Omega =]0, l[$, ω un sous-intervalle de $]0, l[$ et $(y^0, y^1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Alors pour tout $T > 0$ il existe $h \in L^2(]0, T[\times]0, l[)$ à support dans $]0, T[\times \omega$ tel que la solution $y(t, x)$ du problème

$$\begin{aligned} y_{tt} + y_{xxxx} &= h(t, x) \quad \text{dans }]0, T[\times]0, l[\\ y(t, 0) &= y(t, l) = y_x(t, 0) = y_x(t, l) = 0 \quad \text{sur } [0, T] \\ y(0, \cdot) &= y^0, \quad y_t(0, \cdot) = y^1 \end{aligned}$$

vérifie : $y(T, \cdot) = y_t(T, \cdot) = 0$.

Démonstration. On remarque d'abord que si $w(x)$ est une solution de

$$w_{xxxx} = \lambda^4 w \quad \text{dans }]0, l[; \quad w(0) = w(l) = w_x(0) = w_x(l) = 0,$$

alors w est de la forme

$$w(x) = a \cos(\lambda x) + b \sin(\lambda x) + c e^{\lambda x} + d e^{-\lambda x}$$

avec $a = -(c+d)$, $b = d - c$, $c e^{\lambda l} + d e^{-\lambda l} = (c+d) \cos(\lambda l) + (c - d) \sin(\lambda l)$,

en particulier si on fixe $d = 1$ et que l'on fait $\lambda \rightarrow +\infty$, $c(\lambda) e^{\lambda l}$ reste borné, d'où $a(\lambda) \rightarrow -1$, $b(\lambda) \rightarrow 1$

et toujours pour $d = 1$ on obtient avec $w_\lambda(x) = a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x) + c(\lambda) e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}$

$$\int_0^1 |w_\lambda(x)|^2 dx \rightarrow 1 \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow +\infty$$

Pour tout intervalle $J \subset]0, 1[$, le même calcul donne

$$\int_J |w_\lambda(x)|^2 dx \rightarrow |J| \quad \text{lorsque } \lambda \rightarrow +\infty.$$

On introduit alors l'opérateur non borné A sur $H = L^2(\Omega)$ défini par

$$D(A) = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), \quad Au = u_{xxxx} \quad \text{pour } u \in D(A).$$

Les valeurs propres de A sont les nombres $(\lambda_n)^4$, où λ_n est la n ème racine de l'équation $\cos \lambda_n - \lambda_n = 1$. On voit aisément que $\lambda_{n+1}^2 - \lambda_n^2$ est de l'ordre de $2\pi^2 n$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Alors en développant en série de fonctions propres les solutions $v(t, x)$ du problème

$$v_{tt} + v_{xxxx} = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R} \times]0, 1[; \quad v(t, 0) = v(t, 1) = v_x(t, 0) = v_x(t, 1) = 0 \quad \text{sur } \mathbf{R},$$

on obtient grâce aux propriétés ci-dessus des $w_\lambda(x)$ et au Théorème 3 que *pour tout* $T > 0$ il existe une constante $C = C(T)$ telle que

$$\| [v(0), v_t(0)] \|_{H \times V}^2 \leq C \int_0^T \int_\Omega |v(t, x)|^2 dx dt.$$

Remarque 2.2. On a aussi l'inégalité

$$\int_\Omega \{ |v_t(0, x)|^2 + |v_{xx}(0, x)|^2 + |v(0, x)|^2 \} dx \leq C \int_0^T \int_\Omega |v_t(t, x)|^2 dx dt$$

dont on peut déduire (cf [8]) le **résultat de stabilisation** suivant: pour toute fonction continue $a(x) \geq 0$ et non identiquement nulle sur $[0, 1]$ et toute solution $z(t, x)$ du problème

$$z_{tt} + z_{xxxx} + a(x) z_t = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R}^+ \times]0, 1[; \quad z(t, 0) = z(t, 1) = z_x(t, 0) = z_x(t, 1) = 0 \quad \text{sur } \mathbf{R}^+$$

on a:

$$\int_0^1 \{ |z_t(t, x)|^2 + |z_{xx}(t, x)|^2 + |z(t, x)|^2 \} dx \leq C e^{-\delta t},$$

où δ est indépendant de y et C reste borné avec $\int_0^1 \{ |z_t(0, x)|^2 + |z_{xx}(0, x)|^2 + |z(0, x)|^2 \} dx$.

Remarque 2.3. Le théorème 2.1 implique en particulier que si $\liminf_{n \rightarrow \infty} (\mu_{n+1} - \mu_n) > 0$, les inégalités (6) sont vérifiées pour $|J|$ assez grand. Ce dernier résultat est essentiellement optimal. En effet si pour une *sous-suite* α_k de μ_n on a $\lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) = 0$, la suite de fonctions

$$f_k(t) = : e^{i\alpha_{k+1} t} - e^{i\alpha_k t}$$

tend vers 0 dans $L^2(J)$ pour tout intervalle J de \mathbf{R} .

Remarque 2.4. La démonstration du théorème 2.1 montre en fait une propriété plus générale : Si $\{\mu_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ est une suite doublement infinie de nombres réels telle que $\lim_{|n| \rightarrow \infty} |\mu_n| = +\infty$ et si les inégalités (6) sont vérifiées pour un certain T lorsqu'on retire la "fréquence" μ_0 , alors elles sont encore vérifiées pour la suite entière (avec d'autres constantes c et C) pour tout $T' > T$. Il est facile de voir qu'en général, on ne peut pas dans ce contexte prendre $T' = T$. D'autre part en utilisant une généralisation *vectorielle* de cette idée, V. Komornik [15, 16, 17] a donné de nouvelles démonstrations très simples de pratiquement tous les résultats connus de contrôlabilité exacte *en temps optimal* (notamment, C.E. frontière en temps $T > 0$ arbitrairement petit pour les plaques vibrantes).

3. Fonctions pseudo - périodiques et vibrations d'une plaque rectangulaire.

Pour établir le Théorème 0.1, S. JAFFARD a utilisé la généralisation suivante du Théorème 2.1 essentiellement due à J.P. KAHANE:

Soit $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction définie par une formule du type (3 bis):

$$(3bis) \quad f(t) = \sum_n a_n e^{i\mu_n \cdot t}$$

où $\{\mu_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite fixée de vecteurs de \mathbf{R}^N et $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite quelconque de nombres complexes avec un nombre fini de termes a_n non nuls. On a le résultat suivant dont la démonstration se déduit aisément de la Proposition III.1.2. p. 109 et du Théorème III.3.1. p. 111 de J.P. KAHANE [14].

Théorème 3.1. Il existe un nombre $A = A(N) > 0$ tel que la propriété suivante ait lieu. Supposons que l'on ait

$$(21) \quad \|\mu_m - \mu_n\| \geq \gamma > 0 \quad \text{pour tous } (m, n) \text{ différents.}$$

(22) L'ensemble Λ des éléments de la suite $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une réunion finie de sous-ensembles Λ_j tels que l'on ait : $\|\mu - \mu'\| \geq \gamma_j > 0$ pour tous μ, μ' de Λ_j avec $\mu \neq \mu'$.

Alors pour toute boule ω de rayon r avec

$$(23) \quad r > A \sum_j \frac{1}{\gamma_j}$$

il existe des constantes positives c, C telles que pour toute suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes ayant un nombre fini de termes non nuls, on ait, avec f défini par (3bis), les inégalités

$$(6) \quad c \sum_n |a_n|^2 \leq \int_J |f(t)|^2 dt \leq C \sum_n |a_n|^2.$$

Démonstration du Théorème 0.1.

On peut poser $\Omega =]0, \alpha[\times]0, \beta[\subset \mathbb{R}^2$ et la solution générale φ de

$$(24) \quad \varphi'' + \Delta^2 \varphi = 0 \text{ dans }]0, T[\times \Omega, \quad \varphi = \Delta \varphi = 0 \text{ sur } [0, T] \times \partial\Omega$$

est alors donnée par la formule

$$(25) \quad \varphi(X) = \sum_n a_n e^{i \mu_n X}$$

avec $X = (x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, $n = (p, q, \sigma) \in \mathbb{Z}^2 \times \{1, -1\}$, $a = (\pi/\alpha)^2$, $b = (\pi/\beta)^2$ et

$$(26) \quad \mu_n = \mu_{(p, q, \sigma)} = (p\sqrt{a}, q\sqrt{b}, \sigma(ap^2 + bq^2)), \quad \sigma = +1 \text{ ou } -1.$$

On peut bien sûr se contenter d'appliquer le résultat de KAHANE aux sommes finies. Soit donc $\varepsilon > 0$ tel que $\omega \times]0, T[$ contienne une boule de rayon ε dans \mathbb{R}^3 et choisissons un nombre R assez grand pour que $\varepsilon > A(3)/R$ et $aR^2 > R$. Puisque T est arbitraire, on peut également par homothétie supposer $\inf\{a, b\} \geq 1$.

Considérons l'ensemble (fini) E de toutes les paires (k, l) d'entiers **non nuls** tels que

$$\max\{|k|, |l|\} \leq R.$$

On associe à chacune de ces paires la "bande" $B_{k,l}$ des points (p, q) à coordonnées entières telles que

$$(27) \quad |2akp + 2blq| < 2(a+b)R^2$$

On pose

$$(28) \quad F = \bigcup_{(k, l) \in E} B_{k,l} \quad \text{et} \quad G = \text{complémentaire de } F \text{ dans } \Lambda.$$

On va montrer d'abord

$$(29) \quad \|\mu - \mu'\| \geq R \quad \text{pour tous } \mu, \mu' \text{ de } G \text{ avec } \mu \neq \mu'.$$

En effet, posons

$$\mu = \mu_{(p, q, \sigma)} = (p\sqrt{a}, q\sqrt{b}, \sigma(ap^2 + bq^2)), \quad \sigma = +1 \text{ ou } -1.$$

$$\mu' = \mu_{(p', q', \sigma')} = (p'\sqrt{a}, q'\sqrt{b}, \sigma'(ap'^2 + bq'^2)), \quad \sigma' = +1 \text{ ou } -1.$$

Si $\sigma \neq \sigma'$, on a par exemple $\|\mu - \mu'\| \geq ap^2 + bq^2$, et puisque $\mu \in G$ il suffit de remarquer que puisque par exemple $2a|p|R \geq 2(a+b)R^2$, alors $ap^2 + bq^2 \geq aR^2$. On a donc (29) si $\sigma \neq \sigma'$.

Si au contraire $\sigma = \sigma'$, on utilise l'inégalité évidente

$$(30) \quad \|\mu - \mu'\| \geq |(ap^2 + bq^2) - (ap'^2 + bq'^2)|.$$

posant $p' = p+k$ et $q' = q+l$, il est clair (puisque $\inf\{a, b\} \geq 1$) que (29) est satisfait dès que $\max\{|k|, |l|\} > R$. Dans le cas où $\max\{|k|, |l|\} \leq R$, on remarque que

$$|(ap^2 + bq^2) - (ap'^2 + bq'^2)| = |2apk + 2bql + ak^2 + bl^2| \geq |2apk + 2bql| - (a+b)R^2$$

et puisque $\mu \in G$ on a $|2apk + 2bql| \geq 2(a+b)R^2$. Donc (30) implique $\|\mu - \mu'\| \geq (a+b)R^2 \geq aR^2 \geq R$. Ceci achève la démonstration de (29).

La démonstration du Théorème 0.1 s'achève alors assez facilement en deux étapes:

1) On vérifie sans difficulté que la condition (21) est satisfaite (considérer séparément les cas $\sigma \neq \sigma'$ et $\sigma = \sigma'$).

2) Pour chaque paire (k, l) d'entiers non nuls tels que $\max\{|k|, |l|\} \leq R$ et pour chaque $K > 0$, on décompose la "bande" $B_{k,l}$ en la réunion d'une partie finie $F_{k,l}(K)$ et de la partie complémentaire $G_{k,l}(K)$ pour laquelle on a

$$\|\mu - \mu'\| \geq K \text{ pour tous } \mu, \mu' \text{ de } G_{k,l}(K) \text{ avec } \mu \neq \mu'.$$

Ceci est possible du fait que dans $B_{k,l}$, les coordonnées (p, q) satisfont "presque" (en un sens asymptotique à l'infini) une relation linéaire, ce qui nous ramène à des exposants asymptotiquement lacunaires du même type que ceux intervenant dans la poutre.

Il est alors aisé de décomposer Λ en une réunion d'ensembles Λ_j vérifiant la condition (22) avec $\Lambda_1 = G$, les autres Λ_j étant soit des singletons (pour lesquels essentiellement $\gamma_j = +\infty$) soit les éléments d'une famille de $(2R+1)^2$ ensembles pour **chacun desquels** γ_j peut être pris **arbitrairement grand**. On voit alors que la condition (23) est vérifiée avec $r = \varepsilon$ et ceci termine la démonstration.

Remarque 3.2. On a aussi l'inégalité

$$(32) \quad \int_{\Omega} \{ |v_t(0, x)|^2 + |v_{xx}(0, x)|^2 + |v(0, x)|^2 \} dx \leq C \int_0^T \int_{\omega} |v_t(t, x)|^2 dx dt$$

dont on peut déduire (cf [8]) le **résultat de stabilisation** suivant: pour toute fonction continue $a(x, y) \geq 0$ et non identiquement nulle sur Ω et toute solution $z(t, x, y)$ du problème

$$(33) \quad z'' + \Delta^2 z + a z' = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^+ \times \Omega, \quad z = \Delta z = 0 \text{ sur } \mathbf{R}^+ \times \partial\Omega$$

on a:

$$(34) \quad \int_{\Omega} \{ |z'(t, x, y)|^2 + |\Delta z(t, x, y)|^2 + |z(t, x, y)|^2 \} dx \leq C e^{-\delta t},$$

où δ est indépendant de y et C reste borné avec

$$\int_{\Omega} \{ |z'(0, x, y)|^2 + |\Delta z(0, x, y)|^2 + |z(0, x, y)|^2 \} dx .$$

Remarque 3.3. Pour ces propriétés la géométrie du domaine Ω semble jouer un rôle important. Par exemple si l'ouvert Ω est remplacé par une **sphère** (qui n'a pas de bord, donc il n'y a pas ici de condition aux limites!) on peut voir que la "membrane" et la "plaque" sphérique ont les mêmes régions de contrôlabilité interne, comme l'a remarqué V. KOMORNIK (la seule chose qui change de la "membrane" à la "plaque" est ici le temps de contrôle qui peut être pris arbitrairement petit dans le cas de la plaque). Les régions de contrôlabilité interne sont ici celles qui rencontrent tout grand cercle, en particulier une région ouverte contenue dans un hémisphère n'est jamais région de contrôlabilité interne.

CHAPITRE 3: CONTROLE PONCTUEL ET SPECTRAL DE QUELQUES SYSTEMES DISTRIBUES.

Introduction.

Soit Ω un ouvert borné (ou une variété compacte sans bord) de \mathbb{R}^N et A un opérateur auto-adjoint positif dans $H = L^2(\Omega)$ tel que $D(A^{1/2}) \subset C(\Omega)$ avec injection continue.

Etant donnés $T > 0$, $\xi \in \Omega$ et $[y^0, y^1]$ donnés dans $D(A^{1/2}) \times L^2(\Omega)$, on s'intéresse à l'existence d'un **contrôle** $h \in L^2(]0, T[)$ tel que $\text{supp}(h) \subset [0, T]$ et pour lequel la solution généralisée unique y du problème

$$(1) \quad y'' + Ay = h(t) \delta(x - \xi) \text{ dans }]0, T[, \quad y(0, x) = y^0(x) \text{ et } y'(0, x) = y^1(x) \text{ dans } \Omega$$

vérifie $y(T, x) = y'(T, x) = 0$ dans Ω .

Si un tel contrôle h existe, on dira que l'état $[y^0, y^1]$ est "ponctuellement L^2 - contrôlable en ξ au temps T ".

La possibilité de résoudre ce problème de "contrôlabilité exacte en ξ " est liée à la quantité d'informations contenue dans la restriction à $]0, T[$ de $t \mapsto \phi(t, \xi)$ où ϕ est une solution quelconque du problème linéaire homogène

$$(2) \quad \phi'' + A\phi = 0 \quad \text{dans }]0, T[, \quad \phi \in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; H)$$

avec $V = D(A^{1/2})$, $H = L^2(\Omega)$. Plus précisément si tout $[y^0, y^1]$ d'une partie *dense* de $V \times H$ est ponctuellement L^2 - contrôlable en ξ au temps T , toute solution ϕ du problème homogène (2) nulle sur $]0, T[\times S$ est identiquement nulle. **Réciproquement**, si toute solution ϕ du problème homogène (2) telle que $\phi(t, \xi)$ s'annule identiquement sur $]0, T[$ est la solution triviale $\phi \equiv 0$, alors pour tout $(\phi^0, \phi^1) \in V \times H$, on introduit la norme

$$(3) \quad p(\phi^0, \phi^1) = \left\{ \int_0^T \phi^2(t, \xi) dt \right\}^{1/2},$$

où ϕ est la solution de l'équation (2) avec données initiales (ϕ^0, ϕ^1) . Comme au Chapitre 1 on déduit alors de la méthode HUM de J.L.LIONS ([20, 21]) le

Théorème 0.1. Un état donné $[y^0, y^1] \in V \times H$ est ponctuellement L^2 - contrôlable en ξ au temps T si, et seulement s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$(4) \quad \forall (\phi^0, \phi^1) \in V \times H, \quad \left| \int_{\Omega} (\phi^0 y^1 - \phi^1 y^0) dx \right| \leq C p(\phi^0, \phi^1).$$

1. Formules explicites pour la corde vibrante à extrémités fixées.

Considérons donc le cas particulièrement simple du contrôle des oscillations d'une corde vibrante de longueur π à extrémités fixées et posons $\Omega = (0, \pi)$. En l'absence de contrôle, les petites oscillations de la corde sont décrites par l'équation des ondes à une dimension

$$(5) \quad \phi_{tt} - \phi_{xx} = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R} \times \Omega, \quad \phi = 0 \quad \text{sur } \mathbf{R} \times \partial\Omega$$

Ici on a $H = L^2(\Omega)$ et $V = H_0^1(\Omega)$. On va voir comment, même dans ce cas très simple, la notion de **contrôlabilité spectrale** s'introduit assez naturellement à propos du **contrôle ponctuel** des vibrations.

1.1. Contrôle ponctuel et contrôlabilité spectrale .

Désignons par D l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des $\sin mx$, $m \in \mathbf{N}$. On va établir le résultat suivant:

Proposition 1.1. a) Soit $\xi \in \Omega$ fixé avec $\xi/\pi \notin \mathbb{Q}$. Pour tout $T \geq 2\pi$ et tout $(y^0, y^1) \in D \times D$, il existe $h = h(t) \in L^2(0, T)$ telle que $\text{supp}(h) \subset [0, T]$ et tel que l'unique solution y de

$$(6) \quad \begin{array}{ll} y_{tt} - y_{xx} = h(t) \delta_{\xi}(x) & \text{dans } (0, T) \times (0, \pi) \\ y = 0 & \text{sur } [0, T] \times \{0, \pi\} \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{dans } (0, \pi) \\ y_t(0, x) = y^1(x) & \text{dans } (0, \pi) \end{array}$$

vérifie $y(T, \cdot) = y_t(T, \cdot) = 0$.

b) Ce résultat est optimal au sens suivant: pour toute suite $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres > 0 tels que $c_n \rightarrow +\infty$, on peut trouver $\xi \in \Omega$ avec $\xi/\pi \notin \mathbb{Q}$ et $(y^0, y^1) \in V \times H$ tels que

$$(i) \quad \sum_n c_n \left\{ \left(\int_0^{\pi} y^0(x) \sin nx \, dx \right)^2 + \left(\int_0^{\pi} y^1(x) \sin nx \, dx \right)^2 \right\} < +\infty$$

(ii) $\forall T > 0$, il n'existe **aucun** $h \in L^2(0, T)$ tel que $\text{supp}(h) \subset [0, T]$ pour lequel l'unique solution y de (1.2) vérifie $y(T, \cdot) = y_t(T, \cdot) = 0$.

La Proposition 1.1 est une conséquence assez immédiate du résultat plus précis suivant qui se démontre par des calculs élémentaires

Proposition 1.2. Soit $\xi \in \Omega$ fixé avec $\xi/\pi \notin \mathbb{Q}$. On a alors les deux propriétés suivantes

i) l'espace des états (y^0, y^1) de $V \times H$ qui sont contrôlables en ξ au moyen d'un $h = h(t) \in L^2(0, T)$ tel que $\text{supp}(h) \subset [0, T]$ est **indépendant** de $T \geq 2\pi$ et **caractérisé** par la propriété:

$$(7) \quad \sum_m \frac{1}{\sin^2 m\xi} \{m^2 (y_m^0)^2 + (y_m^1)^2\} < +\infty,$$

avec

$$(8) \quad y_m^0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y^0(x) \sin mx \, dx, \quad y_m^1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y^1(x) \sin mx \, dx.$$

ii) Lorsque $T = 2\pi$, un contrôle h associé à tout état initial satisfaisant la condition ci-dessus est donné **explicitement** par la formule

$$(9) \quad h(t) = \sum_m \frac{1}{2 \sin m\xi} (m y_m^0 \sin mt - y_m^1 \cos mt).$$

Il s'agit alors de l'unique $h = h(t) \in L^2(0, 2\pi)$ solution du problème si on impose la condition

$$(10) \quad \int_0^{2\pi} h(t) dt = 0.$$

Démonstration de la Proposition 1.1. Il est clair que a) est un cas particulier du point i) de la Proposition 1.2. Le résultat d'optimalité b) découle aussi aisément du point i) de la Proposition 1.2 et du lemme élémentaire suivant

Lemme 1.3. Soit J un intervalle quelconque et $\{\varepsilon(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels > 0 tendant vers 0. On peut toujours trouver un point ξ de J tel que

- (i) $\xi/\pi \notin \mathbb{Q}$
- (ii) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{|\sin n\xi|}{\varepsilon(n)} \right\} = 0$

Remarque 1.4. Les formules de la Proposition 1.2 permettent de voir que si ξ est un "bon point stratégique", par exemple $|\sin m\xi| \geq C/m^k$, les états suffisamment réguliers sont L^2 -contrôlables. Inversement l'assertion b) de la Proposition 1.1 implique que si ξ est un "très mauvais" point stratégique, il existe des états (y^0, y^1) très réguliers (par exemple **analytiques**) qui ne sont **pas contrôlables** en ξ au moyen d'un $h = h(t) \in L^2(0, T)$ tel que $\text{supp}(h) \subset [0, T]$.

Remarque 1.5 . lorsque $T = 2\pi$ est remplacé par $T = 2N\pi$, il suffit de remplacer le contrôle h par $h_N = h/N$. Ce contrôle est aussi celui fourni par la caractérisation variationnelle associée à la méthode HUM. Lorsque $T \neq 2N\pi$, le contrôle h de la méthode HUM ne semble plus se calculer aisément, et alors je ne sais plus rien de lui concernant, par exemple, sa régularité en fonction des données du problème.

1.2. Une formule explicite pour le contrôle interne.

Soit maintenant ω un ouvert quelconque inclus dans $\Omega = (0, \pi)$ et posons. On sait (cf. par exemple [5], Remark 1.3.3) que pour tout $T \geq 2\pi$ et tout $(y^0, y^1) \in V \times H$, il existe $h = h(t, x) \in L^2((0, T) \times \Omega)$ telle que $\text{supp}(h) \subset [0, T] \times \omega$ et telle que l'unique solution y de

$$(11) \quad \begin{array}{ll} y_{tt} - y_{xx} = h(t, x) & \text{dans } (0, T) \times (0, \pi) \\ y = 0 & \text{sur } [0, T] \times \{0, \pi\} \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{dans } (0, \pi) \\ y_t(0, x) = y^1(x) & \text{dans } (0, \pi) \end{array}$$

vérifie $y(T, \cdot) = y_t(T, \cdot) = 0$.

En adaptant la démonstration de la Proposition 1.2, on établit facilement la

Proposition 1.6. Lorsque $T = 2\pi$, un contrôle $h = h(t, x) \in L^2((0, 2\pi) \times \Omega)$ associé à tout état initial $(y^0, y^1) \in V \times H$ est donné **explicitement** par la formule

$$(12) \quad h(t, x) = \left\{ \sum_m \frac{1}{2\varepsilon_m} (my_m^0 \sin mt - y_m^1 \cos mt) \sin mx \right\} \chi_\omega(x),$$

où (y_m^0, y_m^1) sont donnés par (1.4) et ε_m est défini pour tout m entier positif par

$$(13) \quad \varepsilon_m = \int_\omega \sin^2 mx \, dx.$$

Ce contrôle est aussi celui fourni par la caractérisation variationnelle associée à la méthode HUM.

1.3. Une réalisation possible du contrôle ponctuel.

Dans [22], il avait été remarqué que le problème du contrôle ponctuel des oscillations d'une corde vibrante s'améliore considérablement si on accepte comme contrôle admissible un terme faisant intervenir la **dérivée** de la masse de Dirac en ξ . En fait, comme nous allons le voir maintenant, il est alors même possible de **calculer** un contrôle valable pour tout état initial d'énergie finie.

Proposition 1.7. Soit $\xi \in \Omega$ quelconque. Pour tout $T \geq 2\pi$ et tout $(y^0, y^1) \in V \times H$, il existe une fonction $h = h(t) \in L^2(0, T)$ telle que $\text{supp}(h) \subset [0, T]$ et une fonction $H \in H^1(0, T)$ telles que l'unique solution y de

$$(14) \quad \begin{array}{ll} y_{tt} - y_{xx} = h(t) \delta_\xi(x) + H(t) \partial_x(\delta_\xi(x)) & \text{dans } (0, T) \times (0, \pi) \\ y = 0 & \text{sur } [0, T] \times \{0, \pi\} \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{dans } (0, \pi) \\ y_t(0, x) = y^1(x) & \text{dans } (0, \pi) \end{array}$$

vérifie $y(T, \cdot) = y_t(T, \cdot) = 0$. On peut même choisir $h = H'$ et en particulier h est alors d'intégrale nulle. Lorsque $T = 2\pi$, un contrôle de la forme $h(t) \delta_\xi(x) + H(t) \partial_x(\delta_\xi(x))$ associé à tout état initial $(y^0, y^1) \in V \times H$ est donné explicitement par les formules

$$h(t) = \frac{1}{2} \sum_m \{ [-my_m^0 \cos m\xi - y_m^1 \sin m\xi] \cos mt + [my_m^0 \sin m\xi - y_m^1 \cos m\xi] \sin mt \}.$$

$$H(t) = \frac{1}{2} \sum_m \{ [-y_m^0 \cos m\xi - m^{-1}y_m^1 \sin m\xi] \sin mt + [-y_m^0 \sin m\xi + m^{-1}y_m^1 \cos m\xi] \cos mt \}.$$

Remarque 1.8. Par rapport à l'unique terme $h(t) \delta_\xi(x)$ intervenant dans le problème "classique" de contrôle ponctuel, le terme supplémentaire $H(t) \partial_x(\delta_\xi(x))$ apparaissant dans (14) est plus singulier en x , mais plus régulier en t : il en résulte que la solution de (14) est encore dans la classe $C(0, T; H) \cap C^1(0, T; V)$. Mathématiquement l'addition de ce terme est donc satisfaisante.

2. Contrôlabilité spectrale ponctuelle pour une plaque rectangulaire.

2.1. Un préliminaire sur les sommes d'exponentielles.

Le point de départ est le lemme suivant qui est une simple variante hilbertienne d'un résultat classique d'analyse harmonique (cf. e.g. [23, Theorem 8 p.129].)

Lemme 2.1. Soit $I = (0, T)$ et $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Supposons que les fonctions de la forme

$$(15) \quad f(t) = \sum_{k \in J} f_k e^{i\lambda_k t}, \quad J \text{ partie finie quelconque de } \mathbb{N}$$

ne sont pas denses dans $L^2(I)$. Alors, pour tout entier n il existe une constante C_n telle que

$$(16) \quad |f_n| \leq C_n \left\{ \int_0^T |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad \text{pour toute fonction } f \text{ de la forme (15) avec } n \in J.$$

Démonstration. Si (16) n'est pas vérifiée pour un certain entier n , on peut trouver une suite de fonctions $\{f^p\}$ de la forme (15) telles que $|f_n^p| = 1$ et $\int_I |f^p(x)|^2 dx \rightarrow 0$ lorsque $p \rightarrow +\infty$. La constante 1 est donc limite dans $L^2(I)$ de fonctions g de la forme

$$(17) \quad g(t) = \sum_{k \in J} g_k e^{i\mu_k t}, \quad J \text{ partie finie quelconque de } \mathbb{N} - \{n\}$$

avec: $\mu_k = \lambda_k - \lambda_n$.

En intégrant en t (et en prenant les ε dans le bon ordre!) un nombre arbitrairement grand de fois, on en déduit que les polynômes en t sont également limites dans $L^2(I)$ de fonctions g de la forme (17). Alors par Stone - Weierstrass, les fonctions g de la forme (17) sont denses dans $L^2(I)$, et on en déduit la même chose pour les fonctions de la forme (15).

2.2. Application à un modèle de plaques rectangulaires.

On considère d'abord le problème homogène

$$(18) \quad \phi'' + \Delta^2 \phi = 0 \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega, \quad \phi = \Delta \phi = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega$$

Ω étant un rectangle de la forme $(0, \pi) \times (0, L)$, avec $(L/\pi)^2 \notin \mathbb{Q}$. Désignons par D l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des fonctions propres $\sin mx \sin(n\pi y/L)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. On a le résultat suivant:

Proposition 2.2. a) Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Omega$ fixé avec $\xi_1/\pi \notin \mathbb{Q}$, $\xi_2/L \notin \mathbb{Q}$. Pour tout $T > (1/2)\pi L$ et tout $(\psi^0, \psi^1) \in D \times D$, il existe $h = h(t) \in L^2(0, T)$ telle que $\text{supp}(h) \subset [0, T]$ et tel que l'unique solution ψ de

$$(19) \quad \begin{aligned} \psi_{tt} + \Delta^2 \psi &= h(t) \delta_{\xi}(x, y) && \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ \psi = \Delta \psi &= 0 && \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega \\ \psi(0; x, y) &= \psi^0(x, y) && \text{dans } \Omega \\ \psi_t(0; x, y) &= \psi^1(x) && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

vérifie $\psi(T, \cdot) = \psi_t(T, \cdot) = 0$.

b) Ce résultat est optimal au sens suivant: pour toute suite $\{c_{m,n}\}_{m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}}$ de nombres > 0 , on peut trouver $\xi \in \Omega$ avec $\xi_1/\pi \notin \mathbb{Q}$, $\xi_2/L \notin \mathbb{Q}$ et $(\psi^0, \psi^1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tels que

$$(i) \quad \sum_{m,n} c_{m,n} \left\{ \left(\int_0^{\pi} \psi^0(x, y) \varphi_{m,n}(x, y) dx dy \right)^2 + \left(\int_0^{\pi} \psi^1(x, y) \varphi_{m,n}(x, y) dx dy \right)^2 \right\} < +\infty$$

(ii) Pour tout $T > 0$, il n'existe aucun $h \in L^2(0, T)$ tel que $\text{supp}(h) \subset [0, T]$ pour lequel

l'unique solution ψ de (19) vérifie $\psi(T, \cdot) = \psi_t(T, \cdot) = 0$.

Démonstration.

a) Soit ϕ une solution de (18) tel que $\phi(0)$ et $\phi_t(0)$ soient dans D et écrivons le développement de $\phi(t, \xi)$: on obtient une fonction de la forme (2.1) où les $\lambda_k = \pm \lambda_{m,n}$ sont les valeurs propres de $(-\Delta)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et leurs opposés et les coefficients $f_k = f_{m,n,\pm}$ font intervenir les moments des données initiales multipliés par les réels non nuls $\sin m \xi_1 \sin (n\pi \xi_2 / L)$. On montre alors, en utilisant la théorie de Beurling-Malliavin suivant S. Jaffard [13] que les fonctions de la forme

$$(15) \quad f(t) = \sum_{k \in J} f_k e^{i\lambda_k t}, \quad J \text{ partie finie quelconque de } \mathbf{N}$$

ne sont pas denses dans $L^2(I)$ pour $|I| > (1/2)\pi L$.

Le résultat du lemme nous donne exactement ce qu'il faut pour conclure, puisqu'il implique que toute paire de **combinaisons linéaires finies de fonctions propres** vérifie (4).

b) Même raisonnement que pour les ondes à une dimension, basé sur le Lemme 1.3.

Remarque 2.3. Il serait sans doute intéressant de préciser davantage l'espace des états contrôlables.

Remarque 2.4. Assez curieusement, l'estimation du temps de contrôle spectral ponctuel donnée par la Proposition 2.1 est **optimale**. On a en effet la

Proposition 2.5. Si $T < (1/2)\pi L$, aucune combinaison linéaire finie non nulle de fonctions propres n'est ponctuellement L^2 -contrôlable.

Démonstration. En effet il résulte du calcul de densité de S. Jaffard [13] que même après suppression d'une sous-famille finie arbitraire, les fonctions de la forme (2.1) avec $\lambda_k = \pm \lambda_{m,n}$ sont encore denses dans $L^2(0, T)$ et en particulier on peut alors approcher une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme $\exp(\pm i\lambda_j t)$ par des C.L. des autres fonctions $\exp(\pm i\lambda_j t)$ [En fait ici on peut aussi utiliser le Théorème 13 p.138 de [23] dont la démonstration est plus élémentaire]. On conclut alors facilement.

2.3. Généralisation à certaines plaques "régulières".

En appliquant les mêmes principes que ci - dessus, on peut établir le résultat général suivant.

Théorème 2.6. Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^2 vérifiant la "formule de Weyl", supposons que toutes les valeurs propres de $(-\Delta)$ dans $H^1_0(\Omega)$ soient simples et notons D l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies de fonctions propres. Soit enfin $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Omega$ un point qui ne soit zéro d'aucune fonction propre. Pour tout $T > (1/2)\text{vol}(\Omega)$, $\forall (\psi^0, \psi^1) \in D \times D$, il existe $h = h(t) \in L^2(0, T)$ telle que $\text{supp}(h) \subset [0, T]$ et tel que l'unique solution ψ de

$$\begin{aligned} \psi_{tt} + \Delta^2 \psi &= h(t) \delta_\xi(x, y) && \text{dans }]0, T[\times \Omega, \\ \psi = \Delta \psi &= 0 && \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega \\ \psi(0; x, y) &= \psi^0(x, y) && \text{dans } \Omega \\ \psi_t(0; x, y) &= \psi^1(x) && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

vérifie $\psi(T, \cdot) = \psi_t(T, \cdot) = 0$.

Ce résultat est optimal: plus précisément si $T < (1/2)\text{vol}(\Omega)$, aucune combinaison linéaire finie non nulle de fonctions propres n'est ponctuellement L^2 -contrôlable.

Démonstration. Elle est analogue à celle de la proposition 2.2 et résulte du calcul effectué par S. Jaffard [13] pour un ouvert borné quelconque de \mathbf{R}^2 vérifiant la "formule de Weyl".

3. Un critère de contrôlabilité spectrale interne.

Soit Ω un ouvert borné (ou une variété compacte sans bord) de \mathbf{R}^N et A un opérateur auto-adjoint positif à résolvante compacte dans $H = L^2(\Omega)$. On note $\{\lambda_j\}_{1 \leq j \leq +\infty}$ la suite croissante (c'est - à - dire sans tenir compte de la multiplicité) des valeurs propres de A et on pose pour tout j

$$F_j = \{ u \in L^2(\Omega), Au = \lambda_j u \}$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 3.1. On suppose que A a les propriétés suivantes

- 1) Pour tout j, les conditions: $u \in F_j$ et $u = 0$ sur un ouvert non vide impliquent $u = 0$.
- 2) Il existe $T_0 > 0$ fini pour lequel les fonctions de la forme

$$\sum_{j \in J} \{ u_j e^{i\sqrt{\lambda_j} t} + v_j e^{-i\sqrt{\lambda_j} t} \}, \quad J \text{ partie finie de } \mathbb{N} - \{0\}$$

où les u_j et v_j sont des coefficients complexes **ne sont pas denses** dans $L^2(0, T_0; \mathbb{C})$.

Désignons par D l'espace vectoriel engendré par les fonctions propres de A. Alors pour tout $T > T_0$, et pour tout $(y^0, y^1) \in D \times D$, il existe $h \in D((0, T) \times \Omega)$ tel que $\text{supp}(h) \subset (0, T) \times \omega$ et pour lequel l'unique solution y de

$$(20) \quad \begin{array}{ll} y'' + A y = h(t, x) & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ y(0, x) = y^0(x) & \text{dans } \Omega \\ y'(0, x) = y^1(x) & \text{dans } \Omega \end{array}$$

vérifie $y(T, \cdot) = y'(T, \cdot) = 0$.

En particulier, dans le cas des plaques vibrantes on obtient:

Corollaire 3.2. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 vérifiant la "formule de Weyl", et notons par D l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des fonctions propres de $(-\Delta)$ dans $H^1_0(\Omega)$. Pour tout $T > (1/2)\text{vol}(\Omega)$, $\forall \omega$ ouvert non vide inclus dans Ω , et pour tous $(\psi^0, \psi^1) \in D \times D$, il existe $h \in D((0, T) \times \Omega)$ tel que $\text{supp}(h) \subset (0, T) \times \omega$ et pour lequel l'unique solution ψ de

$$(21) \quad \begin{array}{ll} \psi_{tt} + \Delta^2 \psi = h(t, x, y) & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ \psi = \Delta \psi = 0 & \text{sur } [0, T] \times \partial\Omega \\ \psi(0; x, y) = \psi^0(x, y) & \text{dans } \Omega \\ \psi_t(0; x, y) = \psi^1(x, y) & \text{dans } \Omega \end{array}$$

vérifie $\psi(T, \cdot) = \psi_t(T, \cdot) = 0$.

Démonstration. Il est clair que la propriété 1) est satisfaite. Il suffit donc de démontrer que 2) est vérifiée pour tout $T_0 > (1/2)\text{vol}(\Omega)$. Ceci a été établi par S. Jaffard [13] dans le cas où les valeurs

propres sont **simples** et Ω vérifie la "formule de Weyl", mais on peut vérifier (par exemple en introduisant des "valeurs propres" supplémentaires toutes différentes pour tenir compte de la multiplicité, ce qui rétablit la bonne densité de Beurling - Malliavin) que le résultat reste valable **sans hypothèse de simplicité** des valeurs propres. Le reste est clair.

Remarque 3.3. Dans le cas du rectangle, S. Jaffard [12] a établi le résultat, en un sens plus fort, de contrôlabilité exacte interne de **tout état d'énergie finie**, et ceci pour tout $T > 0$. Cependant ce résultat ne semble pas donner immédiatement l'existence d'un contrôle C^∞ pour les états à un nombre fini d'harmoniques.

Cette théorie s'applique également au cas où l'ouvert Ω est remplacé par une variété compacte sans bord. On obtient par exemple le résultat suivant **valable en toute dimension $N \geq 1$** .

Corollaire 3.4. Soit Σ la sphère unité de \mathbb{R}^N , et notons par $(-\Delta_\Sigma)$ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Σ et D l'espace vectoriel des combinaisons linéaires finies des fonctions propres de $(-\Delta_\Sigma)$. Pour tout $T > 0$, $\forall \omega$ ouvert non vide inclus dans Ω , et pour tous $(\psi^0, \psi^1) \in D \times D$, il existe $h \in D((0, T) \times \Sigma)$ tel que $\text{supp}(h) \subset (0, T) \times \omega$ et pour lequel l'unique solution ψ de

$$(22) \quad \begin{array}{ll} \psi_{tt} + \Delta_\Sigma^2 \psi = h(t, \sigma) & \text{dans } (0, T) \times \Sigma, \\ \psi(0; \sigma) = \psi^0(\sigma) & \text{sur } \Sigma \\ \psi_t(0; \sigma) = \psi^1(\sigma) & \text{sur } \Sigma \end{array}$$

vérifie $\psi(T, \cdot) = \psi_t(T, \cdot) = 0$.

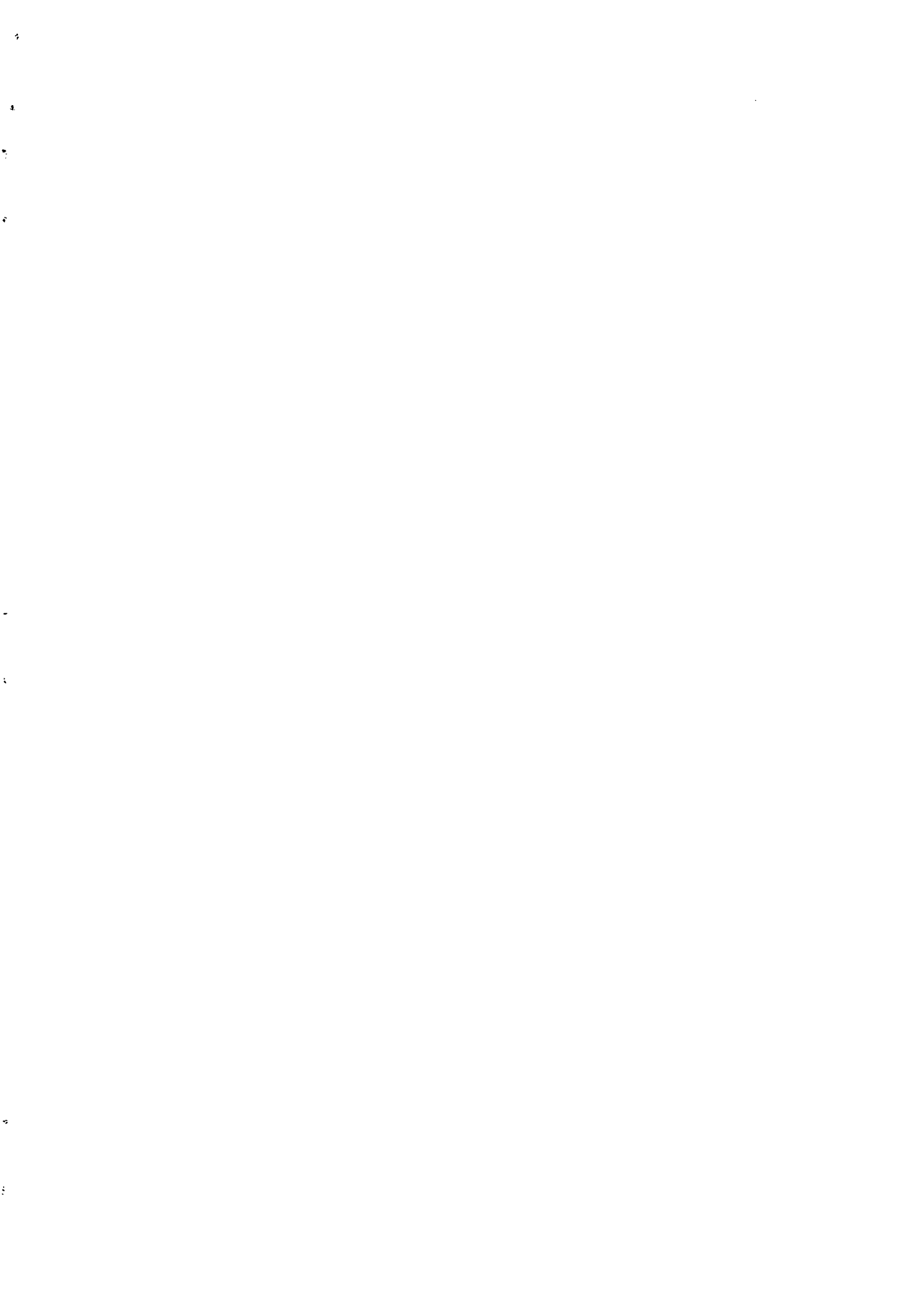
Démonstration. Il est clair que la propriété 1) est satisfaite. La propriété 2) est une conséquence assez immédiate du fait que les inverses des valeurs propres positives de $(-\Delta_\Sigma)$ sont sommables. (cf. e.g. [23], Theorem 15 p.139.)

Remarque 3.5. Il est assez raisonnable de conjecturer que la contrôlabilité spectrale interne pour l'équation des plaques est possible pour les domaines généraux de dimension 2 et **pour tout $T > 0$** . L'étude de cette conjecture et de problèmes du même type fera l'objet de travaux ultérieurs.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.M.BALL et M.SLEMROD , Nonharmonic Fourier Series and the Stabilization of Distributed Semi-linear Control Systems, *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1979), 555-587.
- [2] C. BARDOS, G. LEBEAU et J. RAUCH, Un exemple d'utilisation des notions de propagation pour le contrôle et la stabilisation des problèmes hyperboliques, workshop on "nonlinear hyperbolic equations in applied science", Turin , juin 1987, à paraître aux Rend. del Seminario di Pisa.
- [3] A. BEURLING & P. MALLIAVIN, On the closure of characters and the zeros of entire functions, *Acta Math.* **118** (1967), 79-93.
- [4] T. CAZENAVE, On the propagation of confined waves along the geodesics, *J. Math. Anal. Appl.*, à paraître.
- [5] A. HARAUX, On a completion problem in the theory of distributed control of wave equations, à paraître dans "Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Seminar, 1988", H.BREZIS and J.L.LIONS Editors, Pitman Research Note in Mathematics.
- [6] A. HARAUX, Contrôlabilité exacte d'une membrane rectangulaire au moyen d'une fonctionnelle analytique localisée, *C.R.A.S. Paris*, t.306, Série I (1988), 125 -128.
- [7] A. HARAUX, A generalized internal control for the wave equation in a rectangle, *J. Math. Anal. Appl.*, à paraître.
- [8] A. HARAUX, Une remarque sur la Stabilisation de certains systèmes du deuxième ordre en temps, *Portugaliae Mathematica* **46**, 3 (1989), 245 - 258.
- [9] A. HARAUX, Quelques propriétés des séries lacunaires utiles dans l'étude des vibrations élastiques, à paraître dans "Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, Collège de France Seminar, 1988", H.BREZIS and J.L.LIONS Editors, Pitman Research Note in Mathematics.
- [10] L. HORMANDER, Linear partial differential operators, Springer - Verlag (1976).
- [11] A.E. INGHAM, Some trigonometrical inequalities with applications in the theory of series, *Math. Z.* **41** (1936), 367-369.

- [12] S. JAFFARD, Contrôle interne des vibrations d'une plaque rectangulaire, à paraître dans *Portugaliae Mathematica*.
- [13] S. JAFFARD, Sur le contrôle ponctuel des vibrations , à paraître.
- [14] J.P. KAHANE, Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires , *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* 79 (1962), 93 - 150.
- [15] V. KOMORNIK, Une méthode générale pour la contrôlabilité exacte en temps minimal, *C.R.A.S. Paris*, t.307, Série I (1988), 397- 401.
- [16] V. KOMORNIK, Contrôlabilité exacte en temps minimal de quelques modèles de plaques, *C.R.A.S. Paris*, t.307, Série I (1988), 471- 474.
- [17] V. KOMORNIK, A new method of exact controllability in short time and applications, à paraître dans *Ann. Fac. Sci. Toulouse* .
- [18] V. KOMORNIK, On the exact interior controllability of a Petrovski system, Preprint L.A. 226, n°8907 (1989).
- [19] G. LEBEAU, Contrôle dans l'équation de Schrodinger, à paraître.
- [20] J.L. LIONS. Contrôlabilité exacte des systèmes distribués. Note aux C. R. Acad. Sci. Paris, t. 302, Série I, n° 13, 1986.
- [21] J.L. LIONS, Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, The John. von Neumann Lecture, *SIAM review* 30 (1988), 1 - 68 .
- [22] J.L. LIONS, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, Tome 1, Collection "Recherches en Mathématiques appliquées" sous la Direction de P.G. CIARLET et J.L. LIONS , n° 8, Masson, Paris (1988).
- [23] ROBERT M. YOUNG, An introduction to Nonharmonic Fourier Series, dans "Pure and Applied Mathematics", (S. Eilenberg & H. Bass Editors) Academic Press (1980).



ISSN 0249 - 6399