



**HAL**  
open science

## Animation contrôlée par la dynamique -Etat de l'art-

Georges Dumont, Marie-Paule Gascuel, Anne Verroust

► **To cite this version:**

Georges Dumont, Marie-Paule Gascuel, Anne Verroust. Animation contrôlée par la dynamique -Etat de l'art-. [Rapport de recherche] RR-1405, INRIA. 1991. inria-00075155

**HAL Id: inria-00075155**

**<https://inria.hal.science/inria-00075155v1>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# IRIA

UNITE DE RECHERCHE  
IRIA-RENNES

## Rapports de Recherche

N° 1405

*Programme 4*  
*Robotique, Image et Vision*

### ANIMATION CONTROLÉE PAR LA DYNAMIQUE -ETAT DE L'ART-

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
TEL (1) 39 63 55 11

Georges DUMONT  
Marie-Paule GASCUEL  
Anne VERROUST

Avril 1991



\* RR - 1485 \*



Campus Universitaire de Beaulieu  
35042 - RENNES CEDEX  
FRANCE  
Téléphone : 99.36.20.00  
Télex : UNIRISA 950 473F  
Télécopie : 99.38.38.32

## Animation contrôlée par la dynamique -Etat de l'art-

Georges DUMONT  
*INRIA*<sup>1</sup> / *IRISA*<sup>2</sup>

*Campus de Beaulieu*  
*35042 Rennes Cédex*  
*France*

Marie-Paule GASCUEL  
Anne VERROUST  
*LIENS*<sup>3</sup>

*45 rue d'Ulm*  
*75230 Paris Cédex 05*  
*France*

Publication Interne n° 571 - Février 1991 - 84 pages

Programme 4

<sup>1</sup>Institut National de Recherche en Informatique et Automatique.

<sup>2</sup>Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires.

<sup>3</sup>Laboratoire d'Informatique de l'École Normale Supérieure.

Dynamics for Animation Control  
-State of the art-

Georges DUMONT  
*INRIA*<sup>1</sup> / *IRISA*<sup>2</sup>

*Campus de Beaulieu*  
*35042 Rennes Cédex*  
*France*

Marie-Paule GASCUEL  
Anne VERROUST  
*LIENS*<sup>3</sup>

*45 rue d'Ulm*  
*75230 Paris Cédex 05*  
*France*

<sup>1</sup>Institut National de Recherche en Informatique et Automatique.

<sup>2</sup>Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires.

<sup>3</sup>Laboratoire d'Informatique de l'École Normale Supérieure.

## Résumé

L'un des objectifs principaux de l'animation par ordinateur est de fournir un système permettant de décrire et de contrôler aisément le mouvement et les déformations d'objets mobiles dans une scène. La difficulté, en utilisant des modèles descriptifs de mouvement, pour produire des animations proches de la réalité physique a conduit au développement de modèles générateurs de mouvements. Le travail important réalisé dans ce domaine au cours de ces quelques années, nous a motivé dans une présentation que nous avons voulue la plus exhaustive possible des travaux traitant de ce sujet. Cette présentation bibliographique est décomposée en trois parties : les deux premières traitent respectivement de l'animation des solides rigides et de celle des solides déformables. Dans ces deux parties, nous soulevons le problème du contrôle du mouvement qui se pose de manière immédiate lorsque l'on s'intéresse à l'utilisation de modèles générateurs. Les objets physiques sont essentiellement capables d'interactions mutuelles ou avec leur environnement : c'est ce que nous présentons en troisième point. Nous sommes conscients que cette étude demande des prérequis dans le domaine de la mécanique. Pour cette raison, nous proposons de commencer cet état de l'art en présentant une vision unifiée des lois de la mécanique des solides, c'est-à-dire aussi bien rigides que déformables que nous étendons sous le même formalisme à l'étude des chocs. En conclusion, nous essayons, à partir de l'étude bibliographique, de dégager des lignes de recherche non encore totalement explorées.

## Abstract

One of the main goals of computer animation is to define a system which provides an efficient motion and deformation control of objects into a scene. Classical animation techniques lead to a powerful motion control but are difficult to use when one wants to get physical realism. Many authors have proposed to introduce physically-based animation models that we describe in this report. This bibliography is split into three parts : the first two concern respectively the animation of rigid body systems and of deformable body systems. In these parts, we present the motion control problem which becomes natural with such models. The third part will focus its interest on the physical object inherent capability of interaction with the environment. As mechanical notions are necessary to understand this bibliography, we propose an unified study of the mechanical formalism for rigid and deformable objects and present, under the same formalism, the collision /interaction problem between such objects. To conclude we discuss the open problems in the field.

# Introduction

« Lorsque plusieurs objets, différents les uns des autres par leur forme ou leur position, se présentent devant l'œil successivement à de très brefs intervalles de temps, leurs impressions successives sur la rétine s'unissent de telle sorte que le spectateur a l'illusion de voir le même objet changer de forme et de position suivant un mouvement continu. »

Joseph Plateau (1801-1883)

L'un des objectifs principaux de l'animation par ordinateur est de fournir un système permettant de décrire et de contrôler aisément le mouvement et les déformations d'objets mobiles (acteurs) au sein d'un décor (objets fixes). Les techniques de génération et de contrôle de mouvement peuvent être regroupées en deux grandes classes :

**les modèles descriptifs** (modélisation des effets) : ils imposent de décrire explicitement les effets à reproduire (contrôle en position et vitesse des mouvements ou des déformations). Cette description des effets peut être très fastidieuse et la difficulté de mise en œuvre de telles techniques ne réside pas tant dans la conception de l'outil, que dans l'utilisation de celui-ci.

**les modèles générateurs** (modélisation des causes) : ce sont les modèles qui décrivent les causes produisant les effets (lois de la physique) [Luc85]. C'est en fait une description comportementale des mouvements possibles sous formes de lois. La génération et le contrôle du mouvement sont réalisés en agissant directement sur les modèles (en leur appliquant des forces par exemple).

Si les modèles descriptifs offrent la possibilité de décrire finement les mouvements, ils trouvent rapidement leurs limites dès que le nombre de paramètres à gérer simultanément devient très important ou que l'on souhaite que les objets présentent un comportement conforme à la réalité et interagissent avec leur environnement. Le recours aux modèles générateurs pallie en partie les carences des méthodes descriptives.

Nous nous proposons de faire le point sur l'utilisation de tels modèles dans le domaine de l'animation, aussi bien dans leur fondement théorique que dans leur mise en œuvre, présentée sous forme d'une étude bibliographique.

Nous décrivons dans une première partie les éléments de mécanique des solides indispensables pour concevoir des modèles générateurs basés sur la dynamique. Le chapitre 1, écrit sous le jour du principe des travaux virtuels, donne les principales notions de mécanique pour

les solides rigides et déformables. Le cas de systèmes soumis à des chocs est envisagé. Nous abordons dans le chapitre 2 des méthodes de calcul ou des choix de mise en œuvre qui peuvent être utilisées pour résoudre les équations données par la dynamique : calcul symbolique, modèles discrets ou continus en ce qui concerne les objets déformables.

Nous étudions en seconde partie les méthodes qui ont été proposées pour animer des objets rigides articulés : les premières approches, purement simulatives, ont peu à peu évolué vers des techniques offrant un meilleur contrôle des trajectoires, par l'intégration de la « dynamique inversée », ou grâce à des méthodes d'optimisation. Nous décrivons les méthodes de traitement des collisions et des contacts entre plusieurs objets rigides articulés, ou entre un objet rigide articulé et une paroi fixe.

La troisième partie décrit les modèles existants pour l'animation dynamique d'objets déformables. Comme nous le verrons au chapitre 6, certaines méthodes, basées sur les équations dynamiques des milieux continus, évoluent vers des formulations hybrides permettant de diversifier les matériaux simulés. Parallèlement, nous assistons au développement de systèmes d'animation modulaires, qui jouent sur plusieurs niveaux de structures mécaniques simples imbriquées. L'intégration de techniques d'optimisation dans tous ces modèles permet d'imposer aux objets déformables différentes contraintes de comportement. Les solutions proposées pour le traitement des interactions entre objets déformables sont regroupées dans le chapitre 7.

Enfin, nous dégageons en conclusion les points à développer pour améliorer le traitement automatique des interactions entre objets, ainsi que le contrôle d'une animation dynamique.

## Partie I

# Mécanique des solides comme modèle de synthèse du mouvement

# Chapitre 1

## Notions de mécanique des solides

### 1.1 Introduction

Nous allons ici présenter la théorie mécanique qui s'applique à des systèmes paramétrés par un nombre fini de paramètres, c'est-à-dire typiquement aux systèmes de solides rigides. Nous présenterons ensuite celle qui s'applique dans le cas des milieux déformables. Pour finir, nous essaierons d'aborder les notions nécessaires à la compréhension des phénomènes de chocs.

S'il est relativement simple d'appréhender les concepts dans le cadre d'un système de solides rigides, par essence paramétré par un nombre fini de paramètres, ceci l'est moins pour un système matériel continu général. Nous reprenons ici le formalisme mécanique [Bam81a, Ger86a] basé sur le principe des travaux virtuels et l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange <sup>1</sup>. La théorie de la mécanique de solides déformables [Bam81b, Bam81c, Ger86a, Ger86b] paraît bien adaptée à la présentation cohérente de la notion de déformation : elle sera également présentée sous le jour du principe des travaux virtuels. Pour finir nous aborderons la notion de choc.

### 1.2 Mécanique des solides rigides

#### 1.2.1 Paramétrage et liaisons

**Définition** : *Le paramétrage d'un système de solides est défini quand, un repère ayant été choisi, on associe une famille  $q$  de réels à toute position de ce système. A deux positions différentes doivent correspondre deux familles différentes (injection dans l'ensemble des paramètres). Nous nous intéressons dans la suite à un ensemble fini de solides rigides : la famille de paramètres sera alors choisie comme  $q = (q^i)_{i=1,n}$ . Dans l'espace, un système de  $n$  solides pourra être paramétré par une famille de  $6 \cdot n$  paramètres : chaque solide possédant au plus six degrés de liberté (3 de translation et 3 de rotation).*

**Définition** : *Une liaison est une entrave limitant les possibilités de mouvement entre les solides du système. Elle résulte d'un contact entre ces solides et est caractérisée par sa nature*

---

<sup>1</sup>dans [Dum87, Arn88, Dum90] on pourra trouver les rappels de ces notions ainsi que des méthodes d'intégration dans un système d'animation

géométrique et sa nature physique. Elle se traduit par une dépendance entre les paramètres du système. Notons que, dans la suite de l'exposé, le mot liaison désignera la modélisation mécanique associée à cette liaison (les liaisons ne sont évidemment pas rigoureusement réalisées dans les systèmes réels).

De manière générale une liaison s'exprime par une relation du type :

$$f_i(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (\text{pour } i \text{ de } 1 \text{ à } p) \quad \text{qui est dite bilatérale}$$

ou

$$f_i(q, \dot{q}, t) \geq 0 \quad (\text{pour } i \text{ de } 1 \text{ à } p) \quad \text{qui est dite unilatérale}$$

$p$  est alors le nombre de degrés de liaison, terme qui sera confondu avec celui de liaison quand il n'existera pas d'ambiguïté.

**Définition** : Une liaison dépendant des vitesses est dite non holonome, une liaison ne dépendant pas des vitesses est dite holonome.

**Définition** : Soit un système paramétré par  $q = (q^1, \dots, q^n)$  et astreint à  $p$  ( $p \leq n$ ) liaisons holonomes  $f_j(q) = 0$  ( $j = 1$  à  $p$ ). Ces équations sont supposées indépendantes et régulières (i.e : l'application  $q \mapsto f(q)$  de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est supposée de rang  $p$  donc maximum). Nous pouvons alors exprimer les  $n$  paramètres ( $q^i$ ) à l'aide de  $n - p$  nouveaux paramètres ( $q'^j$ ) : c'est la réduction du paramétrage.

Il n'est pas possible d'appliquer la réduction du paramétrage à l'aide de liaisons non holonomes, sinon la position du système serait caractérisée par des paramètres de position et des paramètres de vitesse.

### 1.2.2 Énergie cinétique

Considérons un solide en mouvement. Son champ de vitesse est un torseur défini à tout instant par ses éléments de réduction en un point  $A$  quelconque lié au solide. Soit  $\vec{V}(A)$  et  $\vec{\Omega}$  ces éléments. La vitesse de tout point  $M$  lié au solide s'exprime alors par :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(A) + \vec{\Omega} \wedge A\vec{M}.$$

Calculons l'énergie cinétique de ce solide :

$$C = \frac{1}{2} \cdot \int_S \vec{V}^2(M) dm = \frac{1}{2} \cdot \int_S [\vec{V}^2(A) + 2 \cdot \vec{V}(A) \cdot (\vec{\Omega} \wedge A\vec{M}) + (\vec{\Omega} \wedge A\vec{M})^2] dm$$

qui conduit naturellement à la notion de tenseur d'inertie en un point :

$$I_{ij(A)} = \int_S (g_{ij} AM^2 - x_i x_j) dm.$$

Si le point  $A$  est confondu avec  $G$  (centre de masse du solide), nous obtenons le deuxième théorème de Kœnig.

**Théorème** : *L'énergie cinétique d'un solide est la somme de l'énergie cinétique de translation du centre d'inertie et de l'énergie cinétique de rotation autour du centre d'inertie.*

Ceci se traduit par la formule :

$$C = \frac{1}{2} m [\vec{V}(G)]^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot I_{(G)} \cdot \vec{\Omega}.$$

### 1.2.3 Actions

**Définition** : *Une énergie est un scalaire homogène, du point de vue dimensionnel, à  $[M][L]^2[T]^{-2}$  où  $M, L, T$  désignent respectivement la masse, la longueur et le temps.*

Une énergie mécanique est mise en jeu dans un mouvement macroscopique : elle est fonction des déplacements des particules. Nous introduisons alors un champ  $\vec{\Phi}$  qui schématise les efforts relatifs à l'énergie considérée. Nous postulons qu'à toute sollicitation mettant en jeu l'énergie mécanique  $\mathcal{W}$  dans l'évolution d'un système (S) entre  $t_1$  et  $t_2$  nous pouvons associer à tout instant  $t$  une partie matérielle  $A$ , un champ de vecteurs  $\vec{\Phi}$  sur  $A$  et une mesure  $\mu$  tels que :

$$\mathcal{W} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_A \vec{\Phi}(t) \cdot \vec{V}(t) d\mu.$$

$\vec{\Phi}(t)$  est alors appelé champ d'action associé à la sollicitation en cause et  $\mathcal{W}$  le travail du champ  $\vec{\Phi}$  dans le mouvement.

### 1.2.4 Mouvements virtuels et actions généralisées

#### Mouvements virtuels

**Définition** : *Un mouvement virtuel à un instant  $t$  est défini en associant à toute valeur d'un paramètre réel  $u$  une position de chaque particule  $\Pi$  du système. On suppose qu'à la valeur  $u = 0$  correspond la position réelle du système à  $t$ . On appelle taux de déplacement virtuel le champ de déplacement des vecteurs tangents aux trajectoires virtuelles des particules en  $u = 0$ . Nous noterons  $\delta\vec{M}$  ce champ de vecteurs, il est décrit par :*

$$\delta\vec{M} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \Big|_{u=0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \overline{M_{(0)} M_{(u)}}.$$

Notons que cette définition ne tient pas compte de la possibilité d'effectuer ce mouvement virtuel. **Un mouvement réel est un mouvement virtuel particulier** ; il est associé au champ de vitesse du système.

#### Actions généralisées

Soit (S) un système de solides indéformables paramétré par  $q$ . Le champ de déplacement virtuel défini à  $t$  par :

$$\delta\vec{M} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q^i} (q, t) \delta q^i$$

respecte l'indéformabilité du système. Le travail virtuel du champ d'action  $\vec{\Phi}$  dans ce mouvement virtuel s'écrit :

$$\delta\mathcal{W} = \int_S \vec{\Phi} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q^i}(q, t) \delta q^i dm.$$

Nous définissons alors l'action généralisée du champ  $\vec{\Phi}$  relative au paramètre  $q^i$  par :

$$\Gamma_i(\vec{\Phi}) = \int_S \vec{\Phi} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial q^i} dm.$$

Lorsque cette composante  $\Gamma_i$  est relative à un paramètre de translation elle est appelée « force », lorsque elle est relative à un paramètre de rotation elle est appelée « couple ».

### 1.2.5 Principe des travaux virtuels

**Principe des travaux virtuels** : *Il existe au moins un référentiel galiléen, dans lequel, pour tout déplacement virtuel d'un système (S) quelconque et à tout instant, la somme des travaux virtuels s'exerçant sur (S) est nulle. Ceci s'écrit :*

$$\delta\mathcal{W}_d + \delta\mathcal{W}_l + \delta\mathcal{W}_j = 0$$

En notant :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}_d & \text{ travail des actions données} \\ \delta\mathcal{W}_l & \text{ travail des actions de liaison} \\ \delta\mathcal{W}_j & \text{ travail des actions d'inertie} \end{aligned}$$

Nous l'écrivons également pour un système paramétré par  $n$  paramètres :

$$Q_i + L_i + J_i = 0 \quad \text{pour } i \text{ de } 1 \text{ à } n$$

- les  $Q_i$  représentent les actions généralisées données relatives à  $q^i$ ,
- les  $L_i$  représentent les actions généralisées de liaison relatives à  $q^i$ ,
- les  $J_i$  représentent les actions généralisées d'inertie relatives à  $q^i$ .

### 1.2.6 Problème du mouvement

**Remarque** : *Il n'est pas toujours possible de résoudre un problème de mécanique uniquement par les considérations développées jusqu'à maintenant : il peut en effet être nécessaire de connaître les lois de « comportement » des liaisons mises en jeu pour obtenir un système d'équations soluble.*

Il est nécessaire, en préambule, de définir le terme de déplacement virtuel licite (ou compatible).

**Définition** : *Un déplacement virtuel est licite avec une liaison s'il respecte cette liaison telle qu'elle existe à l'instant  $t$ .*

**Remarque** : *Si les liaisons sont toutes indépendantes du temps, le champ de déplacements réels est un mouvement virtuel licite.*

**Définition** : *Une liaison est dite parfaite si, dans tout déplacement virtuel licite avec cette liaison, le travail virtuel de l'action de liaison mis en jeu est nul.*

### 1.2.7 Écriture finale des équations

Considérons un système de solides paramétré par  $q = (q^1, \dots, q^n)$ . Les formules de Lagrange qui expriment le calcul des actions d'inertie en fonction de l'énergie cinétique, nous donnent :

$$\mathcal{J}_i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{q}^i}\right) + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q^i} \quad \text{pour } i \text{ de } 1 \text{ à } n$$

où  $\mathcal{C}$  est l'énergie cinétique calculée comme indiqué précédemment.

Les équations du mouvement s'écrivent donc :

$$\mathcal{Q}_i + \mathcal{L}_i + \mathcal{J}_i = 0 \quad \text{pour } i \text{ de } 1 \text{ à } n$$

soit

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{q}^i}\right) + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q^i} + \mathcal{Q}_i + \mathcal{L}_i = 0 \quad \text{pour } i \text{ de } 1 \text{ à } n.$$

Supposons le système soumis à des liaisons toutes parfaites et indépendantes, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} f_h(q, t) &= 0 && p \text{ liaisons holonomes,} \\ g_l(q, \dot{q}, t) &= 0 && p' \text{ liaisons non holonomes.} \end{aligned}$$

Pour tout déplacement virtuel licite, nous avons le système d'équations :

$$\begin{cases} (\mathcal{Q}_i + \mathcal{J}_i) \delta q^i = 0 & \text{pour } i \text{ de } 1 \text{ à } n \\ \frac{\partial f_h}{\partial q^i} \delta q^i = 0 & \text{pour } h \text{ de } 1 \text{ à } p \\ \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i = 0 & \text{pour } l \text{ de } 1 \text{ à } p' \end{cases}$$

Il découle alors du théorème des multiplicateurs de Lagrange, qu'il existe  $p$  fonctions scalaires  $\lambda^h$  et  $p'$  fonctions scalaires  $\mu^l$  telles que :

$$\mathcal{Q}_i + \mathcal{J}_i + \sum_{h=0,p} \lambda^h \frac{\partial f_h}{\partial q^i} + \sum_{l=0,p'} \mu^l \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}^i} = 0$$

Nous avons donc  $n + p + p'$  équations pour  $n$  inconnues  $q^i$ , plus  $p$  inconnues  $\lambda^h$ , plus  $p'$  inconnues  $\mu^l$ . Il y a alors autant d'équations que d'inconnues.

De plus, sous certaines hypothèses de régularité des actions données et des actions de liaison, le théorème de Cauchy sur les équations différentielles nous assure l'existence et l'unicité de la solution du système précédent si l'on connaît les positions et les vitesses initiales. Le problème ainsi posé est alors soluble.

### 1.2.8 Introduction des méthodes de pénalisation

Résoudre le système des équations du mouvement consiste à rendre stationnaire la fonctionnelle « énergie ». Pour prendre en compte les liaisons (holonomes et non holonomes), nous avons été amenés à introduire les multiplicateurs de Lagrange associés, qui sont  $p + p'$  nouvelles variables. Le recours à des méthodes de pénalisation [Zie79, Dum86] permet de traiter

ces liaisons sans introduire d'inconnues supplémentaires, ce qui constitue un gain appréciable de temps de résolution.

Considérons le problème de la recherche de la stationnarité de la fonctionnelle « énergie »  $\mathcal{E}$  en présence d'une liaison  $\mathcal{L}$ . Le produit  $\mathcal{L}^2$  est un scalaire positif ou nul. Il s'annule lorsque la liaison est satisfaite et dans ce cas, sa variation est nulle, c'est-à-dire :

$$\delta(\mathcal{L}^2) = 0$$

Nous formons alors la nouvelle fonctionnelle :

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E} + \alpha \mathcal{L}^2$$

dans laquelle nous introduisons un « nombre de pénalisation »  $\alpha$ . En imposant la stationnarité de cette fonctionnelle, on obtient la solution liée. Pour que  $\mathcal{E}$  elle-même atteigne son extremum, il est nécessaire que  $\alpha$  soit un nombre positif. La solution obtenue en écrivant la stationnarité de la fonctionnelle  $\mathcal{E}_p$  ne satisfera que de manière approchée les liaisons, mais les respectera d'autant mieux que  $\alpha$  sera grand. On peut montrer qu'elles sont satisfaites exactement quand  $\alpha \rightarrow +\infty$ .

Considérons les équations du mouvement déjà présentées et supposons que nous avons toujours les mêmes liaisons. Nous avons donc :

$$\begin{cases} Q_i + \mathcal{L}_i + \mathcal{J}_i = 0 & \text{pour } i \text{ de } 1 \text{ à } n \\ f_h(q, t) = 0 \\ g_l(q, \dot{q}, t) = 0 \end{cases}$$

En appliquant le traitement par fonction de pénalisation le système devient :

$$Q_i + \mathcal{J}_i + \alpha \sum_{h=0,p} \frac{\partial f_h}{\partial q^i} f_h + \alpha \sum_{l=0,p'} \frac{\partial g_l}{\partial \dot{q}^i} g_l = 0 \quad \text{pour } i \text{ de } 1 \text{ à } n$$

$\alpha$  est le nombre de pénalisation introduit précédemment. Le nombre d'équations est  $n$ , ce système, d'un ordre inférieur à celui obtenu par la méthode des multiplicateurs de Lagrange sera donc résolu plus rapidement. Notons également un autre avantage de cette méthode. Supposons que nous ayons des équations de liaison linéairement dépendantes. L'utilisation des multiplicateurs conduira à un système d'équations singulier. Il faudra alors, pour pouvoir résoudre, mettre en œuvre un algorithme de détection des dépendances. En utilisant la méthode de pénalisation, ceci n'est pas nécessaire : en effet, introduire des liaisons dépendantes revient à changer la constante  $\alpha$ . Par exemple, si l'on considère deux fois la même liaison, cela revient à multiplier  $\alpha$  par deux.

## 1.3 Mécanique des solides déformables

### 1.3.1 Notion de déformation

L'idée de déformation est associée, de manière intuitive, à celle de variation de distance entre particules : si on considère un milieu plan, un réseau initial à mailles carrées se transforme,

après déformation, en un réseau curviligne. Si, lors de la déformation les droites restent droites (cas particulier), la déformation est homogène, soit identique en tout point. Le cas général où le réseau après déformation est curviligne se ramène localement à ce cas particulier (ceci explique l'utilisation de dérivées par la suite).

Nous introduirons la notion de déformation par l'intermédiaire des déformations d'applications linéaires, elle sera étendue au cas général des transformations quelconques en considérant les applications linéaires tangentes à de telles transformations en tout point. La déformation sera caractérisée par le tenseur de déformation, qui présente l'avantage d'être de définition simple. De plus sa nature tensorielle caractérise intrinsèquement la déformation.

### Déformation d'une application linéaire

Soit  $l$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même. L'application qui à tout couple de vecteurs  $(\vec{V}, \vec{W})$  associe le réel  $\varepsilon(\vec{V}, \vec{W}) = \frac{1}{2}[l(\vec{V}) \cdot l(\vec{W}) - \vec{V} \cdot \vec{W}]$  est bilinéaire et symétrique. Par définition,  $l$  est une isométrie  $\iff (\forall \vec{V}, \forall \vec{W}, \varepsilon(\vec{V}, \vec{W}) = 0)$ .

Pour  $l$ ,  $\varepsilon$  traduit l'écart à une isométrie, ceci nous conduit naturellement à poser :

**Définition** : Soit  $l$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même. Le tenseur euclidien symétrique  $\varepsilon$  défini par la forme bilinéaire :

$$(\vec{V}, \vec{W}) \longrightarrow \varepsilon(\vec{V}, \vec{W}) = \frac{1}{2}[l(\vec{V}) \cdot l(\vec{W}) - \vec{V} \cdot \vec{W}]$$

est appelé tenseur de déformation de l'application  $l$ .

### Déformation d'une application quelconque

Soit  $f$  une application d'un ouvert  $D_0$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ . Notons  $x = f(a)$ . L'application  $f$  représente la transformation d'un ensemble matériel continu, nous la supposons donc respecter la continuité de la matière (ni déchirure, ni dislocation), c'est-à-dire que nous la supposons de classe  $C^1$  et inversible ( $f$  difféomorphisme de classe  $C^1$ ). Son déterminant étant de signe constant et initialement égal à 1, il sera supposé strictement positif. Nous étudions la déformation localement en un point en posant :

**Définition** : On appelle tenseur de déformation de Green-Lagrange de  $f$  au point  $a$  de  $D_0$  le tenseur de déformation de l'application linéaire  $\bar{f}_a$  tangente à  $f$  en  $a$ , défini par :

$$\forall \vec{V}, \forall \vec{W} \in \mathbb{R}^n, \varepsilon_a(\vec{V}, \vec{W}) = \frac{1}{2}[\bar{f}_a(\vec{V}) \cdot \bar{f}_a(\vec{W}) - \vec{V} \cdot \vec{W}]. \quad (1.1)$$

Le champ de déformation de  $f$  est le champ de tenseurs  $a \longrightarrow \varepsilon_a$

Nous vérifions aisément que si le tenseur ainsi défini est nul en tout point, alors  $f$  est une isométrie : ce qui correspond bien à l'idée intuitive de déformation.

## Calcul du tenseur de déformation

Nous allons ici poser la formule du calcul de la déformation en coordonnées cartésiennes en fonction du déplacement. Soit  $x = f(a)$ , notons  $x = a + \vec{\xi}(a)$ .  $\vec{\xi}(a)$  est appelé déplacement au point  $a$ . Nous avons alors  $\vec{f} = 1 + D\xi$  soit encore,  $\forall \vec{V} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{f}_a(\vec{V}) = \vec{V} + D_{\vec{V}}\vec{\xi}$  où  $D_{\vec{V}}$  est l'opérateur de dérivation par rapport à  $\vec{V}$  défini par :

$$D_{\vec{V}}A(m) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [A(m + h\vec{V}) - A(m)].$$

En utilisant la définition précédente, nous écrivons :

$$\forall \vec{V}, \forall \vec{W} \in \mathbb{R}^n, \varepsilon(\vec{V}, \vec{W}) = \frac{1}{2} [D_{\vec{V}}\vec{\xi} \cdot \vec{W} + D_{\vec{W}}\vec{\xi} \cdot \vec{V} + D_{\vec{V}}\vec{\xi} \cdot D_{\vec{W}}\vec{\xi}].$$

En utilisant la convention d'Einstein de sommation des indices répétés et en notant  $\partial_i \vec{\xi}$  au lieu de  $\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial a^i}$ , nous obtenons en termes de composantes et en coordonnées cartésiennes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i + \partial_i \xi^k \cdot \partial_j \xi_k].$$

### 1.3.2 Principe des travaux virtuels. Notion de contrainte

Nous allons définir le principe des travaux virtuels qui nous permettra d'introduire la notion de tenseur des contraintes par une approche énergétique.

**Rappel :** Nous postulons (voir en 1.2.3 page 6) qu'à toute sollicitation mettant en jeu l'énergie mécanique  $\mathcal{W}$  dans l'évolution d'un système  $(\Sigma)$  occupant le volume  $D$  entre  $t_1$  et  $t_2$ , nous pouvons associer à tout instant  $t$  un champ de vecteurs  $\vec{\Phi}$  sur  $\Sigma$  et une mesure  $m$  tels que :

$$\mathcal{W} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma} \vec{\Phi}(t) \cdot \vec{V}(t) dm.$$

$\vec{\Phi}(t)$  est alors appelé champ d'actions associé à la sollicitation en cause et  $\mathcal{W}$  le travail du champ  $\vec{\Phi}$  dans le mouvement [Bam81a, Dum87].

Nous introduisons le (taux de) travail virtuel à un instant  $t$  du champ  $\vec{\Phi}$  dans un déplacement virtuel  $\delta \vec{\xi}$  par :

$$\delta \mathcal{W} = \int_{\Sigma} \vec{\Phi}(t) \cdot \delta \vec{\xi}(t) dm.$$

### Travail de déformation

Le travail de déformation est l'énergie mise en jeu dans les déplacements entre particules du milieu. Nous le noterons  $\mathcal{W}_{def}$  et définirons le travail des actions intérieures comme son opposé  $\mathcal{W}_i = -\mathcal{W}_{def}$ . Pour les milieux déformables, à la différence des milieux rigides, nous voulons introduire des champs de déplacements virtuels qui ne respectent pas la rigidité des

solides, nous faisons intervenir ce déplacement virtuel par le (taux du) tenseur de déformation virtuelle, noté  $\delta e$  qui s'exprime en fonction du déplacement :

$$\forall \vec{V}, \forall \vec{W} \in \mathbb{R}^n, \delta e(\vec{V}, \vec{W}) = [D_{\vec{V}} \delta \vec{\xi} \cdot \vec{W} + D_{\vec{W}} \delta \vec{\xi} \cdot \vec{V}].$$

Soit en termes de composantes et en coordonnées cartésiennes :

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \delta \xi_i}{\partial a^j} + \frac{\partial \delta \xi_j}{\partial a^i} \right].$$

Soit en notant  $\partial_i \vec{\xi}$  au lieu de  $\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial a^i}$  :

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2} [\partial_i \delta \xi_j + \partial_j \delta \xi_i].$$

**Définition** : Nous postulons qu'il existe en tout point de  $\Sigma$  un tenseur  $T$  d'ordre deux symétrique, le tenseur des contraintes, tel que :

$$\delta \mathcal{W}_{def} = \int_D T \cdot \delta e \, dV.$$

L'hypothèse de symétrie de ce tenseur est naturelle compte tenu de la symétrie du tenseur  $\delta e$ .

### Travail des actions d'inertie

Le champ des actions d'inertie est le champ  $-\rho \vec{\gamma}$  où  $\rho$  est la densité et  $\vec{\gamma}$  est l'accélération.  $\rho$  dépend en général du temps par l'équation de continuité (de conservation de la masse) :

$$m = \int_D \rho(x, t) \, dV \text{ est une constante.}$$

### Travail des actions extérieures

Soit un solide déformable  $D$ , de frontière  $\partial D$  et de normale extérieure  $\vec{\alpha}$ . Les actions extérieures à distance (volumiques) sont caractérisées par un champ de vecteurs  $\vec{F}$  (c'est le cas de la gravité), les actions extérieures de contact par un champ  $\vec{\Phi}$ . Leurs travaux virtuels respectifs s'expriment par :

$$\int_D \vec{F} \cdot \delta \vec{\xi} \, dV \text{ et } \int_{\partial D} \vec{\Phi} \cdot \delta \vec{\xi} \, dS.$$

### Application du principe des travaux virtuels

Nous allons appliquer le principe des travaux virtuels à notre système matériel ( $\Sigma$ ), occupant à l'instant  $t$  le domaine  $D$  de surface  $\partial D$ , sous la forme :

$$\delta \mathcal{W}_i + \delta \mathcal{W}_e + \delta \mathcal{W}_j = 0.$$

En notant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta \mathcal{W}_i & \text{le travail des actions intérieures} \quad \delta \mathcal{W}_i = - \int_D T \cdot \delta e \, dV \\ \delta \mathcal{W}_e & \text{le travail des actions extérieures} \quad \delta \mathcal{W}_e = \int_D \vec{F} \cdot \delta \vec{\xi} \, dV + \int_{\partial D} \vec{\Phi} \cdot \delta \vec{\xi} \, dS \\ \delta \mathcal{W}_j & \text{le travail des actions d'inertie} \quad \delta \mathcal{W}_j = - \int_D \rho \vec{\gamma} \, dV \end{array} \right.$$

Nous obtenons l'équation :

$$- \int_D T \cdot \delta e \, dV - \int_D \rho(\vec{\gamma} - \vec{F}) \cdot \delta \vec{\xi} \, dV + \int_{\partial D} \vec{\Phi} \cdot \delta \vec{\xi} \, dS = 0.$$

Nous la transformons pour obtenir les équations du mouvement et les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(T) + \rho(\vec{F} - \vec{\gamma}) = 0 & \text{qui forment les équations indéfinies du mouvement et} \\ T \cdot \vec{\alpha} = \vec{\Phi} & \text{qui forment les conditions aux limites.} \end{array} \right.$$

Ces équations sont l'expression des lois de la mécanique des milieux continus, elles sont vérifiées en tout point.

### 1.3.3 Problème du mouvement. Lois de comportement

#### De la nécessité de définir des lois de comportement

Soit un milieu continu déformable soumis à des actions à distance  $\vec{F}$  et à des actions de contact  $\vec{\Phi}$ . Nous voulons résoudre le problème du mouvement, soit déterminer les dix inconnues :

- le déplacement  $\vec{\xi}$
- les contraintes  $T$
- la densité  $\rho$

Les équations indéfinies et l'équation de continuité (conservation de la masse) donnent quatre équations. Il faut donc déterminer (par l'expérience) les six équations du comportement qui relient les déformations aux contraintes. Ceci se comprend aisément : les équations de la mécanique sont universelles et s'appliquent à tous les systèmes indépendamment de leurs matériaux constitutifs. Les lois de comportement caractérisent, elles, le comportement propre de ces matériaux, soit leur réponse à des actions données.

#### Cas de l'élasticité linéaire isotrope

Nous avons choisi le cas de l'élasticité linéaire isotrope pour présenter l'introduction des lois de comportement, qui, nous l'avons montré, est nécessaire pour la résolution du problème. Une étude thermodynamique basée sur la caractérisation d'un système par ses variables d'état intérieures et l'utilisation des deux principes fondamentaux de la thermodynamique (ce qui ne sera pas décrit ici, comme sortant de notre cadre), nous amène à poser pour des évolutions

isothermes à partir d'un état naturel pour un solide linéairement élastique la relation entre les contraintes et les déformations sous la forme :

$$\sigma = \lambda \cdot \varepsilon \quad \text{connue sous le nom de loi de Hooke généralisée.}$$

C'est-à-dire, en terme de composantes :

$$\sigma^{ij} = \lambda^{ijkl} \varepsilon_{kl}.$$

Dans le cas isotrope, qui correspond au cas le plus fréquent, où la matière présente les mêmes propriétés dans toutes les directions et homogène, c'est-à-dire que le tenseur d'ordre quatre  $\lambda^{ijkl}$  ne dépend pas du point choisi, le tenseur  $\lambda^{ijkl}$  ne dépend que des deux coefficients de Lamé, notés  $\lambda$  et  $\mu$ . Ceci nous donne alors, en notant  $Tr$  l'opérateur trace :

$$\sigma = \lambda Tr(\varepsilon)g + 2\mu\varepsilon. \quad (1.2)$$

L'inversion de cette loi de comportement nous permet d'exprimer  $\sigma$  en fonction de  $\varepsilon$  en introduisant le module d'élasticité ou module d'Young  $E$  (1807)<sup>2</sup> et le coefficient de Poisson  $\nu$  (1829) :

$$\varepsilon = \frac{1 + \nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} Tr(\sigma)g. \quad (1.3)$$

La stabilité de l'état naturel du matériau est associée au caractère défini positif de la forme quadratique des déformations. Ceci impose des restrictions sur les coefficients précédemment définis :

$$E > 0, \quad \text{et} \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

## 1.4 Systèmes soumis à des chocs

### 1.4.1 Introduction

Les interactions sous forme de choc (ou de contact : choc avec liaison persistante) sont un des points clé pour la réalisation d'animations (ou de simulations) réalistes. En effet, quand l'utilisateur déplace des objets dans un environnement, il souhaite non seulement que ceux-ci ne s'interpénètrent pas, mais aussi qu'une véritable réaction à l'environnement soit induite. Nous allons formaliser l'étude des chocs en utilisant le principe des travaux virtuels. Cette approche permet de traiter de manière réaliste les contacts entre objets rigides : en effet, le choc est un phénomène qui se produit à une position (valeur de l'ensemble des paramètres du système) figée. Par application de la dualité, on sait que la force de répulsion ne peut être fixée *a priori* mais doit être calculée en fonction de la position, de la vitesse, de l'accélération des objets, ainsi que de la nature des objets en contact. Nous pensons que l'approche, qui consiste à traiter les chocs par des ressorts fictifs ou des potentiels de répulsion localisés au voisinage de la frontière des objets, ne donne pas des résultats réalistes dans le cas d'objets rigides. Toutefois, si l'un des deux objets en contact est déformable, des potentiels de répulsion correctement choisis, donneront des résultats cohérents (bien que sans réelle signification physique), du fait de la possibilité de déformation.

---

<sup>2</sup>En fait introduit par Euler en 1766

### 1.4.2 Théorie : écriture des équations

Notons tout d'abord que l'étude d'un phénomène de choc se fait à un temps  $t_0$  déterminé, les  $q_i$  restent fixés et seules se produisent des discontinuités de vitesse, que nous noterons  $\Delta \dot{q}^i$ . Il s'agit donc ici de schématiser des phénomènes mécaniques se produisant pendant une durée très courte.

**Définition** : Lors des chocs, d'une durée infiniment courte entrent en jeu des forces infiniment grandes, leur intégration sur la durée du choc conduit à un torseur appelé torseur des percussions, on notera  $\delta \mathcal{W}_p = \mathcal{P}_i \delta q^i$  leur travail virtuel. Les forces qui restent bornées au cours du choc (par exemple : les forces de pesanteur) n'engendrent aucune percussion.

**Principe des travaux virtuels** : Il existe un référentiel galiléen dans lequel, pour tout déplacement virtuel d'un système (S) subissant un choc à l'instant  $t_0$ , la somme des travaux virtuels des sauts de quantité de mouvement, des travaux virtuels des efforts de percussion et des travaux virtuels des actions de liaison est nulle.

Lors d'un choc  $\delta \mathcal{W}_j$  s'écrit :

$$\delta \mathcal{W}_j = -\Delta \left( \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i$$

La notation  $\Delta$  signifiant :

$$\Delta \left( \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{q}^i} \right) = \left( \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{q}^i} \right)_{t^+} - \left( \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{q}^i} \right)_{t^-} \quad \text{variation de la quantité de mouvement}$$

entre  $t - \tau$  et  $t + \tau$  où  $2\tau$  est la durée du choc.

Ecrivons alors le principe des travaux virtuels :

$$-\Delta \left( \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{q}^i} \right) + \mathcal{P}_i + \mathcal{L}_i = 0$$

Pratiquement les  $\mathcal{P}_i$  seront mises en jeu uniquement au niveau des points de contact (le contact est supposé ponctuel).

Admettons qu'une liaison (holonome) de contact  $f_1$  (persistante ou non) se crée lors du choc entre un objet et un obstacle extérieur  $\Sigma$ , on écrira les équations de Lagrange sous la forme :

$$-\Delta \left( \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \dot{q}^i} \right) + \mathcal{P}_i + \underbrace{\mathcal{L}_i}_{\text{liaisons autres que } f_1} + \lambda \frac{\partial f_1}{\partial q^i} = 0$$

Auxquelles il faut ajouter l'équation de liaison (si  $f_1$  est persistante après le choc) :

$$\frac{df_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial q^i} \dot{q}_+^i + \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$$

Si  $f_1$  est persistante l'état des vitesses ( $\dot{q}_+^i$ ) après le choc est déterminé. Dans le cas général, il n'en est pas ainsi et l'état des vitesses après le choc est indéterminé. Il est nécessaire

d'adjoindre une loi de comportement du choc. Si  $f_1 = 0$  est une liaison de choc, c'est-à-dire si avant et après le choc on a  $f_1 > 0$ . On peut alors noter que :

$$\left(\frac{df_1}{dt}\right)_- \quad \text{et} \quad \left(\frac{df_1}{dt}\right)_+$$

sont proportionnelles aux valeurs de la composante normale de la vitesse du point cinétique qui vient en contact avec l'obstacle extérieur  $\Sigma$  à l'instant du choc, soit  $(V_n)_-$  et  $(V_n)_+$  ; en effet, la condition  $\frac{df_1}{dt} = 0$  précise que cette composante normale de la vitesse est nulle. L'expérience nous suggère de poser la loi complémentaire suivante :

$$(V_n)_+ = -e(V_n)_-$$

où  $e$  est appelé coefficient de restitution (utilisé, par exemple par Barraff dans [Bar90])  $0 \leq e \leq 1$  : si  $e = 0$  le choc est dit mou, si  $e = 1$  il est dit élastique. Ce coefficient ne dépend que de la nature physique des objets au voisinage des points de contact. La nécessité d'une telle relation traduit le fait qu'un objet rigide idéal n'existe pas. Si cette approximation suffit généralement, elle ne permet pas de modéliser les interactions fortes qui existent lors d'un choc.

Nous pouvons donc écrire la relation :

$$\left(\frac{df_1}{dt}\right)_+ = -e\left(\frac{df_1}{dt}\right)_-$$

qui, jointe aux relations déjà écrites, permet de résoudre le système d'équations et de calculer l'état des vitesses après le choc.

## Chapitre 2

# Outils et modèles de calcul

### 2.1 Introduction

Nous allons ici essayer d'introduire des notions aussi bien calculatoires que de modélisation pour le calcul qui répondent aux problèmes que l'on ne manque pas de rencontrer pour résoudre les équations de la mécanique. Le « calcul formel » se prête bien à une mise en œuvre informatique de ces lois. Nous mentionnerons ensuite les modèles « continus » ainsi que les modèles « discrets » de calculs pour les déformations. Les modèles « continus » désigneront les modèles qui permettent de discrétiser en vue du calcul le modèle mécanique continu associé. Les modèles « discrets » désigneront les modèles discrétisés *a priori* qui, du point de vue calculatoire, auront un comportement analogue à celui des modèles mécaniques.

### 2.2 Calcul symbolique

Le calcul symbolique qui, par essence, traite des expressions formelles est bien adapté à la formalisation des lois de la mécanique : en utilisant un tel outil, la mise en œuvre du principe des travaux virtuels s'effectue de façon naturelle par application des différentes étapes de construction des équations du mouvement décrites dans le chapitre précédent.

En calcul scientifique, on est amené à effectuer des opérations de dérivation. Dans le cas de calculs basés sur un formalisme mécanique, apparaissent de manière naturelle des dérivations soit par rapport au temps, soit par rapport aux variables. La dérivation numérique est un processus délicat du fait de la représentation des nombres à virgule flottante en machine. En effet, supposons que l'on ait à dériver la fonction sinus par rapport à son argument. Sous forme numérique, on obtient classiquement :

$$\frac{d \sin(x)}{dx} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \quad \text{avec } h \text{ petit}$$

On doit alors choisir  $h$  pour que le résultat de ce calcul soit correctement représenté en machine, soit pas trop petit, mais suffisamment petit pour que cette expression représente la dérivée cherchée.

Sous forme symbolique, cette dérivée est exacte (pour peu que la fonction soit dérivable) et est représenté par :

$$\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x)$$

La précision des calculs numériques (lors de l'évaluation de l'arbre, par exemple) ne sera donc pas affectée par la présence de dérivations préalables.

Le calcul symbolique permet également de simplifier les expressions. Par exemple, lors de la construction des équations, les opérations inutiles ne seront pas conservées : les multiplications par 0 ou par 1 seront effectuées une fois pour toute, les identités remarquables sur les lignes trigonométriques ( $\sin^2 + \cos^2$ , par exemple) seront prise en compte. Cette propriété est très intéressante pour l'écriture d'équations se rapportant à des systèmes mécaniques : en effet, les coordonnées des différents constituants d'une chaîne s'expriment par des produits successifs de matrices de passages, les simplifications implicites effectuées par le calcul symbolique évitent les propagations de termes inutiles. De plus, il est possible d'effectuer une passe de simplification des expressions après leur construction pour une efficacité accrue. La programmation de telles fonctionnalités sous une forme numérique demanderait un développement beaucoup plus complexe.

Un troisième point penche en faveur d'une programmation symbolique : lorsque les outils de base pour la manipulation des expressions symboliques sont disponibles (noyau du code), les développements de programmes s'effectuent simplement. Ceux-ci sont lisibles et leur mise au point s'en trouve facilitée. Les spécifications d'interfaces interactives pour l'animation en bénéficieront de manière importante.

Par contre, le calcul symbolique possède un inconvénient majeur. Il nécessite une place mémoire importante et conduit souvent à des temps de calcul prohibitifs. Dans [DAH90, Dum90], est proposée une structure de données qui réduit ces inconvénients.

## 2.3 Modèles continus

« L'esprit humain a des limites telles qu'il ne peut englober en une seule opération le comportement des systèmes complexes qui l'entourent. C'est pourquoi, l'ingénieur, le scientifique et même l'économiste adoptent la démarche naturelle de subdiviser tous les systèmes en leurs composants élémentaires - ou éléments - dont le comportement peut être facilement compris. On peut alors étudier le système original en le reconstruisant à partir de ses constituants ». (Zienkiewicz, La Méthode des Eléments finis [Zie79]).

Cette méthode des éléments finis, très utilisée dans le domaine de la simulation scientifique, effectue ses premiers pas dans le domaine de l'image de synthèse. J. P. Gourret en a proposé une application intéressante qui fait le lien entre les deux domaines dans [GTT89a, GTT89b]. D. Terzopoulos, dans [TPBF87], a proposé une méthode basée sur l'utilisation des différences finies, qui n'en n'est pas trop éloignée. Notons pour finir, que la synthèse d'image trouve une partie de ses sources dans l'intersection de disciplines dont la simulation et la Conception Assistée par Ordinateur et que des démonstrations éléments finis apparaissent dans les bibliothèques de démonstration des machines actuelles.

La méthode des **éléments finis** [Zie77, TD84, MOD86] consiste à diviser le milieu continu par des surfaces imaginaires en éléments : c'est la discrétisation (ou maillage) du milieu. Les éléments ainsi obtenus sont reliés entre eux en un nombre fini de nœuds situés sur leurs frontières. Les déplacements de ces nœuds sont les inconnues du problème. Des fonctions d'interpolation sont définies, elles seront choisies pour permettre de calculer de manière unique le champ des déplacements à l'intérieur d'un élément en fonction des déplacements des nœuds et par suite les déformations à l'intérieur de l'élément qui sont fonction des déplacements. Les contraintes seront alors calculées en utilisant la loi de comportement du matériau qui relie les déformations aux contraintes. Ceci permet d'exprimer l'énergie de déformation des éléments. Les contributions des forces extérieures seront ramenées au niveau des nœuds du maillage. Ceci conduit à un système d'équations qu'il faut résoudre [Mar82].

La méthode des **différences finies** (spatiales) consiste également à diviser le milieu continu en un ensemble de nœuds et d'arêtes. Les dérivées spatiales, que l'on doit calculer pour résoudre les équations du mouvement, sont approchées par des différences entre les coordonnées des points du maillage (divisées par le pas du maillage). Remarquons que les équations du mouvement sont également des équations différentielles par rapport à la variable temps. Des techniques de discrétisation temporelles seront nécessaires à leur intégration : la méthode des différences finies (temporelles) peut également être employée pour cette discrétisation.

## 2.4 Modèles discrets

Les limites d'utilisation de la méthode des éléments finis dans le contexte d'animation où l'animateur n'est en général pas un spécialiste de la mécanique, ont amené plusieurs recherches à proposer une modélisation un peu différente.

Intuitivement, un solide élastique peut être considéré comme un ressort tridimensionnel. Cette approche a d'ailleurs été présentée dans différentes publications de mécanique [Hre41], qui ont montré que l'on pouvait obtenir d'assez bonnes solutions au problème continu en remplaçant des parties de ce milieu par des arrangements de barres élastiques.

### 2.4.1 Description

L'approche que nous proposons ici s'inspire des principes des éléments finis tout au moins au niveau conceptuel. En effet, l'idée de modéliser un objet par un ensemble d'éléments peut être appliquée avec succès ici.

#### Élément

La figure 2.1 présente une notion d'élément que nous utiliserons par la suite. Les éléments de base sont définis comme des hexaèdres (isomorphes à un cube). Ce type de décomposition permet de définir des « voisins », c'est-à-dire les nœuds qui auront une interaction avec un nœud donné. Cette information est essentielle pour engendrer une structure tridimensionnelle : c'est-à-dire pour donner la cohérence au matériau.

Une manière de faire consiste à concentrer des masses ponctuelles au nœuds de ce réseau et à les relier par des ressorts le long des arêtes. Une méthode de décomposition proche a déjà été présentée par A. Luciani dans [Luc81] et elle a également été exploitée dans [Gas89a]. Pour donner une structure cohérente à l'ensemble, il est nécessaire d'y adjoindre d'autres ressorts (pour assurer la résistance au cisaillement) : des ressorts placés sur les « grandes diagonales » de chaque élément remplissent cet office. De manière évidente, des ressorts placés sur les diagonales des faces présentent les mêmes propriétés.

Pour définir le modèle d'élément, de nombreux choix seraient possibles. Par exemple, si l'on considère un objet solide modélisé par une approximation par facettes polygonales planes. Il peut en effet être envisagé de modéliser sa déformation en répartissant des masses aux nœuds du maillage. Les ressorts seront disposés sur les côtés des faces. La structure volumique pourra alors être décrite par la création de l'isobarycentre de l'ensemble des masses qui sera relié à chacune d'elles par un ressort.

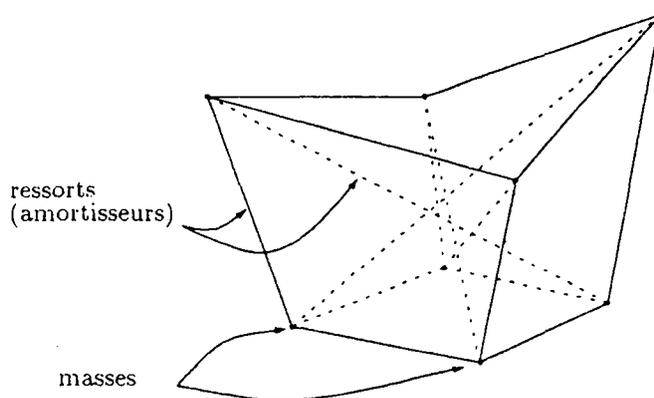


Figure 2.1: élément de base

### Prise en compte mécanique, calcul des déformations

Nous nous référons ici au paragraphe 1.2 dans lequel nous avons exposé le formalisme de la mécanique des corps rigides. Il prend toute sa signification ici. En effet, le modèle proposé est un modèle à base de masses ponctuelles (corps rigides à trois degrés de liberté) liées par des ressorts que l'on peut, de manière équivalente, considérer comme des liaisons ou comme des éléments exerçant des forces dépendant des positions (travaux donnés).

L'énergie cinétique de l'ensemble des masses s'écrit, en notant  $m_i$  la masse du point  $i$  :

$$C = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^n m_i \cdot \left[ \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^n m_i \cdot [(\dot{x}_i)^2 + (\dot{y}_i)^2 + (\dot{z}_i)^2]$$

L'expression du travail associé à la déformation des ressorts s'écrit de manière classique, pour deux points  $i$  et  $j$  liés par un ressort :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \cdot k_{ij} \cdot (l_{ij} - l_{0ij})^2$$

où  $k_{ij}$  est la raideur du ressort,  $l_{ij}$  sa longueur courante (distance entre les deux points  $i$  et  $j$  liés par le ressort) et  $l_{0ij}$  sa longueur à vide, définie comme la distance dans la configuration initiale du solide (non déformé) entre les points  $i$  et  $j$  précédemment définis .

Ce modèle permet d'introduire de manière élégante des lois de comportement (approchées) plus complexes. Ainsi, la prise en compte de la viscosité se traduira par l'ajout de termes de la forme :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \cdot \nu_{ij} \cdot (\dot{l}_{ij})^2 \quad \text{où } \nu_{ij} \text{ est le coefficient de viscosité.}$$

Pour traiter les conditions aux limites (en déplacement) nous introduirons des liaisons holonomes qui seront traitées soit en utilisant des multiplicateurs de Lagrange soit des fonctions de pénalisation.

## 2.4.2 Deux types de mise en œuvre

Nous envisageons ici deux types de mise en œuvre. La première, (proche de celle choisie par A. Luciani), est basée sur une méthode (et implantation) purement numérique, la seconde utilise les fonctionnalités du calcul symbolique.

### Mise en œuvre numérique

Pour un ensemble de masses reliées deux à deux par des ressorts, nous avons les équations :

$$\vec{\gamma}_i = \vec{f}_i + \frac{k}{m_i} \cdot \sum_{j \neq i} \left(1 - \frac{l_{0ij}}{l_{ij}}\right) \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i)$$

où  $\vec{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$  est le vecteur position de la masse  $m_i$ ,  $\vec{\gamma}_i = \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2}$  est le vecteur accélération (absolue) de la masse  $m_i$  et  $(m_i \cdot \vec{f}_i)$  représente les forces données s'exerçant sur la masse  $m_i$  (gravité, par exemple).

Cette forme est très intéressante du fait de la structure de masses ponctuelles. Elle permet, en effet, une écriture naturelle du système sous une forme explicite, c'est-à-dire ne nécessitant pas d'inversion de matrice.

### Mise en œuvre symbolique

Ces mêmes équations peuvent être spécifiés sous forme symbolique par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^n m_i \cdot [(\dot{x}_i)^2 + (\dot{y}_i)^2 + (\dot{z}_i)^2] && \text{pour l'énergie cinétique} \\ \mathcal{W}_d &= - \sum_{i=0}^n m_i \cdot g \cdot z_i && \text{pour le travail du poids} \\ \mathcal{F} &= \frac{1}{2} \cdot k_{ij} \cdot (l_{ij} - l_{0ij})^2 && \text{pour le potentiel élastique} \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{2} \cdot \nu_{ij} \cdot (\dot{l}_{ij})^2 && \text{pour la fonction de dissipation} \end{aligned}$$

En utilisant les formules de Lagrange, on calcule les termes  $\mathcal{J}_i$  relatifs aux actions d'inertie. Le travail des actions données est obtenu par dérivation de  $\mathcal{W}_d$  et  $\mathcal{F}$  par rapport aux paramètres  $x_i$ ,  $y_i$  et  $z_i$  ainsi que par dérivation de  $\mathcal{D}$  par rapport aux vitesses des paramètres  $\dot{x}_i$ ,  $\dot{y}_i$  et  $\dot{z}_i$  (bien évidemment, ceci conduit aux mêmes équations que précédemment). En fait, ceci peut directement être intégré dans un système d'écriture sous forme symbolique des équations du mouvement d'un système de solides rigides. Par contre, sur une telle structure, on peut remarquer que la matrice masse est diagonale et constante. Ceci peut nous permettre d'envisager une autre écriture du système d'équations associée à un algorithme de résolution explicite comme cela a été décrit dans la mise en œuvre numérique.

## Partie II

# Animation dynamique d'objets rigides articulés

## Chapitre 3

# Méthodes de résolution existantes

Les méthodes utilisant la dynamique pour produire des animations « visuellement réalistes » d'objets rigides articulés peuvent être classées en trois groupes :

- les premières réalisent uniquement la simulation du mouvement à partir de la donnée des états initiaux des objets et de la spécification des forces et couples agissant sur eux. Elles demandent à l'utilisateur d'appréhender l'animation en termes de forces et couples. Elles sont décrites dans la prochaine section.
- d'autres méthodes associent dynamique directe et dynamique inversée. Elles permettent de calculer certaines des forces ou des couples à partir de contraintes cinématiques ou géométriques sur les objets. L'utilisateur peut ainsi spécifier l'animation en mêlant cinématique et dynamique. Trois de ces méthodes sont présentées dans la section 3.2.
- les plus récentes utilisent des méthodes d'optimisation pour permettre à l'utilisateur de décrire son animation en termes de positions clés dans le temps et de comportement physique entre les diverses positions. Ces approches font l'objet de la section 3.3.

Les objets rigides articulés qui seront considérés par la suite, sont structurés sous forme d'arbres. Chaque élément de ces arbres est un solide rigide caractérisé par son repère propre, sa matrice d'inertie dans ce repère et par sa masse. Nous appellerons **lien** un élément de l'arbre. Chaque fils peut avoir 1 à 6 degrés de liberté par rapport à son père (3 degrés de translation et 3 de rotation). Le lieu de ces degrés de liberté est un point particulier que nous appellerons **charnière**.

### 3.1 Simulation du mouvement

Les premières approches utilisant la dynamique pour animer des objets rigides articulés ont été celle de Wilhelms et Barsky [WB85], celle d'Armstrong et Green ([AG85] et [AGL87]) et celle de Featherstone [Fea83]. Ces approches simulent le mouvement d'objets articulés à partir de la donnée de la description physique des objets et des forces et couples agissant sur ceux ci.

### 3.1.1 Approche de Wilhelms et Barsky

Wilhelms et Barsky [WB85] proposent un modèle qui autorise des libertés de rotation et de translation pour chaque articulation. Mais leur méthode de résolution est très coûteuse :

- si  $n$  est le nombre de degrés de liberté de l'objet articulé, la résolution des équations dynamiques à chaque instant  $t$  s'effectue en  $O(n^3)$  ;
- de plus, à chaque changement de forme de l'objet il est nécessaire de calculer une nouvelle matrice d'inertie globale ;

Les auteurs reconnaissent eux même que la lenteur de la résolution rend cette méthode inapplicable. Par la suite, Wilhelms ([Wil87], [MW88] et [WMS88]) utilise le modèle d'Armstrong et Green pour animer des corps articulés.

### 3.1.2 Modèle récursif d'Armstrong et Green

Les objets considérés sont structurés sous forme d'arbre. La racine de l'arbre a 6 degrés de liberté de rotation et de translation par rapport au repère fixe et chaque fils n'a que 3 degrés de liberté de rotation par rapport à son père. Cette contrainte convient tout à fait à l'animation de personnages ou d'animaux. Elle permet d'utiliser une méthode de résolution des équations de la dynamique particulièrement rapide.

Un repère  $\mathcal{B}_r$  est associé à chaque lien  $r$ . Si le lien considéré correspond à la racine de l'arbre, le repère est égal au repère principal de  $r$ . Sinon le repère est centré à la charnière de  $r$  par rapport à son père et a pour axes les axes principaux de  $r$ .

$R_{r,I}$  et  $R_r$  étant respectivement les matrices de passage du repère propre du lien  $r$  au repère fixe et au repère propre du père de  $r$ , écrivons les équations d'Euler pour  $r$  :

$$m_r a_r = f_{r,\Sigma} + m_r c_r \wedge \dot{\omega}_r - f_r + \sum_{s \text{ fils de } r} R_s f_s \quad (3.1)$$

$$\text{où } f_{r,\Sigma} = -m_r \omega_r \wedge \omega_r \wedge c_r + R_{r,I}^T (f_{r,E} + m_r a_G)$$

$$J_r \dot{\omega}_r = g_{r,\Sigma} - m_r c_r \wedge a_r - g_r + \sum_{s \text{ fils de } r} I_s \wedge R_s f_s \quad (3.2)$$

$$\text{où } g_{r,\Sigma} = -\omega_r \wedge J_r \omega_r + \sum_{s \text{ fils de } r} R_s g_s + R_{r,I}^T g_{r,E} + m_r c_r \wedge R_{r,I}^T a_G + p_{r,E} \wedge R_{r,I}^T f_{r,E}$$

$m_r$  et  $J_r$  sont respectivement la masse et la matrice d'inertie de  $r$  dans son repère propre et :

• **Exprimés dans le repère fixe :**

$a_G$ ,  $g_{r,E}$  et  $f_{r,E}$  l'accélération due à la gravitation, le couple et la force extérieure appliquée au point de coordonnée  $p_{r,E}$  dans le repère propre de  $r$ .

$p_r$  et  $v_r$  la coordonnée et la vitesse du centre du repère propre de  $r$ .

• **Exprimés dans le repère propre de  $r$  :**

$\omega_r$ ,  $\dot{\omega}_r$  et  $a_r$  les vitesses et accélérations angulaires et l'accélération linéaire du lien  $r$  par rapport au repère fixe.

$f_r$  et  $g_r$  la force et le couple de réaction de  $r$  par rapport à son père.

$c_r$  coordonnées du centre d'inertie du lien  $r$ .

• **Exprimé dans le repère propre du père de  $r$  :**

$l_r$  coordonnées du centre du repère propre de  $r$ . Celui ci est constant car  $r$  n'a que des libertés de rotation par rapport à son père.

Le centre repère propre associé au lien  $s$  est fixe dans le repère propre de son père  $r$ . L'accélération de  $s$  s'exprime donc en fonction de l'accélération de  $r$  :

$$R_s a_s = \omega_r \wedge \omega_r \wedge l_s + a_r - l_s \wedge \dot{\omega}_r \quad (3.3)$$

Armstrong et Green utilisent l'équation (3.3) pour linéariser la résolution des équations (3.1) et (3.2). Ils les expriment sous la forme :

$$\dot{\omega}_r = K_r a_r + d_r \quad (3.4)$$

$$f_r = M_r a_r + h_r \quad (3.5)$$

En suivant l'ordre  $K_r$ ,  $h_r$ ,  $d_r$  et  $M_r$ , on calcule ces variables à partir des  $M_s$ ,  $K_s$ ,  $h_s$  et  $d_s$  des fils  $s$  de  $r$ , du couple de réaction de  $r$  par rapport à son père et des forces et couples externes appliqués sur le lien  $r$ .

La résolution de l'ensemble des équations à l'instant  $t + dt$  s'effectue de la façon suivante :

1. On calcule récursivement les valeurs de  $K_r$ ,  $h_r$ ,  $d_r$  et  $M_r$  en remontant des feuilles vers la racine. Puisque la racine  $r_0$  n'a pas de force de réaction par rapport à son père, (3.5) devient :

$$M_{r_0} a_{r_0} + h_{r_0} = 0 \quad (3.6)$$

On obtient ainsi  $a_{r_0}$  et on utilise l'équation (3.4) pour calculer  $\dot{\omega}_{r_0}$ .

2. On descend dans l'arbre et on résout (3.4) en utilisant (3.3). On met alors à jour les vitesses, positions et changements de repère concernant chaque lien  $r$  :

$$\omega_r(t + dt) = \omega_r(t) + dt\dot{\omega}_r, \quad v_r(t + dt) = v_r(t) + dtR_{r,I}a_r,$$

$$R_{r,I}(t + dt) = R_{r,I}(t)(Id + dt\tilde{\omega}_r(t)), \quad p_r(t + dt) = p_r(t) + dtv_r(t)$$

où  $\tilde{\omega}_r(t)$  est une matrice 3x3 telle que,

$$\forall u, \tilde{\omega}_r(t)u = \omega_r(t) \wedge u \quad (3.7)$$

Cette méthode de résolution est très rapide mais :

- tout doit être exprimé en utilisant des forces et des couples, ce qui n'est pas naturel pour un utilisateur et complique la simulation des collisions.
- les seuls degrés de liberté des liens entre eux sont des degrés de rotation. Ceci réduit le type d'objets que l'on peut animer.

### 3.1.3 Modèle de résolution de Featherstone

Featherstone [Fea83] introduit une notation spatiale et une méthode récursive de résolution des équations de la dynamique. Sa méthode permet d'animer des chaînes où chaque lien a un degré de liberté (de translation ou de rotation) par rapport à son père. Cette approche a été étendue au cas des objets articulés arborescents ou en boucle par Lathrop [Lat86] et utilisée par McKenna et Zeltzer [MZ90].

La notation spatiale est une des clefs de l'approche : elle englobe dans une formulation unique les équations régissant les mouvements de rotation et de translation. les forces ( $\hat{f}$ ), accélération ( $\hat{a}$ ) et vitesse ( $\hat{v}$ ) spatiales sont :

$$\hat{f} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \hat{a} = \begin{bmatrix} \alpha \\ a \end{bmatrix} \text{ et } \hat{v} = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$$

où  $f$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $\omega$  et  $v$  sont respectivement une force, un couple, les accélérations angulaire et linéaire et les vitesses angulaire et linéaire.

L'opérateur spatial  $\hat{\times}$  est défini par<sup>1</sup> :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \hat{\times} = \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

et la différentiation  $D\hat{s}$  d'un vecteur spatial  $\hat{s}$  dans le repère P est :

$$D\hat{s} = \frac{d}{dt}\hat{s} + \hat{v}_P \hat{\times} \hat{s} \text{ où } \hat{v}_P \text{ est la vitesse du repère P exprimée dans son repère}$$

Les équations de la dynamique s'expriment par :

$$\begin{aligned} \hat{a} &= D\hat{v} \\ \hat{f} &= D(\hat{I}\hat{v}) \\ &= \hat{I}\hat{a} + \hat{p}^v \text{ avec } \hat{p}^v = \hat{v} \hat{\times} \hat{I}\hat{v} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$\hat{I}$  étant l'inertie spatiale :  $\hat{I} = \begin{bmatrix} 0 & mId \\ I & 0 \end{bmatrix}$  et  $m$  et  $I$  la masse et la matrice d'inertie

Featherstone note  $\hat{I}^A$  l'inertie d'un corps articulé : elle relie l'accélération d'un lien d'une articulation à la force appliquée sur ce lien. En effet, si l'on suppose que les forces actives internes sont indépendantes de la force appliquée sur la chaîne, on peut les traiter comme des constantes et relier la force appliquée sur chaque lien à l'inertie du lien comme suit :

$$\hat{f} = \hat{I}^A \hat{a} + \hat{P} \quad (3.9)$$

où la force de biais  $\hat{P}$  dépend de l'inertie spatiale, des contraintes du mouvement et est une fonction linéaire des forces internes actives.

Explicitons la méthode de Featherstone sur une chaîne où les liens sont numérotés de 0 à  $n$  en partant d'un des bouts. Considérons le lien  $i$  et supposons qu'il est libre de mouvements

<sup>1</sup>  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  sont définis comme dans l'équation (3.7)

par rapport au lien  $i - 1$ . Les liens  $i + 1$  à  $n$  restent attachés entre eux. Supposons qu'une force spatiale  $f$  est appliquée en  $i$  et que  $\hat{a}_1$  et  $\hat{P}_i$  sont respectivement l'accélération et la force de biais liée à  $i$  selon l'équation (3.9). Cette force est interprétée comme composée de deux forces  $\hat{f}_1$  et  $\hat{f}_2$  où  $\hat{f}_1$  est la force qui produit l'accélération  $\hat{a}_2$  sur le lien  $i$  considéré comme isolé et  $\hat{f}_2$  est la force agissant sur le bout de chaîne composés des liens  $i + 1$  à  $n$ . On a donc les équations :

$$\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 \quad (3.10)$$

$$\hat{f}_1 = \hat{I}_1 \hat{a}_1 \quad \text{et} \quad \hat{f}_2 = \hat{I}_{i+1}^A \hat{a}_2 + \hat{P}_{i+1} \quad (3.11)$$

Les liens  $i$  et  $i + 1$  sont connectés entre eux par une jointure (un degré de liberté de rotation ou de translation). Donc, en prenant  $\hat{s}_{i+1}$  comme direction de l'axe de jointure entre  $i$  et  $i + 1$ , les accélérations  $\hat{a}_1$  et  $\hat{a}_2$  sont reliées entre elles par :

$$\hat{a}_2 = \hat{a}_1 + \hat{s}_{i+1} \beta \quad \text{où } \beta \text{ est un scalaire} \quad (3.12)$$

La force  $\hat{f}_2$  est transmise au lien  $i + 1$  via  $i$ , donc sa composante sur  $\hat{s}_{i+1}$  est<sup>2</sup> :

$$\hat{s}_{i+1}^T \hat{f}_2 = Q_{i+1} \quad \text{où } Q_{i+1} \text{ est la force agissant sur l'axe } \hat{s}_{i+1} \quad (3.13)$$

En utilisant les équations (3.10) à (3.13) on calcule la valeur de  $\beta$  et de  $\hat{f}$  et on obtient pour  $\hat{f}$  une expression du type :

$$\hat{f} = \hat{M}_i \hat{a}_1 + \hat{b}_i \quad (3.14)$$

où  $\hat{M}_i$  et  $\hat{b}_i$  dépendent uniquement de  $\hat{I}_{i+1}^A$ ,  $\hat{I}_i$ ,  $\hat{s}_{i+1}$ ,  $Q_{i+1}$  et  $\hat{P}_{i+1}$ . Comme cette équation est valable pour toutes les valeurs de  $\hat{f}$  et  $\hat{a}_1$ , on peut égaliser  $\hat{I}_i^A$  et  $\hat{M}_i$  et  $\hat{P}_i$  et  $\hat{b}_i$  d'où :

$$\hat{I}_i^A = \hat{I}_i + \hat{I}_{i+1}^A - \frac{\hat{I}_{i+1}^A \hat{s}_{i+1} \hat{s}_{i+1}^T \hat{I}_{i+1}^A}{\hat{s}_{i+1}^T \hat{I}_{i+1}^A \hat{s}_{i+1}} \quad (3.15)$$

$$\hat{P}_i = \hat{P}_{i+1} + \frac{\hat{I}_{i+1}^A \hat{s}_{i+1} (Q_{i+1} - \hat{s}_{i+1}^T \hat{P}_{i+1})}{\hat{s}_{i+1}^T \hat{I}_{i+1}^A \hat{s}_{i+1}} \quad (3.16)$$

Ces dernières équations sont utilisées dans la résolution :

1. en partant du bout de la chaîne jusqu'au début (de  $n$  à 0), on calcule les  $\hat{I}_i^A$  et les  $\hat{P}_i$ . On obtient  $\hat{a}_0$  en résolvant l'équation (3.9) pour le lien 0.
2. en utilisant la relation de récurrence reliant  $\hat{a}_i$  à  $\hat{a}_{i+1}$  à partir du lien 0, on obtient les accélérations de tous les liens et on en déduit le mouvement.

Dans le cas d'une articulation arborescente (extension de Lathrop) dans la phase (1), on part des feuilles et on remonte jusqu'au calcul de l'accélération de la racine et, dans la phase (2), on descend le long des branches.

McKenna et Zeltzer [MZ90] utilisent cette méthode de résolution dans un système d'animation qui simule la marche. Ils ont étudié plus particulièrement la marche d'un insecte à six pattes. Les forces et couples à appliquer sur des liens composant les animaux sont créés par des ressorts exponentiels qui simulent des démarches et des mécanismes de marche observées par des biologistes (cf. [McM84]).

---

<sup>2</sup>la transposée spatiale est définie par :  $v^T = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}^T = [c^T \ d^T]$

## 3.2 Utilisation de la dynamique inversée

Les approches par simulation sont très efficaces quant à la rapidité d'obtention d'une animation, mais demandent à l'utilisateur d'avoir l'intuition des forces et couples externes, et même parfois des couples internes, à appliquer aux différentes parties d'un solides pour obtenir un mouvement donné. Certains auteurs comme Mac Mahon [McM84] ont étudié certains mouvements d'animaux et d'hommes mais ces approches se limitent quasiment à ce genre d'applications et ne sont pas facilement utilisables. C'est pour pallier ce problème que d'autres auteurs, inspirés par des approches du même type utilisées en robotique (*cf.* [LPW80b] et [LPW80a]), ont proposé des modèles où les forces peuvent être obtenues à partir de conditions géométriques ou cinématiques ([BHBS87], [BB87], [HAD88], [IC87], [IC88], [WMS88] et [SZ90]). Nous nous intéresserons plus particulièrement à trois de ces approches, celle de Barzel et Barr, celle d'Isaacs et Cohen et celle de Shröder et Zeltzer.

### 3.2.1 Approche de Barzel et Barr

Barzel et Barr [BB87], [BHBS87] et [BB88] se proposent de résoudre le problème suivant.

*A partir :*

- d'un ensemble de contraintes géométriques portant sur des objets,
- des positions, vitesses, accélérations, forces et couples agissant sur ces objets à un instant donné,

*comment fournir un ensemble de forces à appliquer sur ces objets à cet instant de façon à satisfaire le mieux possible les contraintes géométriques ?*

Les contraintes géométriques envisagées sont du type :

- point d'un objet fixé dans l'espace ;
- point d'un objet situé sur une courbe ou sur une surface donnée ;
- point d'un objet fixé à un point d'un autre objet ;
- objet en rotation selon un axe donné.

Ce genre de problème est classique en robotique : ces forces et couples servent à contrôler la trajectoire de bras articulés, etc. [LPW80b]. Un objet articulé avec uniquement des libertés de rotation entre un fils et son père peut être modélisé en utilisant des contraintes du type « un point d'un objet fixé à un point d'un autre objet ».

La démarche envisagée pour résoudre le problème est la suivante : pour chaque contrainte géométrique, on veut trouver une expression de la quantité  $D(t)$  (qui représente l'écart entre la position courante et la contrainte) à minimiser de telle façon que  $\ddot{D}(t)$  dépende linéairement de la force et du couple cherchés. Cette quantité sera minimisée en résolvant l'équation :

$$\ddot{D} + \frac{2}{h}\dot{D} + \frac{1}{h^2}D = 0, \text{ i.e. } D(t) = D_0 e^{-\frac{t}{h}} \quad (3.17)$$

$h$  étant la constante de temps du mouvement, en  $5h$   $D$  devient très proche de 0 (la contrainte n'est pas forcément vérifiée de façon exacte). On obtient une équation linéaire :

$$\gamma(\dots, F_{connue}, G_{connue}, F_{contrainte}) = 0 \quad (3.18)$$

qui permet d'obtenir la valeur de la force de contrainte.

Cette méthode est étendue au cas de contraintes multiples. On résout alors un système d'équations. La matrice correspondant à ce système est creuse et peut ne pas être carrée. Il faut de plus gérer les problèmes de sous- et de sur-contraintes. Certains problèmes de sur-contraintes ne proviennent pas forcément d'une sur-contrainte géométrique mais d'une sur-contrainte des interprétations des contraintes géométriques. Barzel et Barr suggèrent certaines méthodes pour pallier ces problèmes dans [BB87] et [BB88].

Remarquons que :

- il est intéressant d'introduire une force calculée à partir des forces connues pour satisfaire une contrainte. Cela permet de contrôler plus efficacement le mouvement des objets.
- à chaque contrainte géométrique est associée automatiquement une quantité  $D$  à minimiser et ses dérivées  $\dot{D}$  et  $\ddot{D}$ . La façon de minimiser cette quantité peut conduire à des mouvements acceptables pour des bras articulés de robots mais qui peuvent ne pas être naturels pour des personnages. Il faudrait donc pouvoir avoir plus de souplesse dans la gestion de ces contraintes.
- résoudre ces équations est assez long. Barzel et Barr suggèrent d'utiliser soit le modèle d'Armstrong et Green [AG85], soit celui d'Isaacs et Cohen [IC87] pour accélérer l'animation d'objets articulés.

### 3.2.2 Approche d'Isaacs et Cohen

Isaacs et Cohen ont utilisé la méthode de résolution de Wittenburg [Wit77]. La formulation est fondée sur le principe des travaux virtuels de D'Alembert<sup>3</sup>, chaque lien  $r$  pouvant avoir 6 degrés de liberté par rapport à son père :

$$\sum_{r=0}^n dr_r(F_r - m_r\ddot{r}_r) + d\theta_r(M_r - \dot{L}_r) + dW_r = 0 \quad (3.19)$$

où  $dr_r$  et  $d\theta_r$  sont respectivement les déplacements virtuels linéaire et angulaire ;  $r_r$ ,  $\dot{r}_r$  et  $\ddot{r}_r$  la position, vitesse et accélération du lien  $r$  ;  $L_r$  est le moment angulaire ( $L_r = J_r\dot{\theta}_r$ ) ;  $F_r$  et  $M_r$  la résultante des forces et couples appliqués sur  $r$  et  $dW_r$  est le travail virtuel effectué par les forces internes sur  $r$ .

En exprimant l'équation en fonction des « coordonnées généralisées »  $q_1, \dots, q_N$ , chaque  $q_i$  représentant un degré de liberté de rotation ou de translation,  $q = (q_i)_{i=1..N}$  vecteur de position, on obtient, en éliminant  $dq$  (les mouvements sont indépendants) une équation du type :

$$A\ddot{q} = B, \text{ où } A \text{ est une matrice } N \times N \quad (3.20)$$

Cette équation peut être utilisée

- soit pour trouver les valeurs de  $\ddot{q}_i$ , connaissant les  $B_{ij}$  et  $A_{ij}$

---

<sup>3</sup>cf. 1.2 pour une description détaillée



Les chaînes fermées peuvent être en particulier modélisées par des contraintes cinématiques complexes. La résolution du problème utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Une inconnue supplémentaire  $\lambda_c$  est associée à chaque équation de contrainte  $f_c = 0$  pour  $c = 1..M$ .

On est ramené à la résolution d'une équation du type :

$$A'q' = B' \text{ où } A' \text{ est une matrice } (M + N) \times (M + N) \quad (3.24)$$

$$\text{avec } q' = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \\ -\lambda_1 \\ \vdots \\ -\lambda_M \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} A & J^T \\ J & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B' = \begin{bmatrix} B \\ -\phi \end{bmatrix} \text{ où } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_c}{\partial q_i} \end{pmatrix} \begin{matrix} c = 1..M, \\ i = 1..N \end{matrix}$$

$A$  et  $B$  sont ceux de l'équation (3.20) et  $\phi$  est une fonction de  $q, \dot{q}$  et  $t$ , indépendante de  $\ddot{q}$ . Cette équation a les mêmes propriétés que l'équation (3.20). L'utilisateur peut donc spécifier l'animation en mélangeant la donnée des forces ou des couples et des accélérations comme dans [IC87] et donner de plus des contraintes complexes sur les objets articulés.

Cette approche présente néanmoins certains inconvénients :

- elle est assez coûteuse en temps et en espace (jusqu'à 30 mn/s de simulation pour calculer le mouvement d'un homme donnant un coup de pied sur le sol dans [IC87]. Le corps articulé représentant cet homme a 39 degrés de liberté. L'animation de la marionnette présentée dans [IC88] coûte 69 mn/s de simulation. La marionnette a 77 degrés de liberté et l'animation utilise 26 équations de contrainte dont 8 sont optionnelles).
- une interface sophistiquée devrait être installée pour permettre un contrôle aisé du mouvement par un animateur naïf.

### 3.2.3 Approche de Schröder et Zeltzer

Schröder et Zeltzer [SZ90] utilisent la notation spatiale introduite par Featherstone [Fea83] et sa méthode de résolution récursive étendue aux objets articulés arborescents et aux boucles par Lathrop [Lat86] dans leur système d'animation. Celui-ci intègre des contraintes qui leur permettent de modéliser le mouvement d'objets rigides articulés. La résolution est linéaire par rapport au nombre de degrés de liberté.

Les contraintes sont des fonctions  $C_j : Q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d_j}$  ( $d_j = 1, 3$  ou  $6$ ) deux fois différentiables,  $Q$  représentant l'espace d'états du système et  $\mathbb{R}$  l'espace temps. La contrainte est satisfaite quand  $C_i(Q) = \vec{0}$ . Pour satisfaire une contrainte, Schröder et Zeltzer ne cherchent pas à obtenir (comme Barzel et Barr) les forces à ajouter au système, mais plutôt à résoudre le système en intégrant ces nouvelles équations <sup>4</sup>.

<sup>4</sup>En fait dans la phase d'assemblage, ils procèdent comme Barzel et Barr et dès que les contraintes sont satisfaites, ils utilisent la méthode récursive

Chaque contrainte définit un opérateur local qui agit sur les  $\hat{v}$  et  $\hat{p}$  du solide concerné (sous la forme  $\mathcal{J}\hat{a} = \phi((\hat{v}, (\hat{p})))$ ). Les boucles sont traitées de la même façon que chez Wittenburg (ajout de contraintes entre les feuilles d'une structure arborescente). La résolution de l'ensemble des équations s'effectue sur le même mode que dans la section 3.1.3.

Schröder et Zeltzer décrivent très brièvement la formulation utilisée et l'intégration des contraintes dans leur résolution. Ils montrent sur des mesures que la résolution des équations est linéaire par rapport au nombre de degrés de liberté mais le temps de calcul dépend plutôt de l'échantillonnage de temps choisi (qui dépend, lui de la rapidité des mouvements calculés).

### 3.3 Utilisation de méthodes de contrôle

Deux approches [BN88] et [WK88] utilisent des méthodes de contrôle dans le but de proposer à l'utilisateur un outil plus souple et demandant peu de connaissances physiques. Comme dans les systèmes d'animation traditionnels (*cf.* [Las87]) l'utilisateur fournit les valeurs des différents paramètres (position, vitesse ...) à des instants  $t_0, \dots, t_n$  de l'animation. Le mouvement de l'objet entre ces positions est calculé de façon à ce que celui-ci soit réaliste du point de vue physique et dépense le moins d'énergie possible.

#### 3.3.1 Approche de Shapiro Brotman et Netravali

Cette approche n'avait pas été entièrement implantée lors de l'écriture de [BN88]. Examinons leur démarche dans le cas d'un objet rigide non articulé :

$$s(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \theta(t) \\ \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} \text{ où } r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \text{ et } \theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_x(t) \\ \theta_y(t) \\ \theta_z(t) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

sont respectivement la position et l'angle de rotation du repère par rapport aux axes x,y et z à l'instant t.

L'utilisateur donne, aux instants clefs  $t_i$  pour  $i = 0, \dots, n$  :

$$r(t_i) = r_i, \theta(t_i) = \theta_i, \frac{dr(t_i)}{dt} = v_i, \frac{d\theta(t_i)}{dt} = \omega_i$$

Le solide satisfait les équations de la dynamique :

$$F = m \frac{d^2 r(t)}{dt^2} \text{ et } M = I \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} \quad (3.26)$$

où  $F$  est la résultante des forces,  $m$  la masse et  $M$  la résultante des couples appliqués sur le solide.

En utilisant  $s(t)$  on écrit les équations de la dynamique (3.26) :

$$\frac{ds(t)}{dt} = G(t)s(t) + H(t)u(t) \quad (3.27)$$

où  $u(t)$  est le vecteur de contrôle et  $H(t)$  détermine comment  $u(t)$  est relié à l'équation différentielle.  $G$  et  $H$  ne dépendent pas de  $s(t)$  ni de  $\theta(t)$ <sup>5</sup> :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } H(t)u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{m} \\ I^{-1}M \end{bmatrix}$$

Le choix de  $H(t)$  est différent suivant l'application. Celui-ci dépend des caractéristiques physiques de l'objet (matrice d'inertie, masse, etc..).

Les conditions aux instants  $t_i$  peuvent s'exprimer comme suit :

$$s(0) = s_0 \text{ et } M_i s(t_i) = \Psi_i \text{ pour } i \geq 0$$

et l'intégrale à minimiser est de la forme :

$$J = \int_{t_0}^{t_n} [(s^T(t)As(t)) + (u^T(t)Bu(t))] dt$$

où  $A$  et  $B$  sont semi-définies positives.

En fait, Shapiro Brotman et Netravali se proposent de minimiser par morceaux l'intégrale globale, c'est à dire dans tous les intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$  pour  $i \leq n$ . De plus, pour que la fonction de contrôle n'ait pas de discontinuité au passage entre deux intervalles successifs et par conséquent pour que la trajectoire soit plus lisse, ils ne résolvent pas tout à fait le même problème : c'est  $w(t)$ , la dérivée de  $u(t)$  par rapport au temps, qui est utilisée dans la minimisation.

Les équations à considérer sont alors :

$$\frac{d\bar{s}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} G(t) & H(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{s}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ w(t) \end{bmatrix} \text{ avec } \bar{s}(t) = \begin{bmatrix} s(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \text{ et } \bar{s}(0) = \begin{bmatrix} s(0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

les conditions sur les instants  $t_i$  deviennent :

$$[M_i \ 0] \begin{bmatrix} s(t_i) \\ u(t_i) \end{bmatrix} = \Psi_i \quad (3.29)$$

et l'intégrale à minimiser est :

$$\bar{J}_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} [(\bar{s}^T(t)A\bar{s}(t)) + (w^T(t)Bw(t))] dt \quad (3.30)$$

On minimise ainsi l'énergie de  $w(t)$  c'est à dire les variations de  $u(t)$ .

En utilisant la théorie de la commande on obtient une valeur de  $w(t)$  par :

$$w(t) = -B^{-1}H^T R(t)Q^{-1}\Psi_1 - B^{-1}H^T[K(t) - R(t)Q^{-1}(t)R^T(t)]\bar{s}(t) \quad (3.31)$$

---

<sup>5</sup>0 et 1 correspondent respectivement à la matrice nulle et la matrice identité  $3 \times 3$

avec  $K(t_1) = 0$ ,  $R(t_1) = M_1^T$  et  $Q(t_1) = 0$

$$\begin{aligned}\frac{dK(t)}{dt} &= -K(t)F - F^T K(t) - A + K(t)HB^{-1}H^T K(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= -(F^T - K(t)HB^{-1}H^T)R(t) \text{ et } \frac{dQ(t)}{dt} = R^T(t)HB^{-1}H^T R(t),\end{aligned}$$

Ces équations doivent être résolues pas à pas de  $t_1$  à 0 puis de  $t_i$  à  $t_{i+1}$  pour  $i \leq n$ .

Les matrices  $A$  et  $B$  permettent de modifier le vecteur de contrôle, donc de jouer sur la trajectoire. Shapiro Brotman et Netravali n'ont pas encore étudié les influences des variations de  $A$  et  $B$  sur l'aspect du mouvement ni une manière d'automatiser la construction de l'intégrale à minimiser en fonction des données des objets, de leur positions clés et du comportement dynamique désiré.

De plus, Shapiro Brotman et Netravali présentent deux exemples simples (mouvement d'un camion le long de l'axe des  $x$  et perturbation du mouvement d'un avion à partir d'un vol en ligne droite) mais reconnaissent que des exemples plus compliqués peuvent conduire à des calculs beaucoup plus complexes.

### 3.3.2 Approche de Witkin et Kass

L'idée de départ de [WK88] est basée sur l'utilisation de la minimisation sous contrainte. La formulation physique est fondée sur les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} - Q = 0 \quad (3.32)$$

où  $T$  est l'énergie cinétique,  $Q$  et  $q$  sont respectivement la force généralisée et les coordonnées généralisées. La quantité à minimiser est une intégrale de la forme :

$$R = \int_{t_0}^{t_1} |f(t)|^2 dt \quad (3.33)$$

où  $f$  est la force qu'on veut minimiser au cours du mouvement. Le temps est discrétisé par une méthode de différences finies, donc les  $\dot{q}_i$  et  $\ddot{q}_i$  sont remplacés par :

$$\dot{q}_i = \frac{q_i - q_{i-1}}{h}, \quad \ddot{q}_i = \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{h^2} \quad (3.34)$$

et l'intégrale à minimiser est remplacée par une somme sur les  $q_i$  ou sur les  $f_i$ . Le problème d'optimisation se présente sous la forme :

$$\begin{cases} S_j, 1 \leq j \leq n, \text{ variables scalaires indépendantes} \\ C_i(S_j) = 0, 1 \leq i \leq m, \text{ contraintes scalaires} \\ \text{et } R(S_j) \text{ fonction à minimiser} \end{cases} \quad (3.35)$$

La méthode utilisée est une méthode dérivée de Newton-Raphson. Elle utilise les dérivées partielles :  $\frac{\partial C_i}{\partial S_j}$  et  $\frac{\partial^2 R}{\partial S_i \partial S_j}$  et procède par itérations successives à partir d'une solution approchée.

L'utilisateur fournit la description géométrique et la masse des objets, spécifie les points de l'objet où les forces et les contraintes doivent être appliquées et donne l'expression de  $T$  et de ses dérivées partielles. Il donne aussi l'expression à minimiser dans le mouvement. Pour cela, il peut utiliser un module pour construire automatiquement des fonctions. Ce module effectue des différentiations symboliques et simplifie les expressions. Une interface permet de composer les fonctions entre elles en utilisant un graphe.

Le système construit automatiquement des fonctions définies à partir des équations du mouvement et des positions clefs. Les fonctions sont automatiquement discrétisées et les dérivées partielles nécessaires à la résolution sont calculées. L'ensemble des équations est transformé en un problème de la forme de (3.35). Le module de résolution est alors activé en prenant comme valeur de départ une interpolation linéaire entre les positions clefs et en améliorant le mouvement par itérations successives.

Witkin et Kass présentent une série de sauts d'une lampe articulée (chaîne de quatre liens n'ayant que des libertés de rotation) en faisant varier les contraintes. Ils montrent que l'on peut ainsi jouer sur les contraintes pour modifier le mouvement de cette lampe entre les positions clefs. Leur méthode de résolution est cependant assez coûteuse : l'animation de chaque saut nécessite dix minutes de calcul sur une Symbolic 3640.

## Chapitre 4

# Interactions entre objets rigides

Le traitement des interactions se décompose en deux phases :

1. la détection des interactions, *i.e.* le calcul des interpénétrations et des points de contact entre deux solides et, éventuellement, le retour au premier instant de collision ;
2. la réponse aux interactions. Nous-nous intéressons ici plutôt a cette partie du problème. La modélisation physique est différente dans le cas d'un contact ou dans le cas d'une collision. Les méthodes présentées dans la suite sont classées en fonction du type d'interaction qu'elles privilégient dans leur approche.

### 4.1 Modélisation des collisions

#### 4.1.1 Collisions entre objets rigides en mouvement

Différents auteurs se sont intéressés à la modélisation des collisions entre objets rigides : [Hah88] et [MW88]. Leurs approches ont pour base la notion d'impulsion ( cf. Routh [Rou05]) et se différencient sur la détection des collisions entre objets et sur les extensions du modèle général.

Intéressons-nous d'abord à la modélisation physique. Supposons deux objets en collision

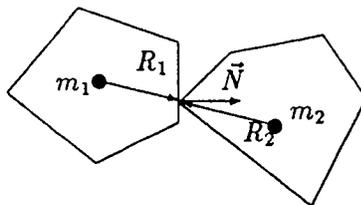


Figure 4.1: Collision de deux objets

comme sur la Figure 4.1. Pendant le temps de la collision les deux objets interagissent entre

eux avec une force infiniment grande qui fournit une impulsion  $\vec{P}$ . Cette impulsion ne peut être comparée avec une force extérieure ou avec la gravitation :

$$\vec{P} = \int_{\Delta t} \vec{F} dt, \text{ où } \Delta t \text{ est infiniment petit} \quad (4.1)$$

Les moments linéaires et angulaires se conservent pendant le choc, donc :

$$m_1(\vec{v}_1' - \vec{v}_1) = -\vec{P} \quad m_2(\vec{v}_2' - \vec{v}_2) = \vec{P} \quad (4.2)$$

$$J_1(\vec{\omega}_1' - \vec{\omega}_1) = \vec{R}_1 \wedge (-\vec{P}) \quad J_2(\vec{\omega}_2' - \vec{\omega}_2) = \vec{R}_2 \wedge \vec{P} \quad (4.3)$$

En supposant que les deux objets ne glissent pas l'un sur l'autre, il y a égalité des vitesses relatives tangentielles au point d'impact :

$$(\vec{v}_1' + \vec{\omega}_1' \wedge \vec{R}_1)_t = (\vec{v}_2' + \vec{\omega}_2' \wedge \vec{R}_2)_t \quad (4.4)$$

Ce qui donne 14 équations pour 15 inconnues (c.a.d.  $\vec{v}_1'$ ,  $\vec{\omega}_1'$ ,  $\vec{v}_2'$ ,  $\vec{\omega}_2'$  et  $\vec{P}$ ).

- utilisant le coefficient de restitution  $\epsilon$ , Hahn pose une dernière équation :

$$\frac{(\vec{v}_1' + \vec{\omega}_1' \wedge \vec{R}_1 - \vec{v}_2' - \vec{\omega}_2' \wedge \vec{R}_2) \cdot \vec{N}}{(\vec{v}_1 + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{R}_1 - \vec{v}_2 - \vec{\omega}_2 \wedge \vec{R}_2) \cdot \vec{N}} = \epsilon \quad (4.5)$$

Ce qui fait 15 équations pour 15 inconnues. Hahn a supposé pour introduire l'équation (4.4) qu'il y avait frottement au point d'impact, c'est à dire que la force d'impulsion  $F$  vérifiait la loi de Coulomb ( $\mu$  coefficient de frottement) :

$$|F_t| \leq \mu F_n \quad (4.6)$$

Une fois la valeur de l'impulsion  $P$  obtenue, il faut vérifier qu'il n'y a pas glissement au point d'impact. Si l'équation

$$|\vec{N} \wedge (\vec{P} \wedge \vec{N})| \geq \mu |\vec{P} \cdot \vec{N}| \quad (4.7)$$

est vérifiée, il y a glissement. Dans ce cas, (4.4) est remplacée par

$$P_{\vec{\tau}} = 0, \quad P_{\vec{j}} = \mu |\vec{P} \cdot \vec{N}|, \quad (4.8)$$

où  $\vec{\tau}$  est dirigé par  $\vec{P} \wedge \vec{N}$  et  $\vec{j}$  par  $\vec{N} \wedge \vec{\tau}$

- Moore et Wilhelms proposent plusieurs modèles, dont le plus simple, avec une collision inélastique, i.e.  $\epsilon = 0$ , et avec l'impulsion perpendiculaire au plan de collision :

$$(\vec{v}_1' + \vec{\omega}_1' \wedge \vec{R}_1 - \vec{v}_2' - \vec{\omega}_2' \wedge \vec{R}_2) \cdot \vec{N} = 0 \quad (4.9)$$

Pour pouvoir utiliser ces équations, il faut tout d'abord détecter les collisions entre objets et donner, en cas de collision le point d'impact et la normale  $\vec{N}$  au plan d'impact. Comme les calculs se font à intervalles de temps discret, il peut y avoir interpénétration.

- Hahn hiérarchise la détection de collision à l'aide de boîtes englobantes. Il propose une méthode pour déterminer le point de collision en supposant que les intervalles de calcul sont suffisamment petits pour qu'un choc puisse être détecté.
- Moore et Wilhelms décrivent un algorithme de détection de collision dans le cas de polyèdres convexes. Cet algorithme est inspiré de l'algorithme de clipping de Cyrus-Beck.

Aucun d'eux n'explicite vraiment quel est leur choix pour la direction de la normale au point de collision dans les cas limites.

Considérons maintenant les extensions proposées par chacun d'eux :

- Hahn utilise la même approche dans le cas des contacts entre objets ou dans le cas des collisions objet fixe/objet mobile. Il approxime ainsi un contact par une suite d'infimes collisions. L'influence des forces ou couples extérieurs apparaissent alors dans le moment ( i.e. dans les équations (4.2) à (4.3)). Ce passage collision/contact ne paraît pas si évident car les forces extérieures et l'impulsion due à la collision sont mises au même niveau, ce qui est contraire à l'hypothèse de Routh.

- Moore et Wilhelms proposent une extension du modèle dans le cas d'une collision de deux objets articulés. Supposons que les fils n'ont que des libertés de rotation par rapport à

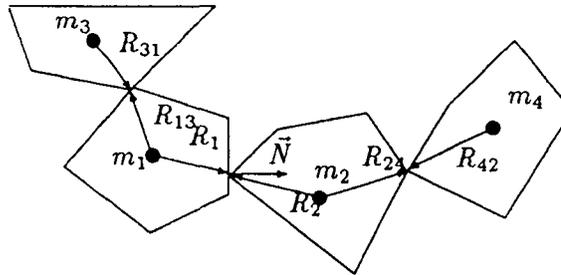


Figure 4.2: Collision de deux objets articulés

leur père comme dans la Figure 4.2. Les équations (4.2) à (4.3) sont remplacées par :

$$m_1(\vec{v}'_1 - \vec{v}_1) = -\vec{P} + \sum_{i=1}^n \vec{P}_{i1} \quad m_2(\vec{v}'_2 - \vec{v}_2) = \vec{P} + \sum_{i=1}^n \vec{P}_{2i} \quad (4.10)$$

$$J_1(\vec{\omega}'_1 - \vec{\omega}_1) = \vec{R}_1 \wedge (-\vec{P}) + \sum_{i=1}^n \vec{R}_{1i} \wedge \vec{P}_{i1} \quad J_2(\vec{\omega}'_2 - \vec{\omega}_2) = \vec{R}_2 \wedge \vec{P} + \sum_{i=1}^n \vec{R}_{2i} \wedge \vec{P}_{2i} \quad (4.11)$$

Et pour les liens  $i = 2 \dots n$  non directement en collision on a :

$$m_i(\vec{v}'_i - \vec{v}_i) = \sum_{j=1}^n \vec{P}_{ij} \quad \text{et} \quad J_i(\vec{\omega}'_i - \vec{\omega}_i) = \sum_{j=1}^n \vec{R}_{ij} \wedge \vec{P}_{ij} \quad (4.12)$$

Pour les liens père-fils, i.e. quand  $i$  et  $j$  sont liés par une charnière, on a :

$$\vec{v}_i + \vec{\omega}_i \wedge \vec{R}_{ij} = \vec{v}_j + \vec{\omega}_j \wedge \vec{R}_{ji} \quad (4.13)$$

Par contre, Hahn se place toujours dans le cas d'un seul objet, la partie articulation étant supposée réglée cinématiquement.

- Moore et Wilhelms n'envisagent pas de cas plus complexes, i.e. création d'une boucle par collision de plusieurs liens d'un même objet articulé (ce qui arrive quand un personnage pose son coude sur son genou) ou collision de plus de deux objets en même temps (ce qui est envisagé par Baraff [Bar89]). Par contre, Hahn propose une méthode pour gérer les conflits de « collisions en boucle ». Il suggère d'associer un graphe à chaque scène contenant plusieurs objets en contact simultané pour ordonner les calculs de recherche de collision. Chaque nœud du graphe correspond à un objet et chaque arête représente un contact. Un nœud spécial est associé à l'ensemble des objets fixes. Les arêtes du graphe sont orientées de façon à supprimer les cycles.

#### 4.1.2 Collision d'un objet rigide articulé avec des parois fixes

L'approche précédente peut être simplifiée quand on considère le cas de la collision d'un objet rigide articulé avec des parois fixes. C'est ce qui est présenté dans [Ver90] :

- les collisions de l'objet articulé avec plusieurs parois sont traitées simultanément. Les équations (4.10) à (4.13) sont étendues,
- on calcule les vitesses résultant du choc en résolvant un système linéaire triangulaire par blocs de taille bornée par  $13n$ , si  $n$  est le nombre de liens composant l'objet articulé.

On obtient alors un traitement rapide des collisions d'un objet avec des parois fixes.

## 4.2 Modélisation des contacts

### 4.2.1 Contacts entre objets

Baraff [Bar89, Bar90] présente une approche analytique pour traiter le problème du contact entre solides rigides. Ces solides peuvent être bornés par des faces planes ou courbes. Nous nous intéressons ici plus particulièrement au cas des solides polyédriques.

Il procède comme suit :

- Quand il y a interpénétration, Baraff calcule l'instant de contact précédent en se ramenant à un problème de recherche de racine. Il le résout en utilisant une méthode hybride, mélange de *Newton* et de *regula falsa* (cf. [PFTV86]).
- dans le cas où les solides sont des polyèdres convexes, Baraff utilise la cohérence de la scène dans le temps pour accélérer le processus de détection des contacts ou des collisions. Des mesures effectuées sur des animations montrent que sa méthode améliore notablement l'efficacité de l'algorithme.

- les points de contact entre deux polyèdres sont les sommets des polygones de contact. Les forces de contact sont réparties sur ces sommets.
- si l'on ne considère pas les forces de frottement, la direction  $\vec{n}$  de la force de contact en un point  $p$  de  $B$ , correspondant au point  $p'$  de  $A$ , point de contact entre deux solides  $A$  et  $B$ , est perpendiculaire à la surface commune de contact et est dirigée vers l'extérieur de  $B$ . Dans le cas d'un contact du type sommet-sommet ou sommet-arête, cette direction est choisie arbitrairement vers l'extérieur de  $B$ .
- la force de contact  $\vec{f}$  entre  $A$  et  $B$  au point  $p(t)$  doit satisfaire les contraintes :
  1.  $\vec{f}$  empêche les deux solides de s'interpénétrer
  2.  $\vec{f}$  peut contribuer à pousser  $A$  mais pas à le tirer
  3.  $\vec{f}$  n'intervient que quand il n'y a pas collision
  4.  $\vec{f}$  s'annule dès qu'il n'y a plus contact
  5.  $\vec{f}$  est continue dans le temps, tant qu'il y a contact.

Pour chaque point de contact  $p_1 = p'_1, \dots, p_n = p'_n$  entre  $A$  et  $B$ , Baraff introduit une fonction caractéristique  $\chi_i$  doublement dérivable par rapport à  $t$  :  $\chi_i(t) = p'_i(t) - p_i(t)$ . Les conditions (1), (2) et (3) donnent alors :

$$\text{si } t_0 \text{ est l'instant de contact, } \chi_i(t_0) = 0, \dot{\chi}_i(t_0) = 0 \text{ et } \ddot{\chi}_i(t_0) \geq 0 \quad (4.14)$$

En utilisant le fait que les  $\ddot{\chi}_i$  sont des fonctions linéaires de  $\vec{f}$  et en exprimant (4.14) sous forme matricielle pour tous les points de contact, on se ramène à la recherche de  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$  vérifiant :

$$\vec{f} \geq 0 \text{ et } A\vec{f} \geq \vec{b} \text{ avec } A \text{ matrice } n \times n \quad (4.15)$$

Pour que la force de contact ne soit pas trop forte et pour tenir compte du fait que l'instant de perte de contact correspond à une force de contact nulle, on ajoute l'équation :

$$\vec{f}_i \ddot{\chi}_i(f) = 0, \forall i$$

Ce qui s'exprime aussi sous la forme :

$$\sum_i f_i \ddot{\chi}_i = 0 \text{ ou bien } f^T A f - f^T b = 0 \quad (4.16)$$

On aboutit alors à un problème du type programmation quadratique (problème NP complet en général). Pour résoudre le système, Baraff utilise l'heuristique suivante : la condition (4) permet d'interpréter différemment les équations (4.15) et (4.16) selon le cas où  $p_i$  va rester en contact ou va cesser de l'être.

- Quand le point de contact  $p_i$  tend à disparaître, la force de contact est nulle donc (4.14) devient :

$$\vec{f}_i = 0, \ddot{\chi}_i(\vec{f}) \geq 0 \quad (4.17)$$

- Par contre, quand le point de contact reste point de contact, on a :

$$\vec{f} > 0 \text{ et } \ddot{\chi}_i(\vec{f}) = 0 \quad (4.18)$$

Les points de contact qui tendent à disparaître sont *a priori* plus rares que ceux qui restent en contact. Baraff cherche donc à résoudre d'abord (4.18). Si le problème n'a pas de solution, c'est que certains des points de contact vont disparaître. Dans ce cas, il recherche une solution approchée  $\vec{f}_a$  satisfaisant les contraintes :

$$A\vec{f}_a \geq b \text{ et } \vec{f}_a \geq 0 \text{ en minimisant } \sum_i \vec{f}_a,$$

Cette solution minimise aussi  $\sum_i \vec{f}_a, \ddot{\chi}_i(\vec{f}_a)$ , ce correspond à une bonne approximation de  $\vec{f}$ .  
Le vecteur des résidus

$$\vec{r} = A\vec{f}_a - b = \begin{bmatrix} \ddot{\chi}_1(\vec{f}_a) \\ \vdots \\ \ddot{\chi}_n(\vec{f}_a) \end{bmatrix} \text{ est tel que les } p_i \text{ dont le contact va cesser vérifient } r_i > 0$$

Baraff emploie une approche similaire pour traiter le cas de collisions simultanées.

#### 4.2.2 Contact d'un objet rigide articulé avec des parois fixes

L'approche présentée précédemment est coûteuse et parfois trop sophistiquée dans le cas où l'objet rigide articulé entre en contact avec des parois fixes.

Dans le cas du contact avec le sol, Wilhelms [Wil87] propose une approximation du calcul de la force de réaction :

1. répartir le poids de l'objet articulé sur les liens en fonction des enfoncements respectifs des points de contact dans le sol,
2. ajouter un ressort dans le cas où l'objet pénètre dans le sol,
3. modéliser le frottement dans le calcul de la composante tangentielle.

Cette modélisation est simple et rapide mais introduit des effets d'oscillation : la force de réaction est non nulle uniquement quand le lien pénètre dans le sol.

Dans le cas de contacts avec des parois dont les plans sont parallèles aux plans principaux du repère fixe <sup>1</sup>, Verroust [Ver90] calcule une force de réaction :

- à partir des forces extérieures appliquées sur l'objet et du poids du lien concerné
- comprenant un ressort et une force tangentielle modélisés de la même façon que chez Wilhelms.

La condition sur les plans des parois permet de traiter indépendamment les contact d'un lien avec des parois non parallèles.

---

<sup>1</sup> cas des murs, du sol et du plafond par exemple

## Chapitre 5

# Conclusion

L'utilisation de la dynamique pour contrôler l'animation d'objets rigides articulés a conduit à différents types d'approches :

- Armstrong et Green ainsi que Featherstone ont présenté des méthodes de résolution qui privilégient l'aspect « temps de calcul » ;
- Isaacs et Cohen ont plutôt cherché à modéliser une vaste famille de mouvements et d'objets et ont proposé l'introduction de comportements génériques qui permettent de mieux contrôler l'animation ;
- Brotman et Netravali ou Witkin et Kass ont, de façon parallèle, abordé le problème du contrôle du mouvement avec une approche de type « optimisation » sans toutefois lever les difficultés posées par la mise en œuvre de contraintes globales dans un système d'équations numériques.
- Le problème des interactions entre objets apparaît de manière naturelle dès que l'on veut automatiser le processus de création du mouvement. Celui-ci reste incomplètement résolu malgré les contributions significatives de Moore et Wilhelms et de Hahn ainsi que celle de Baraff qui est la plus rapide mais nécessite néanmoins la mise en œuvre d'algorithmes de résolution numérique complexes et coûteux.

On aimerait pouvoir disposer de méthodes de modélisation aussi bien géométriques que comportementales d'un emploi simple, voire intuitif pour un animateur. Le coût du temps de calcul doit rester un critère fondamental pour assurer une utilisation souple et conviviale. En fait, il faudrait déterminer ce qu'est le réalisme d'un mouvement, du point de vue d'un animateur, pour pouvoir définir des méthodes et des outils pour y accéder.

**Partie III**  
**Animation dynamique d'objets déformables**

## Chapitre 6

# Modéliser et animer des objets déformables

Un intérêt croissant s'est manifesté ces dernières années pour des systèmes capables de modéliser et d'animer des matériaux déformables, élastiques ou même inélastiques. Les déformations et le mouvement de tels objets dépendent de paramètres physiques propres à la matière qui est simulée : raideur, propagation des déformations, comportement élastique ou plastique, taux de compressibilité, seuil de rupture...

Les recherches qui ont été effectuées dans ce domaine se regroupent selon quatre grands axes :

- une première série d'approches repose sur la théorie mécanique des milieux continus : le modèle initial de [TPBF87], basé sur une formulation non linéaire de l'énergie de déformation élastique, a été suivi de plusieurs extensions, qui permettent d'animer des objets « assez rigides » [TW88], et de traiter certaines déformations inélastiques [TF88].
- d'autres approches, qui se sont développées en parallèle, décrivent les objets déformables à partir d'éléments mécaniques discrets, souvent couplés avec d'autres composants, purement géométriques. Les systèmes modulaires qui en résultent [Luc85, LC86, TPF89, Mil88, CHP89, GVP90]) permettent d'animer en un temps raisonnable et avec un bon réalisme visuel des objets d'apparence complexe, constitués de matériaux composites.
- les techniques d'optimisation de [PB88] peuvent venir compléter l'une des approches précédentes : elles permettent d'imposer des contraintes de comportement lors de l'animation des objets.
- enfin, nous ne décrirons pas ici la méthode d'analyse modale développée par Pentland et Williams [PW89], qui correspond à un tout autre point de vue. On pourra se référer à [Gas90] pour une étude détaillée de cette technique.

Notons que les deux types d'approches « modèles continus » et « systèmes mécaniques discrets » ont été expérimentés par Georges Dumont, Bruno Arnaldi et Gérard Hégron, dans le cadre de leur système complet d'animation dynamique basé sur la résolution symbolique des équations (voir [DAH89, Dum90]).

## 6.1 Approches utilisant des modèles continus

### 6.1.1 Modèle de Platt, Terzopoulos, Fleischer et Barr

Les premiers travaux proposant un modèle de matériau régi par les équations de l'élasticité ont été présentés par Terzopoulos, Platt, Barr et Fleischer en 1987 (voir [TPBF87]) : un objet déformable  $\Omega$ , de paramétrisation  $x(u, t) = (x_1(u, t), x_2(u, t), x_3(u, t))$  (avec  $u = (u_1, u_2, u_3)$  pour un solide,  $u = (u_1, u_2)$  pour une surface), est régi par l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \gamma \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon(x)}{\partial x} = f(x, t) \quad (6.1)$$

- $\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial x}{\partial t} \right)$  traduit l'inertie du modèle.
- $\gamma \frac{\partial x}{\partial t}$  représente les forces de frottement (le système n'est pas conservatif).
- $\frac{\partial \epsilon(x)}{\partial x}$  est la réponse élastique du matériau, qui traduit la minimisation au cours du temps de l'énergie potentielle de déformation  $\epsilon(r)$ .
- $f(x, t)$  est la somme des forces extérieures appliquées au système.

L'animation est produite en résolvant l'équation (6.1) à chaque instant, ce qui fait intervenir les étapes suivantes :

1. calcul de l'énergie potentielle  $\epsilon$ , qui joue le rôle d'une mesure de la déformation. Cette énergie doit être nulle pour un simple déplacement rigide de l'objet, ce qui interdit l'utilisation d'une formule linéaire. Soit  $G$  le tenseur métrique associé à l'objet (matrice  $3 \times 3$  s'il s'agit d'un solide,  $2 \times 2$  pour une surface), et  $B$  son tenseur de courbure s'il s'agit d'une surface élastique ( $n$  est le vecteur normal unitaire sortant de la surface au point  $x(u, t)$ ) :

$$G_{ij}(x(u, t)) = \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_j}$$

$$B_{ij}(x(u, t)) = n \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$$

L'énergie  $\epsilon(x)$  est donnée par :

$$\epsilon(x) = \int_{\Omega} \|G(r) - G^0(r)\|^2 du_1 du_2 du_3 \quad \text{pour un solide}$$

$$\epsilon(x) = \int_{\Omega} \|G(r) - G^0(r)\|^2 + \|B(r) - B^0(r)\|^2 du_1 du_2 \quad \text{pour une surface}$$

Les différents types de matériaux élastiques sont obtenus en faisant varier la norme utilisée. Par exemple, pour un solide isotrope répondant à la loi d'Hooke, et dont les constantes de Lamé sont  $\lambda$  et  $\mu$  (cf. section 1.3.3), on a :

$$\epsilon(x) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \lambda \left( \sum_i (G_{ii} - G_{ii}^0) \right)^2 + \mu \sum_{i,j} (G_{ij} - G_{ij}^0)^2 \right] du \quad (6.2)$$

2. calcul de  $\frac{\partial \epsilon(x)}{\partial x}$  :

**Théorème :** si  $J(y) = \int_A^B F(a, y, y') da$ , alors :

$$\frac{\partial J(y)}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{da} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \quad (6.3)$$

On applique ce théorème du calcul des variations en posant  $J = \epsilon$ ,  $a = u$ ,  $y = x$ .

3. calcul de la somme des forces extérieures : ces forces peuvent être la gravité, un frottement dû à un fluide visqueux, une force simulant la collision avec un objet rigide, une force attachant l'objet déformable au monde extérieur, par un ressort par exemple.
4. discrétisation de l'équation différentielle (6.1), en fonction d'un maillage de l'objet étudié, sous forme d'un système d'équations différentielles ordinaires (différences finies spatiales).
5. transformation du système précédent, grâce à une méthode aux différences finies temporelles, en un système d'équations linéaires de taille proportionnelle au nombre de nœuds du maillage; résolution de ce système à chaque intervalle de temps, en utilisant des méthodes d'analyse numérique classiques (décomposition  $LU$ , méthode de Gauss Seidel).

Le modèle que nous venons de décrire permet de modéliser et d'animer de manière très réaliste de nombreux matériaux déformables<sup>1</sup> (tissus élastiques, papier, barres de métal malléables, caoutchouc).

Très réaliste, il présente cependant les limitations suivantes :

- la lourdeur des calculs rend le système peu maniable : il est difficile de contrôler finement les effets obtenus en utilisant un système d'animation qui ne permet pas d'expérimentation interactive.
- aucun moyen de contrôle n'est fourni pour munir un objet déformable de propriétés globale (matériau incompressible par exemple).
- la complexité de la théorie de l'élasticité rend presque inabordable la simulation d'un objet qui ne serait ni isotrope, ni homogène. La technique précédente semble donc mal adaptée à l'animation des objets déformables composites que nous offre le monde réel (déformation du bras d'un personnage sous l'action des muscles, raquette de tennis...).
- il est difficile de décomposer un objet de forme complexe en éléments finis.
- les équations discrètes, déjà lourdes, deviennent mal conditionnées quand on augmente la rigidité des objets utilisés (voir [TW88]). Le mouvement d'un morceau de tissu presque inextensible (formation de plis...) serait par exemple très difficile à calculer.

---

<sup>1</sup>L'animation dynamique n'est pas le seul domaine d'application de ce modèle : Terzopoulos, Witkin et Kass [TWK87] l'utilisent pour reconstruire des formes 3D à partir de deux profils 2D : un objet constitué d'une « colonne vertébrale » souple enrobée de chair élastique se déforme peu à peu sous l'action de forces qui cherchent à lui donner les profils souhaités. L'énergie potentielle élastique comprend un terme supplémentaire, minimisé quand l'objet devient parfaitement symétrique.

### 6.1.2 Objets élastiques « assez rigides »

Nous avons signalé au paragraphe 6.1.1 que la recherche d'une énergie élastique qui ne soit pas affectée par un déplacement global de l'objet impose l'utilisation d'une formulation non linéaire (équations (6.2) et (6.2)). Les équations deviennent alors mal conditionnées dans le cas d'objets assez rigides. Pour résoudre ce problème, Terzopoulos et Witkin [TW88] ont proposé un modèle hybride :

L'objet, qui est décrit par  $q(u, t) = (q_1(u, t), q_2(u, t), q_3(u, t))$  dans un repère mobile lié à son barycentre, est décomposé en deux structures imbriquées :

$$q(u, t) = r(u) + e(u, t) \quad (6.4)$$

où :

- $r(u)$  est le composant « de référence », indéformable et obéissant aux lois de la dynamique des objets rigides ( $r$  ne dépend donc pas de  $t$  dans le repère mobile lié à l'objet);
- $e(u, t)$  est le composant « de déformation », qui décrit la différence entre la forme courante de l'objet et sa forme de référence. Globalement immobile par rapport au premier, ce second composant est animé grâce à la formule d'élasticité linéaire :

$$\epsilon(e) = \int E(\omega, e, e_u, e_{uu}...) du \quad (6.5)$$

où la densité d'énergie élastique  $E$  est une simple combinaison linéaire des dérivées partielles successives de  $e(u, t)$ , notées  $e_u, e_{uu}...$  (voir [TW88]).

Il est intéressant de comparer ce modèle hybride avec la méthode initiale de [TPBF87] (voir [TF88] pour plus de précisions) :

- l'utilisation d'une formule linéaire pour le calcul de l'énergie permet un gain de temps appréciable par rapport au modèle initial. D'autre part, plus l'objet animé est rigide, plus les équations sont bien conditionnées.
- l'élasticité linéaire est plus éloignée de la réalité physique que la formule non-linéaire utilisée dans [TPBF87] ; cependant, elle reste suffisamment réaliste pour de petites déformations.
- la méthode hybride précédente convient bien à des solides, mais, contrairement au premier modèle, n'est pas adaptée à l'animation de surfaces souples (comme des tissus) à cause de l'utilisation du composant rigide de référence.

### 6.1.3 Déformations inélastiques

Lors d'une déformation inélastique, la forme de l'objet à l'équilibre n'est pas simplement fonction de sa forme initiale et des forces extérieures qui lui sont appliquées : elle dépend également de tout l'historique des déformations qu'il a subies. En général, l'objet ne retrouve jamais sa forme initiale.

Terzopoulos et Fleischer [TF88] proposent de généraliser le modèle mixte du paragraphe 6.1.2 de manière à modéliser certaines transformations inélastiques : le composant de référence, qui devient une fonction du temps  $r(u, t)$ , est peu à peu modifié au cours des déformations successives, de manière à rendre le processus irréversible. Les déformations traitées sont les suivantes :

- la viscoélasticité, pour laquelle

$$\frac{dr}{dt}(u, t) = \frac{1}{\eta(u)} e(u, t) \quad (6.6)$$

où  $\eta(u)$  représente la constante de viscoélasticité au point de paramètre  $u$  ;

- la plasticité, pour laquelle le composant de référence absorbe la déformation dès que cette dernière dépasse un certain seuil ;
- les fractures, qui sont modélisées en introduisant des discontinuités ponctuelles dans le cas où la déformation dépasse une valeur critique. Les lieux où une fracture est possible sont des points prédéterminés de l'objet. Au cours d'une animation, la discontinuité se propage automatiquement vers les points où la déformation est la plus forte.

Notons que ces méthodes se traduisent par l'ajout de processus spécialisés pour chaque déformation inélastique. Elles ne traduisent donc pas de vision unifiée des différents comportements. Il sera intéressant de les comparer avec le point de vue particulier d'Annie Luciani, présenté plus bas.

## 6.2 Systèmes modulaires intégrant des composants mécaniques discrets

Comme nous venons de le voir, Terzopoulos, Witkin, Platt et Fleischer se sont peu à peu éloignés des véritables équations de l'élasticité, qui leur fournissaient des résultats très réalistes mais peu maniables, pour diversifier le modèle initial en le décomposant en deux niveaux mécaniques imbriqués [TW88, TF88].

Plus généralement, les équations dynamiques des milieux continus semblent peu adaptées à l'animation des objets non-homogènes complexes que nous offre le monde réel, sauf peut-être dans le cadre de modèles spécifiques<sup>2</sup>. Ces objets complexes, personnages, animaux, éléments du corps humain, sont pourtant des sujets d'animation privilégiés.

De nombreux auteurs ont opté pour des approches qui, bien qu'utilisant toujours la dynamique, ne sont pas inspirées des équations physiques des milieux continus : les objets déformables (éventuellement composites), sont décrits sous forme discrète, en combinant des éléments mécaniques simples (typiquement, des masses ponctuelles reliées par des ressorts ou des frottements visqueux), et d'autres éléments pouvant être purement géométriques. Parfois spécifiques à une application donnée, ces approches sont remarquables pour la simplicité et l'interactivité du contrôle, ainsi que le naturel des effets obtenus.

---

<sup>2</sup> Nous décrivons dans le chapitre 7 le modèle de Gourret et Thalmann, qui modélise le contact entre une main et une balle déformable

### 6.2.1 CORDIS-ANIMA : le formalisme « masse-ressort-frottement »

Les travaux d'Annie Luciani et de Claude Cadoz ont été inspirés par l'idée suivante : il n'est pas toujours nécessaire de simuler la véritable structure physique d'un objet réel pour restituer ou approcher son mouvement ; l'important est de savoir construire et gérer une **représentation mécanique** des objets ou des phénomènes à animer.

Les auteurs ont donc choisi de construire tous leurs objets déformables à partir des « éléments mécaniques minimaux » que constituent les masses, ressorts et frottements. Plus précisément, les objets sont constitués par un ensemble de masses élémentaires reliées entre elles grâce à des « liaisons conditionnelles » (du type ressort amorti par exemple), qui ont la particularité d'évoluer au cours du temps. Le système CORDIS-ANIMA [Luc85] qui en résulte constitue à la fois un modéleur et un simulateur d'objets déformables.

Le formalisme particulière qui a été choisi offre :

- une gestion unifiée des interactions entre objets et à l'intérieur d'un objet (nous reviendrons plus précisément sur la gestion des interactions au chapitre 7) ;
- une animation et un contrôle gestuel en temps réel.

### Le problème de l'hybridation géométrique

Certaines parties d'un objet déformable complexe (la peau d'un personnage par exemple) jouent un rôle négligeable dans la physique du mouvement. Luciani et Cadoz [LC86] proposent de ne pas tenir compte des interactions dues à ces parties de l'objet, pour lesquelles des modèles purement géométriques suffisent.

Dans CORDIS-ANIMA, les points géométriques sont modélisés par des points mécaniques de masse nulle. Trois types de « liaisons géométriques » sont proposées pour les relier à la partie mécanique des objets (voir figure 6.1) :

- liaison solide indéformable ;
- articulation géométrique : le point  $P$  se déduit de deux autres points par conservation de deux distances ;
- comportement plastique : le point  $P$  se déduit de deux autres points par conservation de la surface du triangle qu'ils forment.

Les points géométriques sont entièrement passifs : influencés par les points mécaniques, ils ne peuvent pas agir à leur tour sur ces derniers.

Comme nous le verrons, la technique d'hybridation géométrique a été reprise dans une grande partie des modèles spécifiques à une application qui vont être maintenant présentés. Les principaux avantages de l'hybridation sont :

- l'optimisation du contrôle du mouvement, grâce à la suppression de degrés de liberté inutiles ;
- la possibilité d'utiliser une représentation non discrète (surface paramétrique...) pour les composants géométriques, ce qui peut améliorer l'aspect de l'objet qui est animé ;

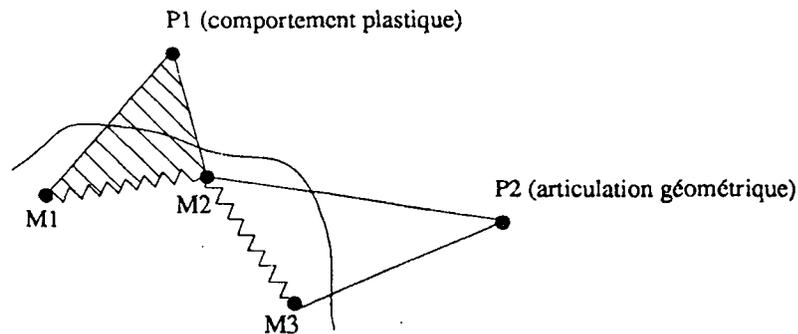


Figure 6.1: Liaisons géométriques

- une plus grande liberté dans le contrôle de l'animation, puisque des déformations purement géométriques peuvent être combinées avec les déformations dues aux composants mécaniques (nous verrons en particulier que les déformations géométriques « FFD » de [SP86] sont utilisées pour l'animation de personnages [CHP89]).

### 6.2.2 Matériau capable de fondre

La méthode proposée dans [TPF89] permet de modéliser un matériau qui fond sous l'action de la chaleur. Le changement d'état (passage solide-liquide) se traduit par la modification des interactions entre les masses élémentaires du système :

- à l'état solide, le matériau est représenté par un réseau d'éléments cubiques, constitués de masses élémentaires reliées entre elles par des « ressorts thermoconducteurs ». Ces derniers propagent la chaleur grâce à une équation aux dérivées partielles (« l'équation de la chaleur ») ; leur raideur varie en fonction de la température des masses qu'ils relient. A partir d'une certaine température, les ressorts thermoconducteurs « fondent ».
- dès qu'une particule est séparée de ses voisines, on calcule son mouvement en simulant la mécanique moléculaire. Deux types de forces d'interaction sont utilisées : des forces d'attraction à longue portée et des forces de répulsion à courte portée.

Notons que :

- ce modèle à base de liaisons conditionnelles entre les particules est un cas particulier du formalisme général proposé par Annie Luciani dans son système CORDIS-ANIMA ;
- Terzopoulos, qui a contribué pour une très grande part au développement des modèles continus, les abandonne ici au profit de composants mécaniques discrets, plus maniables.

### 6.2.3 Animation de serpents

Miller [Mil88] utilise un système modulaire hybride (mécanique et géométrique) pour animer des serpents et autres animaux rampants :

- le premier niveau est un module mécanique : le corps de l'animal est constitué d'une juxtaposition de boîtes rectangulaires, dont les sommets sont munis de masses élémentaires, et qui comportent des ressorts le long des arêtes et des diagonales.
- un second module, purement géométrique, modélise la surface de la peau de l'animal : une technique d'extrusion classique engendre cette surface à partir des positions des masses élémentaires.

Le modèle est animé en résolvant à chaque instant, pour chaque masse élémentaire, l'équation dynamique  $\sigma \vec{f} = m \cdot \vec{a}$ , grâce à une méthode aux différences finies.

La difficulté, pour obtenir une animation réaliste de serpents, résidait dans la recherche des forces extérieures à appliquer aux masses élémentaires. Pour simuler le jeu des muscles du serpent en train de ramper, Miller a choisi d'appliquer aux ressorts du niveau mécanique un ensemble de forces sinusoïdales, qui les contractent alternativement. Des forces de frottement directionnelles modélisent les écailles qui empêchent l'animal de reculer.

La pénétration des modèles de serpents dans le support rigide de la scène est évitée en replaçant les masses ponctuelles hors du support, et en inversant la composante verticale de leur vitesse.

#### 6.2.4 Animation de personnages : muscles et chair déformable

Dès 1976, Burtnyk et Wein [BW76] ont proposé d'animer un squelette articulé dont le mouvement guiderait les déformations d'une peau purement géométrique. Chadwick, Haumann et Parent [CP88, CHP89] ont repris cette idée. Leur modèle hybride de personnage comporte trois niveaux de modélisation imbriqués, aux composants mécaniques ou géométriques :

- le premier module est constitué d'un « squelette » dont le mouvement est prédéfini : il peut s'agir d'une ossature mécanique qui a été animée grâce à la dynamique des objets rigides articulés, ou bien simplement d'une structure géométrique au mouvement défini grâce à des positions clés.
- un second modèle, basé sur des propriétés dynamiques, simule la contraction ou l'élongation des muscles, ainsi que le comportement des zones de chair déformable (joues du personnage...) :
  - chaque muscle est modélisé grâce à deux boîtes voisines de déformation FFD [SP86]. La déformation dépend de la position des articulations voisines et du type de muscle désiré. Notons que ce ne sont pas les muscles qui dirigent le mouvement du squelette, mais bien le contraire !
  - les zones de chair déformable, et leur comportement d'oscillation visqueuse après déformation, sont obtenues en associant des masses aux points de contrôle des boîtes FFD, et en les reliant entre eux par des ressorts à frottement visqueux. Les déformations dynamiques des boîtes se répercutent alors sur la chair qu'elles contiennent.

Notons que l'utilisateur peut intervenir à un niveau plus fin, en agissant directement sur les points de contrôle des FFD.

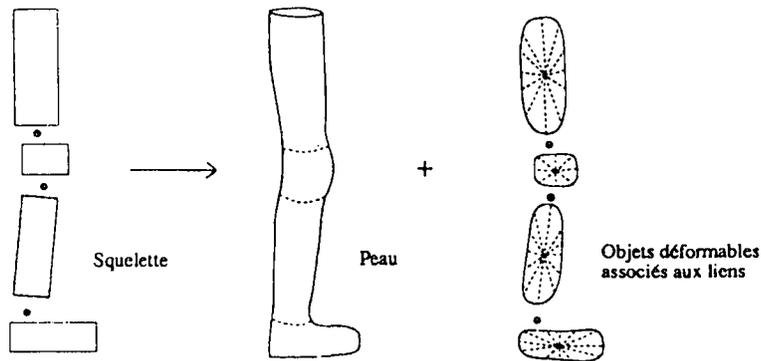


Figure 6.2: Enrobage automatique d'un squelette

- enfin, une surface purement géométrique est plaquée sur le niveau précédent pour délimiter la « peau » du personnage.

La technique ci-dessus illustre parfaitement l'intérêt d'un modèle partiellement dynamique (et partiellement géométrique) pour animer des objets aussi complexes qu'un personnage. L'utilisation de différents niveaux de modélisation imbriqués permet un contrôle à la fois simple et efficace du mouvement et des déformations.

On peut cependant regretter que rien n'ait été prévu dans ce modèle pour détecter et traiter les collisions éventuelles entre les différentes parties du personnage, ou avec d'autres objets du monde extérieur.

### 6.2.5 Objets déformables vertébrés

Marie-Paule Gascuel, Anne Verroust, et Claude Puech [GVP90, Gas90, Ver90] proposent un modèle plus général d'objets déformables complexes : la structure « d'objet déformable vertébré » comporte trois niveaux de modélisation mécaniques et géométriques :

- le premier niveau est constitué par un « squelette » rigide articulé (arborescence de « liens » reliés entre eux par des charnières). Il faut noter que le mouvement de ce squelette n'est pas prédéfini, contrairement à la méthode envisagée dans [CHP89] ;
- un élément de matériau déformable est associé à chaque lien pour modéliser la chair élastique qui le recouvre.
- une peau purement géométrique (surface B-spline) recouvre le tout.

Chaque élément de matériau déformable est lui même structuré en deux modules (voir [Gas89a, Gas90]) :

- un « niveau mécanique de base » simule les contractions axiales de la matière déformable : il est constitué d'un ensemble de cônes déformables modélisés par des ressorts amortis d'axes fixes disposés « en étoile » autour du centre d'inertie de l'élément ;

- un second niveau gère la propagation des déformations, selon des critères qui peuvent être mécaniques ou géométriques (volume constant, surface extérieure constante).

Le mouvement est calculé grâce à une animation dynamique simultanée des différents modules, ce qui permet en particulier de modifier le mouvement du squelette lorsque la couche de matériau déformable est soumise à un choc.

Notons qu'une méthode « d'enrobage automatique » est proposée pour construire très rapidement un objet déformable vertébré à partir d'un squelette articulé fourni par l'utilisateur. Pour que toute déformation d'un élément déformable soit immédiatement transmise à la peau, les points de contrôle de cette dernière sont placés aux extrémités des ressorts des composants déformables.

Ce modèle, interactif sur une station graphique standard, offre un contrôle simple et efficace du matériau déformable recouvrant les objets. Comme nous le verrons dans le chapitre 7, il permet de surcroît de détecter et de traiter automatiquement tous types de collisions et de contacts (avec des objets rigides ou déformables, vertébrés ou non, dynamiques ou statiques).

### 6.3 Techniques d'animation sous contraintes

L'une des difficultés pour animer un objet déformable, qu'il soit modélisé grâce aux équations des milieux continus ou bien à partir d'éléments mécaniques discrets, réside dans le contrôle de ses propriétés globales, ou de son mouvement. On peut par exemple souhaiter que l'objet suive une certaine trajectoire, qu'il réagisse de manière réaliste à un choc avec un solide polygonal, que sa compressibilité soit limitée, ou que la matière dont il est constitué soit modelable. Platt et Barr [PB88] proposent d'imposer ce genre de contraintes de comportement à un modèle déformable.

L'énergie totale d'un objet en mouvement est une fonction constamment décroissante, puisqu'une partie de cette énergie se dissipe en chaleur. Animer un objet déformable auquel sont imposées des contraintes revient donc à résoudre un problème d'optimisation. Certaines techniques d'optimisation ont déjà été proposées dans le cadre de l'animation d'objets rigides articulés (voir [BN88, WK88, GV89]), ou pour la reconstruction d'objets (voir [TWK87]). La méthode la plus couramment utilisée consiste à ajouter à l'énergie totale de l'objet des « termes de pénalisation » associés à chaque contrainte (ces termes sont minimisés quand la contrainte correspondante est vérifiée). Platt et Barr soulignent les avantages de cette approche - traitement d'un nombre quelconque de contraintes avec recherche d'un compromis si elles sont incompatibles, pas d'ajout d'équation différentielle supplémentaire - mais aussi ses inconvénients :

- les contraintes ne sont jamais exactement vérifiées,
- les équations deviennent mal conditionnées quand on augmente la force des contraintes (c'est à dire le coefficient du terme correspondant dans l'équation qui donne l'énergie).

Pour leur part, Platt et Barr proposent deux nouvelles méthodes d'animation sous contraintes :

### 6.3.1 Contraintes « de réaction »

Il s'agit d'un compromis entre une méthode de projection et la dynamique inversée : à chaque instant, on calcule pour chaque masse élémentaire ou pour chaque élément fini la force à ajouter aux forces extérieures pour que la contrainte soit exactement vérifiée à l'instant d'après. Pour cela, on considère le vecteur  $D = M_0 \vec{M}$  qui représente la déviation entre la position que va prendre le point et la position qui devrait être la sienne si la contrainte était vérifiée. Après n'avoir gardé que la composante des forces extérieures qui est orthogonale à  $D$ , on ajoute une « force de contrainte » permettant de déplacer le point jusqu'en  $M$ .

**Remarque :** Cette technique diffère de celle qui était proposée par Barzel et Barr dans le cadre des objets rigides articulés (voir [BB87, BHBS87, BB88]). En effet, la force ajoutée ici n'est pas destinée à minimiser peu à peu l'écart avec la ou les contrainte(s), mais à imposer en une seule itération qu'une contrainte donnée soit parfaitement vérifiée.

Une contrainte « de réaction » peut être utilisée en particulier :

- pour contraindre certains éléments de masse du modèle à suivre un chemin prédéfini, paramétré par le temps. L'objet se déforme alors comme s'il était « tiré » par ces éléments.
- pour éviter les interpénétrations avec un solide polygonal. Si le solide est lui même un modèle dynamique, on peut simuler le principe de l'action et de la réaction en lui appliquant une force opposée à la force de contrainte de la masse élémentaire.

Les avantages des contraintes de réaction sont les suivants :

- elles sont immédiatement et parfaitement vérifiées,
- la méthode n'utilise que des forces, qui sont faciles à calculer pour des contraintes suffisamment simples.

La méthode présente pourtant certaines limitations :

- on ne peut appliquer qu'une seule contrainte à la fois à chaque masse élémentaire (ou chaque élément fini) du système,
- la technique ne permet pas de simuler les propriétés globales d'un objet flexible, puisque chaque élément de masse est contraint indépendamment des autres.

### 6.3.2 Contraintes du Lagrangien augmenté

La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de transformer un problème d'optimisation sous contraintes en un problème d'optimisation simple, en ajoutant des équations différentielles supplémentaires, ainsi que de nouveaux inconnus, les « multiplicateurs de Lagrange » (notés  $\lambda$ ).

Soient  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , et  $f(x)$ ,  $g(x)$  deux fonctions à valeur dans  $\mathfrak{R}$ . Le problème :

$$\text{minimiser } f(x) \text{ sous la contrainte } g(x) = 0 \quad (6.7)$$

se traduit par les équations du Lagrangien augmenté :

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) - cg(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \quad (6.8)$$

$$\dot{\lambda} = g(x) \quad (6.9)$$

Ces équations se généralisent aux cas de contraintes multiples, ou de contraintes définies par des inégalités (voir [PB88] pour plus de détails).

La technique du Lagrangien augmenté peut être utilisée pour imposer certaines propriétés globales à l'objet flexible. Platt et Barr proposent de modéliser :

- des matériaux se déformant à volume constant. Pour cela, chaque élément fini est rendu incompressible.
- des matériaux modelables, ne retrouvant pas leur forme initiale après une trop forte déformation (comportement plastique). Pour cette application, la contrainte est donnée par une inégalité.

On remarque que, tout en imposant une résolution beaucoup plus complexe (ajout d'équations différentielles et d'inconnus supplémentaires), la méthode du Lagrangien augmenté est beaucoup plus générale que celle des contraintes de réaction. En effet :

- plusieurs contraintes peuvent intervenir simultanément,
- ces contraintes peuvent être non linéaires, ou se traduire par des inégalités.

## 6.4 Comparaison des différentes approches

Les méthodes d'animation d'objets déformables qui reposent sur la simulation pure des équations de la dynamique présentent de nombreux inconvénients pratiques lors de leur utilisation par un animateur non averti :

- les paramètres physiques à contrôler sont souvent peu intuitifs, et difficiles à gérer par un non spécialiste.
- ils correspondent souvent mal aux notions auxquelles on aimerait avoir accès durant l'animation : il n'est pas évident par exemple de spécifier des propriétés globales (matériau incompressible...).

Cette difficulté du contrôle peut être résolue en partie grâce à des techniques d'optimisation. Cependant, il reste difficile de modéliser des objets de forme complexe à l'aide d'éléments finis (des procédures automatiques peuvent être utilisés, mais il est très difficile de trouver les bonnes conditions aux limites). En définitive, il paraît irréaliste de vouloir simuler par un modèle trop proche de la physique les objets composites complexes que nous offre le monde réel, sauf peut-être, comme l'ont fait Gourret, Thalmann, et Magnénat-Thalmann (voir chapitre 7), en construisant à la main un modèle spécifique pour chaque scène à animer.

A l'opposé, et bien que présentant moins de réalisme, les systèmes modulaires utilisant des composants mécaniques discrets ont l'avantage de simplifier la modélisation (et donc

l'animation) des objets complexes : ces derniers sont décomposés en une série de structures imbriquées dont les paramètres sont indépendants ; l'utilisateur peut donc intervenir directement au niveau où il le désire, en faisant momentanément abstraction de tous les autres paramètres, ce qui lui permet d'affiner au maximum la représentation des objets. Si ces modèles ne conviennent pas à la simulation physique de matériaux existants, cette limitation fait aussi leur richesse, puisque ils permettent d'imiter des comportements pour lesquels la physique ne donne pas vraiment de réponse (par exemple, comment animer un serpent en train de ramper, ou les muscles d'un personnage, avec la dynamique des milieux continus ? ). La simplicité des équations utilisées offre une bonne interactivité, qui permet à l'animateur de modifier immédiatement ses paramètres en fonction de l'effet désiré, réaliste ou non.

## Chapitre 7

# Le problème des interactions entre objets

Il serait incomplet d'analyser et de comparer différents modèles d'animation dynamique sans étudier à fond un aspect fondamental : leur faculté à détecter et à répondre automatiquement aux interactions avec le monde extérieur.

La plupart des systèmes d'animation du commerce ne sont pas capables de détecter les interactions : après avoir décrit les trajectoires au point par point pour chaque objet en présence, l'utilisateur peut avoir la surprise de voir deux d'entre eux passer paisiblement l'un à travers l'autre, produisant un effet pour le moins déconcertant.

Si le problème purement cinématique de la détection des collisions concerne tous les logiciels d'animation, une seconde gageure vient s'ajouter pour les systèmes d'animation dynamique : ces derniers doivent savoir répondre de manière physiquement réaliste aux interactions éventuelles. Un système d'animation dynamique n'incluant pas ces possibilités, comme par exemple celui de Chadwick, Haumann, et Parent [CP88, CHP89], doit se cantonner à l'animation d'un seul objet, qui doit alors être très complexe pour produire suffisamment d'effet. En général, les systèmes de ce type doivent tout de même recourir à des artifices pour que l'objet animé n'interpénètre pas les supports rigides immobiles de la scène : Terzopoulos propose par exemple dans [TPBF87] d'entourer les obstacles (de forme simple) d'un champ de force exponentiel. Miller [Mil88] gère les interactions de ses serpents avec le sol grâce à une résolution analytique au niveau de chaque masse élémentaire. Comme il le fait lui-même remarquer, cette solution ne fonctionnerait pas pour un support rigide de type escalier, ou pour des contacts entre plusieurs serpents, la détection devenant alors trop imprécise.

Le chapitre 4 a déjà montré les problèmes posés par le traitement des collisions et des contacts entre objets rigides, qu'ils soient articulés ou non. Dans le cas d'objets déformables, le problème est d'autant plus complexe que les chocs ne sont plus instantanés ni conservatifs, une partie de l'énergie se dissipant en déformation ; il ne suffit plus de trouver la vitesse et l'accélération des objets juste après le choc, mais aussi de calculer leur nouvelle forme pendant toute la durée du contact, et après celui-ci.

L'application de la théorie des chocs ou du contact (problème de Hertz, par exemple) à des solides déformables conduit même dans le cas de l'élasticité linéaire présentée dans la

section 1.3 à des problèmes non linéaires qui entraînent des calculs dissuasifs : personne n'a proposé jusqu'à présent de recourir à cette technique.

Même dans le cas d'objets créés à partir d'un modèle continu, la gestion des interactions ne pourra donc intervenir que dans la phase où l'objet est déjà discrétisé. Cette contrainte multiplie d'autant les problèmes de détection, puisque le calcul doit être fait sur des objets décrits au point par point, par un maillage délimitant des éléments finis.

Des solutions souvent fictives (en ce sens qu'elles font appel, à l'instant du choc, à l'introduction arbitraire d'éléments mécaniques supplémentaires), et partielles (ne traitant parfois que les chocs avec un objet rigide, ou bien uniquement les contacts) ont cependant été proposées. La suite de ce chapitre présente en détail les plusieurs d'entre elles, à savoir :

- la modélisation des contacts entre objets décrits par des éléments finis, qui est utilisée par Gourret, Thalmann, et Magnénat-Thalmann [GTT89a] [GTT89b] dans le cadre d'une main saisissant une balle déformable,
- le point de vue de Luciani en ce qui concerne les systèmes modulaires à éléments mécaniques discrets,
- la modélisation des interactions faisant intervenir des « objets déformables vertébrés » [GVP90, Gas90, Ver90],
- l'approche par « contraintes de réaction » de Barzel et Barr, qui traite le cas d'un choc entre un objet déformable et un solide polygonal,
- la solution très générale de Moore et Wilhlems, basée sur l'introduction d'un ressort fictif au moment du choc,

Nous verrons en conclusion les idées à exploiter, mais aussi les limitations de toutes ces techniques, qui font des interactions entre objets déformables un problème encore partiellement ouvert.

## 7.1 Modélisation d'une main saisissant une balle déformable

Le système proposé par Gourret, Thalmann, et Magnénat-Thalmann [GTT89a] [GTT89b] permet de modéliser les contacts entre une main résolument réaliste et une balle déformable. Basé sur la théorie dynamique des milieux continus, leur modèle utilise une représentation des objets sous forme d'éléments finis.

Remarquons en premier lieu qu'il ne s'agit pas ici d'une simulation dynamique classique, en ce sens qu'on ne se propose pas de calculer à chaque instant les déplacements qui résultent de forces extérieures connues : l'utilisateur conduit lui même le mouvement de la main en spécifiant des positions clés de son squelette. Le modèle permet de calculer, pour chaque image, les déformations « à l'équilibre » de la main et de la balle, ainsi que les forces appliquées par les os dans cette position.

### 7.1.1 Description du modèle

La simulation est basée sur le principe des travaux virtuels (voir section 1.2.5) : soit  $R$  la résultante des forces intérieures, et  $V$ ,  $S$ , et  $F$  représentant respectivement les forces extérieures de volume, de surface, et les forces ponctuelles. Les travaux de ces forces sont reliés par l'équation :

$$wR = wV + wS + wF \quad (7.1)$$

L'équation (7.1) est discrétisée grâce à une décomposition de la chair de la main et de la balle déformable en éléments finis. Certains des éléments associés à la main sont attachés à son squelette indéformable, dont la forme a été calquée avec précision sur une ossature réelle.

La relation entre déformation et force intérieure élastique, à l'équilibre ou pour de petites déformations est alors donnée par la relation globale :

$$KU = R \quad (7.2)$$

où  $K$  est une matrice dont la taille est fonction du nombre de nœuds du maillage, et qui représente la raideur du matériau, et  $U$  est le vecteur déplacement des nœuds.

### 7.1.2 Algorithme d'animation

Le calcul de l'animation est basé sur la remarque suivante : à partir du moment où les deux objets se touchent, ils ne forment plus qu'un seul modèle déformable. L'équation (7.2) modélise donc de manière globale la relation entre force intérieure élastique et déformation dans la réunion d'éléments finis « main + balle ».

Décrivons l'algorithme utilisé :

1. l'animateur a donné au départ une position de l'ossature. La chair de la main est déplacée en conséquence (sans tenir compte dans un premier temps de son caractère déformable).
2. on entame alors une série d'itérations :
  - (a) à partir de sa forme initiale, la balle est déformée ponctuellement pour éviter les interpénétrations, par simple remplacement de certains nœuds du maillage sur les facettes extérieures de la main.
  - (b) on calcule, grâce à l'équation matricielle (7.2), les déplacements de points à l'intérieur de la balle, et ainsi que les forces de réaction que la balle applique sur la peau.
  - (c) ces forces de contact étant fixées, l'équation (7.2) résolue pour les deux objets simultanément donne les déplacements des nœuds internes des objets, ainsi que les forces qui s'appliquent en retour sur les os. La chair de la main est déplacée en conséquence.

On s'arrête :

- si les forces intervenant au niveau des os sont trop fortes pour être physiquement réalistes (l'utilisateur devra alors modifier sa position de départ),

- si la chair de la main et la balle déformable ont « à peu près » atteint un état d'équilibre.

### 7.1.3 Discussion

Les points forts de cette méthode sont les suivants :

- la technique de contrôle est astucieuse : il est beaucoup plus facile pour l'animateur de décrire un mouvement précis en donnant les positions clé du squelette que s'il devait trouver les forces ou les couples à lui appliquer ; de plus, une aide précieuse est apportée par le système, qui signale les mouvements irréalistes.
- l'utilisateur peut faire abstraction de tout ce qui rend le mouvement très complexe, à savoir le caractère déformable des doigts et de la balle, tout en étant assuré d'un réalisme bien supérieur à celui qui aurait pu être obtenu manuellement.
- au total, il obtient une animation très réaliste faisant intervenir **un objet complexe et non-homogène** (à savoir une main) dans une **situation d'interaction** avec l'extérieur. Un film remarquable peut donc être réalisé.

On peut cependant relever un certain nombre de limitations, qui rendent l'utilisation d'une telle technique quelque peu anecdotique :

- l'application est très spécifique à une situation donnée : le modèle d'éléments finis est parfaitement réaliste, mais très complexe, et entièrement à reconstruire à la main chaque fois que l'on veut modéliser une autre scène.
- la lenteur des calculs avant d'atteindre, à chaque étape de l'animation, un état d'équilibre, paraît assez limitative. En effet, les itérations sont longues : chacune d'elles comprend en particulier une étape de détection (et de déplacement) des points de la balle qui ont pénétré dans le maillage de la main. Les auteurs n'évaluent pas le nombre d'itérations demandées pour s'approcher suffisamment d'un état d'équilibre, mais on peut en tout cas assurer que le calcul ne se fait pas en temps réel, ne serait-ce qu'en raison du nombre de nœuds des maillages !
- la lourdeur du système est encore augmentée par l'éventualité de retours en arrière dans le cas de forces non crédibles : l'utilisateur devra modifier la position clé qu'il avait donnée pour le squelette.
- la méthode paraît théoriquement justifiée pour calculer une position fixe de la main, mais on peut se demander si elle convient vraiment à la génération de scènes animées : un mouvement continu peut-il vraiment être vu comme une succession d'états d'équilibre ? Est-ce que ce type de modélisation de risque pas de poser des problèmes d'aliassage temporel, c'est à dire de saut entre deux images successives ? On pourrait le croire, puisque qu'à chaque étape de l'animation (c'est à dire pour chaque nouvelle position du squelette), les déformations des objets sont calculées par un processus itératif isolé, qui ne tient pas compte de la situation à l'instant précédent ; des divergences pourraient éventuellement apparaître, même à partir d'états initiaux très proches.

- Enfin, et par dessus tout, la simulation se limite au cas d'un contact doux et prolongé entre la main et la balle. Elle ne convient pas en particulier à la modélisation d'un choc, pour lequel il ne serait vraiment pas justifié de parler d'états d'équilibre pendant le temps du contact entre les objets, ni d'ailleurs au moment du rebond. Un système d'animation utilisant la technique précédente serait donc obligé de recourir à une série d'approches disparates pour simuler des situations (chocs et contacts) somme toute assez proches.

## 7.2 Interactions dans des systèmes modulaires discrets

Nous avons vu que les objets déformables qui interviennent dans le système CORDIS-ANIMA sont construits à base de liaisons conditionnelles reliant des masses ponctuelles. Un tel modèle permet de traiter les interactions entre objets comme des cas particuliers de liaisons : un ressort-amortisseur est placé en permanence entre chaque couple de masses élémentaires appartenant à deux objets différents. La raideur de ce ressort, nulle lorsque les deux éléments concernés sont suffisamment loin l'un de l'autre, est donnée par une fonction adéquate de leur distance lorsqu'ils se rapprochent, de manière à simuler une collision.

### 7.2.1 Les « éléments transmetteurs »

Dans le cas d'objets comportant des composants géométriques, la détection des interactions entre objets pose problème :

- bien que les points géométriques soient souvent utilisés pour modéliser la « peau » des objets, ils ne peuvent pas intervenir dans la détection des interactions, du fait de leur rôle purement passif ;
- d'autre part, les composants mécaniques sont eux-mêmes mal adaptés à la détection des interactions. En effet, leur disposition peut n'avoir qu'un rapport lointain avec la forme extérieure de l'objet.

Notons que ce problème est commun à tous les systèmes modulaires basés sur des éléments discrets. Par exemple, Miller y est également confronté dans son système d'animation de serpents : il ne peut ni utiliser la peau géométrique des serpents pour détecter les interactions, ni obtenir une détection suffisamment précise grâce aux masses élémentaires du composant mécanique (voir [Mil88]).

De plus, il faut noter la lourdeur d'une méthode de traitement des interactions reposant sur l'utilisation massive de liaisons conditionnelles (ce qui revient à tester à chaque instant toutes les possibilités d'interaction).

Annie Luciani [Luc88] propose de limiter ces problèmes en introduisant un troisième type de composants, les « éléments transmetteurs », qui jouent le rôle de points d'accès à travers lesquels les objets peuvent interagir. Ces points peuvent être choisis par l'utilisateur parmi les points mécaniques, ou bien être simplement reliés mécaniquement à ces derniers (les interactions avec l'extérieur doivent en effet avoir une répercussion sur le niveau mécanique, qui engendre le mouvement et les déformations des objets). Une interaction sera détectée

si certains points transmetteurs de différents objets deviennent suffisamment proches. La détection au voisinage de composants géométriques peut donc être obtenue en leur adjoignant des points transmetteurs.

#### Remarques :

- dans le cas d'objets hybrides comportant des éléments géométriques, l'existence de trois types de points au comportement distinct (éléments mécaniques, géométriques, et transmetteurs) risque de multiplier les problèmes que se pose l'utilisateur lors de la modélisation des objets. En particulier, de quels points de contact entre les objets aura-t-il besoin au cours de l'animation ? Comment doit-il les relier aux éléments mécaniques pour obtenir un effet adéquat ? Quelle loi d'interaction utiliser ? L'animation ayant lieu en temps réel, l'animateur pourra cependant améliorer petit à petit la description des objets en fonction des résultats obtenus.
- d'un autre côté, l'introduction d'un troisième type de points a l'avantage d'augmenter la liberté de l'utilisateur : on peut décider que les éléments transmetteurs sont ceux des points mécaniques qui sont placés sur la « peau » de l'objet, ce qui limite les tests d'interaction par rapport à une utilisation directe du niveau mécanique ; si on le désire, les éléments mécaniques peuvent au contraire être très éloignés de la forme extérieure de l'objet, la détection des interactions se faisant grâce à des éléments transmetteurs spécifiques, placés sur son contour.

#### 7.2.2 Les « agglomérats » de particules élémentaires

Stéphane Jimenez et Annie Luciani ont proposé en 1989 un nouveau type d'optimisation du traitement des interactions, bien adapté aux objets « homogènes » [JL89] : il s'agit de modéliser les objets par des agglomérats de particules de matière appelées « billes », et munies d'une sphère de non-entrance (voir figure 7.1). Pour limiter le nombre et la complexité des interactions, on utilise trois couches successives de matériau, caractérisées par le type des liaisons entre leurs billes :

- le « noyau », constitué d'une ou plusieurs grosse(s) bille(s), représente la zone interne la plus rigide de l'objet.
- le « derme » simule la couche de matière très déformable qui constitue intuitivement la « chair » de l'objet. Modélisé par des billes attirées par les éléments du noyau mais se repoussant entre elles, le derme tend à se répartir uniformément autour du noyau.
- le « épiderme » assure la cohésion de l'ensemble, grâce à des interactions simulant une certaine tension de l'enveloppe superficielle de l'objet. Cette couche de matière gère à elle seule toutes les interactions avec le monde extérieur, sauf si on désire modéliser un objet capable de ruptures.

Les avantages de ce modèle sont les suivants :

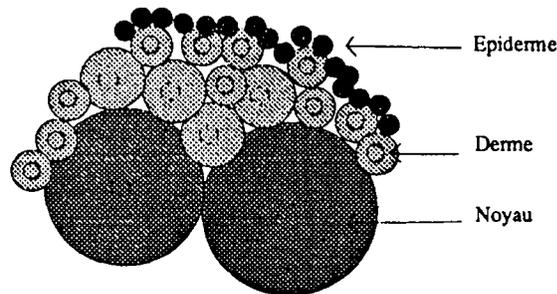


Figure 7.1: Agglomérat

- de nombreux phénomènes physiques peuvent être gérés de manière unifiée : il suffit de jouer sur la nature des liaisons interparticulaires pour obtenir des effets aussi différents que les comportements de multitude, la flexibilité, la plasticité, les collisions, ou les ruptures.
- entièrement basée sur la physique du point, l'animation d'agglomérats ne met en œuvre aucun calcul complexe : en particulier, ni rotation, ni projection, ni produit vectoriel ne sont utilisés. De plus, la résolution est facilement vectorisable, puisque chaque bille peut être traitée indépendamment des autres une fois qu'on connaît les forces d'interaction qui s'y appliquent. Cela permet une animation en temps réel d'un grand nombre de particules.

### 7.2.3 Traitement des interactions pour les objets déformables vertébrés

La structure d'objet déformable vertébré, que nous avons présentée dans la section 6.2.5, est particulièrement bien adaptée au traitement des interactions entre objets : comme nous l'avons déjà vu, chaque « lien » du squelette est enrobé par un élément déformable, constitué de cônes de matériau disposés « en étoile », et modélisés par des ressorts. Les interactions sont détectées et traitées de manière indépendante pour chacun de ces éléments. Les forces de réaction qui en résultent sont ensuite transmises aux liens correspondants, de manière à ce que le mouvement du squelette soit modifié en conséquence.

Décrivons plus précisément la méthode de traitement des interactions utilisée pour chaque composant déformable :

1. détection des interactions :
  - on effectue une prédétection en utilisant des boîtes ou des sphères englobantes,
  - on teste si les extrémités des ressorts associés à chaque cône de matériau déformable ont pénétré à l'intérieur d'un autre objet, rigide ou déformable.
2. déformation des objets :
 

les objets déformables en interaction sont immédiatement déformés, en tenant compte

de leurs rapports de rigidité locale dans la zone du choc, de manière à éviter les inter-pénétrations ;

3. réponse aux collisions :

les forces de réaction devant être appliquées aux liens du squelette sont calculées en fonction de la contraction des cônes déformables qui sont en contact avec un autre objet (rappelons que ces cônes sont modélisés par des ressorts d'axes fixes, ce qui rend ce calcul particulièrement simple).

**Remarques :**

- cette gestion des interactions offre un traitement simple et efficace des contraintes d'angle intervenant au niveau de chaque articulation : en effet, si un angle devient trop petit, un choc est détecté entre deux composants déformables voisins, et les forces de réaction empêchent l'angle de diminuer encore (voir [GVP90, Gas90] pour une technique de contrôle précis de ces contraintes).
- dans le cas d'un contact prolongé avec un objet rigide, des oscillations parasites peuvent apparaître si on se borne à modéliser le contact par une succession de petites collisions entre l'objet rigide et un composant déformable : au fur et à mesure que le contact se prolonge, on fait donc intervenir d'autres forces de réaction, calculées à partir du lien rigide associé, et conduisant à un état d'équilibre (voir [Ver90] pour plus de détails).

### **7.3 Chocs entre objets déformables et solides polygonaux : les contraintes « de réaction »**

En 1987, Platt et Barr envisageaient d'éviter les interpénétrations entre les objets déformables et les objets rigides immobiles de la scène en entourant ces derniers d'un champ de force exponentiel, empêchant d'y pénétrer (voir [TPBF87]).

La méthode proposée en 1988 [PB88], bien que plus intéressante, se limite toutefois aux chocs entre un modèle déformable (modélisé soit par un système masses-ressorts discret, soit grâce à un modèle continu discrétisé sous forme d'éléments finis) et un objet rigide polygonal, éventuellement en mouvement : il s'agit d'utiliser les « contraintes de réaction », que nous avons déjà décrites en détail au paragraphe 6.3. Si une masse élémentaire (ou un nœud du maillage du modèle continu) s'apprête à pénétrer dans le solide polygonal, une force supplémentaire est ajoutée arbitrairement pour la replacer à la surface du solide (la technique se limite aux solides polygonaux pour que le calcul de cette « force de contrainte » soit suffisamment simple). L'objet rigide polygonal peut être lui-même un modèle dynamique ; on lui applique alors au point de contact une force de valeur opposée à celle de la masse élémentaire.

Cette technique a été utilisée par Terzopoulos [TPF89] pour empêcher les particules d'un matériau en train de fondre de passer au travers des supports rigides de la scène (il s'agissait en fait de contacts prolongés plutôt que de chocs). L'effet obtenu dans le cadre de cette application semble très satisfaisant.

On peut cependant noter que la méthode des « contraintes de réaction » ne semble avoir aucune justification physique, même intuitive : la force ajoutée arbitrairement apparaît avant même qu'il y ait contact entre les objet ; elle n'est pas calculée en fonction des paramètres d'un choc (vitesse, énergie cinétique au moment de l'impact, raideur locale de l'objet déformable...), mais dépend étrangement de la résultante des forces qui s'appliquent déjà à la masse élémentaire concernée. Il est donc difficile de la qualifier de « force de réaction ».

L'inconvénient majeur de cette technique est son manque de généralité. A un instant donné, une seule contrainte de réaction peut être affectée à chaque masse élémentaire du modèle déformable. De plus, aucune généralisation ne semble envisageable pour modéliser un choc entre deux objets déformables, ou avec un solide non polygonal, les contraintes devenant trop complexes.

## 7.4 Chocs entre objets déformables : l'approche de Moore et Wilhelms

Moore et Wilhelms ont proposé dans [MW88] quelques méthodes générales de détection et de traitement des interactions entre objets. Certaines d'entre elles peuvent convenir aux modèles déformables, qu'ils soient modélisés à partir des équations de l'élasticité des milieux continus, ou par des systèmes masses-ressorts discrets.

### 7.4.1 Détection des collisions

Considérons des objets déformables décrits sous forme de grilles de points (masses élémentaires, ou nœuds d'un ensemble d'éléments finis). Leur surface est délimitée par un ensemble de facettes triangulaires.

L'algorithme de base consiste à tester à chaque instant si la trajectoire de chaque point d'un objet de la scène n'a pas intersecté une facette triangulaire ne contenant pas ce point (les auto-intersections d'un objet déformables sont également détectées par cette méthode). Si  $n$  est le nombre de facettes triangulaires, et  $m$  le nombre de points, le calcul naïf se fait donc en  $O(nm)$ . Deux niveaux de réalisme sont envisagés :

- si on considère que les triangles sont fixes pendant un intervalle de temps, il suffit de tester les intersections des triangles avec les segments représentant la trajectoire des points. On résout pour cela un système de trois équations à trois inconnues,  $u$ ,  $v$  (coordonnées dans le plan du triangle), et  $t$  (l'instant du choc) :

$$P + (P' - P)t = P_0 + (P_1 - P_0)u + (P_2 - P_0)v \quad (7.3)$$

On vérifie ensuite les conditions :

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ u \geq 0 \\ v \geq 0 \\ u + v \leq 1 \end{cases} \quad (7.4)$$

Notons que les risques d'erreur sont assez importants si on emploie cette méthode, car il n'y a pas de raison a priori de considérer que la masse élémentaire est mobile, mais la facette testée immobile.

- en tenant compte du mouvement des facettes triangulaires, l'équation (7.3) se complique, et devient :

$$P + Vt = P_0 + V_0t + ((P_1 - P_0) + (V_1 - V_0))ut + ((P_2 - P_0) + (V_2 - V_0))vt \quad (7.5)$$

$V$ ,  $V_0$ ,  $V_1$ , et  $V_2$  représentant les vitesses respectives des points.

En éliminant  $u$  et  $v$  dans l'équation (7.5), on obtient une équation de degré 5 en  $t$ . Cette dernière permet de déterminer l'instant du choc par dichotomie ;  $u$  et  $v$  peuvent alors être calculés.

Diverses solutions sont proposées pour accélérer ces méthodes de détection : utilisation de boîtes englobantes, codage hiérarchique sous forme d'octree qui permet de passer à une complexité en  $O(m \log m)$  (création de l'octree) plus  $O(n \log n)$  (résolution).

Toutefois, on ne peut pas échapper à la lenteur inhérente à la détection, due à une représentation des objets au point par point.

Remarquons enfin que quand on détecte une collision, il y a déjà une interpénétration entre les deux objets. Moore et Wilhelms ne précisent pas si on doit alors revenir en arrière, et reprendre la simulation à partir de l'instant du choc.

#### 7.4.2 Réponse aux collisions

La seule des techniques proposées par Moore et Wilhelms qui soit envisageable dans le cas d'objets déformables consiste à insérer temporairement un ressort fictif entre les points les plus proches (ou de plus forte interpénétration) des deux objets. La contraction de ce ressort simulera une sorte de force de réaction.

L'article ne précise pas à quel moment ce ressort doit être introduit (avant ou après l'interpénétration ?), à quel moment il disparaît, ni comment sa raideur  $k$  doit être choisie. Les auteurs indiquent cependant que si l'un des objet est déformable, la valeur  $k_r$  de sa raideur après le rebond doit être inférieure à celle qui est utilisée pendant l'approche, notée  $k_a$  :

$$k_r = \epsilon k_a \quad (7.6)$$

$\epsilon$  (compris entre 0 et 1) étant fonction de la raideur du matériau.

Notons que l'introduction d'un ressort fictif peut être également utilisée pour modéliser un contact prolongé.

Moore et Wilhelms reconnaissent dans [WMS88] que cette modélisation de la réponse aux collisions est très coûteuse, surtout si on utilise des ressorts assez raides, car elle nécessite des calculs à des intervalles de temps très rapprochés pour éviter les divergences ou les oscillations parasites.

### 7.5 Conclusion

Les différentes techniques que nous avons présentées ont mis en évidence la complexité du problème des interactions faisant intervenir des objets déformables. Elles constituent souvent de bonnes solutions dans des situations particulières, mais ont le défaut d'être peu générales,

et de faire parfois apparaître au moment du choc des éléments mécaniques arbitraires (forces, ressorts, ou liaisons) ne reposant pas sur une interprétation physique, même intuitive, de l'interaction.

# Conclusion

Les techniques d'animation les plus classiques sont basées sur une description explicite du mouvement des objets. Elles offrent un contrôle précis des trajectoires, mais montrent rapidement leurs limites lorsqu'il s'agit de produire des mouvements ou des déformations en accord avec notre perception des phénomènes naturels (chutes, collisions, comportements élastiques ou plastiques...). L'utilisation de modèles générateurs, fondés sur les lois de la dynamique, permet de rendre compte de tels phénomènes, et de créer ainsi automatiquement des mouvements qui restent « naturels ».

Pour permettre une meilleure compréhension des principes à mettre en œuvre lors d'une animation dynamique, nous avons présenté en première partie la théorie mécanique des solides rigides et déformables. Nous l'avons complétée par une étude bibliographique complète des divers modèles dynamiques qui ont été introduits, aussi bien dans le domaine des systèmes de solides rigides que dans celui des objets déformables.

Ce travail nous a permis de mettre en lumière deux problèmes essentiels, qui seront probablement la source de nombreuses extensions à l'avenir :

## Le traitement automatique des interactions entre objets

Comme nous l'avons déjà souligné, la prise en compte des interactions entre objets est fondamentale lorsqu'on souhaite réaliser des animations réalistes. S'ils offrent une voie vers le traitement automatique de ces interactions, les modèles générateurs que nous avons étudiés n'apportent pas encore toutes les réponses :

- en ce qui concerne l'animation d'objets rigides, le passage artificiel du « choc » au « contact » n'est pas très satisfaisant ;
- on aimerait disposer de modèles mieux adaptés à la détection géométrique des interactions entre objets, surtout dans le cas des objets déformables ;
- enfin, beaucoup de modèles n'offrent qu'un traitement incomplet des interactions (le cas des collisions en boucle est souvent oublié, certains objets déformables ne peuvent entrer en interaction qu'avec des objets rigides...). Notons cependant les apports importants offerts par les approches les plus récentes.

## L'amélioration du contrôle de l'animation

L'utilisateur d'un système d'animation n'est pas, en général, un spécialiste de la mécanique. Il est donc important de lui fournir des systèmes dans lesquels le traitement mécanique est le plus « transparent » possible.

En particulier, si l'utilisateur n'a accès qu'à un ensemble de paramètres physiques peu intuitifs, il sera bien souvent obligé de contrôler le mouvement *a posteriori*, en améliorant peu à peu les valeurs des paramètres en fonction des résultats obtenus. Ce problème, qui est assez caractéristique des méthodes basées sur la simulation pure d'équations dynamiques, peut être un facteur très limitatif lors de la réalisation d'un film d'animation<sup>1</sup>.

L'apparition des méthodes d'optimisation et de modèles hybrides combinant dynamique et dynamique inversée ont résolu en partie ces problèmes, en offrant la possibilité d'imposer une trajectoire, ou de formuler des contraintes globales (matériau incompressible...). En revanche, ces méthodes sont lentes et coûteuses en espace, et n'offrent pas encore une interface utilisateur suffisante :

- les contraintes globales doivent être pré-programmées ;
- il est difficile pour l'utilisateur non spécialiste de déterminer la fonction de contrôle à optimiser en vue d'obtenir un comportement particulier.

A l'avenir, on devrait cependant assister à une collaboration accrue entre modèles descriptifs et modèles générateurs.

---

<sup>1</sup> Notons que l'approche instrumentale d'Annie Luciani offre une réponse originale à ce problème du contrôle, puisque l'utilisateur peut agir sur les objets en temps réel par l'intermédiaire d'un « transducteur gestuel », ce qui lui permet de les contraindre à son gré (il peut les pousser sur une trajectoire, modeler les objets plastiques pour leur donner la forme de son choix...).

# Bibliographie

- [AG85] W. Armstrong et M. Green. The dynamics of articulated rigid bodies for purposes of animation. *The Visual Computer*, 1:231–240, 1985.
- [AGL87] W. Armstrong, M. Green, et R. Lake. Near-real-time control of human figure models. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 52–61, Juin 1987.
- [Arn88] B. Arnaldi. *Conception du noyau d'un système d'animation de scènes tridimensionnelles intégrant les lois de la mécanique*. Thèse de Doctorat, Université de Rennes I, juillet 1988.
- [Arn89] B. Arnaldi, G. Dumont, G. Hégron, N. Magnenat-Thalmann, et D. Thalmann. Animation control with dynamics. Dans les actes de *Computer Animation'89, State-of-the-art in Computer Animation*, Springer-Verlag, éditeur, pages 113–123, Computer Graphics International, 1989.
- [Bam81a] Y. Bamberger. *Mécanique de l'ingénieur 1 : systèmes de corps rigides*. Volume 1, Hermann, 293 rue Lecourbe 75015 Paris, 1981.
- [Bam81b] Y. Bamberger. *Mécanique de l'ingénieur 2 : milieux déformables*. Volume 2, Hermann, 293 rue Lecourbe 75015 Paris, 1981.
- [Bam81c] Y. Bamberger. *Mécanique de l'ingénieur 3 : mécanique des solides déformables*. Volume 3, Version provisoire, 1981.
- [Bar84] Alan H. Barr. Global and local deformations of solid primitives. *Computer Graphics*, 18(3):21–29, 1984.
- [Bar89] D. Barraf. Analytical methods for dynamics simulation of non-penetrating rigid bodies. *Computer Graphics (SIGGRAPH'89)*, 23(3):223–232, Juillet 1989.
- [Bar90] D. Baraff. Curved surfaces and coherence for non-penetrating rigid body simulation. *Computer Graphics (SIGGRAPH'90)*, 24(4):19–28, Août 1990.
- [BBB87] R.H. Bartels, J.C. Beatty, et B.A. Barsky. *An Introduction to Splines for use in Computer Graphics and Geometric Modeling*. Morgan Kaufmann Publishers, Palo Alto, California, 1987.
- [BB87] R. Barzel et A. Barr. Modeling with dynamic constraints. Dans *SIGGRAPH'87 Tutorial 17 : Topics in Physically-Based Modeling*, Juillet 1987.
- [BB88] R. Barzel et A. Barr. A modeling system based on dynamic constraints. *Computer Graphics (SIGGRAPH'88)*, 22(4):179–188, Août 1988.

- [BBZ90] N.L. Badler, B.A. Barsky, et D. Zeltzer. *Making Them Move: Mechanics, Control and Animation of Articulated Figures*. Morgan Kaufmann, 1990.
- [BHBS87] A. Barr, B. Von Herzen, R. Barzel, et S. Snyder. Computational techniques for the self assembly of large space structures. Dans *8th Princeton/SSI Conference on Space Manufacturing*, Princeton New Jersey, Mai 1987.
- [BN88] L. Shapiro Brotman et A. N. Netravali. Motion interpolation by optimal control. *Computer Graphics (SIGGRAPH'88)*, 22(4):309-315, Août 1988.
- [BW76] N. Burtnyk et M. Wein. Interactive skeleton technique for enhancing motion dynamics in key frame animation. *Communications of the ACM*, 19(10):564-569, Octobre 1976.
- [CHP89] J.E. Chadwick, D.R. Haumann, et R.E. Parent. Layered construction for deformable animated characters. *Computer Graphics*, 23(3):243-252, Juillet 1989.
- [CP88] J.E. Chadwick et E. Parent. Critter construction: Developing characters for computer animation. Dans *PIXIM 88*, pages 283-305, Paris, France, Octobre 1988
- [Cia85] Ciarlet. *Elasticité Tridimensionnelle*. Masson, 1985.
- [Coq87b] S. Coquillart. A control point based sweeping technique. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 36-45, Novembre 1987.
- [DAH89] G. Dumont, B. Arnaldi, et G. Hégron. Mechanics of solids for computer animation. Dans *PIXIM 89*, pages 293-308, Paris, Octobre 1989.
- [DAH90] G. Dumont, B. Arnaldi, et G. Hégron. *Automatic Animation Control of Physical Systems*. Publication Interne no. Irisa 511- Inria 1170, IRISA-INRIA, Campus de Beaulieu, Rennes, janvier 1990.
- [Dum86] G. Dumont. *Apport des éléments d'ordre élevé pour le traitement de l'incompressibilité du caoutchouc*. Rapport, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 28 rue des Saints Pères, 75007 Paris, septembre 1986.
- [Dum87] G. Dumont. *Application de la mécanique des systèmes de corps rigides à l'animation d'images de synthèse*. Rapport de fin d'études et de DEA, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées et Université de PARIS 6, PARIS, juin 1987.
- [Dum90] G. Dumont. *Animation de scènes tridimensionnelles : la mécanique des solides comme modèle de synthèse du mouvement*. Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, 1990.
- [Fea83] R. Featherstone. The calculation of robot using articulated-body inertias. *International Journal of Robotics Research*, 2(1):13-30, 1983.
- [Fun65] Y.C. Fung. *Foundations of Solids Mechanics*. Prentice-Hall, 1965.
- [GTT89a] J.P. Gourret, N. Magnenat Thalmann, et D. Thalmann. Simulation of object and human skin deformations in a grasping task. *Computer Graphics*, 23(3):21-29, Juillet 1989.
- [GTT89b] J.P. Gourret, N. Magnenat Thalmann, et D. Thalmann. The use of finite element theory for simulating object and human body deformations and contacts. Dans *Eurographics 89*, pages 477-487, Septembre 1989.

- [GV89] M.P. Gascuel et A. Verroust. Animation à l'aide de la dynamique : Etat de l'art. *Rapport de Recherche du LIENS*, 89(5), Mai 1989.
- [GVP90] M.P. Gascuel, A. Verroust, et C. Puech. Animation with collisions of deformable articulated bodies. Dans *Eurographics Workshop on Animation and Simulation*, Septembre 1990.
- [Gas89a] M.P. Gascuel. Osea : un nouveau modèle de matière pour traiter les collisions entre objets déformables. Dans les actes de *PIXIM'89*, pages 309–323, septembre 1989.
- [Gas89b] M.P. Gascuel. Welding and pinching spline surfaces: New methods for interactive creation of complex objects and automatic fleshing of skeletons. Dans *Graphics Interface'89*, Juin 1989.
- [Gas90] M.P. Gascuel. Déformations de surfaces complexes : Techniques de haut niveau pour la modélisation et l'animation. Thèse de doctorat, Université PARIS-SUD, Orsay, Octobre 1990.
- [Ger86a] P. Germain. *Mécanique*. Volume 1, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, 1986.
- [Ger86b] P. Germain. *Mécanique*. Volume 2, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, 1986.
- [Gol50] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley publication Company, INC, 1950.
- [HAD88] G. Hegron, B. Arnaldi, et G. Dumont. Toward general animation control. Dans *C G International'88*, Genève, Mai 1988.
- [Hah88] J.K. Hahn. Realistic animation of rigid bodies. *Computer Graphics (SIGGRAPH'88)*, 22(4):299–308, Août 1988.
- [Hre41] A. Hrenikoff. Solution of problems in elasticity by the framework method. *Journal of Applied Mechanics*, A8:169–175, 1941.
- [IC87] P.M. Isaacs et M.F. Cohen. Controlling dynamic simulation with kinematic constraints, behavior functions and inverse dynamics. *Computer Graphics (SIGGRAPH'87)*, 21(4):215–224, Juillet 1987.
- [IC88] P.M. Isaacs et M.F. Cohen. Mixed method for complex kinematic constraints in dynamic figure animation. *The Visual Computer*, 2(4):296–305, Décembre 1988.
- [JL89] S. Jimenez et A. Luciani. Une vue unifiée des comportements de multitude, flexibilité, plasticité et ruptures : Billes, bulles et agglomérats. *Rapport de Recherche ACROE*, 89(15), Novembre 1989.
- [LC86] A. Luciani et C. Cadoz. Utilisation de modèles mécaniques et géométriques pour la synthèse et le contrôle d'images animées. Dans *Deuxième Colloque Image, CESTA*, Nice, Avril 1986.
- [LL59] L.D. Landeau et E.M. Lifshitz. *Theory of Elasticity*. Pergamon Press, 1959.
- [LPW80a] J. Luh, R. Paul, et M. Walker. On-line computational scheme for mechanical manipulators. *Transaction of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 102:67–76, Juin 1980.

- [LPW80b] J. Luh, R. Paul, et M. Walker. Resolved-acceleration control of mechanical manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-25(3):468-474, Juin 1980.
- [Las87] J. Lasseter. Principle of traditional animation applied to 3D computer animation. *Computer Graphics (SIGGRAPH'87)*, 21(4):35-44, Juillet 1987.
- [Lat86] R. H. Lathrop. Constrained (closed-loop) robot simulation by local constraint propagation. Dans *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 689-694, San Francisco, 1986.
- [Luc81] A. Luciani. *Anima, un outil de création d'images animées par modèles physique*. Rapport de DEA, Grenoble, 1981.
- [Luc85] A. Luciani. *Un outil informatique de création d'images animées : le système ANIMA*. Thèse de Doctorat, INPG Grenoble, novembre 1985.
- [Luc88] A. Luciani. Modèles pour la synthèse d'images animées. *Rapport de Recherche ACROE*, 88(5), Janvier 1988.
- [Luc89] A. Luciani. *Modèles physiques pour l'animation : vers une approche modulaire et instrumentale de la synthèse d'images*. Rapport no. ACROE 89-14, LIFIA, IMAG Grenoble, novembre 1989.
- [MOD86] MODULEF. *MODULEF : A Modular Library Of Finite Elements*. Institut National de la Recherche en Informatique et Automatique, 1986.
- [MW88] M. Moore et J. Wilhelms. Collision detection and response for computer animation. *Computer Graphics (SIGGRAPH'88)*, 22(4):289-298, Août 1988.
- [MZ90] M. McKenna et D. Zeltzer. Dynamic simulation of autonomous legged motions. *Computer Graphics (SIGGRAPH'90)*, 24(4):29-38, Août 1990.
- [Mar82] M. J. Maron. *Numerical Analysis : A Practical Approach*. Macmillan Publishing Co., New York, 1982.
- [McM84] T.A. McMahon. Mechanics of locomotion. *International Journal of Robotics Research*, 3(2):4-28, 1984.
- [Mil88] Gavin S.P. Miller. The motion dynamics of snakes and worms. *Computer Graphics*, 22(4):169-177, Août 1988.
- [PB88] J.C. Platt et A.H. Barr. Constraint methods for flexible models. *Computer Graphics*, 22(4):279-288, Août 1988.
- [PFTV86] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, et W. T. Vetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [PW89] A. Pentland et J. Williams. Good vibrations: Modal dynamics for graphics and animation. *Computer Graphics*, 23(3):215-222, Juillet 1989.
- [Rou05] E. J. Routh. *Dynamics of a System of Rigid Bodies*. Macmillan and Company, Ltd, London, 1905.
- [SLE90] C. Samson, M. Leborgne, et B. Espiau. *Robot Control : the Task Function Approach*. Oxford University Press, à paraître, 1990.

- [SP86] T.W. Sedberg et S.R. Parry. Free-form deformations of solid geometric models. *Computer Graphics*, 20(4):151-160, 1986.
- [SZ90] P. Schröder et D. Zeltzer. The virtual erector set: dynamic simulation with linear recursive constraint propagation. *Computer Graphics, Special issue on 1990 Symposium on Interactive 3D Graphics*, 24(2):23-31, Mars 1990.
- [TD84] G. Touzot et G. Dhatt. *Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis*. Maloine S.A Editeur, 27 rue de l'Ecole de Medecine, 75006 Paris, 1984.
- [TF88] D. Terzopoulos et K. Fleischer. Modeling inelastic deformations: Viscoelasticity, plasticity, fracture. *Computer Graphics*, 22(4):269-278, Août 1988.
- [TPBF87] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr, et K. Fleischer. Elastically deformable models. *Computer Graphics*, 21(4):205-214, Juillet 1987.
- [TPF89] D. Terzopoulos, J. Platt, et K. Fleisher. Heating and melting deformable models (from goop to glop). Dans *Graphics Interface '89*, pages 219-226, London, Ontario, Canada, Juin 1989.
- [TW88] D. Terzopoulos et A. Witkin. Physically based model with rigid and deformable components. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 41-51, Décembre 1988.
- [TWK87] D. Terzopoulos, A. Witkin, et M. Kass. Energy constraint on deformable models. *State of the Art in Image Synthesis (Siggraph '87 course notes Number 17)*, Juillet 1987.
- [Ver88] A. Verroust. Animation d'objets articulés à l'aide de la dynamique. *Numéro Spécial de Bigre Globule édité par l'AFCEI*, Décembre 1988.
- [Ver90] A. Verroust. Etude de problèmes liés à la définition, la visualisation et l'animation d'objets complexes en Informatique graphique. Thèse d'Etat, Université PARIS-SUD, Orsay, Décembre 1990.
- [WB85] J. Wilhelms et B. Barsky. Using dynamic analysis to animate articulated bodies as humans and robots. Dans *Graphics Interface 85*, pages 97-104, Montréal, Mai 1985.
- [WK88] A. Witkin et M. Kass. Spacetime constraints. *Computer Graphics (SIGGRAPH'88)*, 22(4):159-168, Août 1988.
- [WMS88] J. Wilhelms, M. Moore, et R. Skinner. Dynamic animation : Interaction and control. *The Visual Computer*, 2(4):283-295, Décembre 1988.
- [Wil87] J. Wilhelms. Using dynamic analysis for realistic animation of articulated bodies. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12-27, Juillet 1987.
- [Wit77] J. Wittenburg. *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. Teubner, Stuttgart, 1977.
- [Zie77] O. C. Zienkiewicz. *The Finite Element Method in Engineering Science, third edition*. Mc Graw-Hill, London, 1977.
- [Zie79] O. C. Zienkiewicz. *La Méthode des Eléments Finis, troisième édition*. Mc Graw-Hill, Paris, 1979.

# Table des matières

Introduction	1
<b>I Mécanique des solides comme modèle de synthèse du mouvement</b>	<b>3</b>
<b>1 Notions de mécanique des solides</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction	4
1.2 Mécanique des solides rigides	4
1.2.1 Paramétrage et liaisons	4
1.2.2 Énergie cinétique	5
1.2.3 Actions	6
1.2.4 Mouvements virtuels et actions généralisées	6
1.2.5 Principe des travaux virtuels	7
1.2.6 Problème du mouvement	7
1.2.7 Écriture finale des équations	8
1.2.8 Introduction des méthodes de pénalisation	8
1.3 Mécanique des solides déformables	9
1.3.1 Notion de déformation	9
1.3.2 Principe des travaux virtuels. Notion de contrainte	11
1.3.3 Problème du mouvement. Lois de comportement	13
1.4 Systèmes soumis à des chocs	14
1.4.1 Introduction	14
1.4.2 Théorie : écriture des équations	15
<b>2 Outils et modèles de calcul</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction	17
2.2 Calcul symbolique	17
2.3 Modèles continus	18
2.4 Modèles discrets	19
2.4.1 Description	19
2.4.2 Deux types de mise en œuvre	21
<b>II Animation dynamique d'objets rigides articulés</b>	<b>23</b>

<b>3</b>	<b>Méthodes de résolution existantes</b>	<b>24</b>
3.1	Simulation du mouvement . . . . .	24
3.1.1	Approche de Wilhelms et Barsky . . . . .	25
3.1.2	Modèle récursif d'Armstrong et Green . . . . .	25
3.1.3	Modèle de résolution de Featherstone . . . . .	27
3.2	Utilisation de la dynamique inversée . . . . .	29
3.2.1	Approche de Barzel et Barr . . . . .	29
3.2.2	Approche d'Isaacs et Cohen . . . . .	30
3.2.3	Approche de Shröder et Zeltzer . . . . .	32
3.3	Utilisation de méthodes de contrôle . . . . .	33
3.3.1	Approche de Shapiro Brotman et Netravali . . . . .	33
3.3.2	Approche de Witkin et Kass . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Interactions entre objets rigides</b>	<b>37</b>
4.1	Modélisation des collisions . . . . .	37
4.1.1	Collisions entre objets rigides en mouvement . . . . .	37
4.1.2	Collision d'un objet rigide articulé avec des parois fixes . . . . .	40
4.2	Modélisation des contacts . . . . .	40
4.2.1	Contacts entre objets . . . . .	40
4.2.2	Contact d'un objet rigide articulé avec des parois fixes . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>43</b>
<b>III</b>	<b>Animation dynamique d'objets déformables</b>	<b>44</b>
<b>6</b>	<b>Modéliser et animer des objets déformables</b>	<b>45</b>
6.1	Approches utilisant des modèles continus . . . . .	46
6.1.1	Modèle de Platt, Terzopoulos, Fleischer et Barr . . . . .	46
6.1.2	Objets élastiques « assez rigides » . . . . .	48
6.1.3	Déformations inélastiques . . . . .	48
6.2	Systèmes modulaires intégrant des composants mécaniques discrets . . . . .	49
6.2.1	CORDIS-ANIMA : le formalisme « masse-ressort-frottement » . . . . .	50
6.2.2	Matériau capable de fondre . . . . .	51
6.2.3	Animation de serpents . . . . .	51
6.2.4	Animation de personnages : muscles et chair déformable . . . . .	52
6.2.5	Objets déformables vertébrés . . . . .	53
6.3	Techniques d'animation sous contraintes . . . . .	54
6.3.1	Contraintes « de réaction » . . . . .	55
6.3.2	Contraintes du Lagrangien augmenté . . . . .	55
6.4	Comparaison des différentes approches . . . . .	56

<b>7 Le problème des interactions entre objets</b>	<b>58</b>
7.1 Modélisation d'une main saisissant une balle déformable . . . . .	59
7.1.1 Description du modèle . . . . .	60
7.1.2 Algorithme d'animation . . . . .	60
7.1.3 Discussion . . . . .	61
7.2 Interactions dans des systèmes modulaires discrets . . . . .	62
7.2.1 Les « éléments transmetteurs » . . . . .	62
7.2.2 Les « agglomérats » de particules élémentaires . . . . .	63
7.2.3 Traitement des interactions pour les objets déformables vertébrés . . .	64
7.3 Chocs entre objets déformables et solides polygonaux : les contraintes « de réaction » . . . . .	65
7.4 Chocs entre objets déformables : l'approche de Moore et Wilhelms . . . . .	66
7.4.1 Détection des collisions . . . . .	66
7.4.2 Réponse aux collisions . . . . .	67
7.5 Conclusion . . . . .	67
<b>Conclusion</b>	<b>69</b>

# LISTE DES DERNIERES PUBLICATIONS INTERNES IRISA

1990 :

- PI 560 A SIMPLE TAXONOMY FOR DISTRIBUTED MUTUAL EXCLUSION ALGORITHMS  
Michel RAYNAL  
Novembre 1990.
- PI 561 MULTIMODAL ESTIMATION OF DISCONTINUOUS OPTICAL FLOW USING MARKOV RANDOM FIELDS  
Fabrice HEITZ, Patrick BOUTHEMY  
Novembre 1990, 50 Pages.
- PI 562 EFFICIENT GLOBAL COMPUTATIONS ON A PROCESSOR NETWORK WITH PROGRAMMABLE LOGIC  
J.M. FILLOQUE, E. GAUTRIN, B. POTTIER  
Novembre 1990, 14 pages.
- PI 563 EQUATIONAL SETS OF TREE-VECTORS  
Anne GRAZON, Jean-Claude RAOULT  
Novembre 1990, 20 Pages.
- PI 564 MULTIFRAME-BASED IDENTIFICATION OF MOBILE COMPONENTS OF A SCENE WITH A MOVING CAMERA  
Edouard FRANCOIS, Patrick BOUTHEMY  
Décembre 1990, 30 pages.
- PI 565 NAIVE RESERVE CAN BE LINEAR  
Pascal BRISSET, Olivier RIDOUX  
Novembre 1990, 18 pages.
- PI 566 METHODES D'INTEGRATION TEMPORELLE EN TRAITEMENT D'ANTENNE  
Olivier ZUGMEYER, Jean-Pierre LE CADRE  
Décembre 1990, 54 pages. Rapport n° 1
- PI 567 METHODES PARAMETRIQUES POUR LA DETECTION DE SOURCES EN MOUVEMENT<sup>1</sup>  
Olivier ZUGMEYER, Jean-Pierre LE CADRE  
Décembre 1990, 42 pages. Rapport n° 2
- PI 568 QUOI RETENIR D'UN ARBRE DE CLASSIFICATION ? UN ESSAI EN QUANTIFICATION D'IMAGE NUMERISEE  
Israël César LERMAN, Nadia GHAZZALI  
Décembre 1990, 36 pages, Projet CADO.
- PI 569 VARIABLES RELATIONNELLES CODAGE ET ASSOCIATION  
Mohamed OUALI ALLAH  
Décembre 1990, 40 pages

1991 :

- PI 570 DESIGN DECISION FOR THE FTM : A GENERAL PURPOSE FAULT TOLERANT MACHINE<sup>1</sup>  
Michel BANATRE, Gilles MULLER, Bruno ROCHAT, Patrick SANCHEZ  
Janvier 1991, 30 pages
- PI 571 ANIMATION CONTROLEE PAR LA DYNAMIQUE  
Georges DUMONT, Parie-Paule GASCUEL, Anne VERROUST  
Février 1991, 84 pages

ISSN 0249 - 6399