



NSP1B3 : un logiciel pour résoudre les équations de Navier Stokes incompressible 3D

Frédéric Hecht, C. Pares

► To cite this version:

Frédéric Hecht, C. Pares. NSP1B3 : un logiciel pour résoudre les équations de Navier Stokes incompressible 3D. [Rapport de recherche] RR-1449, INRIA. 1991. inria-00075111

HAL Id: inria-00075111

<https://inria.hal.science/inria-00075111>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: (1) 39 63 55 11

Collection

Rapports de Recherche

N° 1449

Programme 6
Calcul Scientifique, Modélisation et
Logiciels numériques

**NSP1B3 : UN LOGICIEL POUR
RÉSOUTRE LES ÉQUATIONS DE
NAVIER STOKES
INCOMPRESSIBLE 3D**

**Frédéric HECHT
Carlos PARÉS**

Juin 1991



★ R R . 1 4 4 9 ★

NSP1B3: un logiciel pour résoudre les équations de Navier Stokes Incompressible 3D

Frédéric Hecht et Carlos Parés
INRIA

24 mai 1991

Resumé: Ce logiciel est fait pour simuler des écoulements (internes ou externes) 3D incompressible régis par les équations de Navier-Stokes Incompressible, d'Euler Incompressibles, ou fluide potentiel. Différents types de conditions aux limites sont possibles: vitesse imposée, frottement à la paroi, pression imposée, sortie libre etc... Le schéma numérique est basé sur une méthode d'éléments finis mixtes $\mathbf{P}^1 + \text{bulle}$, $\mathbf{P}^1$, pour la discrétisation spatiale, et sur la méthode des caractéristiques pour discrétisation temporelle.

NSP1B3: a software to solve the 3D Incompressible Navier Stokes equations

abstract: The aim of this software is to simulate internal or external incompressible fluids flow governed by the Incompressible Navier Stokes equations, incompressible Euler equations, Potential equation. Different types of boundary conditions are available: imposed velocity or pressure, free output,... The numerical scheme uses mixed finite element method, $\mathbf{P}^1 + \text{bubble}$, $\mathbf{P}^1$ for the space discretization, and characteristic method for the time discretization.

Mots clé: *Mécanique des fluides, Navier Stokes Incompressible, Euler Incompressible, Fluide Potentiel, Éléments Finis Mixtes.*

INTRODUCTION

Le logiciel NSP1B3 de résolution des équations de Navier-Stokes incompressible instationnaire dans un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^3$ est basé :

- sur une discrétisation spatiale avec un élément fini mixte $(P_1 + \text{bulle})^3/P_1$,
- sur une discrétisation temporelle semi-lagrangien implicite (méthode des caractéristiques).

A chaque pas de temps le programme résout un problème de Stokes généralisé avec une méthode du type UZAWA gradient conjugué préconditionnée. Les systèmes linéaires sont aussi résolus avec la méthode du gradient conjugué préconditionnée par SSOR ou avec Cholesky incomplet.

Les différentes conditions initiales sont:

- soit la solution d'un problème de Stokes stationnaire,
- soit la solution d'un écoulement potentiel irrotationnel,
- soit la solution d'un problème de Navier-Stokes.

Les conditions aux limites sont :

- vitesse imposée (les 3 composantes de la vitesse sont données) qui dépend ou non du temps,
- condition de glissement à la paroi,
- contraintes nulles,
- conditions sur la pression,
- conditions de périodicité.

Ce logiciel est écrit en Fortran77, et comprend:

1. un préprocesseur TRFNOP qui transforme un maillage de type NOPO de MODULEF dans la structure interne.
2. le programme PPNS qui résout les équations de Navier-Stokes, et/ou les problèmes liés à l'initialisation.
3. un post-processeur PPDESS utilisant l'interface graphique Fortran 3D qui permet de visualiser les résultats: vitesse, pression.

1 POSITION DU PROBLEME

1.1 Les équations

Les équations à résoudre sont:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

où :

- $\mathbf{u}(x, t)$ représente le champ de vitesse de l'écoulement,
- $p(x, t)$ la pression,
- ν la viscosité cinématique du fluide,
- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ le domaine de calcul (on suppose Ω borné).

Les caractéristiques de l'écoulement dépendent de paramètres adimensionnels, parmi lesquels le nombre de Reynolds:

$$Re = \frac{v \cdot L}{\nu} \quad (1.2)$$

où v est la vitesse caractéristique de l'écoulement et L la longueur caractéristique.

A des nombres de Reynolds assez élevés, la résolution numérique du système (1) est très difficile et très coûteuse, en raison de l'apparition des régimes turbulents et des couches limites (cf. [3]).

Le modèle implémenté dans le code *NSP1B3* est un modèle de "sous-maille" dû à Smagorinsky (cf. [15]). Il s'agit d'un modèle algébrique et à 0 équation. Avec ce modèle, l'équation à résoudre pour calculer les champs moyens de vitesses et de pression sont les suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= -\nabla \cdot \mathbf{R}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{R} = -ch^2 |\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T| (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), c \cong 0.01 \quad (1.4)$$

h étant un paramètre "petit". (En pratique, on prend la valeur du pas d'espace de la maille construite pour l'approximation numérique).

Pour avoir un problème bien posé, il faut ajouter aux systèmes d'équations (1.1) ou (1.3) une condition initiale et des conditions aux limites.

1.2 Conditions aux limites

Plusieurs choix ont été prévus. Cependant, le traitement variationnel des équations et les méthodes numériques choisies donnent lieu à quelques incompatibilités dans l'usage de différentes conditions. Les incompatibilités dues au traitement numérique seront traitées dans le chapitre 2. En ce qui concerne les aspects variationnels, on peut grouper les conditions aux limites en 3 familles:

1.2.1 1ère famille de conditions aux limites

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (1.5)$$

$$-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + p\mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (1.6)$$

$$\alpha \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_i - \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = -\beta \frac{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_i}{|\mathbf{u}_\tau|}, i = 1, 2 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.7)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.8)$$

où

- $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$ est une partition de $\Gamma = \partial\Omega$.
- $\{\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2\}$ représente, pour chaque point de Γ un repère orthonormé formé par le vecteur extérieur $\mathbf{n}$ et deux directions tangentielles $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$.
- $\alpha \geq 0$ est une valeur donnée.
- $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_3$ sont deux fonctions données sur Γ_1 et Γ_3 respectivement.
- $\mathbf{u}_\tau$ représente la projection du vecteur $\mathbf{u}$ sur le plan tangent.
- β est:
 - soit une fonction donnée (éventuellement constante),
 - soit une fonction de $\mathbf{u}$.

Les données $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3, \alpha, \beta$ dépendent des caractéristiques physiques de l'écoulement à approximer.

Si Γ_1 correspond à la paroi d'un obstacle, on choisit:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

pour simuler l'adhérence des particules de fluide à la paroi, due à la viscosité. Par contre, si Γ_1 correspond à la frontière "de l'infini" (c'est-à-dire, si Γ_1 est une frontière artificielle considérée de façon à borner le domaine), il est fréquent de prendre $\mathbf{u}_1$ constante ; par exemple:

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0) \quad (1.10)$$

ce qui revient, d'un point de vue physique, à accepter que l'écoulement soit uniforme quand on est assez loin de l'obstacle. Si on considère un écoulement interne et Γ_1 correspond à la frontière d'entrée de flux, $\mathbf{u}_1$ peut être une fonction parabolique:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (0, 0, z(1 - z)). \quad (1.11)$$

Les conditions (1.6) sont utilisées normalement pour simuler une sortie libre du flux. Γ_2 correspond donc à la frontière de sortie

Les conditions (1.7) sous leur forme la plus générale ($\alpha \neq 0$ et/ou $\beta \neq 0$) apparaissent fréquemment dans le cadre des modèles de turbulence (notamment, le modèle $k - \varepsilon$, cf. [9], [3]). Dans ce cas-là, la frontière Γ_3 correspond à la paroi d'un obstacle. On a présenté

les conditions d'adhérence (1.5), (1.8) comme une bonne simulation du comportement d'un fluide visqueux autour d'un obstacle, mais ce choix de conditions aux limites mène à des difficultés si Re est élevé, dûes à l'apparition de couches limites. En fait, la condition (1.7) a le caractère d'une modélisation de la couche limite. L'idée est de retirer une partie de cette couche du domaine de calcul, tout en conservant ses effets sur l'écoulement. Pour ce faire, on suppose que la frontière Γ_3 est à l'intérieur de la couche limite (c'est-à-dire, elle est "proche" à la paroi, mais à l'intérieur du volume occupé par le fluide). Les paramètres de la condition (1.7) sont choisis de façon à simuler le comportement de l'écoulement à l'endroit où Γ_3 est supposée être.

Ainsi, α est un paramètre qui dépend des caractéristiques de la paroi et β a le caractère d'une vitesse de friction à la paroi.

Dans la littérature on trouve β tel que: étant donné $\mathbf{u}(x)$, $x \in \Gamma_3$, on prend $\beta = \beta(\mathbf{u})$ donnée par

$$\beta = -\mathbf{u}^{*2} \quad (1.12)$$

où $\mathbf{u}^*$ est la solution de l'équation:

$$\frac{|\mathbf{u}_\tau(x)|}{\mathbf{u}^*} = f\left[\frac{\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{y}}{\nu}\right] \quad (1.13)$$

où $\mathbf{u}_\tau$ est la projection de $\mathbf{u}$ sur le plan tangent, y est la distance de Γ_3 à la paroi réelle de l'obstacle, f est une fonction dite "*loi de paroi*" approchant le profil des vitesses dans la couche limite. Plusieurs choix f peuvent être trouvés dans la littérature. Pour des raisons de régularité, on a choisi celle de Reichardt(cf. [3]):

$$f(y) = 2.5e^{(1+0.4y)} + 7.8\{1 - e^{-y/11} - \frac{y}{11}e^{-0.33y}\}. \quad (1.14)$$

Pour avoir des conditions aux limites compatibles avec les équations de 2^{ème} ordre (1.1) ou (1.3), il faut ajouter une nouvelle condition à (1.7). On considère donc une condition de type (1.8).

Si $\mathbf{u}_3 = 0$, cette condition exprime l'imperméabilité de la frontière Γ_3 : il n'y a pas de flux à travers la dite frontière.

Remarque. Si Γ_3 est contenue dans un plan $y = cte$, les conditions (1.7) et (1.8) s'écrivent

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0; \quad u_2 = 0; \quad \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.15)$$

où u_1, u_2, u_3 sont les composantes canoniques de $\mathbf{u}$. Dans ce cas, nous parlerons de "conditions de symétrie". En effet, si Ω est symétrique par rapport au plan $y = c$, et que toutes les données sont également symétriques (cas du plan de courbure pour un écoulement dans un coude par exemple), il suffit de résoudre les équations sur la moitié du domaine, disons $\Omega_{1/2}$. Alors, si Γ_3 est la partie de la frontière de $\Omega_{1/2}$ correspondant au plan de symétrie on doit prendre les conditions aux limites (1.15).

Il en est de même pour les conditions de symétrie par rapport à un plan d'égalité $z = cte$.

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0; \quad u_3 = 0 \quad (1.16)$$

Remarque.

1. On n'a pas considéré de symétrie par rapport à un plan $x = cte$ puisqu'en général on considère la direction de l'axe des x comme étant la direction principale de l'écoulement.
2. Les points d'intersection de deux plans de symétrie (vertical et horizontal) exigent un traitement numérique spécial. Il faudra donc assigner un numéro de référence aux intersections qui soit différent de ceux des deux plans.

1.2.2 2ème famille de conditions aux limites

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \quad (1.17)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{n} \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \quad (1.18)$$

$$p = p_0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \quad (1.19)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \quad (1.20)$$

$$(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \quad (1.21)$$

La condition (1.19) permet de fixer la pression sur une partie de frontière, ce qui est utile par exemple pour simuler des écoulements instationnaires générés par une onde périodique de pression.

On peut utiliser aussi une condition de ce type pour la frontière de sortie de l'écoulement plutôt qu'une condition sur la vitesse, à priori plus difficile à choisir.

1.2.3 3ème famille de conditions aux limites

On a considéré finalement des conditions de périodicité:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_e} = \mathbf{u}|_{\Gamma_s} \circ T \quad (1.22)$$

où T est une application qui transforme Γ_e en Γ_s ,

Cette condition est compatible avec les familles 1 et 2, mais on la considère à part car sa prise en compte est d'une nature tout à fait différente des autres. Plusieurs paires de frontières peuvent être identifiées. Cependant, seul le cas où les deux frontières peuvent être identifiées à l'aide d'une translation a été implémenté.

1.3 Condition initiale

Il faut ajouter finalement une condition de type:

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_o(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (1.23)$$

Quatre possibilités pour $\mathbf{u}_o$ ont été considérées:

- D'abord, on peut initialiser par

$$\mathbf{u}_o = 0 \quad (1.24)$$

- Si on est intéressé d'atteindre l'état stationnaire ou quasi-stationnaire le plus rapidement possible, il est conseillé de démarrer avec un champ de vitesses qui soit "proche" de la solution.

- Pour ce faire, une première possibilité est de prendre pour $\mathbf{u}_o$ le champ de vitesses d'un écoulement irrotationnel satisfaisant les équations mais ne satisfaisant pas les conditions aux limites.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}_o = \nabla \varphi \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_o \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right\} \quad (1.25)$$

où g est choisie selon les caractéristiques du problème. Par exemple, $g = 0$ sur les parois et $g = \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{n}$ à l'infini.

- Une deuxième possibilité est de prendre la solution d'un problème de type Stokes:

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta \mathbf{u}_o + \nabla p_o = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_o = 0 \end{array} \right\} \quad (1.26)$$

avec les mêmes conditions aux limites que celles choisies pour le problème de Navier-Stokes.

- Finalement, le calcul peut être initialisé avec une solution précédente (un fichier est prévu pour pouvoir le faire).

1.4 Formulations variationnelles

Pour la commodité de l'exposé, seul le cas des équations (1.1) sera considéré dans ce chapitre. Tous les problèmes aux limites présentés dans le chapitre 1 admettent une formulation variationnelle de type abstrait suivant:

Trouver $\mathbf{u}(x, t), p(x, t)$ tels que:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} + a_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle l, \mathbf{v} \rangle, \forall \mathbf{v} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \forall q \in Q \\ + \text{conditions aux limites} \end{array} \right\} \quad (1.27)$$

où

- V est un sous-espace de $H^1(\Omega)^3$
- Q est un sous-espace de $L^2(\Omega)$
- $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$ est le produit scalaire de $L^2(\Omega)$
- $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et coercive.
- $a_1 : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme trilinéaire continue donnée par

$$a_1(\mathbf{u}; \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \cdot w_j. \quad (1.28)$$

- $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ est la forme bilinéaire et continue donnée par :

$$b(\mathbf{v}, q) = -(\nabla \cdot \mathbf{v}, q)_{0,\Omega}. \quad (1.29)$$

- $l \in V'$ (éventuellement, $l = l(\mathbf{u})$)
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit de dualité de V et V' .

Dans le cas du problème aux limites (1.1), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), (1.23), on a

$$a_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Gamma_3} + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{0,\Omega}. \quad (1.30)$$

$$V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N : \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1; \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}. \quad (1.31)$$

$$Q = \begin{cases} L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) / \int_{\Omega} q(x) dx = 0\} & \text{si } \Gamma_2 = \emptyset \\ L^2(\Omega) & \text{si } \Gamma_2 \neq \emptyset \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\langle l, \mathbf{v} \rangle = - \langle g(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \quad (1.33)$$

où $g(\mathbf{u}) = -\beta(\mathbf{u}) \cdot \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}_o|}$ et où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ est le produit de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma_2)^3$ et $H^{-1/2}(\Gamma_2)^3$.

Si on a choisi la deuxième famille de conditions aux limites, on a :

$$a_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu(\nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v})_{0,\Omega} + \nu(\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})_{0,\Omega}. \quad (1.34)$$

$$\langle l, \mathbf{v} \rangle = \nu \langle \mathbf{h} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_3} - \langle p_o, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_2}. \quad (1.35)$$

$$V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 / \mathbf{v}|_{\Gamma_1} = 0; \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_2} \times \mathbf{n} = 0; \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_3} \cdot \mathbf{n} = 0\} \quad (1.36)$$

$$Q = L^2(\Omega) \quad (1.37)$$

Remarque. Si on a considéré la première famille de conditions aux limites, les conditions (1.6) et (1.7) découlent de la formulation variationnelle (il s'agit de conditions naturelles). Par contre, il faut ajouter au problème (1.27) les conditions (1.5) et (1.8) (conditions essentielles). De même pour la deuxième famille, les conditions (1.19), (1.21) sont naturelles et les conditions (1.17), (1.18), (1.20) sont essentielles.

Finalement, si on ajoute une condition de périodicité du type (1.22) à un problème aux limites de l'un ou l'autre type, la seule modification de la formulation variationnelle est de prendre V tel que:

$$V \subset \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_e} = \mathbf{v}|_{\Gamma_e} \circ T\} \quad (1.38)$$

2 DISCRETISATION

2.1 Discrétisation en temps

On veut construire une approximation d'un problème de type (1.1) qui soit valide si $\nu = 0$ (système d'Euler). Ceci est fait en considérant une discrétisation en temps par la méthode des caractéristiques (cf. [14]). L'idée de la méthode vient du fait que la partie convective de l'équation de Navier-Stokes coïncide avec la dérivée totale:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \quad (2.1)$$

Alors si δt dénote le pas de temps et $\mathbf{u}^n$ la vitesse approchée au temps $n \cdot \delta t$, l'approximation suivante est consistante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^{n+1}(x) - \mathbf{u}^n \circ \chi^n(x)}{\delta t} \quad (2.2)$$

avec

$$\chi^n(x) = X^n((n+1)\delta t; x), \quad (2.3)$$

où $X^n(\tau; x)$ désigne la solution du système d'équations différentielles ordinaires:

$$\frac{dX^n}{d\tau}(\tau; x) = \mathbf{u}^n(X^n(\tau; x), \tau), \quad (2.4)$$

$$X(n\delta t; x) = x. \quad (2.5)$$

En introduisant cette approximation dans un problème du type (1.27), on obtient :

$$k(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v})_{0,\Omega} + a_o(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^{n+1}) = \langle l^{n+1}, \mathbf{v} \rangle + k(\mathbf{u}^n \circ \chi^n, \mathbf{v})_{0,\Omega}, \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.6)$$

$$b(\mathbf{u}^{n+1}, q) = 0, \quad \forall q \in Q \quad (2.7)$$

$$\mathbf{u}^o = \mathbf{u}_o \quad (2.8)$$

+ conditions limites essentielles

où $k = \frac{1}{\delta t}$, et

$$\langle l^{n+1}, \mathbf{v} \rangle = -\langle g(\mathbf{u}^n), \mathbf{v} \rangle \quad (2.9)$$

si l est donné par (1.33) et par

$$\langle l^{n+1}, \mathbf{v} \rangle = -\langle p_0^{n+1}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \rangle_{\Gamma_2} \quad (2.10)$$

est la valeur au temps $(n+1)\delta t$ de l donné par

Remarque. On reviendra dans la section 3.4 sur le calcul de la partie du second membre procédant de (2.2).

Si on appelle

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} + a_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (2.11)$$

après avoir fait la discrétisation en temps du système, il faut résoudre à chaque étape un problème linéaire du type :

Trouver $\mathbf{u}, p$ tels que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle l, \mathbf{v} \rangle, \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.12)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = 0, \forall q \in Q \quad (2.13)$$

+ conditions essentielles

Il s'agit en fait d'un problème de type Stokes généralisé (2.12), (2.13) .

2.2 Discrétisation en espace

Pour approcher un problème du type Stokes généralisé, on a choisi la méthode d'éléments finis mixtes dite "mini-élément" où " $P^1 + \text{bulle}/P^1$ ". Cet élément a été choisi parce qu'il exige relativement peu de degrés de liberté, tout en étant stable (voir [1]).

Pour construire le schéma, on considère une partition du domaine en tétraèdres $\mathcal{T}_h$, vérifiant les conditions de régularité standard dans la méthode des éléments finis.

Soit M_h l'espace des fonctions P^1 continues : c'est-à-dire, l'ensemble des fonctions continues dont la restriction à chaque tétraèdre de $\mathcal{T}_h$ est linéaire.

Soit X_h l'espace des fonctions $P^1 + \text{bulle}$ c'est-à-dire, l'ensemble des fonctions continues dont la restriction à chaque tétraèdre de $\mathcal{T}_h$ est une combinaison linéaire d'un polynôme de degré ≤ 1 et d'un polynôme de degré 4 qui s'annule sur les faces du tétraèdre (fonction bulle).

Pour approcher le système, on considère les espaces :

$$V_h = X_h^3 \cap V \quad (2.14)$$

$$Q_h = M_h \cap Q \quad (2.15)$$

où V est donné par (1.31), (1.36) ou (1.38) et Q par (1.32) ou (1.37). On cherche alors

$$(\mathbf{u}_h, p_h) \in X_h^3 \times Q_h \quad (2.16)$$

tel que

$$\left. \begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + b(\mathbf{u}_h, p_h) &= \langle l, \mathbf{v}_h \rangle, \forall \mathbf{v}_h \in V_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0, \forall q_h \in Q_h \\ &+ \text{conditions limites essentielles.} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Remarque. Les conditions aux limites essentielles sont satisfaites en un sens "interpolé". C'est-à-dire si $\mathbf{u}$ doit vérifier: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ sur Γ_1 , $\mathbf{u}_h$ vérifie alors : $\mathbf{u}_h = \Pi_h \mathbf{u}_1$, où $\Pi_h \mathbf{u}_1$ est l'interpolée de $\mathbf{u}_1$.

Si on a des conditions aux limites du type (1.5) partout, on démontre que le schéma (2.17) est stable, convergent et d'ordre $0(h)$.

Cependant, il faut regarder un peu plus en détails ce qui se passe avec les conditions aux limites portant sur les composantes normales ou tangentielles (1.5)-1.8. L'espace variationnel de la vitesses est donné par :

$$V_h = \{V_h \in X_h^3 : \mathbf{v}_h = 0 \text{ sur } \Gamma_1; \quad \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \quad (2.18)$$

D'une part, on remarque que les degrés de liberté pour les frontières de X_h sont les valeurs aux sommets et aux barycentres des tétraèdres. Les seuls degrés de liberté sur Γ_3 sont les valeurs aux sommets appartenant à cette partie de frontière. La normale extérieure n'étant pas définie sur les points anguleux de la frontière, la construction de l'espace de fonction V_h est difficile car la condition de trace normale nulle doit être vérifiée sur chaque face, et les degrés de liberté sont sur les sommets et non sur les faces.

De plus, si le domaine à approcher est une variété C^1 , on démontre que le schéma construit avec le choix de V_h peut être non convergent.

Pour résoudre ce problème, on a considéré deux traitements numériques différents de la condition (1.8).

2.2.1 Traitement fort

L'idée consiste à construire d'abord une approximation continue de la normale extérieure, n_h pour le domaine discrétisé. Une fois cette approximation construite, on considère le schéma (2.17) où V_h est donné maintenant par :

$$V_h = \{v_h \in X_h^3 : v_h|_{\Gamma_1} = 0; \quad v_h \cdot n_h(q) = 0 \quad \forall q \text{ sommet de } \Gamma_3\} \quad (2.19)$$

Si on a $n_h(q)$ coïncidant avec la normale extérieure du domaine continu, Verfurth [16] a démontré que le schéma ainsi construit est convergent et d'ordre $0(\sqrt{h})$. En pratique, n_h est une approximation continue de la normale linéaire sur chaque face de Γ_3 . On décrit une méthode de construction de cette approximation dans 3.2.

Cependant, ce traitement ajoute un coût supplémentaire en place mémoire et temps de calcul, par rapport à la résolution numérique d'un problème avec des conditions de Dirichlet partout.

Remarque Ce type de traitement est utilisé pour les conditions de type (1.18).

2.2.2 Traitement faible

L'idée de base est la suivante : il est connu que les fonctions orthogonales dans le sens de $L^2(\Omega)^3$ à tous les gradients de fonctions de $H^1(\Omega)$ sont celles à divergence nulle et à trace normale nulle. C'est-à-dire :

$$u \in L^2(\Omega)^3 / (\nabla q, u) = 0, \forall q \in H^1(\Omega) \implies \nabla \cdot u = 0 \text{ et } u \cdot n|_{\Gamma} = 0. \quad (2.20)$$

Il y a donc une relation entre la condition d'incompressibilité et celle d'imperméabilité de la frontière.

Nous supposons donc, que le système à résoudre est du type:

$$ku - \nu \Delta u + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega \quad (2.21)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.22)$$

$$u \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.23)$$

$$\alpha u \tau_i - \nu \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \tau_i = g \cdot \tau_i, i = 1, 2, \quad \text{sur } \Gamma \quad (2.24)$$

L'idée est de prendre comme formulation variationnelle pour l'équation d'incompressibilité:

$$(\nabla q, u)_{0,\Omega} = 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega) \quad (2.25)$$

et en déduire les deux conditions. Autrement dit, il s'agit de traiter (1.8) "naturellement" (ou "faiblement") plutôt que "essentiellement" (ou "fortement"). Un tel choix de formulation variationnelle pose des difficultés au niveau du problème continu (il faut changer la régularité des espaces variationnels de la pression). L'idée sera d'exploiter ce principe dans le cas discret (où les fonctions de l'espace des pressions sont dans $H^1(\Omega)$). On obtient donc le schéma :

Trouver $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ tel que

$$a(u_h, v_h) + \tilde{b}(v_h, p_h) = (f, v_h)_{0,\Omega} + \langle g, v_h \rangle_{0,\Gamma}, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.26)$$

$$\tilde{b}(\mathbf{u}_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (2.27)$$

où

$$\tilde{b}(\mathbf{v}, q) = (\nabla q, \mathbf{v})_{0,\Omega}. \quad (2.28)$$

$$V_h = X_h^3 \quad (2.29)$$

$$Q_h = \{q_h \in M_h : \int_{\Omega} q_h(x) dx = 0\}. \quad (2.30)$$

Il n'y a pas de conditions sur les traces des fonctions de X_h , la construction de la normale extérieure n'est pas nécessaire. Le schéma est très simple à implémenter et aussi coûteux que celui correspondant à un problème avec des conditions aux limites classiques. En outre il converge en $O(\sqrt{h})$ [10]. Cependant, du fait que la condition (1.8) est satisfaite dans un sens faible ou dual, l'imperméabilité de la frontière est moins exacte que celle que l'on obtient avec un traitement fort. Il peut y avoir un peu de flux à travers Γ_1 .

D'un autre côté, regardons ce qui se passe quand on a d'autres conditions aux limites sur la frontière. Si, par exemple, on a la condition (1.8) sur $\Gamma_1 \subset \Gamma$, on aurait :

$$(\nabla q, \mathbf{u})_{0,\Omega} = -(\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_{0,\Omega} + \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot q = \int_{\Gamma - \Gamma_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot q \quad (2.31)$$

Alors il faudrait prendre comme schéma

$$\tilde{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \tilde{b}(\mathbf{v}_h, p_h) = (f, \mathbf{v}_h)_{0,\Omega} + (g, \mathbf{v}_h)_{0,\Gamma}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (2.32)$$

$$\tilde{b}(\mathbf{u}_h, q_h) = (\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}, q_h)_{0,\Gamma - \Gamma_1}, \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (2.33)$$

et cela n'est possible que si la valeur de $\mathbf{u}_h$ est connue a priori sur $\Gamma - \Gamma_h$. Autrement dit, si des conditions aux limites de Dirichlet existent partout ailleurs.

En résumé, ce type de traitement n'est pas compatible avec des conditions de type (1.6). Au vu des avantages et des inconvénients de l'un et l'autre traitement, on a laissé à l'utilisateur le choix.

Remarque Il existe une autre possibilité pour traiter la condition (1.8) qui donne une estimation en $O(h)$ qui consiste à pendre cette condition comme une contrainte, de la dualiser en introduisant un multiplicateur de Lagrange supplémentaire [17].

3 STRUCTURE DU CODE: mise en œuvre des algorithmes

3.1 La méthode d'Uzawa/Gradient Conjugué préconditionné

La discrétisation des équations de Navier-Stokes (1.1) mène à la résolution d'un système linéaire à chaque itération en temps, dont la formulation matricielle est du type suivant :

$$A_h U_h + B_h P_h = F_h \quad (3.1)$$

$$B_h^T U_h = X_h \quad (3.2)$$

où A_h est la matrice associée à l'opérateur elliptique de 2ème ordre (elle est donc symétrique et définie positive) et B_h la matrice associée aux gradients de pression. Une forme simple pour présenter la méthode d'Uzawa consiste à passer des équations (3.1), (3.2) à une autre

équation équivalente où la seule inconnue est la pression. Pour ce faire, on écrit U_h en fonction de P_h à partir de (3.1)

$$U_h = A_h^{-1}[F_h - B_h P_h] \quad (3.3)$$

et on utilise cette égalité dans (3.2).

On obtient donc

$$M_h P_h = B_h^T A_h^{-1} F_h - X_h \quad (3.4)$$

On démontre que la matrice $M_h = B_h^T A_h^{-1} B_h$ est symétrique et définie positive (cf. [6]).

Remarque : Le système (3.1), (3.2) représentant les conditions d'optimalité pour un problème de minimisation avec contraintes, alors P_h joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange et (3.4) n'est autre que le problème dual associé au dit problème de minimisation.

La méthode choisie consiste donc à résoudre le système (3.4) par la méthode du gradient conjugué. Cette résolution présente deux inconvénients: la matrice M_h est pleine et mal conditionnée. Nous signalons d'abord que l'implémentation de la méthode du gradient conjugué peut être faite sans qu'il soit nécessaire de calculer et stocker explicitement la matrice M_h . En effet, la seule opération qu'il faut réaliser avec la matrice M_h pour mettre en œuvre ladite méthode est le produit par un vecteur. Or étant donné un vecteur Q_h , ce produit peut être calculé sans connaître explicitement les coefficients de M_h . Pour ce faire, nous procédons en trois étapes :

- a) Calcul de $B_h Q_h$
- b) Résolution du système $A_h V_h = B_h Q_h$
- c) Calcul de $B_h^T V_h$

La seule matrice qui est calculée et stockée est donc A_h .

Afin d'éviter la deuxième difficulté (mauvais conditionnement de la matrice), il faut choisir un préconditionnement efficace du système. Grosso modo, cela revient à résoudre, plutôt que le système (3.4) un nouveau système.

$$C_h^{-1} M_h P_h = C_h^{-1} [B_h^T A_h^{-1} F_h - X_h] \quad (3.5)$$

où la matrice C_h doit être choisie de façon à ce que $C_h^{-1} M_h$ soit une matrice mieux conditionnée que M_h .

Intuitivement, l'idée est de choisir C_h "proche" de M_h , ce qui entraîne la résolution d'un système dont la matrice est "proche" de l'identité.

Un bon choix pour C_h a été présenté par Cahouet-Chabart [2]. On peut présenter ce choix d'une façon simple à partir des opérateurs continus.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on a des conditions aux limites de Dirichlet. On constate que la matrice M_h peut être regardée comme étant la version discrète de l'opérateur M suivant :

$$q \in L^2(\Omega) \rightarrow Mq = \nabla \cdot v \in L^2(\Omega) \quad (3.6)$$

où $v \in H^1(\Omega)^3$ est la solution du problème aux limites :

$$kv - \nu \Delta v = \nabla q \quad \text{dans } \Omega \quad (3.7)$$

$$v = u|_{\Gamma} \quad \text{sur } \Gamma \quad (3.8)$$

Si on négligeait les conditions aux limites, tous les opérateurs différentiels intervenant dans la définition pourraient être commutés, ce qui donne :

$$Mq = \nabla \cdot [(kI - \nu \Delta)^{-1} \nabla q] = [kI - \nu \Delta]^{-1} \Delta q = [k\Delta^{-1} - \nu I]^{-1} \quad (3.9)$$

où I désigne l'opérateur identité.

Si on discrétise maintenant l'opérateur continu obtenu à droite, on a :

$$M_h \simeq C_h \quad (3.10)$$

où

$$C_h = [kG_h^{-1} - \nu I_h^{-1}]^{-1} \quad (3.11)$$

G_h, I_h étant les matrices aux produits scalaires

$$(\nabla p_h, \nabla q_h)_{0,\Omega}, \quad \forall p_h, q_h \in Q_{h,0} \quad (3.12)$$

et

$$(p_h, q_h)_{0,\Omega} \quad \forall p_h, q_h \in Q_{h,0} \quad (3.13)$$

respectivement. Cette idée peut être appliquée aussi aux systèmes issus d'un choix de conditions aux limites de glissement ou sur la pression, mais ce n'est pas le cas pour les conditions naturelles (1.7) : dans le cas là, l'espace discret des pressions est Q_h entier et (3.12) ne définit plus un produit scalaire. G_h est donc singulier.

Finalement, nous rappelons l'algorithme du gradient conjugué pour la résolution du système (3.5), quand la matrice C_h donnée par (3.11) peut être construite.

- Initialisation

- Choisir p_{h0}
- Calculer U_{h0} , solution de

$$A_h U_{h0} = F_h - B_h P_{h0} \quad (3.14)$$

- $r_{0h} = B_h^T u_{h0}$
- Calculer z_{h0} solution de

$$C_h z_{h0} = r_{0h} \quad (3.15)$$

- $w_{h0} = z_{h0}$

- Etape $n + 1$ $u_{h,n}, p_{h,n}, r_{h,n}, w_{h,n}$ étant calculés :

- Calculer $X_{h,n}$ solution de :

$$A_h X_{h,n} = -B_h w_{h,n} \quad (3.16)$$

- $p_n = (z_{h,n}, r_{h,n}) / (B_h^T X_{h,n}, z_{h,n})$
- $u_{h,n+1} = u_h - \rho_n X_{hn}$
- $r_{h,n+1} = r_{h,n} - \rho_n B_h^T X_{hn}$
- Calculer $Z_{h,n+1}$ solution de

$$C_h Z_{h,n+1} = r_{h,n+1} \quad (3.17)$$

- $\gamma_n = (r_{h,n+1}, Z_{h,n+1}) / (r_{h,n}, Z_{h,n})$
- $\omega_{h,n+1} = Z_{h,n+1} + \gamma_n \cdot \omega_{h,n}$
où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien des vecteurs.
- La résolution d'un système

$$C_h Z_h = r_h \quad (3.18)$$

est faite en deux étapes :

$$G_h Z_h = r_h \quad (3.19)$$

- $Z_h = K Z_h + \nu \tilde{I}_h^{-1} \cdot r_h$
où $\tilde{I}$ est la matrice diagonale de "mass-lumping".

Remarque : L'interprétation de (3.19) comme discrétisation d'un problème aux limites est différente suivant les conditions aux limites du problème:

- S'il n'y a pas de conditions aux limites sur la pression, il s'agit d'une discrétisation du système:

$$-\Delta z_h = r_h \quad \text{dans } \Omega \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial z_h}{\partial n} = 0 \quad \text{dans } \Gamma \quad (3.21)$$

- S'il y a des conditions sur la pression sur la frontière Γ_p , il s'agit d'une discrétisation de:

$$-\Delta z_h = r_h \quad \text{dans } \Omega \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial z_h}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma - \Gamma_p; z_h = 0 \quad \text{sur } \Gamma_p \quad (3.23)$$

3.2 Construction et stockage de la matrice

A chaque itération de l'algorithme d'Uzawa, il faut résoudre deux systèmes linéaires: la matrice du premier correspond à la discrétisation de l'opérateur elliptique, et celle du deuxième système correspond au préconditionnement choisi. Les deux types de systèmes linéaires seront résolus à leur tour avec la méthode du gradient conjugué préconditionné.

La construction et le stockage des deux types de matrice étant analogues, nous nous bornerons à les décrire pour le premier type.

3.2.1 Système non-couplé

On considère tout d'abord le cas d'un système avec des conditions aux limites essentielles dont le traitement numérique n'exige pas de blocage sur les composantes normales ou tangentielles des vitesses: c'est-à-dire, conditions de type (1.5), (1.6) ou (1.7) avec traitement faible de la condition sur la composante normale.

Pour la commodité de l'exposé, nous supposons que l'on a des conditions de type de Dirichlet (1.5) partout. Dans ce cas, l'espace d'éléments finis correspondant à la vitesse est le suivant:

$$V_h = \{v_h \in X_h / v_h = 0 \text{ sur } \Gamma\} \quad (3.24)$$

ou X_h est l'espace des fonctions P^1 +bulle.

Après avoir choisi une base de cet espace, la matrice correspondante à la discrétisation du laplacien est définie par:

$$\{v_h\}^T A_{dh} \{w_h\} = a(v_h, w_h), \quad v_h, w_h \in V_h \quad (3.25)$$

où a est donnée par (2.11) et $\{v_h\}$ représente les coordonnées de v_h par rapport à la base choisie. Nous construirons d'abord la matrice correspondant à l'espace X_h tout entier et, en suite, on prendra en compte les conditions aux limites.

a) *Choix d'une base de X_h*

Soit NBV le nombre de sommets du maillage et NBE le nombre d'éléments. Nous rappelons que les nœuds de X_h sont les sommets et les barycentres des tétraèdres. On considère une numérotation des nœuds:

$$\{q_i\}_{i=1, NBV+NBE} \quad (3.26)$$

ainsi que des éléments:

$$\{K_j\}_{j=1, NBE} \quad (3.27)$$

Par commodité, on suppose que ces numérotations sont telles que le nœud q_{i+NBV} correspond au barycentre de l'élément K_i et que les NBI premiers nœuds sont ceux qui se trouvent à l'intérieur du domaine de calcul. On vérifie aisément que la dimension de V_h est $3(NBI + NBE)$. Nous allons construire une base de cette espace.

Pour ce faire, nous commençons par définir l'ensemble J_i donnant les indices des éléments auxquels appartient un sommet donné:

$$J_i = \{j \in \{1, \dots, NBE\} : q_i \in K_j\}, \quad 1 \leq i \leq NBV \quad (3.28)$$

Nous dirons que deux sommets q_i, q_j sont des voisins si $J_i \cap J_j \neq \emptyset$.

On considère maintenant la base usuelle $\{\varphi_i\}_{i=1, NBV}$ de l'espace Q_h d'éléments finis P^1 continu, donnée par:

$$\varphi_i(q_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (3.29)$$

De même, on définit la famille de fonctions $\{b_i\}$ dont la restriction aux éléments du maillage est:

$$b_i|_{K_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ b_{K_j} & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.30)$$

où b^{K_j} est la fonction "bulle" associée à l'élément K_j [1]).

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors, une première base de X_h est donnée par:

$$\{\varphi_i e_j\}_{i=1, NBV; j=1,3} \cup \{b_i e_j\}_{i=1, NBE; j=1,3} \quad (3.31)$$

On considère aussi la base $\{\theta_{i,j}\}_{i=1, NBV+NBE; j=1,3}$ donnée par:

$$\begin{cases} \theta_{i,j} &= \varphi_i e_j - 4^3 \sum_{k \in J_i} b_k e_j; \quad 1 \leq j \leq 3; \quad 1 \leq i \leq NBV \\ \theta_{i+NBV,j} &= b_i e_j \quad 1 \leq j \leq 3; \quad 1 \leq i \leq NBE \end{cases} \quad (3.32)$$

L'intérêt de cette base vient du fait que les degrés de liberté des fonctions de X_h associés à cette base correspondent aux composantes canoniques des valeurs des fonctions sur les nœuds. C'est donc cette base que l'on utilise pour la représentation graphique des résultats. Cependant, la base que l'on utilisera pour la construction de la matrice est la suivante:

$$\begin{cases} \psi_{i,j} &= \varphi_i e_j - \sum_{l \in J_i} \alpha_l b_l e_j; \quad 1 \leq j \leq 3; \quad 1 \leq i \leq NBV \\ \psi_{i+NBV,j} &= b_i e_j \quad 1 \leq j \leq 3; \quad 1 \leq i \leq NBE \end{cases} \quad (3.33)$$

où $\alpha_l \in \mathbb{R}$ est calculée de façon à avoir:

$$\kappa \int_{K_l} (\lambda_i + \alpha_l b_l) b_l dx + \nu \int_{K_l} \nabla(\lambda_i + \alpha_l b_l) \nabla b_l dx = 0, \quad 1 \leq i \leq 4 \quad (3.34)$$

$\{\lambda_i\}_{i=1,4}$ étant les coordonnées barycentriques par rapport aux sommets de K_l .

b) Structure de la matrice

Du choix du nombre α_l donné par (3.34) et de la définition des fonctions $\psi_{i,j}$, on déduit aisément les relations:

$$a(\psi_{i,j}, \psi_{r,s}) = 0 \text{ si } i \leq NBV \text{ et } r > NBV \quad (3.35)$$

$$a(\psi_{i,j}, \psi_{r,s}) = 0 \text{ si } i, r > NBV \text{ et } i \neq r \quad (3.36)$$

$$a(\psi_{i,j}, \psi_{r,s}) = 0 \text{ si } j \neq s \text{ et pour tout } i, r \quad (3.37)$$

A partir de ces relations, on déduit que la matrice A_{dh} , construite suivant (3.25) a la structure suivante:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

où D est une matrice diagonale d'ordre NBE ; $A_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, et $A_{1,1} = A_{2,2} = A_{3,3} = A_d$. En plus, A_d est une matrice symétrique d'ordre NBV^2 .

Au vu de la structure de la matrice, il est clair que pour résoudre un système de matrice A_{dh} il suffit de résoudre trois systèmes carrés d'ordre NBV avec la même matrice et un système diagonal d'ordre $3NBE$. On a donc réduit la taille des systèmes à résoudre, ce qui est très important pour le coût des calculs en place mémoire et temps c.p.u.

c) *Prise en compte des conditions aux limites*

Pour construire maintenant une base de W_h , il suffit d'enlever de la famille donnée par (3.33) les fonctions $\psi_{i,j}$ dont $NBI < i \leq NBV$.

Les systèmes à résoudre sont du type:

$$\begin{bmatrix} A_{dI,I} & A_{dI,II} \\ A_{dII,I} & A_{dII,II} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{i,I} \\ U_{i,II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{i,I} \\ F_{i,II} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

où l'indice I fait référence aux nœuds intérieurs et II aux nœuds sur la frontière. U_i représente le vecteur des degrés de liberté correspondant à l' i -ème composante de u_h ($i = 1, 3$).

La valeur de U_{II} vient donnée par les conditions aux limites et elle est donc connue *à priori*. Le système à résoudre s'écrit donc:

$$\begin{bmatrix} A_{dI,I} & 0 \\ 0 & I_{NBF} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_{i,I} \\ U_{i,II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{i,I} - A_{dI,II}U_{i,D} \\ U_{i,D} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

I_{NBF} étant la matrice identité d'ordre $NBF = NBV - NBI$.

Remarque En pratique, la numérotation des nœuds frontières n'est jamais corrélative, car une telle numérotation donne des matrices à grande largeur de bande. Alors, on construit une matrice d'ordre NBV^2 , modifiée de façon à ce que les rangs correspondant aux nœuds de la frontière coïncident avec ceux de la matrice identité.

d) *Stockage de la matrice*

Le caractère symétrique de la forme bilinéaire a entraîne celui de la matrice A . Il suffit donc de stocker la partie triangulaire inférieure. D'autre part, le support des fonctions de base $\psi_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq NBV$ est l'union des tétraèdres $\{K_j : j \in J_i\}$. En conséquence, si on désigne par $a_{i,j}$ les coefficients de la matrice A_d , nous avons:

$$a_{i,j} \neq 0 \implies q_i, q_j \text{ sont des nœuds voisins.} \quad (3.41)$$

Il y a donc beaucoup de coefficients qui sont forcément nuls. En profitant de ce fait, on utilise un stockage compact du type Morse, où seulement les coefficients qui peuvent être non nuls sont stockés. Pour ce faire, on considère un tableau C où l'on garde les coefficients avec l'ordre suivant:

Pour $i = 1, \dots, NBV$
 Pour $j = 1, \dots, NBV$
 Si q_i, q_j sont des nœuds voisins, faire $k = k + 1$, $C(k) = a_{i,j}$
 suivant j
 suivant i

Pour trouver la valeur d'un coefficient donné $a_{i,j}$ dans le tableau C , on utilise deux pointeurs: le tableau $PLGN(NBV)$ construit de façon à avoir:

$$PLGN(I) = K \implies C(K) = a_{i,i} \quad (3.42)$$

et le tableau $PCOL$, de même longueur que C , donné par:

$$PCOL(K) = j \implies \text{il existe } i \text{ tel que } C(K) = a_{i,j} \quad (3.43)$$

3.2.2 Système couplé

Nous considérons dans ce paragraphe les conditions aux limites faisant intervenir les composantes normale ou tangentielle des vitesses.

a) Calcul de la normale:

Pour traiter ce type de conditions, il faut d'abord construire une approximation de la normale extérieure sur chaque nœud de la partie de la frontière où l'on impose ce type de conditions aux limites. La construction utilisée dans le code est présentée dans [5]. L'idée est la suivante: pour la normale extérieure exacte, la formule de Green donne:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v} \text{ tel que } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.44)$$

Il est désirable de maintenir une propriété analogue pour la normale approchée $\mathbf{n}_h$:

$$\int_{\Gamma_h} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_h d\gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h \text{ tel que } b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h \quad (3.45)$$

où $\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}_h$ représente la fonction P^1 -continue sur Γ_h qui vaut $\mathbf{v}_h(q_i) \cdot \mathbf{n}_h(q_i)$ sur chaque nœud $q_i \in \Gamma_h$.

Or, on démontre que (3.45) est une équation qui détermine la valeur de $\mathbf{n}_h$ sur chaque nœud. Plus précisément, si on appelle $\mathbf{n}_i = (n_{i,1}, n_{i,2}, n_{i,3})$ à $\mathbf{n}_h(q_i)$, on a

$$n_{i,j} = \frac{1}{C} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx \quad (3.46)$$

où $C > 0$ est calculé de façon à normaliser le vecteur et φ_i est la fonction définie par (3.31) associée au nœud q_i .

b) Calcul des coefficients de la matrice

Nous considérons tout d'abord le cas de conditions aux limites (1.5)-(1.8) traitée au sens fort. L'espace V_h est donné par:

$$W_h = \{\mathbf{v}_h \in X_h / \mathbf{v}_h = 0 \text{ dans } \Gamma_1; \mathbf{v}_h(q_i) \cdot \mathbf{n}_h(q_i) = 0 \quad \forall q_i \in \Gamma_3\} \quad (3.47)$$

et la forme bilinéaire a par (2.11).

Si l'on désigne par $NBG1$ (resp. $NBG3$) le nombre de nœuds appartenant à la frontière Γ_1 (resp. Γ_3), la dimension de cet espace est $3(NBV + NBE - NBG3) - NBG1$.

Tout comme dans le cas non couplé, nous considérons la base de X_h donnée par la famille de fonctions $\{\psi_{i,j}\}$ définie en (3.31) et la matrice A_h associée à la forme bilinéaire a correspondante à cette base:

$$\{\mathbf{v}\}_h^T A_h \{\mathbf{w}\}_h = a(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in V_h \quad (3.48)$$

On obtient une matrice du type (3.38), avec la même structure que dans le cas précédent. Nous désignerons par A la matrice carrée qui apparait dans les trois blocs diagonaux de A_h . Ce choix de conditions aux limites est plus complexe que le cas précédent. En effet, la construction de la base de V_h ne peut pas être faite en enlevant un certain nombre de fonctions de base. Par conséquent, la matrice du problème ne peut pas être construit par décomposition en blocs de la matrice correspondante à l'espace total.

Pour construire la base de V_h , nous partons d'une nouvelle base de X_h : pour chaque nœud q_i appartenant à Γ_{1h} , on construit une base orthonormée, positivement orientée $\{n_h(q_i), \tau_1, \tau_2\}$, on considère ensuite la famille de fonctions $\{\Phi_{i,j}\}_{i=1,NBV+NBE; j=1,3}$ donnée par:

$$\text{Si } q_i \in \Gamma_{1h} \quad \begin{cases} \Phi_{i,1} = n_{i,1}\psi_{i,1} + n_{i,2}\psi_{i,2} + n_{i,3}\psi_{i,3} \\ \Phi_{i,2} = t_{i,1}^1\psi_{i,1} + t_{i,2}^1\psi_{i,2} + t_{i,3}^1\psi_{i,3} \\ \Phi_{i,3} = t_{i,1}^2\psi_{i,1} + t_{i,2}^2\psi_{i,2} + t_{i,3}^2\psi_{i,3} \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\text{Si } q_i \notin \Gamma_{1h} \quad \Phi_{i,j} = \psi_{i,j}, \quad 1 \leq j \leq 3, \quad (3.50)$$

où $n_h(q_i) = (n_{i,1}, n_{i,2}, n_{i,3})$; $\tau_j = (t_{i,1}^j, t_{i,2}^j, t_{i,3}^j)$, $j = 1, 2$.

On vérifie aisément que la famille des fonctions ainsi définies constitue une base de X_h , et si l'on enlève de cette famille les fonctions $\Phi_{i,1}$, avec $q_i \in \Gamma_3$, ainsi que $\{\Phi_{i,j}\}_{j=1,3}$ pour $q_i \in \Gamma_1$, on obtient une base de V_h .

Avec cette nouvelle base, (3.35) et (3.36) sont toujours valables, mais ce n'est pas le cas pour (3.37): si nous faisons à nouveau une décomposition en blocs du type (3.38) de la matrice calculée avec cette base, que l'on désignera par $\tilde{A}_h$, les blocs non diagonaux seront, en général non nuls. Par conséquent, si l'on a à résoudre un système de matrice $\tilde{A}_h$, on ne pourra pas le décomposer en trois systèmes d'ordre NBV avec la même matrice et un système diagonal d'ordre $3NBE$: il faudra résoudre un système d'ordre $(3NBV)^2$.

La partie de la matrice correspondant au système diagonal associé aux fonctions bulles ne subit aucune modification par rapport au cas précédent. Quant à la matrice du système d'ordre $(3NBV)^2$, pour calculer ses coefficients à partir de A_h on considère tout d'abord, pour chaque nœud $q_i \in \Gamma_{1h}$ la matrice B_i donnée par:

$$B_i = \begin{bmatrix} n_{i,1} & n_{i,2} & n_{i,3} \\ t_{i,1}^1 & t_{i,2}^1 & t_{i,3}^1 \\ t_{i,1}^2 & t_{i,2}^2 & t_{i,3}^2 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Si l'on fait un réagencement du système linéaire de façon à ce que les équations correspondant aux degrés de liberté associés au même sommet soient corrélatives, la matrice peut être écrite de la façon suivante:

$$\tilde{A}_h = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{1,1} & \tilde{A}_{1,2} & \dots & \tilde{A}_{1,NBV} \\ \tilde{A}_{2,1} & \tilde{A}_{2,2} & \dots & \tilde{A}_{2,NBV} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{NBV,1} & \tilde{A}_{NBV,2} & \dots & \tilde{A}_{NBV,NBV} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

où chaque bloc $\tilde{A}_{i,j}$ est d'ordre 3×3 et vient donné par:

$$\tilde{A}_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j}I_3 & \text{si } q_i \notin \Gamma_{1h}, q_j \notin \Gamma_{1h} \\ a_{i,j}B_i & \text{si } q_i \in \Gamma_{1h}, q_j \notin \Gamma_{1h} \\ a_{i,j}B_j^T & \text{si } q_i \notin \Gamma_{1h}, q_j \in \Gamma_{1h} \\ a_{i,j}B_iB_j^T & \text{si } q_i \in \Gamma_{1h}, q_j \in \Gamma_{1h} \end{cases} \quad (3.53)$$

où $a_{i,j}$ représente le coefficient (i, j) de la matrice A et I_3 la matrice identité d'ordre 3.

Remarque Si $i = j$ et $q_i \in \Gamma_{1h}$, on a en fait $A_{i,i} = a_{i,i}I_3$, car la matrice B_i est orthogonale.

c) *Prise en compte des conditions aux limites*

Une fois la matrice construite, la prise en compte des conditions aux limites est faite comme dans le cas couplé: en effet, avec la base considérée, les degrés de liberté associés aux nœuds de la frontière Γ_{1h} sont les composantes, normales et tangentielles, des valeurs des fonctions sur les nœuds:

$$v_h = \sum \lambda_{i,j} \Phi_{i,j} \implies \lambda_{i,1} = v_h(q_i) \cdot n_h(q_i) \quad \forall q_i \in \Gamma_{1h} \quad (3.54)$$

d) *Stockage de la matrice*

La matrice $\tilde{A}_h$ est décomposée en blocs 3×3 donnée en (3.52). Dans ce cas, on a $\tilde{A}_{i,j} = 0$ chaque fois que q_i et q_j ne sont pas des nœuds voisins. Alors, si l'on regarde la matrice comme ayant des coefficients qui sont des matrices 3×3 , la structure de zeros est la même que pour la matrice du cas non-couplée. On profite donc d'un stockage compact du même type. Mais dans ce cas, il faut stocker des blocs plutôt que des coefficients réels. Cependant, on peut constater dans (3.53) que la plupart de ces blocs sont scalaires ou diagonaux et il suffit donc de stocker un ou trois coefficients réels respectivement. Seuls les blocs qui se trouvent dans la deuxième situation avec $i \neq j$ ont besoin du stockage de ses neuf coefficients.

Pour profiter de cette structure des blocs et ne stocker que les coefficients nécessaires pour le calcul, on considère une structure de données analogue à celle décrite dans le cas non-couplée. Au tableau C qui contient les coefficients de chaque bloc et aux pointeurs $PLGN$ et $PCOL$ qui permettent de retrouver le bloc (i, j) dans C , il faut ajouter un nouveau pointeur $PM3$ qui indique, lui, le nombre de coefficients stockés par bloc, qui est donc variable. C'est à dire: $PM3(K) = L \implies$ le premier coefficient du K -ème bloc se trouve dans $C(L)$

$PLGN(I) = K \implies$ le premier coefficient du bloc $\tilde{A}_{I,I}$ se trouve dans $C(PM3(K))$

$PCOL(K) = J \implies$ il exist un indice I tel que le K -ème bloc stocké est $\tilde{A}_{I,J}$.

e) *Conditions sur la pression*

Nous considérons finalement le cas des conditions sur la pression. La forme bilinéaire à considérer est a_{0p} donnée par (1.34) et l'espace d'éléments finis est:

$$V_h = \{v_h \in X_h \mid \begin{array}{l} v_h = 0 \text{ dans } \Gamma_1; \quad v_h(q_i) \times n_h(q_i) = 0, \quad \forall q_i \in \Gamma_2 \\ v_h(q_i) \cdot n_h(q_i) = 0, \quad \forall q_i \in \Gamma_3 \end{array} \} \quad (3.55)$$

Si l'on désigne par $NBG1$, $NBG2$ et $NBG3$ le nombre de nœuds appartenant à Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 respectivement, la dimension de V_h est $3(NBV + NBE - NBG1) - 2NBG2 - NBG3$. A la différence du cas avec un couplage de la matrice du à la prise en compte des blocages sur la frontière, le couplage apparait même au niveau du calcul de la matrice sur l'espace total. En effet, avec la nouvelle forme bilinéaire considérée, (3.37) n'est plus valable si q_i, q_j sont des nœuds appartenant à la frontière.

Les formules d'intégration par parties donnent:

$$(\nabla \times u, \nabla \times v)_{0,\Omega} + (\nabla \cdot u, \nabla \cdot v)_{0,\Omega} = (\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)^3 \quad (3.56)$$

On considère maintenant la matrice A_{ph} écrite sous la forme (3.52). Il est facile à prouver que, si l'on appelle

$$a_{i,j} = k(\varphi_i, \varphi_j)_{0,\Omega} + (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j)_{0,\Omega}, \quad 1 \leq i, j \leq NBV \quad (3.57)$$

où les fonctions φ_i ont été construites en (3.31), alors les blocs 3×3 sont donnés par:

$$\tilde{A}_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j}I_3 & \text{si } q_i \notin \Gamma_{1h} \text{ ou } q_j \notin \Gamma_{1h} \\ a_{i,j}I_3 + R_{i,j} & \text{si } q_i \in \Gamma_{1h}, q_j \notin \Gamma_{1h} \end{cases} \quad (3.58)$$

avec

$$R_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & b_{i,j} & c_{i,j} \\ -b_{i,j} & 0 & d_{i,j} \\ -c_{i,j} & -d_{i,j} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

où

$$b_{i,j} = (\partial_1 \varphi_i, \partial_2 \varphi_j)_{0,\Omega} - (\partial_2 \varphi_i, \partial_1 \varphi_j)_{0,\Omega} \quad (3.60)$$

$$c_{i,j} = (\partial_1 \varphi_i, \partial_3 \varphi_j)_{0,\Omega} - (\partial_3 \varphi_i, \partial_1 \varphi_j)_{0,\Omega} \quad (3.61)$$

$$d_{i,j} = (\partial_2 \varphi_i, \partial_3 \varphi_j)_{0,\Omega} - (\partial_3 \varphi_i, \partial_2 \varphi_j)_{0,\Omega}. \quad (3.62)$$

De même, (3.56) entraîne que la partie de la matrice coïncide avec celle qui correspond au cas non couplé.

Une fois la matrice construite, les étapes suivantes sont en tout analogues au cas précédent.

3.3 Résolution des systèmes linéaires

D'après ce que nous avons déjà vu, il faut résoudre deux systèmes linéaires à chaque itération de l'algorithme d'Uzawa: celui qui correspond à l'opérateur elliptique de second ordre et celui correspondant au préconditionneur. Selon le choix des conditions aux limites, le premier système peut être éventuellement décomposé en trois systèmes linéaires avec la même matrice. Chacun de ces systèmes est résolu à nouveau avec la méthode du gradient conjugué préconditionné.

En ce qui concerne le système associé à l'opérateur elliptique, on a choisi un préconditionneur qui comporte une matrice facile à construire et à inverser, sans stockage supplémentaire, à l'aide d'un préconditionnement du type S.S.O.R. Alors, si le système n'est pas couplé, la matrice de préconditionnement est:

$$K = \frac{1}{2-\omega} \left(\frac{1}{\omega} D + E \right) \left(\frac{1}{\omega} D \right)^{-1} \left(\frac{1}{\omega} D + E^T \right) \quad (3.63)$$

où

$$D = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{NBV,NBV} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$E = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{NBV,1} & a_{NBV,2} & \dots & a_{NBV,NBV} \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

et ω est un paramètre tel que $0 < \omega < 2$.

Si le système est couplé, on choisit la matrice correspondant à la méthode S.S.O.R. par blocs 3×3 i.e.:

$$D = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{NBV,NBV} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$E = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{NBV,1} & A_{NBV,2} & \dots & A_{NBV,NBV} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

où les $A_{i,j}$ représentent les blocs 3×3 de la matrice du système.

Quant à la matrice associée au préconditionneur, on a vu au chapitre précédent que son inversion pour les divers choix possibles entraîne essentiellement l'inversion de la matrice de rigidité G_h . Et ceci indépendamment de la viscosité et du pas de temps (mais pas du choix des conditions aux limites). Alors, étant donné un maillage et un choix de conditions aux limites, la matrice de ce système est la même à chaque itération. Il est raisonnable donc de prendre une matrice de préconditionnement plus chère à construire, à inverser et à stocker mais plus performante.

Un choix de préconditionneur avec ces caractéristiques vient donné par compression de la décomposition de Cholesky de G_h : après avoir décomposé la matrice on enlève un certain nombre de coefficients non nuls, de façon à retenir seulement un pourcentage à fournir pour l'utilisateur. Il est clair que plus le pourcentage est grand, plus le préconditionneur est performant et plus le coût d'une itération est important en temps c.p.u. et en place mémoire. Il faut donc un certain compromis entre la performance et le coût des calculs. Ce compromis peut être atteint avec un pourcentage de 10% à 15%.

De toutes façons, on laisse toujours la possibilité d'utiliser aussi S.S.O.R. pour préconditionner ce système, au cas où le coût des calculs est trop élevé ou s'il n'y a pas assez de mémoire disponible.

3.4 Méthode des caractéristiques

La mise en œuvre des schémas présentés en 2 exige le calcul d'un second membre du type suivant:

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_h^n \circ X_h^n \cdot \mathbf{v}_h dx \quad (3.68)$$

où $\mathbf{u}_h^n$ est la vitesse approchée au temps $n\delta t$, X_h^n est une approximation de (2.3) et $\mathbf{v}_h$ prend des valeurs dans un sous espace de X_h , qui dépend des conditions aux limites.

Un calcul exact de cette intégrale, bien que théoriquement possible, entraîne un coût très élevé. Alors, on approche χ_h^n avec un schéma explicite de premier ordre et on utilise un schéma d'intégration numérique pour évaluer l'intégrale.

Plus précisément, on approche $\chi_h^n(x)$ par l'extrémité de la courbe polygonale de sommets $\{\chi_0 = x, \chi_1, \dots, \chi_m, \chi_{m+1} = \chi_h^n(x)\}$, définis par:

- chaque $\chi_i, i = 2, \dots, m$ appartient à une face d'un tétraèdre du maillage;
- le vecteur $\overline{\chi_i \chi_{i+1}}$ a la même direction et le même sens que $-\mathbf{u}_h^n(\chi_i)$, c'est à dire:

$$\chi_{i+1} = \chi_i - t_i \mathbf{u}_h^n(\chi_i), \quad t_i \geq 0; \quad (3.69)$$

- le temps de parcours de la courbe polygonale coïncide avec le pas de temps:

$$t_0 + \dots + t_m = \delta t \quad (3.70)$$

Alors, (3.68) est approché par une expression du type:

$$\int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h^n \circ X_h^n \cdot \mathbf{v}_h dx \cong \sum \pi_i \mathbf{u}_h^n(\chi_h^n(\zeta_i)) \cdot \mathbf{v}_h(\zeta_i) \quad (3.71)$$

où les ζ_i sont les points de Gauss d'un schéma d'intégration numérique et π_i les poids associés. On a choisit un schéma comportant 15 points d'intégration à l'intérieur de chaque tétraèdre, de façon à assurer la stabilité numérique. Alors, pour évaluer (3.71), il faut approcher une caractéristique par point d'intégration, ce qui fait 15 fois le nombre de tétraèdres! C'est là la partie la plus chère du code, ce qui est logique, car c'est à cet endroit où l'on a affaire à la non-linéarité de l'opérateur différentiel.

Cependant, pour éviter un coût excessif on a implémenté d'autres formules d'intégration avec un nombre plus petit de points de Gauss par tétraèdres: soit quatre points intérieurs, soit les quatre sommets, ce qui réduit le nombre de caractéristiques à approcher. Pour éviter une éventuelle perte de stabilité, dans ce cas on approche (3.68) par:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h^n \circ X_h^n \cdot \mathbf{v}_h dx &= \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_h dx \\ &+ \sum \pi_i (\mathbf{u}_h^n(\chi_h^n(\zeta_i)) - \mathbf{u}_h^n(\zeta_i)) \cdot \mathbf{v}_h(\zeta_i). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Remarque (3.68) et (3.71) sont équivalents pour schémas d'intégration exacts pour polynômes de degré 2, ce qui est le cas pour le schéma à 15 point par tétraèdre.

4 ENTREE DES DONNEES

4.1 Paramètres du calcul

xnu Viscosité (ν) : Si on donne $\nu < 0$, le code utilisera la méthode de turbulence de Smagorinsky avec une viscosité laminaire équivalente à $abs(\nu)$.

Re Nombre de Reynolds.

dtemps Pas de temps.

nbtemps Nombre maximal d'itérations en temps.

itermx Nombre maximal d'itérations de l'algorithme d'Uzawa.

eps Tolérance d'erreur (pour les tests d'arrêts).

ichx Choix de la formule de quadrature pour la méthode des caractéristiques Trois options sont possibles :

1. **ICHX = 0** Les points d'intégration sont les sommets des tétraèdres.
2. **ICHX = 4** Formule de quadrature utilisant 4 points d'intégration par tétraèdre.

3. ICHX = 15 Formule de quadrature utilisant 15 points d'intégration par tétraèdre.

Remarque. L'option 1 exige un nombre d'approximation de courbes caractéristiques par itération en temps égal au nombre de sommets. Les options 2 et 3 exigent l'approximation de 4 ou 15 fois le nombre de tétraèdres (qui est, en général, beaucoup plus élevé que celui des sommets (il y a environs 6 plus de tétraèdre que de sommets)). Ces deux dernières options sont donc bien plus chères que la précédente. Cependant, la stabilité de la méthode n'est assurée que pour les formules d'intégration à nombre de points strictement plus grand que 4. En pratique, pour des calculs à faible nombre de Reynolds on peut obtenir de bons résultats avec l'option 1. L'option 4 pourrait être un choix "de compromis" entre ces deux contraintes: elle est moins chère que l'option 15 et plus stable que l'option 1.

4.2 Paramètres d'impression

impre Paramètre d'impression concernant les différentes étapes du calcul

nnnn Paramètre d'impression correspondant à la gestion dynamique de la mémoire

4.3 Base de Données

On a prévu la possibilité de stocker en mémoire secondaire tous les tableaux nécessaires pour le calcul qui ne dépendent que du maillage (autrement dit, indépendant des paramètres décrits en 1 ainsi que le choix des conditions aux limites).

string Existe-t-il le fichier contenant la base de données ?

string='oui' entrer le nom du fichier contenant la B.D.

BDFILE puis aller en section 4.4

string='non' on construit la B.D.

filemesh nom du fichier contenant le maillage + 'fmt' s'il est formaté. L'information concernant le maillage qu'il faut fournir est la suivante :

- nombre de sommets, nbv;
- nombre d'éléments, nbe;
- tableau de description des éléments $nu(4, nbe)$: $nu(i, ie)$ numéro du sommet i du tétraèdre ie ;
- tableau des coordonnées des sommets $c(3, nbv)$: $c(j, is)$ la coordonnée cartésienne j du sommet is ;
- tableau (entier) des références des sommets $refv(nbv)$: $refv(is)$ référence du sommet is .

Remarque. Chaque sommet appartenant à la frontière doit avoir un numéro de référence non nul et chaque sommet intérieur doit avoir une référence nulle.

Remarque. Il faut prévoir un numéro de référence différent pour chaque partie de frontière ayant ses propres conditions aux limites.

Le fichier contenant cette information peut être FORMATTED ou UNFORMATTED et doit avoir la structure suivante :

```

C      SI LE FICHIER EST 'UNFORMATTED'
        read (unit1) nbv,nbe
        read (unit1) ((nu(i,j),i=4 ),j=1,nbe),
+          ((c(i,j),i=1,3),j=1,nbv),
+          (refv(i),i=1,nbv)

C      SI LE FICHIER EST 'FORMATTED'
        read (unit1,*) nbv,nbe
        read (unit1,*) ((nu(i,j),i=4 ),j=1,nbe),
+          ((c(i,j),i=1,3),j=1,nbv),
+          (refv(i),i=1,nbv)

```

BDFILE 'ENTREZ LE NOM DU FICHIER B.D.' Si BDFILE = ' ', on crée un fichier STATUS='SCRATCH' (temporaire) sinon on sauvegarde la b.d. dans le fichier de nom *bdf*ile.

NREF nombre total de références.

NREFO nombre de références correspondant à l'obstacle.

Si $NREFO > 0$, on normalise le maillage : on fait des transformations géométriques sur le domaine de façon à ce que la longueur de l'obstacle soit égale à 1. Sinon le nombre de références correspondant à l'obstacle est la valeur absolue de $NREFO$.

(REF(I),I=1,NREF) introduire les numéros de référence différents, en commençant par les $NREFO$ références correspondant à l'obstacle.

IPR100 Choix du préconditionneur. On a vu dans le chapitre que le préconditionneur considéré pour l'algorithme d'Uzawa exige l'inversion d'un laplacien pour le calcul du gradient à chaque itération. Cette inversion est réalisée à son tour par la méthode du gradient conjugué préconditionné, et c'est ce nouveau préconditionneur qu'il faut choisir.

- $IPR100 = -1$, on préconditionne par SSOR.
- $0 \leq IPR100$ on construit la factorisée incomplète compressée à $IPR100\%$

Remarque. Quand il n'y a pas de conditions aux limites sur la pression, on résout un laplacien avec des conditions aux limites de Neumann partout. Or, il est connu que les matrices issues de la discrétisation d'un tel type de problème aux limites sont mal conditionnées. Le choix du préconditionneur est donc très important. Une factorisation de Cholesky incomplète de 15% donne en général un préconditionneur très satisfaisant (convergence en 13 – 15 itérations environ). Le préconditionneur SSOR est moins performant ($\simeq 60$ itérations) mais il est beaucoup moins cher en temps CPU par itération et place mémoire. Cependant, si le nombre de calculs à faire est important, le coût supplémentaire dû à la factorisation incomplète de la matrice est largement compensé par la performance de ce préconditionneur.

Remarque. Si l'on a des conditions aux limites sur la pression, le laplacien associé au préconditionneur d'Uzawa présente des conditions aux limites différentes au cas précédent. Sur les frontières où la pression est imposée, les conditions aux limites sont de type Dirichlet. Le système linéaire à résoudre est mieux conditionné dans ce cas et il suffit d'un préconditionnement SSOR pour avoir une convergence satisfaisante. Il faut alors choisir -1 si on veut éviter un calcul inutile de la factorisation de Cholesky incomplète.

4.4 Fichiers de sauvegarde des résultats

FileRestart Nom du fichier pour réinitialisation: dans ce fichier on garde la vitesse et la pression calculées dans la dernière itération en temps, de façon à pouvoir les utiliser comme conditions initiales dans un calcul ultérieur.

FileSolu Nom du fichier pour garder la solution.

Remarque. La fréquence de sauvegarde des solutions est donnée par la variable `MODWRT` qui est initialisée dans le programme principal. Si $MODWRT = 5$, le fichier `FileSolu` comporte les valeurs du champ de vitesse et de la pression toutes les cinq itérations en temps.

FileResi Nom du fichier de stockage des résidus (`FileResi = ''` $\implies$ pas stockage)

Remarque. Si `FileResi  $\neq$  ''`, on garde à chaque itération en temps:

- l'évolution du résidu dans la méthode d'Uzawa;
- l'erreur relative en temps (on mesure la distance au sens de $L^2(\Omega)$ de la solution obtenue à la solution précédente.

FileParti Nom du fichier contenant les trajectoires des particules

- si `FileParti = ''` alors pas de calcul des trajectoires
- sinon :
 - entrer le nom du fichier de sauvegarde des particules `FileSavPar`
 - entrer le nom du fichier initialisation des particules `FileParIni`, si `FileParIni = ''` on utilise la routine `pospar` argument de `nsplb` sinon on initialise avec le fichier de sauvegarde précédent (`FileSavPar`) .

Remarque. Si `FileParti  $\neq$  ''`, on émet des particules et on calcule son évolution dans le temps. Le nombre des particules émises, ainsi que leur position initiale, sont à fournir pour l'utilisateur. La première fois que l'on émet des particules, les données initiales sont fournies via une routine `pospar` qui doit être déclaré en `EXTERNAL` dans le programme principal et passée comme paramètre de `nsplb`. Cette routine doit donner en sortie le nombre `NBP` de particules et un tableau `COG(3,NBP)`, tel que $COG(J,I) = J$ -ème composante canonique de la I -ème particule. Les données initiales, ainsi que la position finale des particules courantes sont gardés dans `FileSavPar` (si $\neq ''$). Ce fichier de sauvegarde peut être utilisé pour redémarrer le calcul des trajectoires dans les calculs postérieurs. Pour ce faire, on doit donner son nom comme argument de `FileParIni`.

4.5 Initialisation

FileInit entrer le type d'initialisation

- si **FileInit** = 'stokes', on initialise par la solution du problème de Stokes
- si **FileInit** = ' ', on initialise avec un écoulement potentiel
- si **FileInit** = 'zero', on initialise par zéro
- Sinon, on initialise par le fichier de nom **FileInit**, contenant la dernière solution du calcul précédent (généralement un **FileRestart**)

4.6 Conditions aux limites

Cette étape d'introduction des données des conditions aux limites doit être fait pour chaque problèmes à résoudre (Stokes, Navier Stokes, Potentiel).

Les types (CL) de conditions aux limites sont numérotés comme suit:

Menu 1:

0 Conditions naturelles, $-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + p\mathbf{n} = 0$.

1 Conditions de Dirichlet sur la vitesse.

2 Conditions de glissement traitées au sens fort :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_\Gamma \cdot \mathbf{n}, \quad (4.1)$$

$$\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \cdot \boldsymbol{\tau}_i + \alpha \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = -\beta \cdot \frac{\mathbf{u}_\tau}{|\mathbf{u}_\tau|}. \quad (4.2)$$

3 Idem que 2, mais $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_\Gamma \cdot \mathbf{n}$ traitée au sens faible.

4 Conditions de symétrie suivant un plan $y = cte$: $u_2 = 0$, $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0$.

5 Conditions de symétrie suivant un plan $z = cte$: $u_3 = 0$, $\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0$.

6 Intersection de plan de symétrie de type 4 et 5: $u_2 = u_3 = 0$; $\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0$.

7 Conditions sur la pression et la composante tangentielle des vitesses. $p = p_\Gamma$; $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{u}_\Gamma \times \mathbf{n}$.

8 Conditions sur la composante normale de la vitesse et la composante tangentielle du tourbillon: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_\Gamma \cdot \mathbf{n}$; $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}$.

10 Conditions de périodicité : $\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{u}|_{\Gamma_2} \circ T$.

Remarque. En cas d'écoulement potentiel, seules les conditions de type

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_\Gamma \cdot \mathbf{n} \quad (4.3)$$

ont un sens, dans ce cas là, il n'y a donc pas de choix de conditions aux limites à faire.

Si on calcule écoulement de fluide non visqueux (Euler), seuls trois choix sont possibles : sortie libre, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_\Gamma \cdot \mathbf{n}$ ou $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma$.

Les types de données des valeurs des blocages (**TCL**) concernant les conditions aux limites sont numérotés comme suit:

Menu 2:

0 Homogènes ou nulle (pas d'autre donnée.)

1 Constantes (fournir la valeur de la constante ou des constantes).

2 Calculées par une fonction indépendante du temps.

3 Calculées par une fonction dépendante du temps.

4 Données par lecture d'un fichier.

5 Calculées par le code à partir de la solution précédente.

Remarque. Les entrées de données de type 5 sont de type instationnaires et n'ont un sens que pour Navier-Stokes. Il s'agit donc d'un choix interdit pour le problème de Stokes ou l'écoulement potentiel.

Les données dépendent des types de conditions aux limites.

Pour chaque frontière référencée:

CL type de la condition aux limites seulement (voir Menu 1).

- Si CL = 0,4,5,6 pas d'autres données.
- Si CL = 1 ou 8 ou en cas d'écoulement potentiel:

TCL entrer le type de donnée pour $\mathbf{u}_\Gamma$.

- Si TCL = 0 pas de donnée supplémentaire: $\mathbf{u}_\Gamma = 0$.
- Si TCL = 1 fournir les 3 valeurs U1, U2, U3 réelles de $\mathbf{u}_\Gamma = (u_1, u_2, u_3)$.
- Si TCL = 2,3 on utilise la routine external fonvit passée comme argument du programme nsplb.
- Si TCL = 4 donnée le nom du fichier (chaîne) FileName.
- Si TCL = 5 (seulement si CL = 1) on calcule $\mathbf{u}^{k+1}$ sur la frontière comme suit :

$$\mathbf{u}^{k+1}(x) = \mathbf{u}^k(\chi^k(x)) - (G, 0, 0) \quad (4.4)$$

où $\chi^k(c)$ est la position au temps k de la particule qui se trouve au point x au temps $k + 1$ et G calculée de façon à satisfaire $\int_\Gamma \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n} dt = 0$.

- si $CL = 2$ ou 3 :

TCL entrer le type de donnée pour u_Γ .

- Si $TCL = 0$ pas de donnée supplémentaire: $u_\Gamma = 0$.
- Si $TCL = 1$ fournir les 3 valeurs $U1, U2, U3$ réelles de $u_\Gamma = (u_1, u_2, u_3)$.
- Si $TCL = 2, 3$ on utilise la routine external **fonvit** passée comme argument du programme **nsplb**.
- Si $TCL = 4$ donnée le nom du fichier (chaîne) **FileName**.

ALPHA entrer la valeur de la constante α .

TCL entrer le type de donnée pour β .

- Si $TCL = 0$ alors $\beta = 0$.
- Si $TCL = 1$ donner la valeur de la constante β .
- Si $TCL = 5$, on utilise la loi de Reinhard avec la vitesse au pas de temps précédent.
- sinon option invalide.

- si $CL = 7$

TCL entrer le type de donnée pour la vitesse u_Γ

- Si $TCL =$ pas de donnée supplémentaire: $u_\Gamma = 0$.
- Si $TCL = 1$ fournir les 3 valeurs $U1, U2, U3$ réelles de $u_\Gamma = (u_1, u_2, u_3)$.
- Si $TCL = 2, 3$ on utilise la routine external **fonvit** passée comme argument du programme **nsplb**.
- Si $TCL = 4$ donner le nom du fichier (chaîne) **name**.

TCL entrer le type de donnée pour la pression p_Γ

- Si $TCL =$ pas de donnée supplémentaire: $p_\Gamma = 0$.
- Si $TCL = 1$ donner un réel p_Γ .
- Si $TCL = 2, 3$ on utilise la routine external **fonpre** passée comme argument du programme **nsplb**.
- Si $TCL = 4$ donner le nom du fichier (chaîne) **name**.

- Si $CL = 10$ si la référence courante a déjà utilisée ne rien faire sinon:

IREF numéro de l'autre référence à identifier puis:

V_X, V_Y, V_Z les 3 coordonnées du vecteur de translation.

FIN DE Pour

Remarque Les fichiers contenant des valeurs de blocages pour la vitesse doivent avoir la structure suivante :

```
write() nbv
write() ((u(i,j),(i=1,3),j=1,nbv)
```

où $U(3, IS)$ contient la valeur du blocage pour le sommet numéro IS , si celui-ci se trouve sur une frontière pour laquelle on a donné 4 comme type d'entrée pour la vitesse et zéro sinon.

De même les fichiers contenant des données sur la pression doivent avoir la structure :

```

write() nbv
write() (p(j))j=1,nbv)

```

Remarque Une seule subroutine doit être construite pour toutes les frontières pour lesquelles on a donné 2 ou 3 comme type d'entrée pour les vitesses. Cette subroutine doit recevoir comme paramètres d'entrée les coordonnées et la référence d'un point (plus le temps courant s'il s'agit d'une fonction dépendant du temps) et donner en sortie la valeur de u au point. Le nom de ces subroutines doit être déclaré en EXTERNAL dans le programme principal et passé comme paramètre de la routine nsp1b.

Remarque Le traitement des intersections des frontières avec des conditions aux limites différentes est assez délicat et peut donner lieu à des résultats faux. Pour éviter ce type de problème, il convient de prendre en compte quelques règles au moment de définir les références aux sommets.

Supposons qu'un sommet IS appartient à l'intersection des frontières de référence $IREF$, $JREF$ respectivement. Alors :

A. Si sur la frontière $IREF$ il y a des conditions aux limites de type Dirichlet, $REF(IS) = IREF$

(Si les deux frontières sont de type Dirichlet, le choix doit porter sur la physique du problème).

B. Si sur $JREF$, il y a des conditions aux limites de symétrie,

$$REF(IS) = IREF$$

(Si on a des conditions aux limites de symétrie sur les deux frontières, le point IS doit avoir une référence différente de $IREF$ et $JREF$, sur laquelle on imposera des conditions de type 5).

C. Dans les autres cas, on prendra pour IS la référence dont les conditions aux limites entraîne un plus grand blocage pour la vitesse.

Par exemple, si sur $IREF$, on a $u \times n = u_o \times n$ et sur $JREF$, $u \cdot n = u_o \cdot n$, alors : $REF(IS) = IREF$ Puisque sur $IREF$, la vitesse a deux composantes bloquées et sur $JREF$ une seule.

4.7 Exemples

Exemple 1. les références sont 1, 2, 3, 4, 5 et l'on choisit comme conditions aux limites:

$$10\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = -\beta(\mathbf{u}) \cdot \frac{\mathbf{u}_\tau}{|\mathbf{u}_\tau|}, i = 1, 2. \quad (\Gamma_1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ (traitée au sens fort)} \quad (\Gamma_1)$$

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) \quad (\Gamma_2)$$

$$-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + p\mathbf{n} = 0 \quad (\Gamma_3)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad (\Gamma_4)$$

$$u_3 = 0, \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \quad (\Gamma_5)$$

Dans ce cas là les données à fournir pour décrire les conditions aux limites sont :

```

2      -- CL pour la ref 1
0      -- TCL vitesse nulle
10.    -- valeur de alpha
5      -- TCL pour utiliser la loi de Reichard
1      -- CL pour la ref 2 (Dirichlet)
1      -- TCL vitesse constant
1. 0. 0. -- valeurs des composantes de la vitesse
0      -- CL pour la ref 3 (Sortie libre)
1      -- CL pour la ref 4 (Dirichlet)
0      -- TCL vitesse nulle
5      -- CL pour la ref 5 (Sym\ 'etrie horizontale)

```

Exemple 2.

Choix de conditions :

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \quad ; \quad p = 1.2 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (4.5)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \quad ; \quad p = 0. \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u} = 0. \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (4.7)$$

la partie du fichier de données correspondant aux conditions aux limites

```

7      -- CL pour la ref 1
0      -- TCL vitesse nulle
1      -- TCL pression constante
1.2    -- la valeur de la pression
7      -- CL pour la ref 2
0      -- TCL vitesse nulle
0      -- TCL pression nulle
1      -- CL pour la ref 3
0      -- TCL vitesse nulle

```

5 Essais Numériques

5.1 Comparaison des traitements fort et faible de la condition

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$$

On considère tout d'abord la résolution numérique d'un problème de Stokes généralisé du type (2.22)-(2.25), avec

$$\begin{aligned}
\Omega &= [0, 1]^3 \\
\Gamma_1 &= ([0, 1]^2 \times \{0\}) \cup ([0, 1]^2 \times \{1\}); \\
\Gamma_\infty &= \Gamma - \Gamma_1; \\
\Gamma_\infty^+ &= \{1\} \times [0, 1]^2; \\
\Gamma_\infty^- &= \Gamma_\infty - \Gamma_\infty^+; \\
\kappa &= 0; \quad \mathbf{f} = 0; \quad \mathbf{g} = 0; \quad \varphi = 0; \\
\alpha &= 1; \\
\nu &= 1; \\
\mathbf{u}_\infty(x, y, z) &= (\Phi(z), 0, 0).
\end{aligned}$$

où $\Phi(z)$ est un polynôme de degré 2 telle qu'il n'y ait pas de discontinuités au passage Γ_1 Γ_∞ . En fait, $\mathbf{u}(x, y, z) = (\Phi(z), 0, 0)$ est le champ de vitesses correspondant à la solution analytique du système.

Nous avons résolu ce système avec les schémas décrits dans les paragraphes 2.2.1 et 2.2.2. On a utilisé trois maillages avec respectivement 8^3 , 10^3 , 12^3 sommets.

La figure 5 montre l'évolution du logarithme de l'erreur par rapport à la solution exacte en fonction du nombre de points des maillages. On peut constater que l'évolution est semblable et que la pente obtenue est en accord avec les estimations théoriques.

La figure 6 montre l'évolution du coût des calculs pour les deux schémas. En abscisse, le nombre de sommets et en ordonnée, le temps c.p.u. (en secondes) par itération de la méthode d'Uzawa. (Les calculs ont été faits sur une station de travail APOLLO DN-3000). Dû au couplage des équations, le traitement fort (paragraphe 2.2.1) est beaucoup plus cher.

5.2 Ecoulement autour d'un obstacle sphérique

Dans ce cas Ω est le volume compris entre la surface d'une sphère Γ_1 et une frontière extérieure Γ_∞ .

le maillage est composé de 3463 sommets et de 19188 tétraèdres. On calcule dans ce domaine des écoulements correspondant aux différents types de conditions aux limites présentés. On considère initialement le système (1.1), avec $Re = 500$ et avec les conditions aux limites suivantes:

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) \text{ sur } \Gamma_\infty \times [0, T] \quad (5.1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T] \quad (5.2)$$

$$\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = -\mathbf{g}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\tau}_i, i = 1, 2 \text{ sur } \Gamma_1 \times [0, T] \quad (5.3)$$

où $\mathbf{g}$ est donné par la loi de paroi de Reichardt. On initialise le calcul avec des champs nuls. On a approché ce système avec les schémas décrits au chapitre 2, avec traitement faible de la condition (5.2). La figure 7 montre une vue globale du maillage avec une coupe verticale du champ de vitesse correspondant à la solution stationnaire. La figure 8 présente un détail de ce même champ près de l'obstacle. On constate que la condition (5.2) est assez bien prise en compte: en fait, elle est exactement prise en compte sur toute la frontière, sauf aux points de décollement.

La figure 9 montre une coupe des surfaces isobares près de l'obstacle. La figure 10 présente les trajectoires des particules émises près de la surface de l'obstacle.

Si la condition (5.2) est traitée au sens fort, elle est satisfaite exactement sur toute la surface de l'obstacle. Les figures 11 et 12 montrent un détail du champ moyen des vitesses obtenues

avec le modèle de turbulence de Smagorinsky. Cependant, le coût supplémentaire avec ce type de traitement est assez important.

Nous avons comparé aussi pour ce type d'écoulement les différents choix possibles de la condition sur la frontière de sortie. On choisit des conditions de type Dirichlet sur l'obstacle et sur la frontière d'entrée de l'écoulement:

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \quad (5.4)$$

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) \text{ sur } \Gamma_\infty^+ \times [0, T] \quad (5.5)$$

En sortie on a considéré les conditions suivantes:

- Conditions de type Dirichlet constantes:

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) \text{ sur } \Gamma_\infty^+ \times [0, T] \quad (5.6)$$

- Conditions de sortie libre:

$$-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + p \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_\infty^+ \times [0, T] \quad (5.7)$$

- Conditions de type Dirichlet, avec les valeurs des blocages calculées à partir de la solution obtenue au pas de temps précédent (voir (4.4))

$$\mathbf{u}^{k+1}(x) = \mathbf{u}^k(X^k(x)) - (C, 0, 0) \text{ sur } \Gamma_\infty^+ \quad (5.8)$$

où $X^k(x)$ est la position au temps k de la particule qui se trouve au point x au temps $k + 1$ et C calculée de façon à satisfaire

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n} dt = 0$$

Les variations du champ de vitesse obtenues avec les différents types de condition en sortie sont négligeables, mais de grandes différences apparaissent au niveau des tracées des surfaces isobares.

Même à bas nombre de Reynolds, on trouve de fortes oscillations non physiques quand on utilise la condition (5.6), comme on peut le constater sur la figure 13, où l'on montre une coupe des surfaces isobares pour $Re = 100$. Pour les conditions (5.7) et (5.8) on obtient des résultats corrects en sortie (figures 14 et 15). Cependant, les systèmes linéaires issus du choix (5.8) sont mieux conditionnés et la convergence de la méthode d'Uzawa est plus rapide.

Actuellement, on teste ces différents types de conditions en sortie, ainsi que les conditions sur la pression du type:

$$p = 0; \quad \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_\infty^+ \times [0, T] \quad (5.9)$$

sur des écoulements non stationnaires, pour déterminer quel est le choix optimal.

5.3 Ecoulement autour d'un boggie moteur

On s'intéresse à la simulation numérique de l'écoulement de l'air autour d'un boggie moteur d'un train à grande vitesse, de géométrie très compliquée. Le domaine a été discrétisé avec les mailleurs de la bibliothèque MODULEF. Les nombres totaux de sommets et d'éléments sont respectivement 5378 et 23880.

La figure 16 montre la frontière Γ_1 correspondant à la surface de la pièce et la figure 17 représente la frontière extérieure Γ_∞ .

Les figures 18 à 22 montrent plusieurs coupes verticales et horizontales du champ de vitesses obtenues pour $Re = 1000$, avec condition d'adhérence sur Γ_1 et de Dirichlet constante sur Γ_∞ .

5.4 Ecoulement autour d'un sousmarin

On présente dans ce paragraphe quelques résultats concernant la simulation numérique de l'écoulement de l'eau autour d'une forme simplifiée de l'arrière d'un sous-marin.

Le nombre de Reynolds pour un écoulement de ce type est de l'ordre de 10^8 , ce qui rend très difficile son approximation numérique avec un modèle visqueux. Pour cela on simule cet écoulement en négligeant les effets visqueux (il s'agit de résoudre le système d'équations d'Euler incompressible).

Le maillage, qui a 3890 sommets et 19008 tétraèdres, a été réalisé en collaboration avec M. A. D'Errico.

On a considéré $\nu = 0$ et les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \mathbf{u} &= (1, 0, 0) \text{ sur } \Gamma_\infty^- \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= (1, 0, 0) \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_\infty^+ \end{aligned}$$

Puisque le profil que l'on impose en entrée est uniforme, l'on devrait obtenir une solution irrotationnelle que l'on pourra donc approcher en résolvant les équations des fluides potentiels, i.e.

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi; \quad p = C - \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$$

où C est une constante qui dépend des caractéristiques physiques du problème et φ est la solution du problème:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} &= u_\infty \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_\infty \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \end{aligned}$$

Les figures 23 et 24 correspondent aux champs de vitesses et pression obtenus comme solutions des équations d'Euler et les figures 25 et 26 correspondent aux mêmes champs après le calcul d'un fluide potentiel. On constate que les champs obtenus sont tout à fait comparables. La figure 27 montre le profil des vitesses pour la solution du système d'Euler suivant une direction normale à celle de l'écoulement. On vérifie qu'il y a un glissement pur: ce profil ne subit aucune modification aux proximités de l'obstacle. Finalement, la figure 28 correspond au tracé des trajectoires des particules émises près de la frontière d'entrée de l'écoulement.

5.5 Écoulement dans un canal en "S"

Ces calculs ont été réalisés en collaboration avec F.Maire. La figure 29 montre le maillage (5378 sommets et 26910 tétraèdres). On a pris des conditions aux limites d'adhérence sur la surface du canal (parois verticales en "S" et face inférieure), conditions du type Dirichlet sur la frontière d'entrée de l'écoulement, avec $\mathbf{u}_\infty = (1, 0, 0)$ et du type (5.7) sur la frontière de sortie. Sur la face supérieure, on a pris des conditions aux limites du type Dirichlet où les valeurs des blocages sont données par les solutions d'un calcul de Navier-Stokes bidimensionnel stationnaire.

La figure 30 donne une coupe horizontale du champ de vitesses obtenue à un $Re = 1000$. Les figures 31 et 32 montrent $Re = 1000$ et 10000 . une coupe horizontale du champ de pression. Finalement, les figures 33-34 correspondent à des coupes verticales des vitesses normales.

5.6 Application à l'écoulement sanguin

La bifurcation aortique n'est pas modélisée exactement en raison de l'extrême variabilité de la géométrie entre individus et, chez un sujet donné, des modifications de dimensions consécutives aux variations de l'environnement biochimique auquel sont soumis les vaisseaux sanguins. Néanmoins, certaines données de la littérature ont été utilisées dans la construction du modèle : l'angle de la bifurcation est de 70° et le rapport des sections des tubes latéraux à la section du tube principal de 0,8 [1]. Les dimensions du domaine sont déterminées à l'échelle 1,8/1. La bifurcation est, dans un premier temps, symétrique, l'apex vif et le rayon de courbure de la zone de transition d'environ $1.8 d_p$ (d_p : diamètre du tube principal). La zone de transition a une longueur de $1 d_p$.

Résultats :

5.6.1 Tube courbe

Les profils de la composante axiale de la vitesse dans le plan de courbure montrent un décalage de la vitesse de pointe légèrement vers le bord interne dans la zone d'entrée du coude puis à proximité du bord externe (pour un profil d'entrée uniforme).

La courbure du tube donne naissance à une accélération agissant perpendiculairement à la direction principale de l'écoulement et à un gradient radial de pression. L'écoulement hélicoïdal généré peut être décomposé en un mouvement axial et un déplacement dans le plan de la section droite, repéré par le vecteur résultant des composantes radiale et azimutale de la vitesse. L'écoulement secondaire est caractérisé par un double vortex. Le fluide s'écoule vers le bord externe et revient vers le bord interne du tube dans une couche de faible épaisseur le long de la paroi. Le centre des vortex se déplace tout au long du coude. L'intensité des mouvements secondaires, à une distance donnée de la section d'entrée du coude, est fonction de l'épaisseur de la couche limite à l'entrée du coude, toutes choses étant par ailleurs égales. Elle dépend, aussi bien évidemment, de la courbure et du nombre de Reynolds en particulier.

Le cisaillement radial étant beaucoup plus faible que le cisaillement axial, le dépôt de particules dépend davantage du second. Le bord interne du coude et le site privilégié du dépôt, sur une plus ou moins grande distance en fonction du régime de l'écoulement incident.

5.6.2 Bifurcation

En raison de la courbure de la zone de transition, le maximum de vitesse axiale est décalé vers l'intérieur de la bifurcation. Ce décalage persiste d'autant plus longtemps le long du tube latéral que le nombre de Reynolds est élevé. Dans le plan de la bifurcation, ainsi que dans les plans parallèles situés à une distance inférieure au $3/4$ du rayon du plan de la bifurcation, la fraction du débit diminue dans la moitié interne du tube latéral, en aval. Elle reste cependant supérieure au débit apparent de la partie externe du tube, qui lui augmente à mesure que l'on s'éloigne de l'apex. La vitesse de pointe augmente sur une distance de quelques diamètres puis varie peu. Dans les plans normaux au plan de la bifurcation, la vitesse axiale est plus élevée près de la paroi dans la zone d'entrée des tubes latéraux puis près du centre de chaque demi-section supérieure et inférieure (fig. 4).

Un décollement est observé pour des valeurs du nombre de Reynolds supérieures à 800. L'épaisseur de la zone de décollement de part et d'autre du plan de la bifurcation est de $0.1 R_d$ (R_d : rayon du tube latéral).

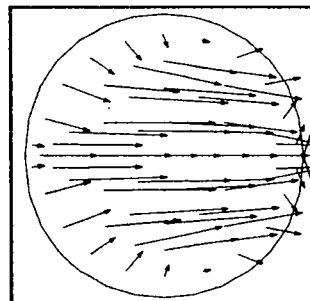
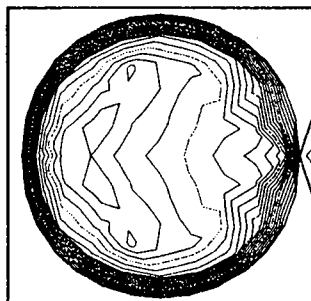
Dans la section droite, un écoulement transversal est généré avec retour le long de la paroi (fig 1,2). Les centres des vortex sont situés près des parois supérieure et inférieure de la section droite, légèrement vers le bord interne, à proximité de l'apex puis migrent vers le centre de la section droite à mesure que l'on s'éloigne de l'apex.

Dans la zone de transition des courants secondaires apparaissent en raison de la convergence des parois, supérieure et inférieure, et de la divergence des parois latérales (fig 3).

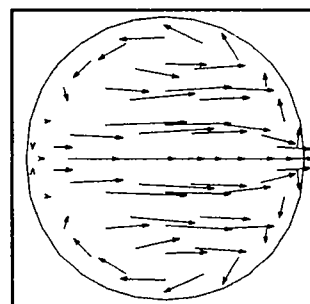
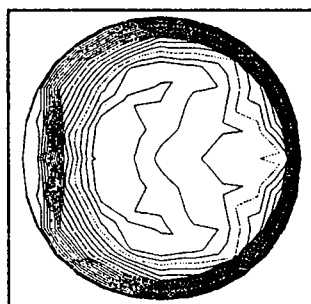
Les particules se déposent davantage sur la paroi externe du tube latéral. Le cisaillement y est plus faible. En outre, la contrainte de cisaillement subit des variations de direction, conséquence du décollement observé pour les valeurs du nombre de Reynolds rencontrées dans la bifurcation aortique. A la frontière de la zone de décollement, des orientations différentes des cellules endothéliales pourraient accroître la perméabilité de la paroi vasculaire.

composante normale

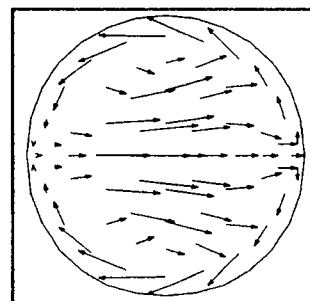
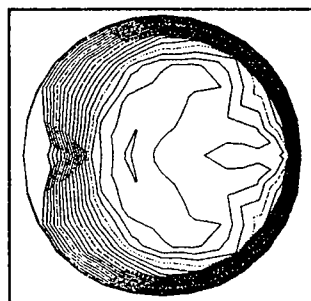
dans le plan de projection



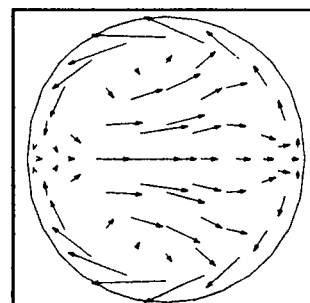
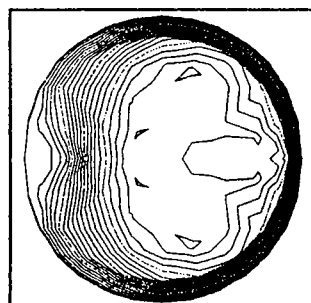
section d'entrée



section à 0.25 d de l'entrée



section à 0.50 d de l'entrée

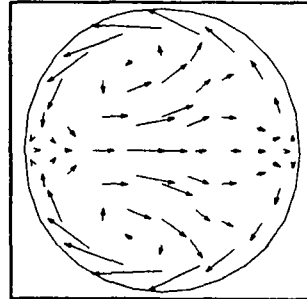
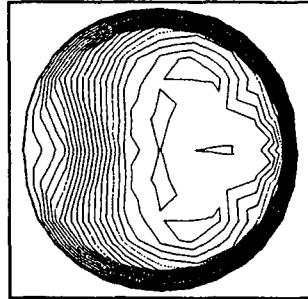


section à 0.75 d de l'entrée

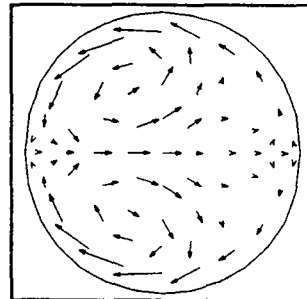
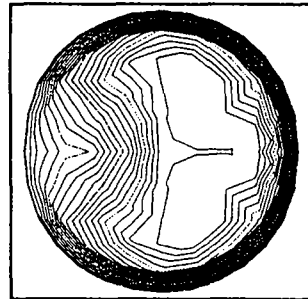
Figure 1: section droite du tube latéral ($Re = 1200$)

composante normale

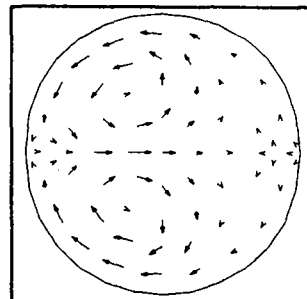
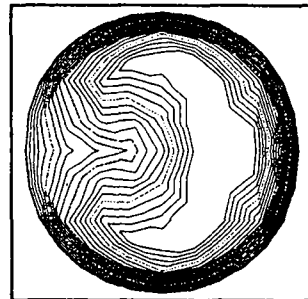
dans le plan de projection



section à 1 d de l'entrée



section à 2 d de l'entrée

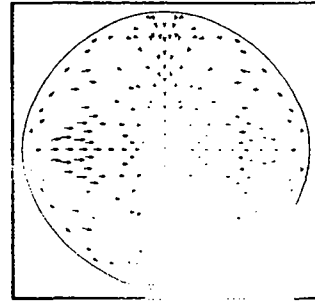
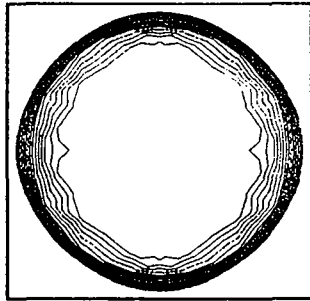


section à 4 d de l'entrée

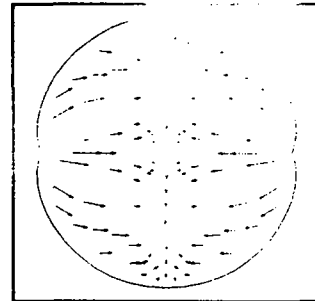
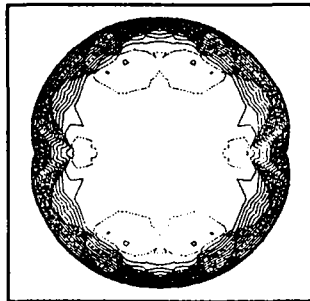
Figure 2: Sections droites du tube latéral ($Re = 1200$)

composante normale

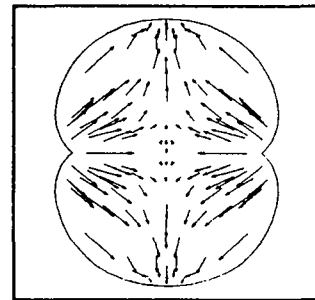
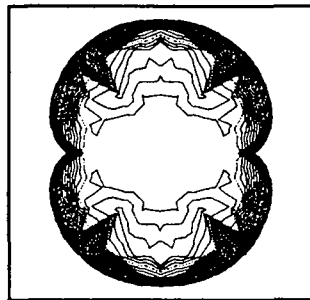
dans le plan de projection



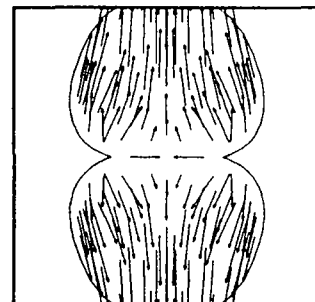
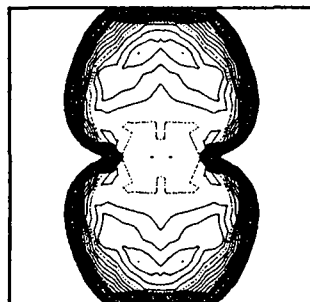
section d'entrée



section à 0.25 d de l'entrée



section à 0.50 d de l'entrée



section à 0.75 d de l'entrée

Figure 3: zone de transition ($Re = 1200$)

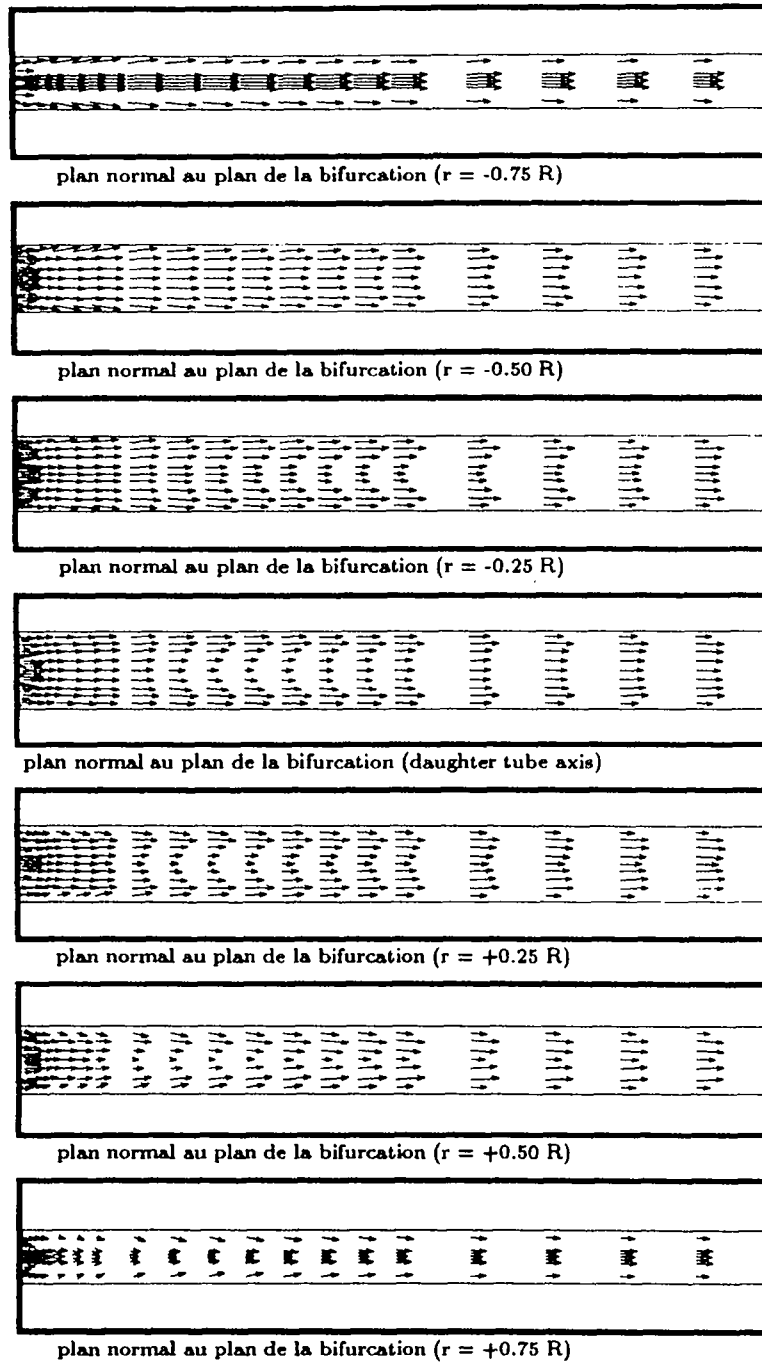


Figure 4: Profils de vitesse axiale ($Re = 1200$)

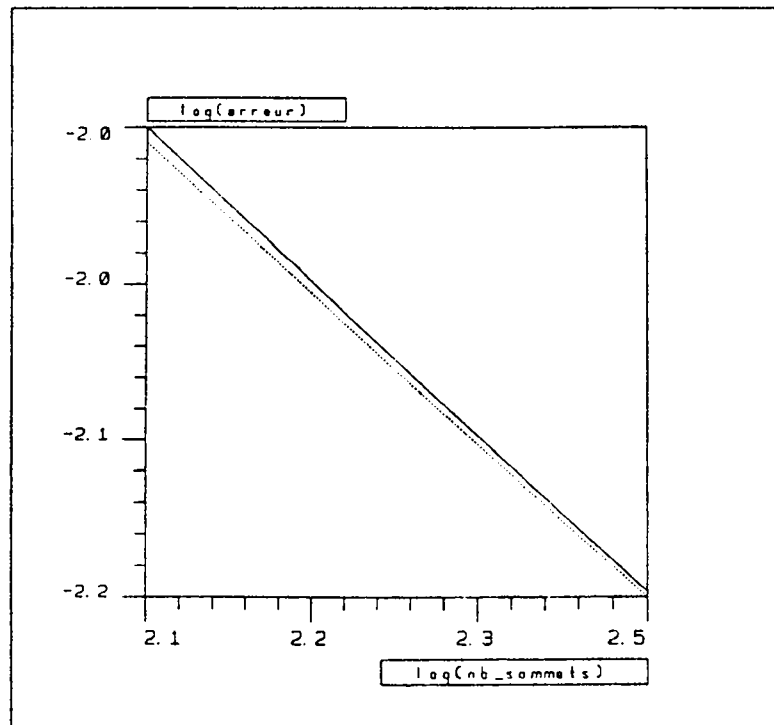


Figure 5: log de l'erreur : traitement fort continue, faible pointille

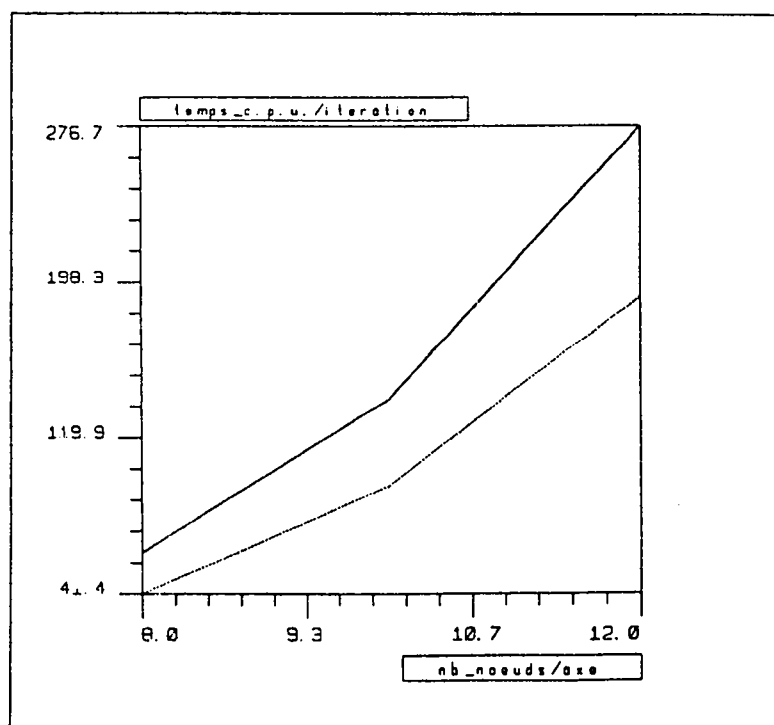


Figure 6: Comparaison temps CPU : traitement fort continue, faible pointille

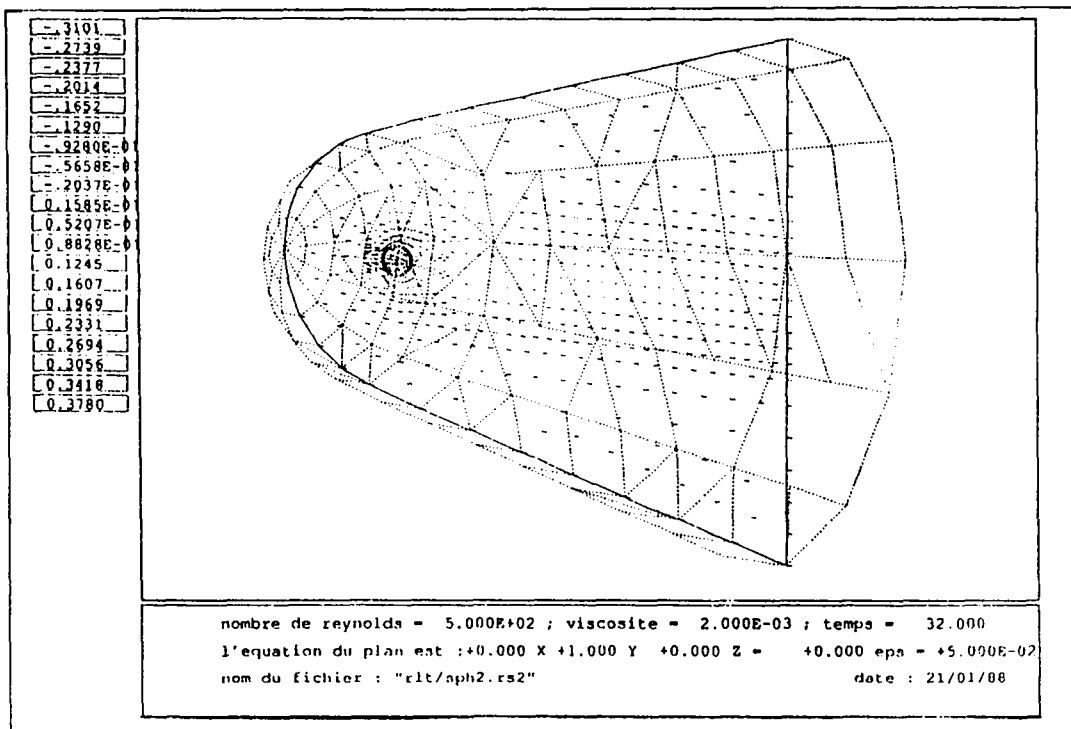


Figure 7: sphere, vitesse, vue global

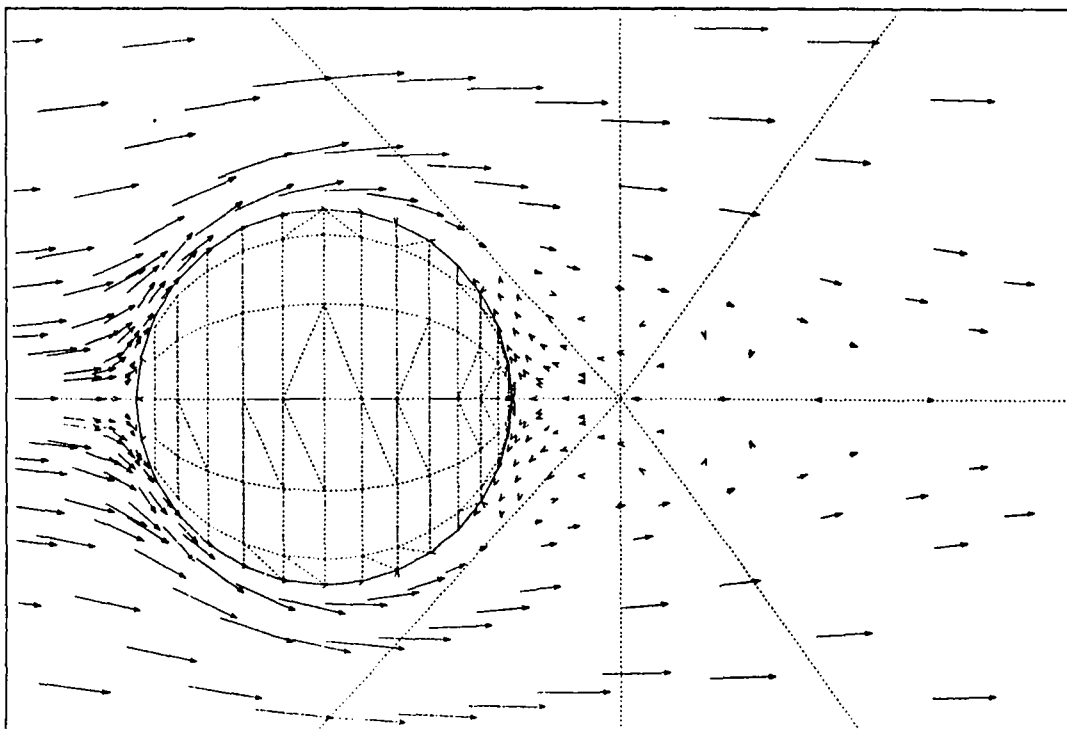


Figure 8: sphere, vitesse, zomm

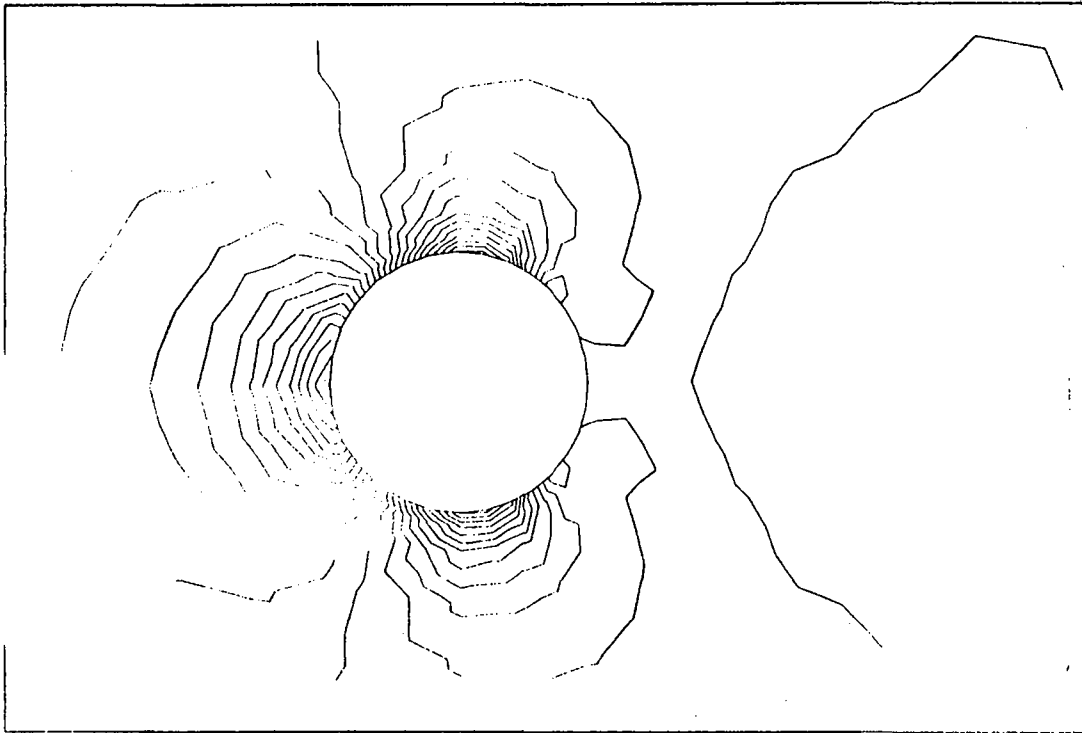


Figure 9: sphere, isopression

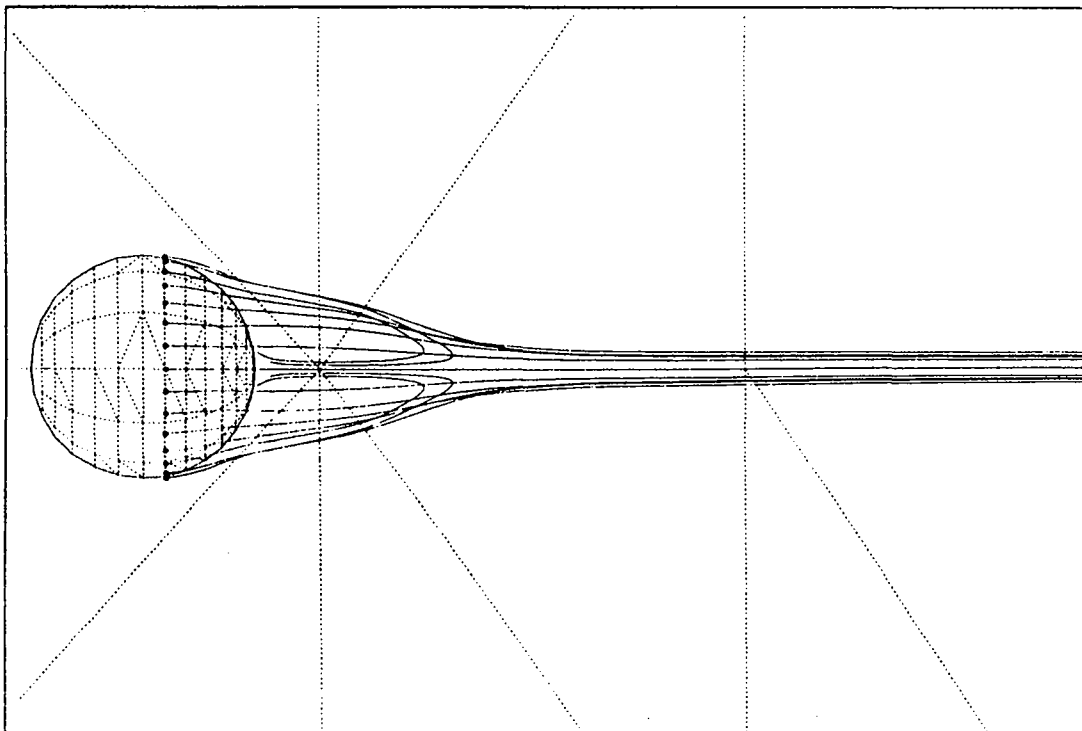


Figure 10: sphere, particules

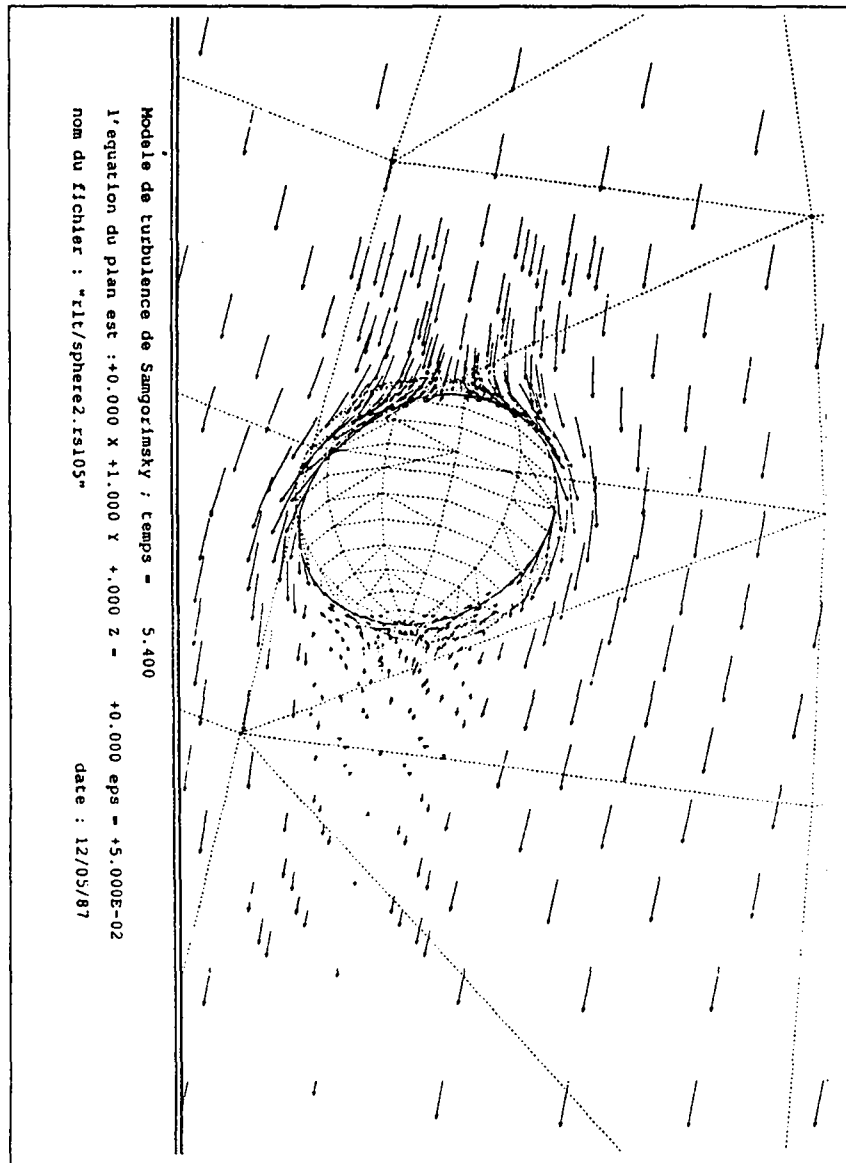


Figure 11: sphere, vitesse

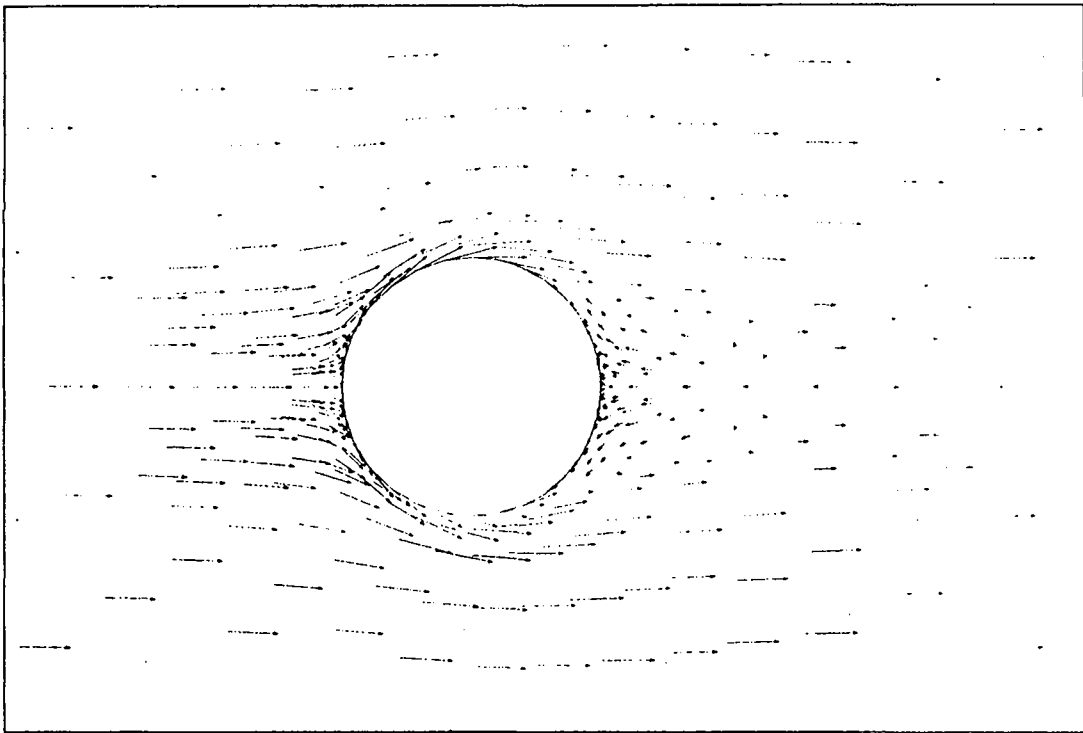


Figure 12: sphere, vitesse

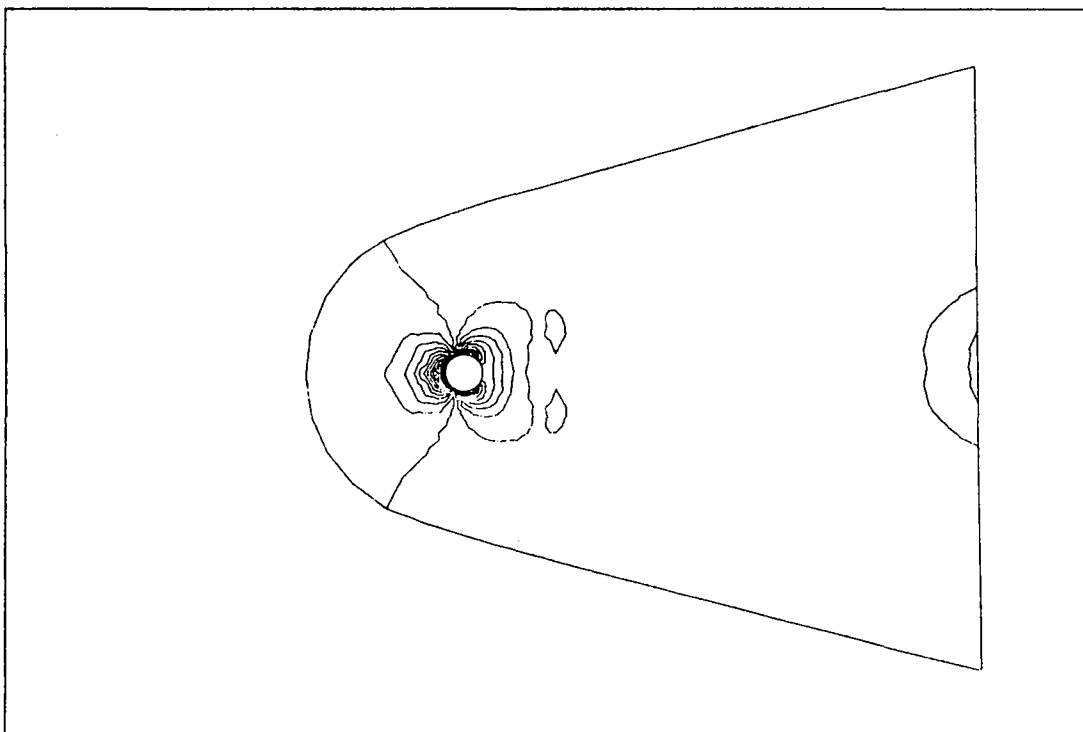


Figure 13: sphère $Re = 100$, condition de sortie 1,0 $u = 0$

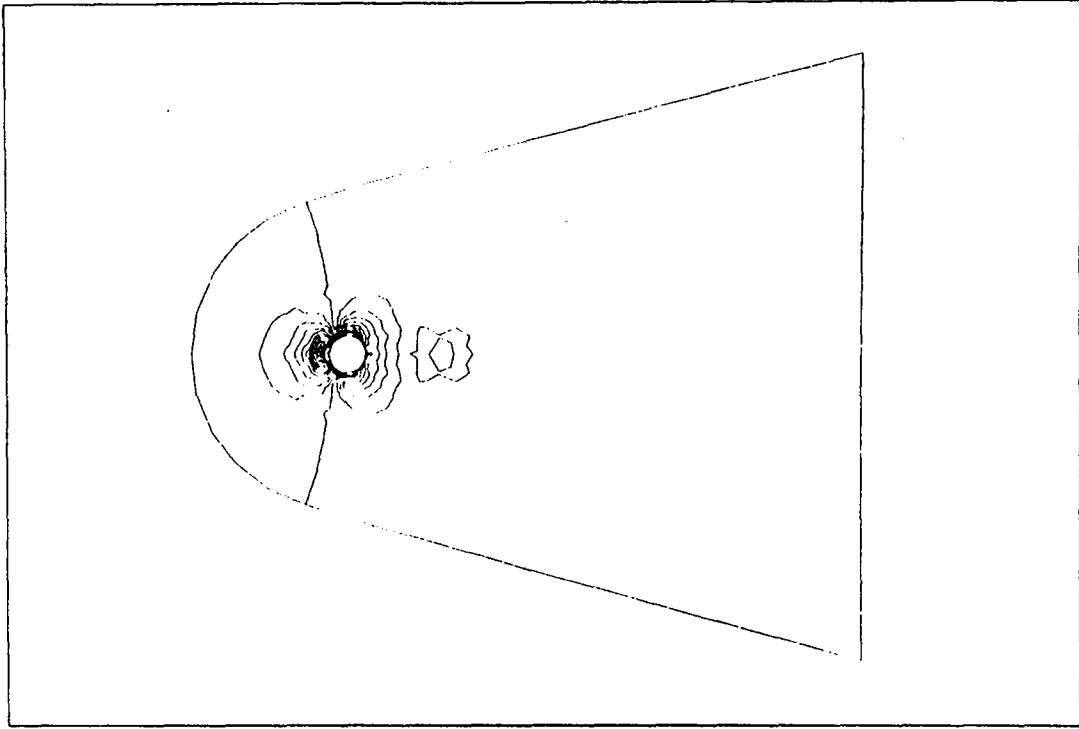


Figure 14: sphère $Re = 100$, condition de sortie 0, $-\nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + pn = 0$.

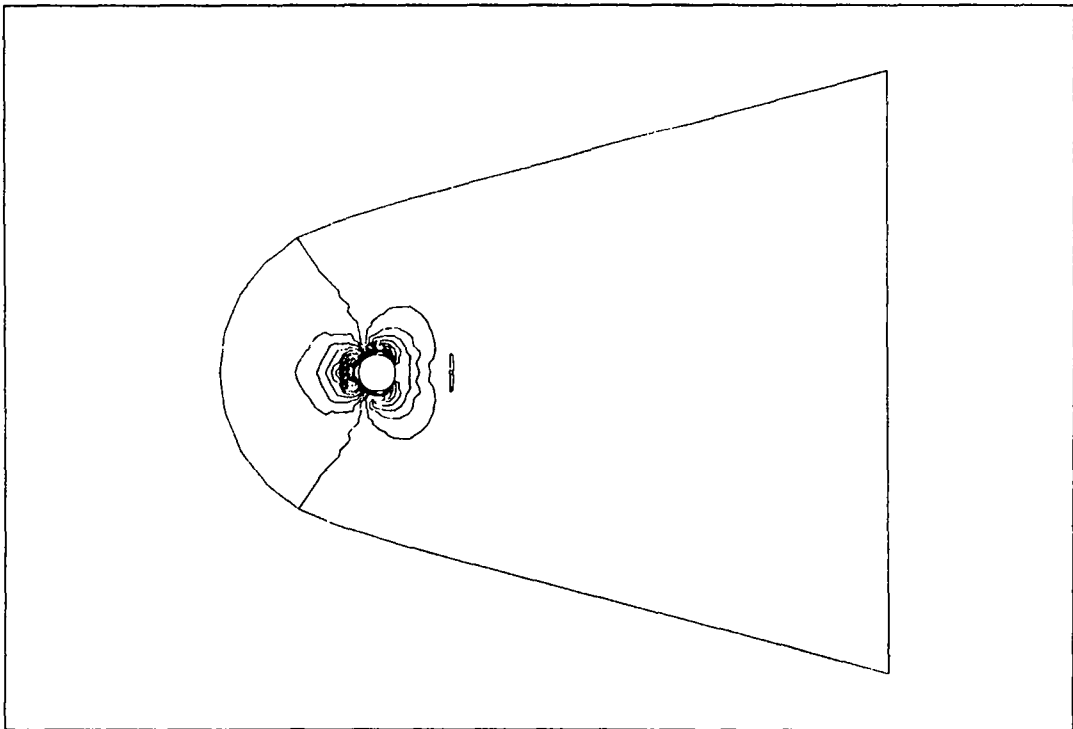


Figure 15: sphère $Re = 100$, condition de sortie 1,5, $\mathbf{u}^{k+1}(x) = \mathbf{u}^k(\chi^k(x)) - (G, 0, 0)$

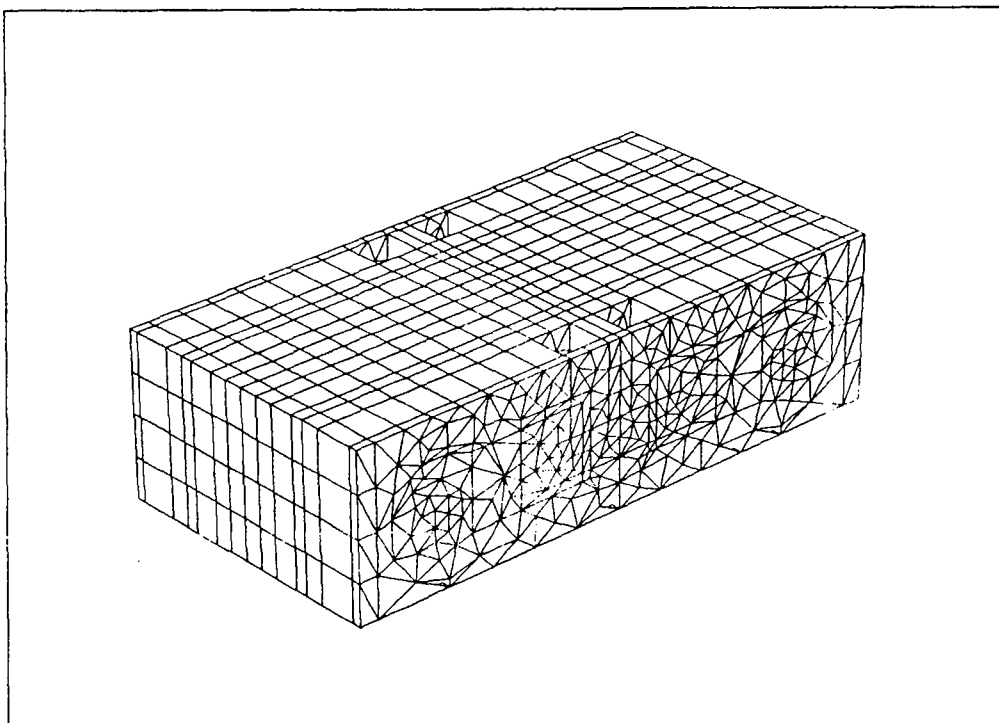


Figure 17: boggie, maillage de la boîte

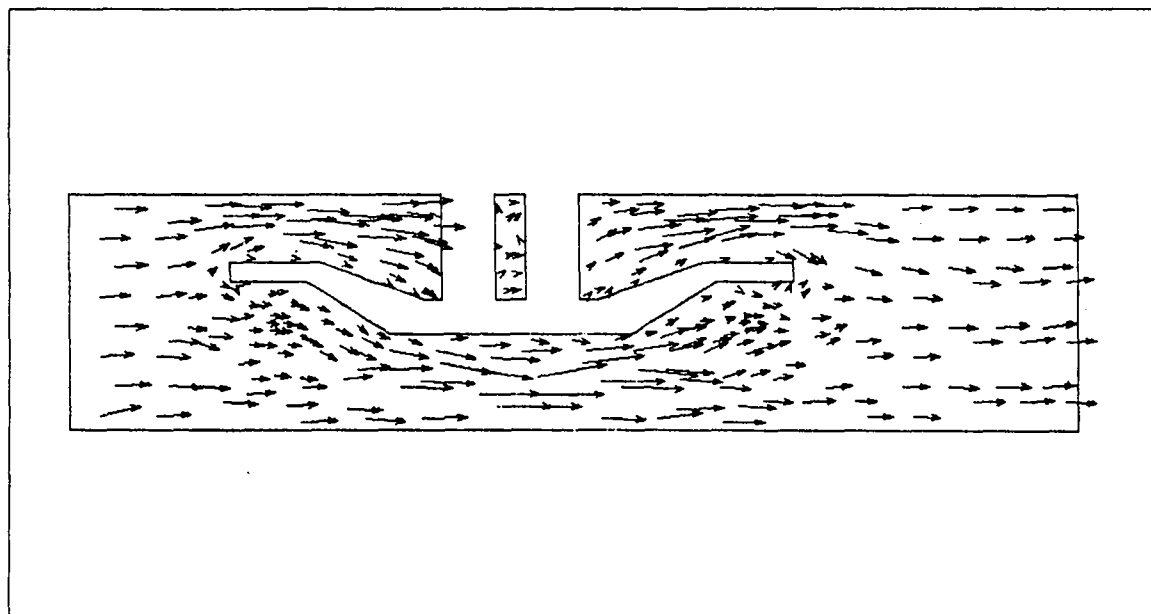


Figure 18: boggie, $RE = 10^3$, $y = +0.2$

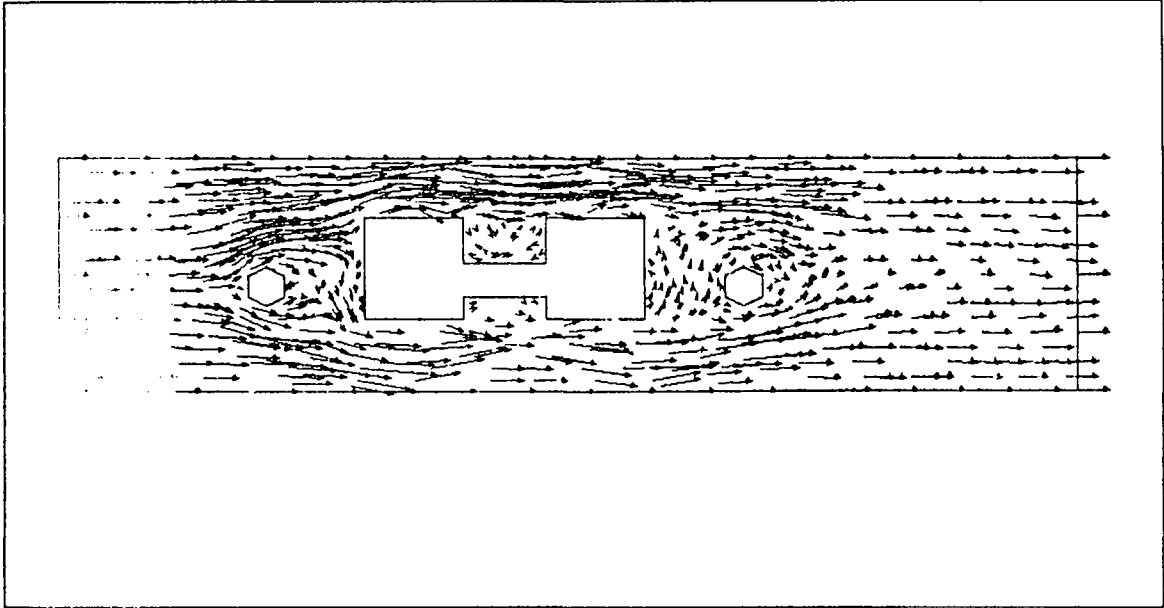


Figure 19: boggie, $Re = 10^3$, $y = +0$.

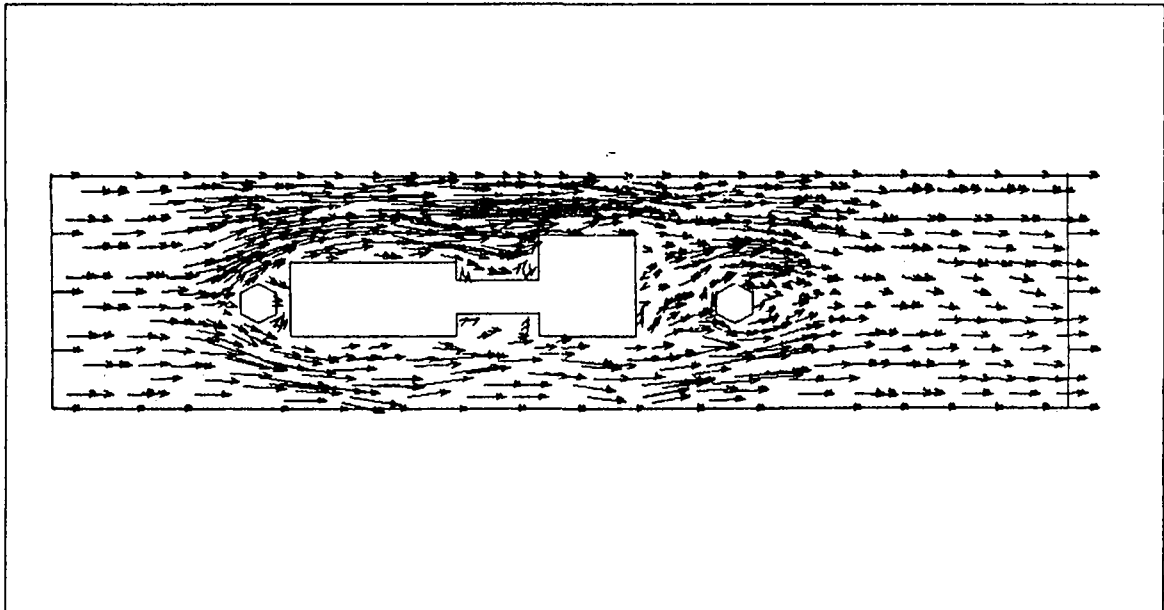


Figure 20: boggie, $Re = 10^3$, $y = -0.1$

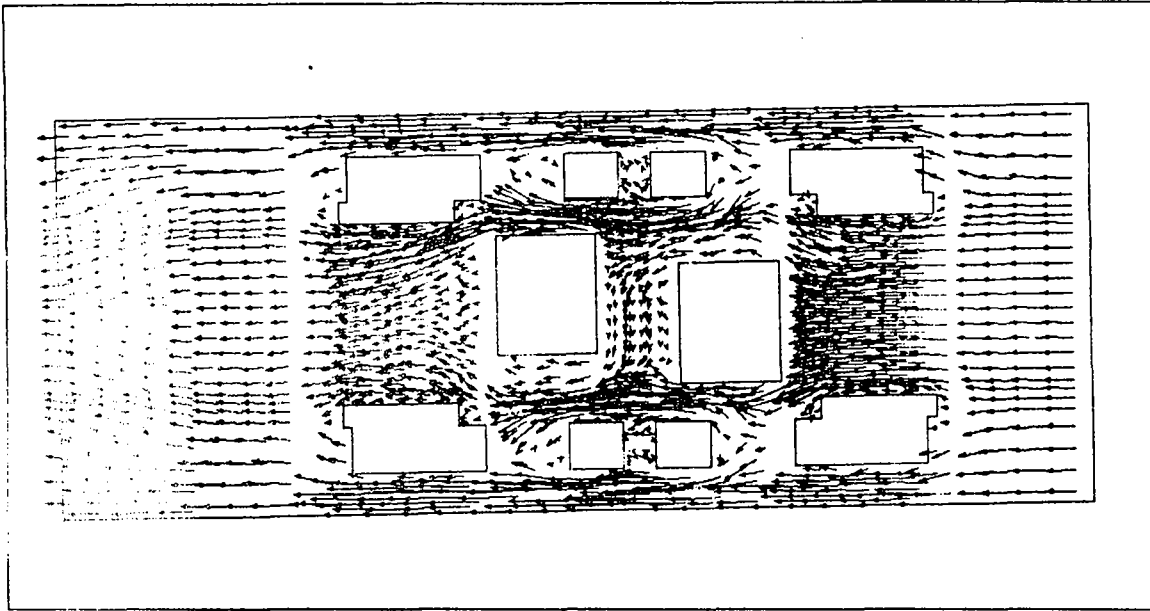


Figure 21: bogie, $Re = 10^3$, $z = 0.2$

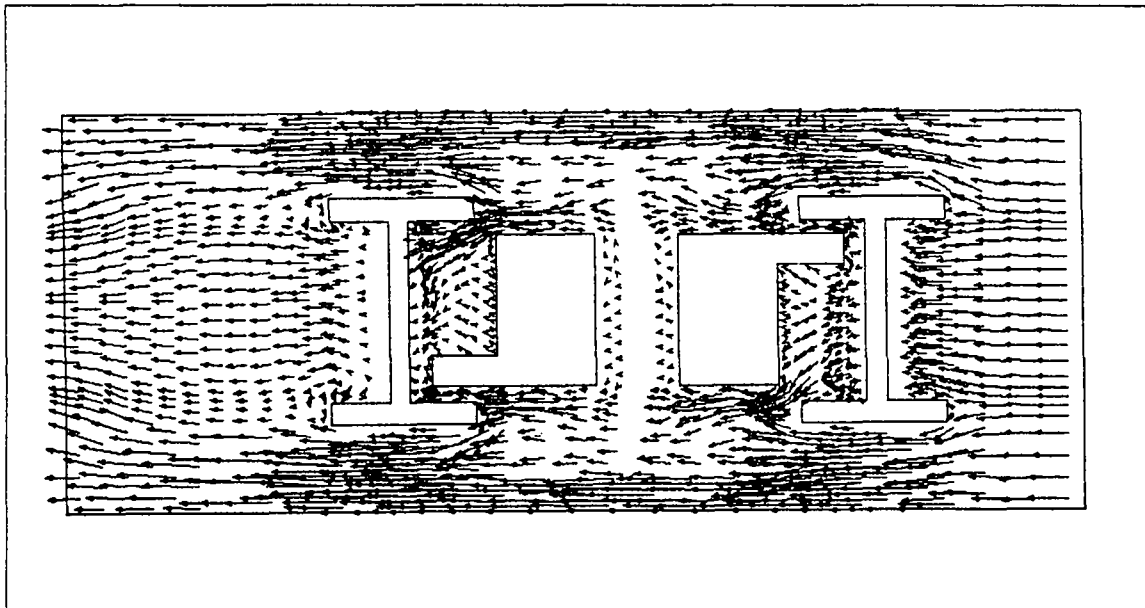


Figure 22: bogie, $Re = 10^3$, $z = 0.1$

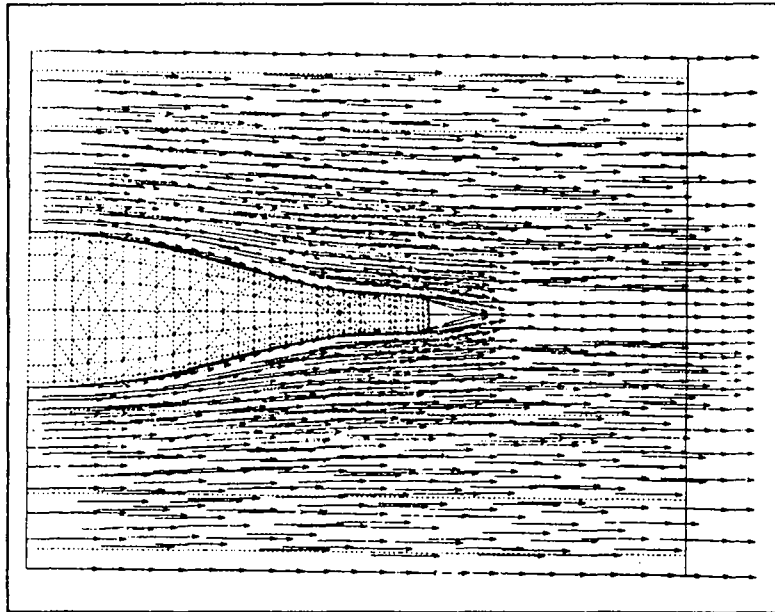


Figure 23: Culot d'un sous-marin: vitesse, Euler

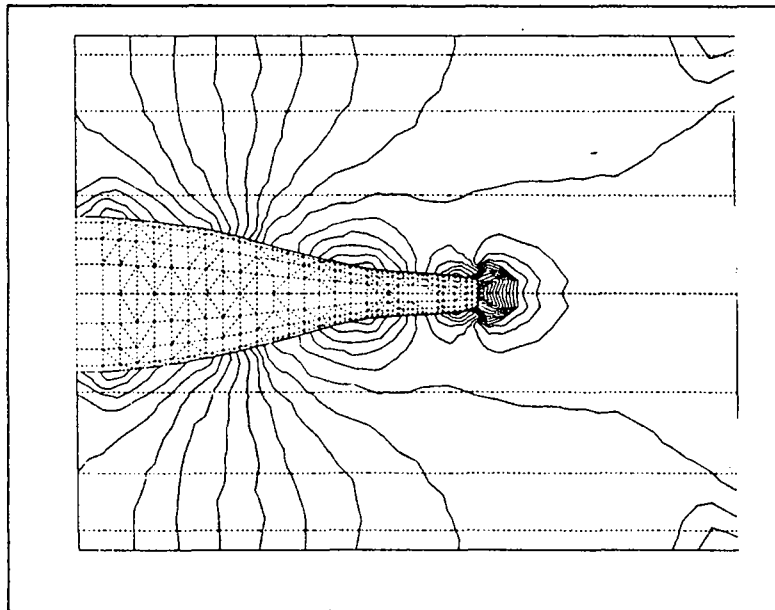


Figure 24: Culot d'un sous-marin: isopression, Euler

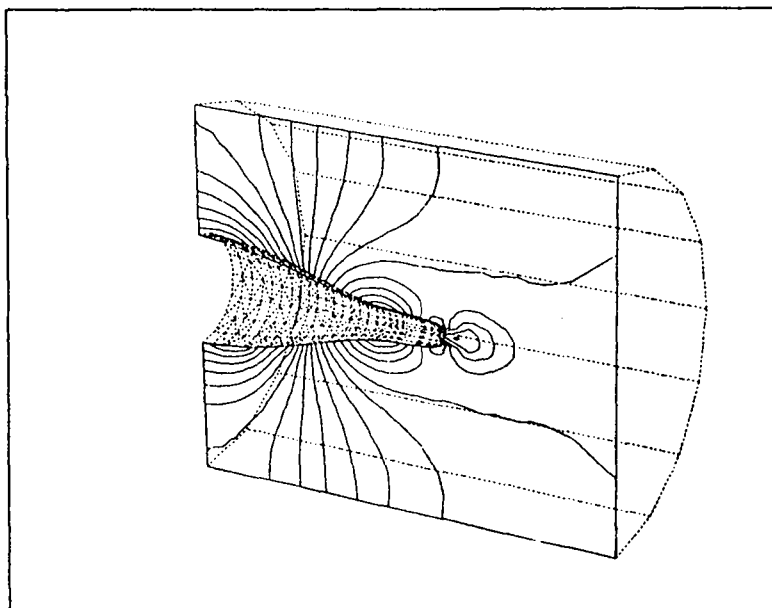


Figure 25: Culot d'un sous-marin: isopression, Potentiel

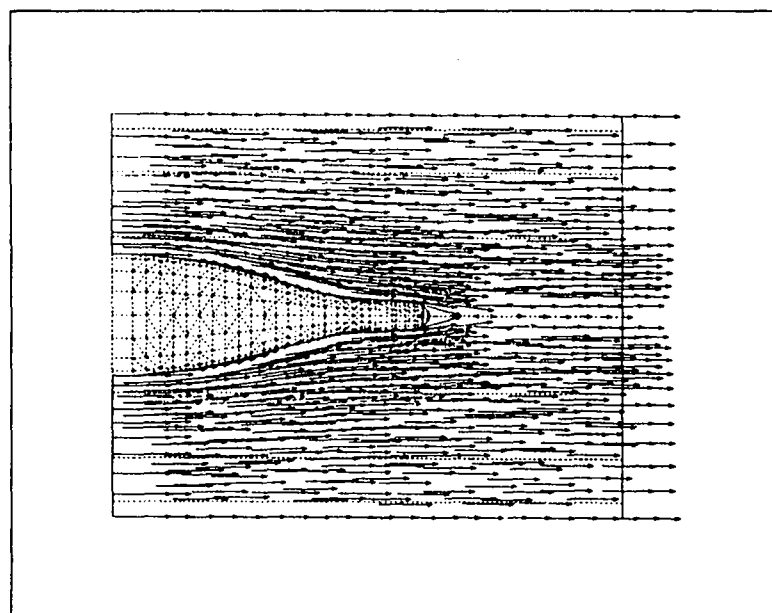


Figure 26: Culot d'un sous-marin: vitesse, Potentiel

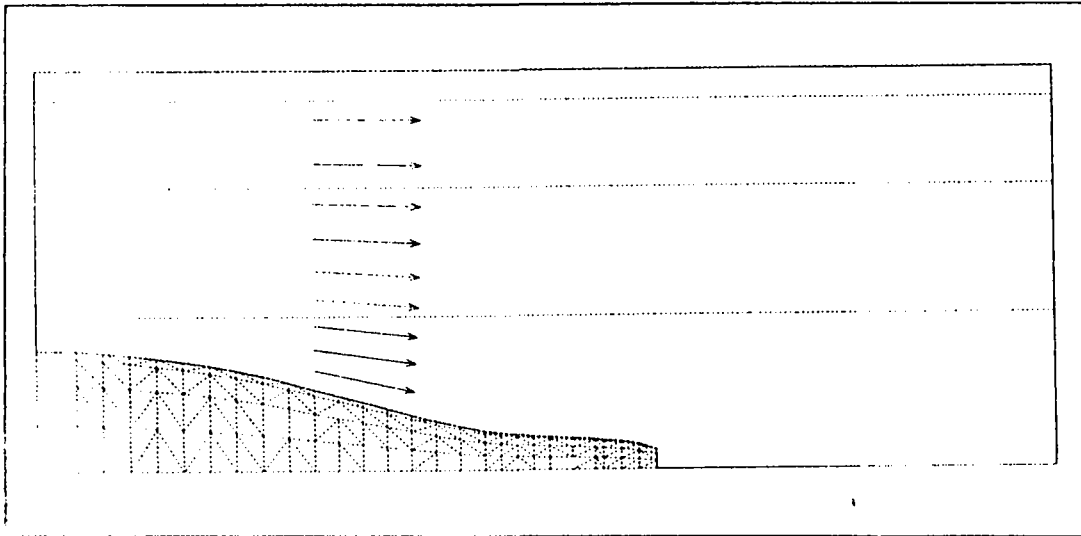


Figure 27: Culot d'un sous-marin: profil de vitesse

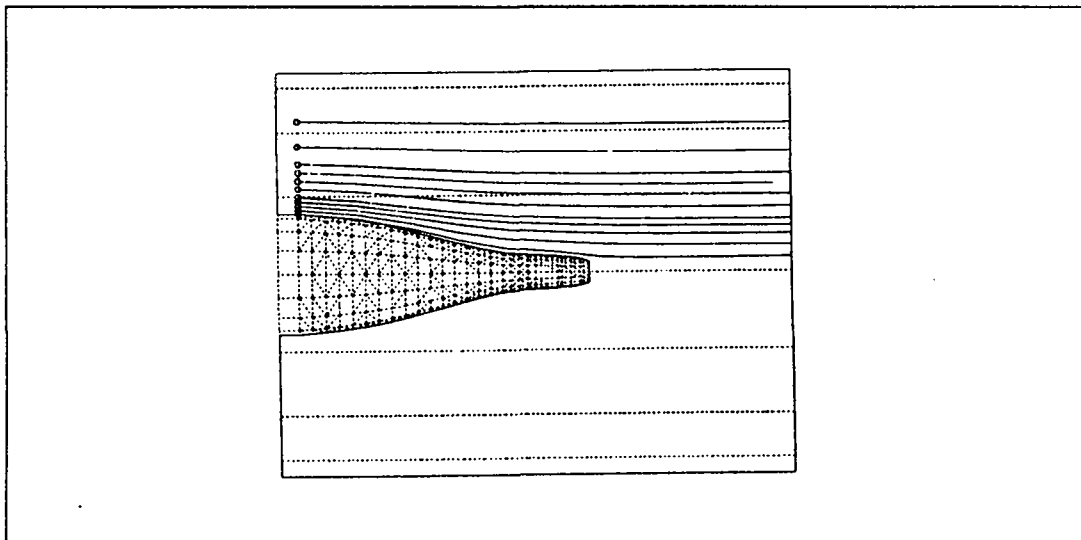


Figure 28: Culot d'un sous-marin: particule

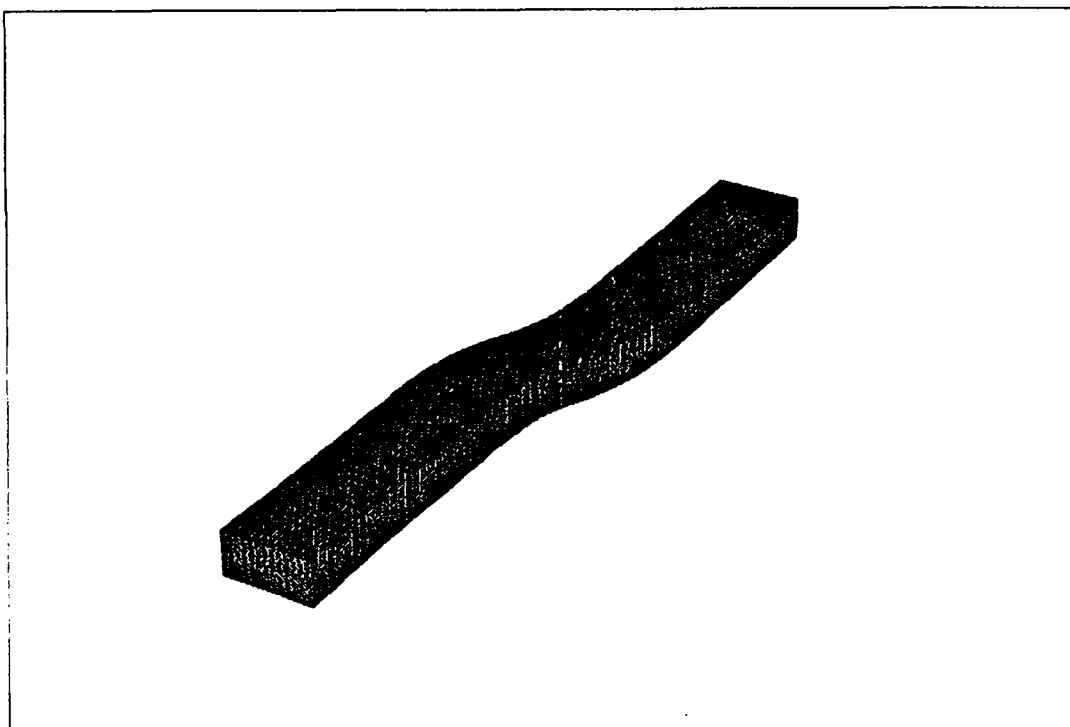


Figure 29: canal en S, maillage

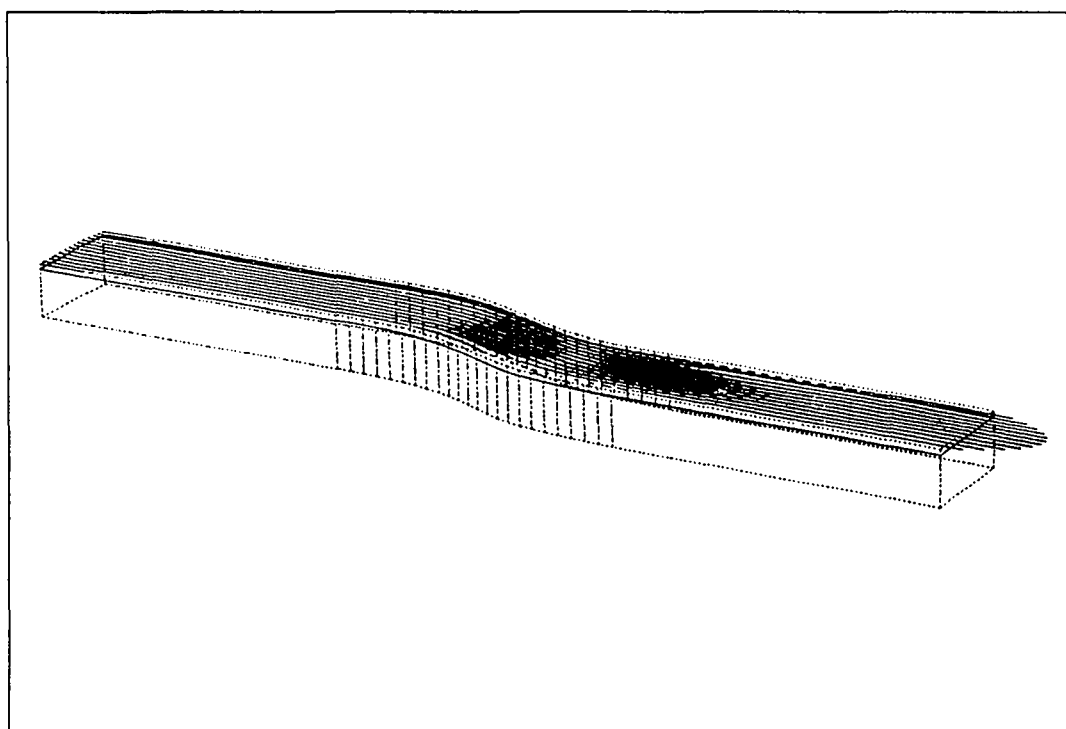


Figure 30: canal en S, vitesse $Re = 10^3$

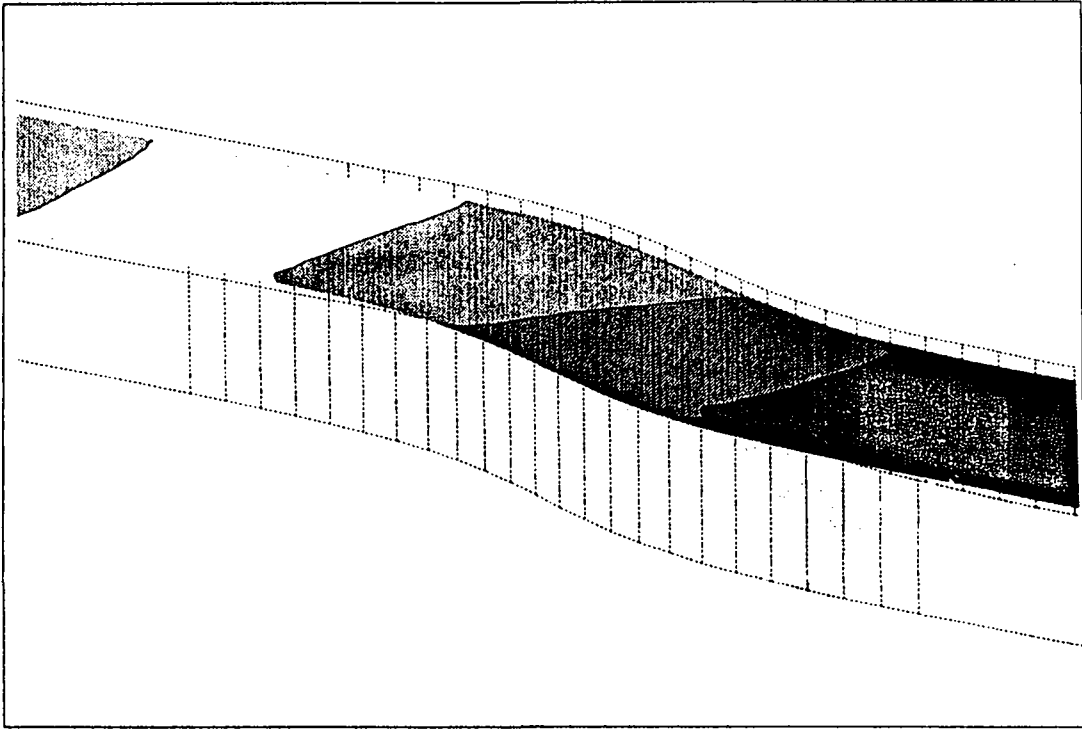


Figure 31: canal en S, pression $Re = 10^3$

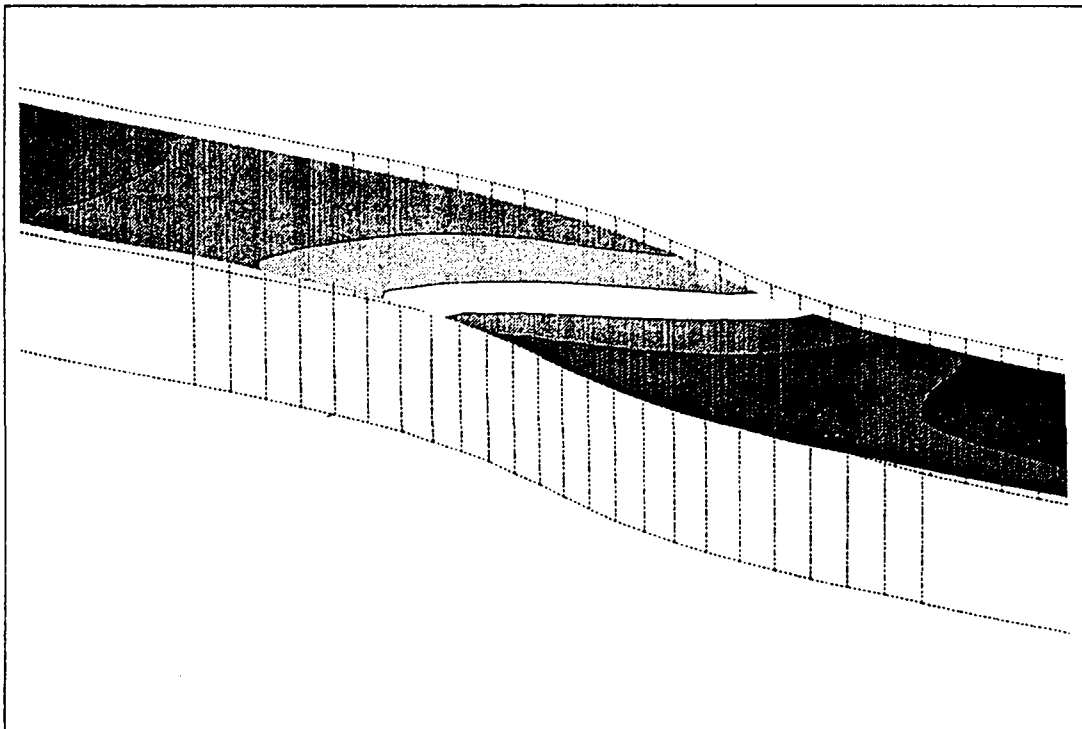


Figure 32: canal en S, pression $Re = 10^4$

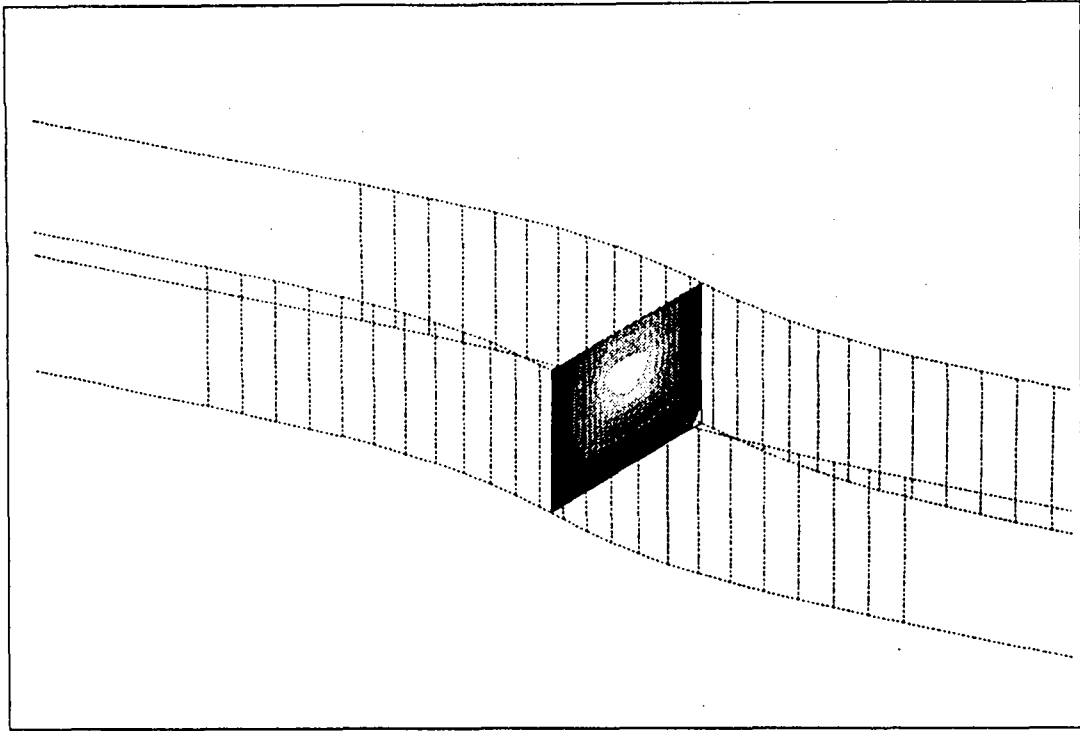


Figure 33: canal en S, vitesse normale $Re = 10^3$

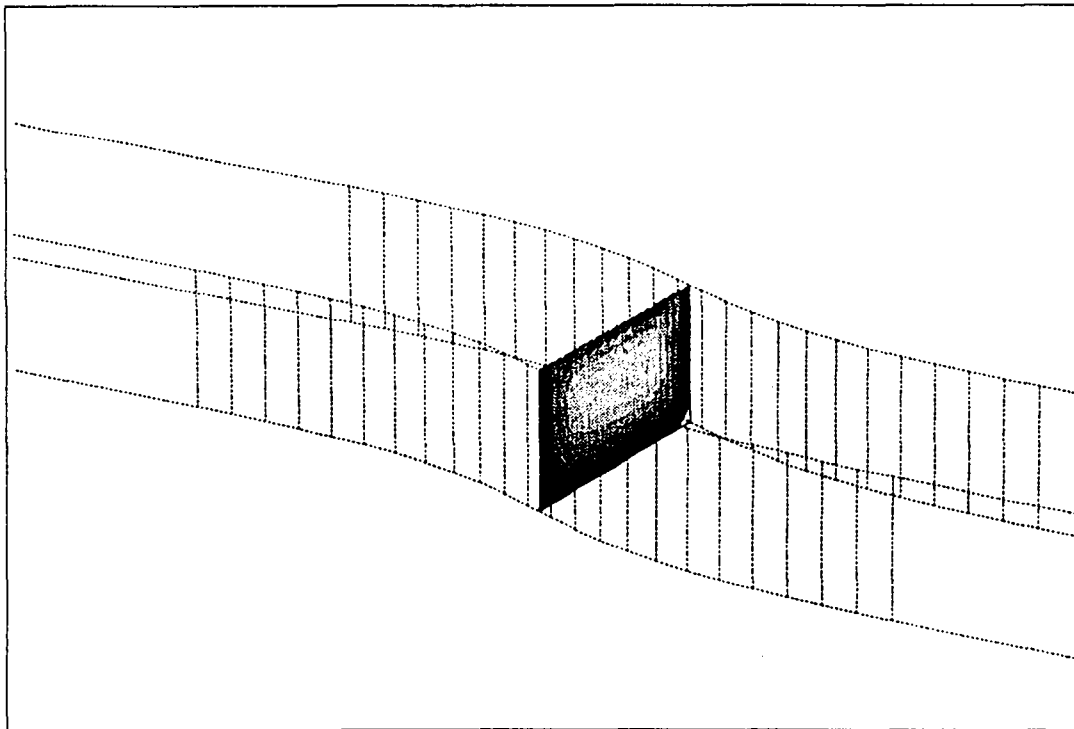


Figure 34: canal en S, vitesse normale $Re = 10^4$

Bibliographie

- [1] D. ARNOLD, F. BREZZI, M. FORTIN, *A stable finite element for the Stokes equations*, Calcolo 21(4) 337-344, 1984.
- [2] CAHOUE, CHABART *Some fast 3-d finite element solvers for generalized Stokes problem*, Rapport EDF HE/41/87-03, 1987
- [3] B. CARDOT, thèse
- [4] P.G CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, 1978.
- [5] M.S.ENGELMAN, R.L.SANI, P.M.GRESHO, *The implementation of normal and/or tangential boundary conditions in Finite Element codes for incompressible fluid flow*, Int. Jour. for Num. Meth. in Fluids 2 225-238, 1982.
- [6] R. GLOWINSKI *Numerical Methods for NonLinear variational problems*, Springer Serie in Computational Physics, 1984.
- [7] V. GIRAULT, P.A. RAVIART, *Finite Element Methods of the Navier-Stokes equations, theory and applications*, Springer Series SCM vol 5, 1986.
- [8] L.LANDAU, E.LIFCHITZ, *Mécanique de Fluides*, Mir, Moscou, 1953.
- [9] B.E.LAUNDER, D.B.SPALDING, *Mathematical models of turbulence*, Academic Press, 1972.
- [10] C.PARÉS, *Un traitement faible en Eléments Finis de la condition de glissement sur une paroi pour les équations de Navier-Stokes*, C.R.Acad.Sci. Paris. Série I 307, 101-106, 1988.
- [11] C.PARÉS, *Estudio de diversos tipos de condiciones de contorno para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles*, Publicaciones del Grupo de Análisis Matemático Aplicado. Universidad de Málaga. 1989.
- [12] C. PARÉS, thèse.
- [13] O. PIRONNEAU, *Méthodes des éléments finis pour les fluides*, Masson, RMA 7, 1988.
- [14] O. PIRONNEAU, *On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations*, Numer. Math. 38, pp 309-332, 1982.
- [15] J.S.SMAGORINSKY *General circulation model of the atmosphere*, Mon. Weat. Rev. 91, 99-164, 1963.
- [16] R. VERFURTH *Finite Element approximation on steady Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions*, R.A.I.R.O. Mod.Math.Anal.Numér. 19, 461-475, 1985. Numer. Math. 50, 697-721, 1987.
- [17] R. VERFURTH *Finite Element approximation of incompressible Navier Stokes with slip boundary condition*, Numer. Math. 50, 697-721, 1987.

ISSN 0249 - 6399

ISSN 0249-6399