HAL
open science

Flambage d'une plaque thermoelastique

Christophe Lebeltel

To cite this version:

Christophe Lebeltel. Flambage d'une plaque thermoelastique. [Rapport de recherche] RR-1567, INRIA. 1991. inria-00074994

HAL Id: inria-00074994

https://inria.hal.science/inria-00074994v1

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Rapports de Recherche

N° 1567

Programme 6
Calcul Scientifique, Modélisation et Logiciel numérique par Ordinateur

FLAMBAGE D'UNE PLAQUE THERMOELASTIQUE

Christophe LEBELTEL

Décembre 1991

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.:(1) 39 63 55 11

RR_1567

FLAMBAGE D'UNE PLAQUE THERMOELASTIQUE

Christophe LEBELTEL*

Résumé

Dans ce rapport, il s'agit d'établir l'équation de flambage d'une plaque thermoélastique lorsque celle-ci flambe sous l'effet de sa température, puis d'en faire la comparaison avec une équation de flambage d'origine mécanique. Nous appliquons d'abord la méthode des développements asymptotiques au modèle tridimensionnel de la plaque puis écrivons formellement l'équation vérifiée par la composante verticale du déplacement lorsque la température dépend linéairement d'un paramètre destiné à varier.

BUCKLING OF A THERMOELASTIC PLATE

Abstract

In this report, we establish the buckling equation of a thermoelastic plate when it buckles under the effect of its temperature; then we make a comparison with the buckling equation when the plate buckles due to mechanical effects. We firstly apply the asymptotic expansion method to the three-dimensional model of the plate and then we formally write the equation governing the vertical component of the displacement when the temperature linearly depends on a parameter devoted to vary.

* INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cédex

Sommaire

Introduction 1

1. Position du problème, notations, hypothèses 2

2. Application de la méthode des développements asymptotiques 6

2.1. Passage à l'ouvert fixe 6

2.2. Ecriture sous forme variationnelle 7

2.3. Equations variationnelles vérifiées par le premier terme (u^0, σ^0) du développement asymptotique 7

2.4. Identification du problème vérifié par le terme (u^0, σ^0) 8

2.5. Changements d'échelle inverses des fonctions solutions u^0 et σ^0 13

3. Flambage de la plaque 15

3.1. Nature du problème de flambage 15

3.2. Etablissement de l'équation de flambage 16

3.2.1. Flambage d'origine élastique

3.2.2. Flambage d'origine thermique

3.2.3. Comparaison

Références 22

Introduction

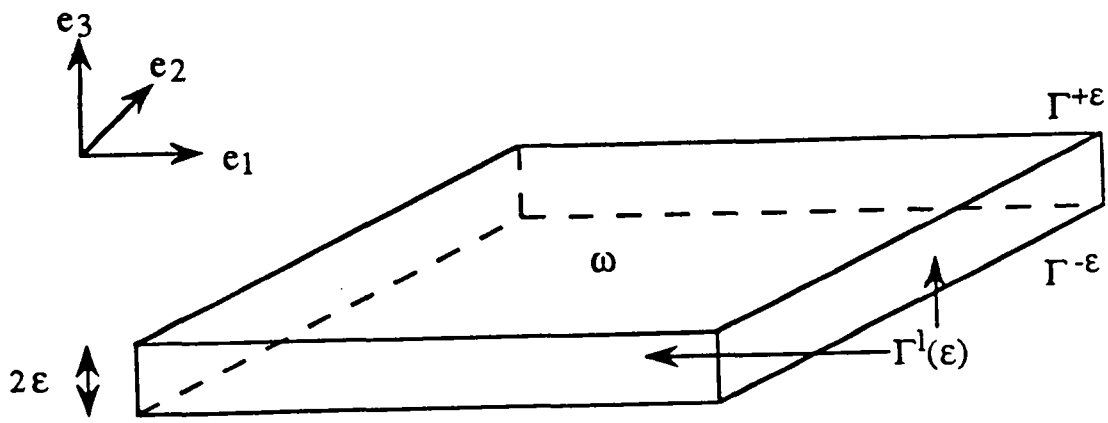
L'étude qui suit est celle d'une plaque mince thermoélastique soumise à des densités de forces volumiques et surfaciques supposées connues et dont on prend en compte la température intérieure, autre donnée du problème.

Notre point de vue est formel et consiste à appliquer la méthode des développements asymptotiques au problème initial posé sur l'ouvert 3D représentant la plaque, pour obtenir un problème limite écrit sur son plan moyen. Nous mettons en évidence l'équation de bifurcation de la plaque lorsque, les forces mécaniques étant données, l'on suppose que la température dépend linéairement d'un paramètre λ. Pour cela, nous écrivons en fonction de λ l'équation qui régit la composante verticale du déplacement limite ; il s'agit alors de la comparer à l'équation que l'on obtiendrait si le flambage était d'origine mécanique.

Une étude de flambage exclut le cadre linéarisé ; c'est donc dans celui de la thermoélasticité linéarisée que nous nous plaçons. Pour cette raison, notre point de vue est plus général que dans Lebeltel [1989] qui consistait à appliquer la méthode des développements asymptotiques à un problème de plaque thermoélastique dans le cadre de la thermoélasticité linéarisée. En revanche, le problème que nous considérons ici est statique et non plus, comme alors, évolutif en fonction du temps. En outre la température, que nous supposons constante, est une donnée de notre problème. En quoi est-elle comparable à une force dans le flambage d'une plaque ?

1 Position du problème, notations, hypothèses

L'espace est rapporté à une base (e_1, e_2, e_3). La plaque s'inscrit dans un ouvert Ω^ε de $\mathbb{R}^3$, d'épaisseur 2ε.



On utilise les deux conventions habituelles :

- indice latin $\in \{1;2;3\}$, indice grec $\in \{1;2\}$

- la convention de sommation sur les indices répétés.

Pour tout tenseur d'ordre 2, b, on pose

$$Tr\, b = b_{ii} \quad \text{et} \quad tr\, b = b_{\alpha\alpha}$$

On définit

- l'ouvert Ω^ε représentant la plaque par

$$\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$$

où ω est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^2$,

- ses deux faces supérieure et inférieure par

$$\Gamma^{\pm\varepsilon} = \omega \times \{\pm\varepsilon\}$$

- et sa surface latérale par

$$\Gamma^\ell(\varepsilon) \;=\; \partial\omega\times]-\varepsilon,\varepsilon[$$

Les ensembles $\Omega^1, \Gamma^{\pm 1}, \Gamma^\ell(1)$ sont notés $\Omega, \Gamma^\pm, \Gamma^\ell$.

Si $y = (x_1, x_2)$, à tout point $x^\varepsilon = (y, \varepsilon x_3)$ de Ω^ε, on associe le point $x = (y, x_3)$ de Ω, dit ouvert fixe.

On définit les espaces

$$\begin{aligned} H(\varepsilon) &= \{v \in H^1(\Omega^\varepsilon), v = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell(\varepsilon)\} \\ \mathbf{H}(\varepsilon) &= [H(\varepsilon)]^3 \\ Y(\varepsilon) &= \{\tau \in [L^2(\Omega^\varepsilon)]^9, \tau \text{ symétrique}\} \end{aligned}$$

La plaque, qu'on suppose constituée d'un matériau homogène et isotrope, vérifie une loi de comportement de type Kirchhoff-Love et son équilibre est décrit par une équation d'équilibre statique. Dans le cadre de la thermoélasticité non linéarisée, ces deux relations s'écrivent :

Loi de comportement :

$$(1) \qquad e^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon) + \frac{1}{2}\,\partial^\varepsilon_i u^\varepsilon_k \partial^\varepsilon_j u^\varepsilon_k \;-\; \alpha^\varepsilon \theta^\varepsilon \delta_{ij} \;=\; \frac{1+\nu^\varepsilon}{E^\varepsilon}\,\sigma^\varepsilon_{ij} \;-\; \frac{\nu^\varepsilon}{E^\varepsilon}\,Tr\sigma^\varepsilon \delta_{ij} \qquad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

où le tenseur linéarisé des déformations $e^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon)$ est défini par

$$e^\varepsilon_{ij}(u^\varepsilon) \;=\; \frac{1}{2}\,(\partial^\varepsilon_i u^\varepsilon_j + \partial^\varepsilon_j u^\varepsilon_i)$$

Equation d'équilibre :

$$(2) \qquad -\,\partial^\varepsilon_j(\sigma^\varepsilon_{ij} + \sigma^\varepsilon_{kj}\partial^\varepsilon_k u^\varepsilon_i) = f^\varepsilon_i \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon$$

où

ν^ε est le rapport de Poisson, $-1 < \nu^\varepsilon < \frac{1}{2}$

E^ε est le module d'Young, $E^\varepsilon > 0$

α^ε est le coefficient de dilatation thermique, $\alpha^\varepsilon > 0$

f_i^ε désignent les composantes de la densité de forces volumiques

u^ε est le champ de déplacement d'un point matériel de la plaque

σ^ε est le deuxième tenseur des contraintes de Piola - Kirchhoff

θ^ε, supposé connu, est l'écart, par rapport à une température de référence, de la température à l'intérieur de la plaque.

Remarques

• Sous certaines hypothèses de nature physique, (1)-(2) correspond au système d'équations fréquemment retenu en thermoélasticité non linéarisée, avec apparition du terme supplémentaire $-\alpha^\varepsilon\theta^\varepsilon\delta_{ij}$ dans la loi de comportement, linéaire en θ^ε lorsque le coefficient α^ε est supposé indépendant de la température.

• Dans Lebeltel [1989], il fallait de plus écrire une équation d'estimation de l'énergie portant sur le terme θ^ε. Ici, la température est une donnée du problème, si bien que les équations posées ci-dessus sont en nombre suffisant pour déterminer le déplacement et les contraintes, comme pour une plaque élastique dont on ne considère pas la température.

On impose les conditions limites :

$$u_i^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^\ell(\varepsilon) \tag{3}$$

$$(\sigma_{i3}^\varepsilon + \sigma_{k3}^\varepsilon \partial_k^\varepsilon u_i^\varepsilon) n_3^\varepsilon = g_i^\varepsilon \quad \text{sur} \quad \Gamma^{\pm\varepsilon} \tag{4}$$

où $g_i^{\pm\varepsilon}$ désignent les composantes de la densité de forces surfaciques

n^ε est le vecteur normal extérieur à la plaque en un point de sa surface.

Remarque

La première condition limite traduit l'encastrement total de la plaque sur sa surface latérale.

On transforme le problème (1) – (4) en un problème posé sur l'ouvert fixe Ω. Pour cela,

on introduit des changements d'échelle sur les inconnues et des hypothèses sur les données. Conformément à Ciarlet [1990],

au vecteur u^ε, on associe $u(\varepsilon)$ défini sur Ω par

$$u^\varepsilon_\alpha(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 u_\alpha(\varepsilon)(x) \ , \quad u^\varepsilon_3(x^\varepsilon) = \varepsilon u_3(\varepsilon)(x) \quad \text{pour tout } x \in \Omega$$

au tenseur σ^ε, on associe $\sigma(\varepsilon)$ défini sur Ω par

$$\sigma^\varepsilon_{\alpha\beta}(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon)(x)$$

$$\sigma^\varepsilon_{\alpha 3}(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 \sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)(x) \qquad \text{pour tout } x \in \Omega$$

$$\sigma^\varepsilon_{33}(x^\varepsilon) = \varepsilon^4 \sigma_{33}(\varepsilon)(x)$$

On suppose qu'il existe des fonctions f_i et g_i indépendantes de ε telles que

$$f^\varepsilon_\alpha(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 f_\alpha(x), \quad f^\varepsilon_3(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 f_3(x), \quad \text{pour tout} \quad x \in \Omega$$

$$g^\varepsilon_\alpha(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 g_\alpha(x), \quad g^\varepsilon_3(x^\varepsilon) = \varepsilon^4 g_3(x), \quad \text{pour tout} \quad x \in \Gamma^\pm$$

On suppose de plus qu'il existe deux constantes λ et μ telles que

$$\lambda^\varepsilon = \lambda \text{ et } \mu^\varepsilon = \mu$$

Enfin, il existe une constante α et une fonction θ indépendantes de ε telles que

$$\alpha^\varepsilon = \alpha$$

$$\theta^\varepsilon(x^\varepsilon) = \theta(x) \text{ pour tout } x \in \Omega$$

Ces deux changements d'échelle sont ainsi posés de manière à faire figurer le terme de température dans l'équation sur ω vérifiée par la composante verticale du déplacement limite. C'est donc a postériori que ces hypothèses trouveront leur justification.

2 Application de la méthode des développements asymptotiques

2.1 Passage à l'ouvert fixe

Grâce aux changements d'échelle sur les inconnues et aux hypothèses sur les données, le problème (1) – (4) posé sur Ω^ε est équivalent au problème suivant, posé sur l'ouvert fixe Ω :

loi de comportement :

$$
(5)\quad \left|
\begin{array}{ll}
(5)_1 & e_{\alpha\beta}(u(\varepsilon)) + \frac{1}{2}\,\partial_\alpha u_3(\varepsilon)\partial_\beta u_3(\varepsilon) - \alpha\theta\delta_{\alpha\beta} + \varepsilon^2\frac{1}{2}\,\partial_\alpha u_\mu(\varepsilon)\partial_\beta u_\mu(\varepsilon) \\
& \quad = \dfrac{1+\nu}{E}\,\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) - \dfrac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\sigma(\varepsilon)\delta_{\alpha\beta} \qquad \text{dans } \Omega \\
(5)_2 & e_{\alpha 3}(u(\varepsilon)) + \dfrac{1}{2}\,\partial_\alpha u_3(\varepsilon)\partial_3 u_3(\varepsilon) + \varepsilon^2\dfrac{1}{2}\,\partial_\alpha u_\mu(\varepsilon)\partial_3 u_\mu(\varepsilon) \\
& \quad = \varepsilon^2\dfrac{1+\nu}{E}\,\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) \qquad \text{dans } \Omega \\
(5)_3 & e_{33}(u(\varepsilon)) + \dfrac{1}{2}\,\partial_3 u_3(\varepsilon)\partial_3 u_3(\varepsilon) + \varepsilon^2\dfrac{1}{2}\,\partial_3 u_\mu(\varepsilon)\partial_3 u_\mu(\varepsilon) - \varepsilon^2\alpha\theta \\
& \quad = \varepsilon^4\dfrac{1+\nu}{E}\,\sigma_{33}(\varepsilon) - \varepsilon^2\dfrac{\nu}{E}\,(\,\mathrm{tr}\,\sigma(\varepsilon) + \varepsilon^2\sigma_{33}(\varepsilon)) \qquad \text{dans } \Omega
\end{array}
\right.
$$

Equation d'équilibre :

$$
(6)\quad \left|
\begin{array}{ll}
(6)_1 & -\partial_j(\sigma_{\alpha j}(\varepsilon) + \varepsilon^2\sigma_{kj}(\varepsilon)\partial_k u_\alpha(\varepsilon)) = f_\alpha \quad \text{dans } \Omega \\
(6)_2 & -\partial_j(\sigma_{3j}(\varepsilon) + \sigma_{kj}(\varepsilon)\partial_k u_3(\varepsilon)) = f_3 \quad \text{dans } \Omega
\end{array}
\right.
$$

Conditions limites :

$$
(7)\qquad u_i(\varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell
$$

$$
(8)\quad \left|
\begin{array}{ll}
(8)_1 & (\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon) + \varepsilon^2\sigma_{k3}(\varepsilon)\partial_k u_\alpha(\varepsilon))n_3 = g_\alpha \quad \text{sur } \Gamma^\pm \\
(8)_2 & (\sigma_{33}(\varepsilon) + \sigma_{k3}(\varepsilon)\partial_k u_3(\varepsilon))n_3 = g_3 \quad \text{sur } \Gamma^\pm
\end{array}
\right.
$$

2.2 Ecriture sous forme variationnelle

De manière équivalente, le système (5) – (8) s'écrit sous la forme variationnelle :

Loi de comportement :

$$
(9) \quad \left|
\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big(e_{ij}(u(\varepsilon)) + \frac{1}{2}\,\partial_i u_3(\varepsilon)\partial_j u_3(\varepsilon)\Big)\,\psi_{ij}dx - \int_\Omega \alpha\theta\delta_{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta}dx \\
&\qquad + \varepsilon^2\Big[\frac{1}{2}\int_\Omega \partial_i u_\mu(\varepsilon)\partial_j u_\mu(\varepsilon)\psi_{ij}dx - \int_\Omega \alpha\theta\psi_{33}dx\Big] \\
&\qquad = \int_\Omega \Big(\frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon) - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma(\varepsilon)\delta_{\alpha\beta}\Big)\,\psi_{\alpha\beta}dx \\
&\qquad + \varepsilon^2\Big[\int_\Omega \Big(2\frac{1+\nu}{E}\,\sigma_{\alpha 3}(\varepsilon)\psi_{\alpha 3} - \frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma(\varepsilon)\psi_{33}\Big)\,dx\Big] \\
&\qquad + \varepsilon^4\int_\Omega \frac{1}{E}\,\sigma_{33}(\varepsilon)\psi_{33}dx \quad \text{pour tout } \psi \in Y
\end{aligned}
\right.
$$

Equation d'équilibre :

$$
(10) \quad \left|
\begin{aligned}
&\int_\Omega \sigma_{ij}(\varepsilon)e_{ij}(w)dx + \int_\Omega \sigma_{kj}(\varepsilon)\partial_k u_3(\varepsilon)\partial_j w_3 dx + \varepsilon^2\int_\Omega \sigma_{kj}(\varepsilon)\partial_k u_\alpha(\varepsilon)\partial_j w_\alpha dx \\
&\qquad = \int_\Omega f_i w_i dx + \int_{\Gamma^\pm} g_i w_i dy \quad \text{pour tout } (w) \in \mathbf{H}
\end{aligned}
\right.
$$

On fait dans toute la suite les hypothèses simplificatrices :

$$f_\alpha = 0, \quad g_\alpha = 0.$$

De plus, on suppose que la fonction θ est constante dans Ω.

2.3 Equations variationnelles vérifiées par le premier terme (u^0, σ^0) du développement asymptotique

Selon la méthode décrite dans Ciarlet [1990], on pose le développement formel des termes inconnus suivant les puissances de ε :

$$
\begin{aligned}
u(\varepsilon) &= u^0 + \varepsilon\, u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots \\
\sigma(\varepsilon) &= \sigma^0 + \varepsilon\, \sigma^1 + \varepsilon^2 \sigma^2 + \dots
\end{aligned}
$$

La suite de notre étude va consister à identifier le problème vérifié par le premier terme (u^0, σ^0) du développement.

D'après la formulation variationnelle (9) – (10), il vérifie les équations :

$$
(11)\quad \left|
\begin{array}{ll}
(11)_1 & \displaystyle\int_\Omega \Big(e_{\alpha\beta}(u^0) + \frac{1}{2}\,\partial_\alpha\, u_3^0\, \partial_\beta\, u_3^0 - \alpha\,\theta\,\delta_{\alpha\beta} - \frac{1+\nu}{E}\,\sigma^0_{\alpha\beta} \\
& \qquad\qquad + \displaystyle\frac{\nu}{E}\, tr\, \sigma^0 \delta_{\alpha\beta}\Big)\,\psi_{\alpha\beta}\, dx \;=\; 0,\;\; \forall(\psi_{\alpha\beta}) \in Y \\
(11)_2 & \displaystyle\int_\Omega (\partial_\alpha\, u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0 + \partial_\alpha\, u_3^0\, \partial_3\, u_3^0)\psi_{\alpha 3}\, dx \;=\; 0,\;\; \forall(\psi_{\alpha 3}) \in Y \\
(11)_3 & \displaystyle\int_\Omega (\partial_3\, u_3^0 + \frac{1}{2}\partial_3\, u_3^0\, \partial_3\, u_3^0)\psi_{33}\, dx \;=\; 0,\;\; \forall(\psi_{33}) \in Y \\
(11)_4 & \displaystyle\int_\Omega \sigma^0_{i\alpha}\, \partial_i\, w_\alpha\, dx \;=\; 0,\;\; \forall(w_\alpha) \in \mathbf{H} \\
(11)_5 & \displaystyle\int_\Omega \sigma^0_{i\,3}\, \partial_i\, w_3\, dx + \int_\Omega \sigma^0_{i\,j}\, \partial_i\, u_3^0\, \partial_j\, w_3\, dx \;=\; \int_\Omega f_3\, w_3\, dx \\
& \qquad\qquad + \displaystyle\int_{\Gamma\pm} g_3\, w_3\, dy,\;\; \forall(w_3) \in \mathbf{H}
\end{array}
\right.
$$

2.4 Identification du problème vérifié par le terme (u^0, σ^0)

Théorème 2.1

Si le système $(11)_1 - (11)_5$ admet une solution (u^0, σ^0) telle que $u^0 \in H^1(\Omega)^2 \times H^4(\Omega)$, celle-ci vérifie les relations suivantes :

La composante verticale de u^0 est indépendante de x_3 et s'identifie à un élément ζ_3 de $H_0^2(\omega)$ et ses composantes horizontales sont affines en x_3 de la manière

$$
(12)\qquad u_\alpha^0 \;=\; \zeta_\alpha \;-\; x_3 \partial_\alpha \zeta_3
$$

avec ζ_α élément de $H_0^1(\omega)$.

(ζ_3, ζ_α) est alors solution du système

$$
(13)\qquad \left|
\begin{array}{l}
\displaystyle\frac{2\,E}{3(1-\nu^2)}\,\Delta^2\,\zeta_3 \;-\; n_{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\,\zeta_3 + \frac{2\,E\,\alpha}{1-\nu}\,\theta\,\Delta\,\zeta_3 \\
\qquad\qquad = \; g_3^+ \;+\; g_3^- \;+\; \displaystyle\int_{-1}^{1} f_3\, dx_3 \quad \textit{dans } \omega \\
\\
\zeta_3 \;=\; \partial_n\,\zeta_3 \;=\; 0 \quad \textit{sur } \partial\,\omega
\end{array}
\right.
$$

avec $g_3^\pm(x_1, x_2) \;=\; g_3(x_1, x_2, \pm 1)$ pour tout $(x_1, x_2) \in \omega$

$$(14) \qquad \left| \begin{array}{lll} \partial_\beta\, n_{\alpha\beta} & = 0 & \textit{dans } \omega \\ \zeta_1 = \zeta_2 & = 0 & \textit{sur } \partial\,\omega \end{array} \right.$$

où $n_{\alpha\beta}$ est défini par

$$(15) \qquad \left| \begin{array}{l} n_{\alpha\beta} = \dfrac{2\,E}{1-\nu^2}\left\{(1-\nu)\dfrac{\partial_\alpha\,\zeta_\beta + \partial_\beta\,\zeta_\alpha}{2} + \nu\,\partial_\mu\,\zeta_\mu\,\delta_{\alpha\beta}\right\} \\ \qquad + \dfrac{E}{1-\nu^2}\{(1-\nu)\,\partial_\alpha\,\zeta_3\,\partial_\beta\,\zeta_3 + \nu\,\partial_\mu\,\zeta_3\,\partial_\mu\,\zeta_3\,\delta_{\alpha\beta}\}. \end{array} \right.$$

De plus les composantes de σ^0 s'écrivent en fonction des ζ_i et des données du problème par les relations :

$$(16) \qquad \sigma^0_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,n_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}\,x_3\,m_{\alpha\beta} - \frac{E\,\alpha}{1-\nu}\,\theta\,\delta_{\alpha\beta}\ ,$$

avec

$$(17) \qquad m_{\alpha\beta} = -\frac{2\,E}{3(1-\nu^2)}\{(1-\nu)\,\partial_{\alpha\beta}\,\zeta_3 + \nu\,\Delta\,\zeta_3\,\delta_{\alpha\beta}\}\,,$$

$$(18) \qquad \sigma^0_{\alpha 3} = \frac{3}{4}\,(1-x_3^2)\,\partial_\beta\,m_{\alpha\beta}$$

$$(19) \qquad \left| \begin{array}{l} \sigma^0_{33} = -\frac{1}{4}\,x_3\,(3-x_3^2)\,\partial_{\alpha\beta}\,m_{\alpha\beta} + \left\{\frac{3}{4}\,(1-x_3^2)\,m_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,x_3\,n_{\alpha\beta}\right\}\partial_{\alpha\beta}\,\zeta_3 \\ \qquad - \displaystyle\int_{-1}^{x_3} f_3\,dz + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f_3\,dx_3 + \frac{g_3^+ - g_3^-}{2} + \frac{E\alpha}{1-\nu}\,x_3\,\theta\,\Delta\,\zeta_3 \end{array} \right.$$

Démonstration :

Elle se décompose en quatre étapes. Notre démarche est celle de Ciarlet [1990] qui démontre un théorème analogue dans le cas d'une plaque élastique. Ici, nous avons à prendre en compte le terme supplémentaire de température.

Première étape : décomposition des composantes de u^0

La relation $(11)_3$ entraîne

$$\partial_3\,u_3^0 + \frac{1}{2}(\partial_3\,u_3^0)^2 = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

donc $\partial_3\,u_3^0 = 0$ ou $\partial_3\,u_3^0 = -2$.

Or, $\partial_3 u_3^0 \in H^3(\Omega)$, donc $\partial_3 u_3^0 \in C^0(\overline{\Omega})$.

Puisque $u_3^0 = 0$ sur Γ^ℓ, la seule possibilité est

$$\partial_3 u_3^0 = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

donc u_3^0 s'identifie à un élément ζ_3 de $H^4(\omega) \cap H_0^1(\omega)$.

La relation $(11)_2$ entraîne

$$\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0 = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

donc $\partial_{33} u_\alpha^0 = 0$ au sens des distributions dans Ω, u_α^0 admet alors une décomposition du type

$$u_\alpha^0 = \zeta_\alpha(x_1, x_2) + x_3 \tilde{\zeta}_\alpha(x_1, x_2)$$

avec ζ_α et $\tilde{\zeta}_\alpha$ éléments de $H_0^1(\omega)$.

Enfin, de la relation $\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^0 = 0$, on déduit $\tilde{\zeta}_\alpha = -\partial_\alpha \zeta_3$.

Par conséquent, ζ_3 est élément de $H_0^2(\omega)$, ce qui détermine complètement la structure de u^0 comme champ de Kirchhoff-Love, c'est à dire élément de l'espace

$$V_{KL} = \{v = (v_i),\ v_3 \in H_0^2(\omega),\ v_\alpha = \tilde{v}_\alpha - x_3 \partial_\alpha v_3 \ \text{ avec } \tilde{v}_\alpha \in H_0^1(\omega)\}$$

Deuxième étape : calcul de $\sigma_{\alpha\beta}^0$

La relation $(11)_1$ entraîne

$$e_{\alpha\beta}(u^0) + \frac{1}{2}\partial_\alpha u_3^0 \partial_\beta u_3^0 - \alpha\theta\delta_{\alpha\beta} - \frac{1+\nu}{E}\sigma_{\alpha\beta}^0 + \frac{\nu}{E} tr\, \sigma^0 \delta_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

donc

$$\sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{E}{1+\nu}(e_{\alpha\beta}(u^0) + \frac{1}{2}\partial_\alpha u_3^0 \partial_\beta u_3^0) + \frac{E\nu}{1-\nu^2}(tre(u^0) + \partial_\mu u_3^0 \partial_\mu u_3^0)\delta_{\alpha\beta} - \frac{E\,\alpha}{1-\nu}\theta\,\delta_{\alpha\beta}$$

Il suffit d'écrire les composantes de u^0 en utilisant leur décomposition suivant les ζ_i, pour obtenir exactement l'expression de $\sigma_{\alpha\beta}^0$ fournie en (16).

Troisième étape : construction de deux problèmes sur ω d'inconnues ζ_i

Choisissons dans $(11)_4$ et $(11)_5$, $w = (w_i)$ de la forme

$$\left| \begin{array}{l} w_\alpha = x_3 \partial_\alpha \eta_3 \\ \\ w_3 = \eta_3 \end{array} \right. \qquad \text{avec} \quad \eta_3 \in H_0^2(\omega).$$

Ces deux équations s'écrivent

$$\int_\Omega x_3 \, \sigma^0_{\alpha\beta} \, \partial_{\alpha\beta}\eta_3 \, dx \; + \int_\Omega \sigma^0_{3\beta} \, \partial_\beta \eta_3 \, dx = 0$$

et

$$\int_\Omega \sigma^0_{\alpha 3} \, \partial_\alpha \eta_3 \, dx \; + \int_\Omega \sigma^0_{\alpha\beta} \, \partial_\alpha \zeta_3 \, \partial_\beta \eta_3 \, dx = \int_\Omega f_3 \, \eta_3 \, dx \; + \int_{\Gamma^\pm} g_3^\pm \eta_3 \, dy$$

Il suffit de soustraire les deux dernières relations et d'utiliser l'expression (16) de $\sigma^0_{\alpha\beta}$ pour obtenir l'équation

$$(20) \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{2\,E}{3(1-\nu^2)} \displaystyle\int_\omega \Delta\zeta_3 \, \Delta\eta_3 \, dy + \int_\omega n_{\alpha\beta} \, \partial_\alpha \zeta_3 \, \partial_\beta \eta_3 \, dy - \dfrac{2\,E\,\alpha}{1-\nu} \, \theta \displaystyle\int_\omega \partial_\alpha \zeta_3 \, \partial_\alpha \eta_3 \, dy \\ \\ \qquad = \displaystyle\int_\omega \left\{ g_3^+ \; + \; g_3^- \; + \int_{-1}^{1} f_3 \, dx_3 \right\} \eta_3 \, dy \; = \; 0 \end{array} \right.$$

Si l'on choisit $w_\alpha = \eta_\alpha \in H_0^1(\omega)$, $(11)_4$ s'écrit

$$\int_\omega n_{\alpha\beta} \, \partial_\beta \eta_\alpha \, dy - \frac{2\,E\,\alpha}{1-\nu} \, \theta \int_\omega \partial_\alpha \eta_\alpha \, dy \; = 0$$

c'est à dire

$$(21) \qquad \int_\omega n_{\alpha\beta} \, \partial_\beta \eta_\alpha \, dy \; = 0.$$

On obtient ainsi le problème formulé en (14).

Grâce à ce résultat, si dans (20), l'on intègre par parties chaque terme du membre de droite, il vient :

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{2\,E}{3(1-\nu^2)} \displaystyle\int_\omega \Delta^2 \zeta_3 \, \eta_3 \, dy - \int_\omega n_{\alpha\beta} \, \partial_{\alpha\beta} \zeta_3 \, \eta_3 \, dy + \dfrac{2\,E\,\alpha}{1-\nu} \, \theta \displaystyle\int_\omega \Delta\zeta_3 \, \eta_3 \, dy \\ \\ \qquad = \displaystyle\int_\omega \left\{ g_3^+ \; + \; g_3^- \; + \int_{-1}^{1} f_3 \, dx_3 \right\} \eta_3 \, dy \end{array} \right.$$

De cette relation, vérifiée pour tout $\eta_3 \in H_0^2(\omega)$, on déduit le problème formulé en (13).

Quatrième étape : calcul de σ_{i3}^0

En utilisant l'expression (16) de $\sigma_{\alpha\beta}^0$, $(11)_4$ s'écrit, pour tout $(w_\alpha) \in \mathbf{H}$,

$$\frac{1}{2}\int_\omega n_{\alpha\beta}\,(\int_{-1}^{1} \partial_\beta w_\alpha\, dx_3)\, dy + \frac{3}{2}\int_\Omega x_3\, m_{\alpha\beta}\, \partial_\beta w_\alpha\, dx + \int_\Omega \sigma_{\alpha 3}^0\, \partial_3 w_\alpha\, dx \;= 0,$$

d'où l'on déduit, en intégrant le premier terme par parties et en utilisant l'équation (14) :

$$-\frac{3}{2}\int_\Omega x_3\, \partial_\beta m_{\alpha\beta} w_\alpha\, dx - \int_\Omega \partial_3 \sigma_{\alpha 3}^0\, w_\alpha\, dx + \int_{\Gamma^\pm} \sigma_{\alpha 3}^0 w_\alpha\, n_3\, dy \;= 0.$$

$\sigma_{\alpha 3}^0$ vérifie donc l'équation

$$\left|\begin{array}{ll} \partial_3 \sigma_{\alpha 3}^0 = -\dfrac{3}{2} x_3\, \partial_\beta m_{\alpha\beta} & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{\alpha 3}^0 = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm \end{array}\right.$$

dont la solution est celle qui est donnée en (18).

On procède de même pour le calcul de σ_{33}^0 ; $(11)_5$ s'écrit, pour tout $(w_3) \in \mathbf{H}$,

$$\int_\Omega \sigma_{\alpha 3}^0\, \partial_\alpha w_3\, dx + \int_\Omega \sigma_{33}^0\, \partial_3 w_3\, dx + \int_\Omega \sigma_{\alpha j}^0 \partial_\alpha \zeta_3\, \partial_j w_3\, dx \;= \int_\Omega f_3\, w_3\, dx + \int_{\Gamma^\pm} g_3^\pm w_3\, dy$$

c'est à dire, en intégrant par parties :

$$\left|\begin{array}{l} -\displaystyle\int_\Omega \partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}^0\, w_3\, dx - \int_\Omega \partial_3 \sigma_{33}^0\, w_3\, dx + \int_{\Gamma^\pm} \sigma_{33}^0 w_3\, n_3\, dy - \int_\Omega \partial_j(\sigma_{\alpha j}^0 \partial_\alpha \zeta_3) w_3\, dx \\ \qquad = \displaystyle\int_\Omega f_3\, w_3\, dx + \int_{\Gamma^\pm} g_3^\pm w_3\, dy \end{array}\right.$$

σ_{33}^0 est donc solution de

$$\left|\begin{array}{ll} \partial_3 \sigma_{33}^0 = -\partial_\alpha \sigma_{\alpha 3}^0 - \partial_j(\sigma_{\alpha j}^0 \partial_\alpha \zeta_3) - f_3 & \text{dans } \Omega \\ \sigma_{33}^0 = g_3^+ & \text{sur } \Gamma^+ \\ \sigma_{33}^0 = -g_3^- & \text{sur } \Gamma^- \end{array}\right.$$

On vérifie aisément, grâce aux relations (13) à (18), que l'expression de σ_{33}^0 est exactement celle qui est écrite en (19), ce qui achève la démonstration de ce théorème. ■

Remarque

Les résultats établis au théorème précédent sont, en ce qui concerne l'aspect élastique de notre problème, ceux que laissait attendre Ciarlet [1990]. L'auteur y applique la méthode des développements asymptotiques, sous des hypothèses de changements d'échelle identiques aux nôtres, au problème non linéarisé d'une plaque élastique soumise à des forces de volume et de surface et totalement ou partiellement encastrée sur sa surface latérale.

En conséquence, comme dans l'ouvrage mentionné, nous obtenons un champ de Kirchhoff-Love pour le déplacement limite. Sa composante verticale ζ_3 vérifie une équation aux dérivées partielles non linéaire du quatrième ordre où l'on retrouve l'opérateur biharmonique des plaques. Les composantes horizontales ζ_1 et ζ_2 sont solutions d'un système couplé de deux équations aux dérivées partielles non linéaires d'ordre deux. Les composantes du tenseur des contraintes sont alors calculables en fonction des ζ_i.

La différence concerne le terme supplémentaire de température qui figure dans nos relations; il intervient linéairement dans l'équation portant sur ζ_3, en introduisant le nouveau terme $\Delta\zeta_3$, ainsi que dans l'expression des contraintes σ^0_{ij}.

2.5 Changements d'échelles inverses des fonctions solutions u^0 et σ^0

Les étapes précédentes nous ont permis d'énoncer un problème sur l'ouvert Ω ; ce résultat est abstrait dans la mesure où Ω, d'épaisseur 2, ne peut représenter une plaque mince dont l'épaisseur tend vers zéro et où la solution ne correspond pas à la limite des véritables grandeurs physiques. C'est pourquoi, afin de lui donner sa signification physique, nous procédons à la remise à l'échelle ("de-scaling" en anglais) des fonctions u^0 et σ^0. Ainsi, nous formulons un nouveau problème vérifié par des quantités représentatives du déplacement et des contraintes de la plaque réelle.

Etant donnés les changements d'échelle introduits au paragraphe 1, on définit de nouvelles fonctions ζ_i^ε sur ω par :

$$(22) \qquad \left| \begin{array}{l} \zeta_\alpha^\varepsilon(x_1,x_2) = \varepsilon^2\zeta_\alpha(x_1,x_2) \\ \\ \zeta_3^\varepsilon(x_1,x_2) = \varepsilon\zeta_3(x_1,x_2) \end{array} \right. \qquad \text{pour tout } (x_1,x_2) \in \omega$$

et des fonctions $u_i^\varepsilon(0)$ sur Ω^ε par :

$$(23) \qquad \left| \begin{array}{l} u_\alpha^\varepsilon(0)(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 u_\alpha^0(x) \\ \\ u_3^\varepsilon(0)(x^\varepsilon) = \varepsilon u_3^0(x) \end{array} \right. \qquad \text{pour tout } x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$$

Suivant la terminologie utilisée dans Ciarlet [1990], les fonctions ζ_i^ε sont appelées "déplacements 2D de la surface moyenne" et les fonctions $u_i^\varepsilon(0)$ sont les "déplacements 2D".

De même, on définit les "contraintes 2D" sur Ω^ε par :

$$(24) \qquad \left| \begin{array}{l} \sigma_{\alpha\beta}^\varepsilon(0)(x^\varepsilon) = \varepsilon^2 \sigma_{\alpha\beta}^0(x) \\ \sigma_{\alpha 3}^\varepsilon(0)(x^\varepsilon) = \varepsilon^3 \sigma_{\alpha 3}^0(x) \\ \sigma_{33}^\varepsilon(0)(x^\varepsilon) = \varepsilon^4 \sigma_{33}^0(x) \end{array} \right. \qquad \text{pour tout } x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$$

Ces quantités sont solutions d'un nouveau problème que nous énonçons dans le théorème suivant :

Théorème 2.2

La composante verticale du déplacement 2D s'identifie à l'élément ζ_3^ε de $H_0^2(\omega)$ et ses composantes horizontales se décomposent en :

$$u_\alpha^\varepsilon(0)(x^\varepsilon) = \zeta_\alpha^\varepsilon(x_1, x_2) \; - \; x_3^\varepsilon \partial_\alpha \zeta_3^\varepsilon(x_1, x_2)$$

où $(\zeta_\alpha^\varepsilon, \zeta_3^\varepsilon)$ appartient à $[H_0^1(\omega)]^2 \times H_0^2(\omega)$ et est solution du système

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{2\,E^\varepsilon}{3(1-\nu^{\varepsilon 2})}\, \varepsilon^3\, \Delta^2\, \zeta_3^\varepsilon \; - \; \varepsilon\, n_{\alpha\beta}^\varepsilon\, \partial_{\alpha\beta}\, \zeta_3^\varepsilon \; + \varepsilon\, \dfrac{2\,E^\varepsilon\, \alpha^\varepsilon}{1-\nu^\varepsilon}\, \theta^\varepsilon\, \Delta\, \zeta_3^\varepsilon \\ \qquad = \; g_3^{+\varepsilon} \; + \; g_3^{-\varepsilon} \; + \; \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_3^\varepsilon\, dx_3^\varepsilon \;\; \textit{dans } \omega \\ \\ \zeta_3^\varepsilon \; = \; \partial_n\, \zeta_3^\varepsilon \; = \; 0 \;\; \textit{sur } \partial\, \omega \end{array} \right.$$

avec $g_3^{\pm\varepsilon}(x_1, x_2) \; = \; g_3^\varepsilon(x_1, x_2, \pm\varepsilon)$ pour tout $(x_1, x_2) \in \omega$

$$\left| \begin{array}{ll} \partial_\beta\, n_{\alpha\beta}^\varepsilon \; = \; 0 & \textit{dans } \omega \\ \zeta_1^\varepsilon \; = \; \zeta_2^\varepsilon \; = \; 0 & \textit{sur } \partial\, \omega \end{array} \right.$$

où l'on définit $n_{\alpha\beta}^\varepsilon$ par

$$\left| \begin{array}{l} n_{\alpha\beta}^\varepsilon \; = \; \dfrac{2\,E^\varepsilon}{1-\nu^{\varepsilon 2}} \left\{ (1-\nu^\varepsilon) \dfrac{\partial_\alpha\, \zeta_\beta^\varepsilon \; + \; \partial_\beta\, \zeta_\alpha^\varepsilon}{2} \; + \; \nu^\varepsilon\, \partial_\mu\, \zeta_\mu^\varepsilon\, \delta_{\alpha\beta} \right\} \\ \qquad + \dfrac{E^\varepsilon}{1-\nu^{\varepsilon 2}} \left\{ (1-\nu^\varepsilon)\, \partial_\alpha\, \zeta_3^\varepsilon\, \partial_\beta\, \zeta_3^\varepsilon \; + \; \nu^\varepsilon\, \partial_\mu\, \zeta_3^\varepsilon\, \partial_\mu\, \zeta_3^\varepsilon\, \delta_{\alpha\beta} \right\}. \end{array} \right.$$

De plus les contraintes 2D sont données par les relations :

$$\sigma^\varepsilon_{\alpha\beta}(0) = \frac{1}{2}\, n^\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{3}{2}\, x^\varepsilon_3\, m^\varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{E^\varepsilon\, \alpha^\varepsilon}{1-\nu^\varepsilon}\, \theta^\varepsilon\, \delta_{\alpha\beta},$$

$$\textit{avec } m^\varepsilon_{\alpha\beta} = -\frac{2\, E^\varepsilon}{3(1-\nu^{\varepsilon 2})}\{(1-\nu^\varepsilon)\, \partial_{\alpha\beta}\, \zeta^\varepsilon_3 + \nu^\varepsilon\, \Delta\, \zeta^\varepsilon_3\, \delta_{\alpha\beta}\},$$

$$\sigma^\varepsilon_{\alpha 3}(0) = \frac{3}{4}\, \varepsilon^2\, (1 - \frac{x^{\varepsilon 2}_3}{\varepsilon^2})\, \partial_\beta\, m^\varepsilon_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned}\sigma^\varepsilon_{33}(0) = &-\frac{1}{4}\, x^\varepsilon_3\, \varepsilon^2\, (3 - \frac{x^{\varepsilon 2}_3}{\varepsilon^2})\, \partial_{\alpha\beta}\, m^\varepsilon_{\alpha\beta} \\ &+ \left\{\frac{3}{4}\varepsilon^2\, (1 - \frac{x^{\varepsilon 2}_3}{\varepsilon^2})\, m^\varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, x^\varepsilon_3\, n^\varepsilon_{\alpha\beta}\right\} \partial_{\alpha\beta}\, \zeta^\varepsilon_3 - \int_{-\varepsilon}^{x^\varepsilon_3} f^\varepsilon_3\, dz^\varepsilon \\ &+ \frac{1}{2}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f^\varepsilon_3\, dx^\varepsilon_3 + \frac{g^{+\varepsilon}_3 - g^{-\varepsilon}_3}{2} + \frac{E^\varepsilon \alpha^\varepsilon}{1-\nu^\varepsilon}\, x^\varepsilon_3\, \theta^\varepsilon\, \Delta\, \zeta^\varepsilon_3\end{aligned}$$

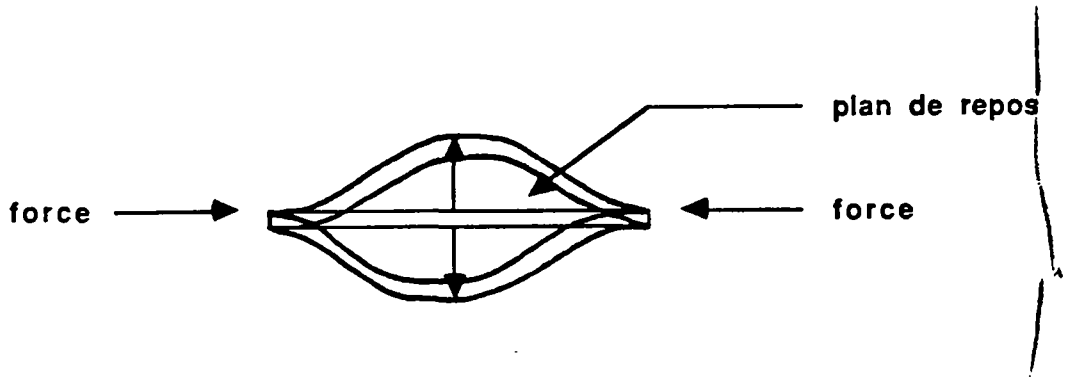
Démonstration :

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 2.1. Il suffit d'écrire les termes ζ_i en fonction des ζ^ε_i définis en (22) et d'utiliser les hypothèses sur les données introduites au paragraphe 1. ■

3 Flambage de la plaque

3.1 Nature du problème de flambage

Le problème de flambage de plaque (c'est cette structure qui retient notre attention, mais on peut l'envisager pour d'autre corps, tels un rail, une coque...) traité habituellement concerne une plaque mince élastique (thermoélastique si l'on considère sa température) vérifiant un modèle classique avec des conditions limites de von Kármán, d'encastrement partiel ou total,... sujette à se déformer sous l'effet de forces qui lui sont appliquées. Ces forces peuvent être de natures diverses : mécaniques ou thermiques, volumiques ou surfaciques... et l'on peut distinguer les efforts permanents, fixes ou relativement stables comme le poids propre du corps, de ceux qui sont fluctuants. Un exemple d'effort fluctuant est celui qu'exerce le vent soufflant par rafales sur une plate-forme pétrolière. Si λ, paramètre destiné à varier, désigne l'intensité d'une telle force, l'équilibre de la plaque est traduit par une équation (E_λ), dite équation de flambage, dont l'inconnue est u, sa déflexion. Lorsque la force est colinéaire au plan moyen de la plaque et que son intensité dépasse une "valeur critique" λ^*, la plaque quitte son plan de repos pour occuper d'un côté ou de l'autre, une position incurvée; on dit qu'elle flambe.



Quelle est la valeur de λ^* ? Quel est le nombre de solutions de (E_λ) pour $\lambda > \lambda^*$? Telles sont les questions qui intéressent l'étude du flambage de plaque.

Ces problèmes ont fait l'objet de divers travaux, parmi lesquels ceux de Berger [1967], Keener & Keller [1973], ou encore Ciarlet & Rabier [1980] qui rassemblent divers résultats connus sur le flambage des plaques de von Kármán et en proposent quelques extentions. Le cas des plaques rectangulaires est considéré dans Taylor [1933], Bauer & Reiss [1965], tandis que Wolkowisky [1967], Rabier [1980] envisagent celui des plaques circulaires. Citons encore Cimetiere [1980] qui présente une méthode de calcul des états d'équilibre post-critiques.

Notre propos est d'établir l'équation de flambage d'une plaque lorsque celui-ci provient de contraintes thermiques et de la comparer à celle d'un flambage d'origine mécanique; λ n'est plus alors le paramètre d'intensité d'une force mais celui d'une température. Un exemple concret de plaque subissant d'importantes variations de sa température est celui d'un panneau solaire de chauffage posé sur le toit d'une habitation.

3.2 Etablissement de l'équation de flambage

3.2.1 Flambage d'origine élastique

Nous commençons par rappeler la méthode qui permet d'établir l'équation de flambage d'une plaque lorsque celle-ci flambe sous l'effet d'une force.
Pour cela, nous suivons la démarche de Ciarlet & Rabier [1980].

On considère une plaque thermoélastique vérifiant un modèle de von Kármán. Son comportement et son équilibre sont décrits par les équations (1) et (2), dans lesquelles θ^ε est supposée constante. On lui impose les conditions limites :

$$\left|\begin{array}{lll} (\sigma^\varepsilon_{i3} + \sigma^\varepsilon_{k3}\partial^\varepsilon_k u^\varepsilon_i)n^\varepsilon_3 = g^\varepsilon_i & & \text{sur } \Gamma^{\pm\varepsilon} \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(\sigma^\varepsilon_{\alpha\beta} + \sigma^\varepsilon_{k\beta}\partial^\varepsilon_k u^\varepsilon_\alpha)n^\varepsilon_\beta = h^\varepsilon_\alpha & & \text{sur } \partial\omega \\ \partial^\varepsilon_3 u^\varepsilon_\alpha = u^\varepsilon_3 = 0 & & \text{sur } \Gamma^\ell(\varepsilon) \end{array}\right.$$

où la donnée h_α^ε est la densité de la résultante des forces horizontales s'exerçant sur $\Gamma^\ell(\varepsilon)$.

Nous rappelons que, s'il existe une fonction h_α indépendante de ε telle que

$$h_\alpha^\varepsilon(y) \;=\; \varepsilon^2 h_\alpha(y) \text{ pour tout } y \in \omega$$

et sous l'hypothèse simplificatrice $g_\alpha^\varepsilon \;=\; 0$, l'application de la méthode des développements asymptotiques conduit au résultat suivant pour le premier terme u^0 du développement de $u(\varepsilon)$: il existe des fonctions $(\zeta_\alpha)_{\alpha\,=\,1;2}$ dans $H^3(\omega)$ et ζ_3 dans $H_0^2(\omega)$ telles que

$$\left|\begin{array}{l} u_\alpha^0 \;=\; \zeta_\alpha \;-\; x_3\partial_\alpha\zeta_3 \\[2ex] u_3^0 \;=\; \zeta_3 \end{array}\right.$$

et (ζ_α, ζ_3) est solution de

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{2\,E}{3(1-\nu^2)}\,\Delta^2\,\zeta_3 \;-\; n^*_{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\,\zeta_3 \;=\; g_3^+ \;+\; g_3^- \;+\; \displaystyle\int_{-1}^{1} f_3\,dx_3 & \text{dans } \omega \\[2ex] \partial_\beta\, n^*_{\alpha\beta} = \;0 \quad \text{dans } \omega & \\[2ex] n^*_{\alpha\beta} n_\beta = \;2\,h_\alpha \quad \text{sur } \omega & \end{array}\right.$$

où l'on pose $n^*_{\alpha\beta} \;=\; n_{\alpha\beta} - \dfrac{E\,\alpha}{1-\nu}\,\theta\,\delta_{\alpha\beta}$ et $n_{\alpha\beta}$ est défini en (15).

On introduit les notations suivantes :

Pour tout couple (v, w) d'éléments de $H^2(\omega)$, on définit le crochet de dualité $[.,.]$ par

$$[v, w] \;=\; \partial_{11}v\;\partial_{22}w \;+\; \partial_{22}v\;\partial_{11}w \;-\; 2\partial_{12}v\;\partial_{12}w$$

B est l'opérateur défini de $[H^2(\omega)]^2$ dans $H_0^2(\omega)$ par $\Delta^2 B(v, w) = [v, w]$

C est l'opérateur défini de $H_0^2(\omega)$ dans $H_0^2(\omega)$ par $C(v) = B(B(v, v), v)$

L est l'opérateur défini de $H_0^2(\omega)$ dans $H_0^2(\omega)$ par $\Delta^2 Lv = -2\Delta v$

F est l'élément de $H_0^2(\omega)$ défini par $\Delta^2 F = f \;=\; g_3^+ \;+\; g_3^- \;+\; \displaystyle\int_{-1}^{1} f_3\,dx_3$

On désigne par u la composante verticale ζ_3 du déplacement.

Enfin, on fait dépendre la force h_α d'un paramètre réel λ. Précisément,

$$h_\alpha \;=\; -\lambda n_\alpha \tag{25}$$

Sous ces hypothèses, on énonce le :

Théorème 3.1

u vérifie l'équation de flambage qui, sous forme canonique, s' écrit :

$$u - \lambda L u + C(u) = F \tag{26}$$

Démonstration :

Nous en rappelons les étapes essentielles. D'après les résultats établis dans Ciarlet & Rabier [1980], il existe ϕ^* dans $H^3(\omega)$ telle que

$$\partial_{11}\phi^* = n^*_{22}, \quad \partial_{12}\phi^* = -n^*_{12} = -n^*_{21}, \quad \partial_{22}\phi^* = n^*_{11}$$

u est alors solution de

$$\frac{2\,E}{3(1-\nu^2)}\,\Delta^2 u - [\phi^*, u] = f \quad \text{dans } \omega$$

et ϕ^* vérifie

$$\left|\begin{array}{ll} \Delta^2\phi^* = -E[u,u] & \text{dans } \omega \\ \phi^* = 2\varphi_0, \ \partial_n\phi^* = 2\varphi_1 & \text{sur } \partial\omega \end{array}\right.$$

où les fonctions φ_i sont définies par

$$\varphi_0(y) = -y_1 \int_{\gamma(y)} h_2 + y_2 \int_{\gamma(y)} h_1 + \int_{\gamma(y)} (x_1 h_2 - x_2 h_1)$$

$$\varphi_1(y) = -n_1(y) \int_{\gamma(y)} h_2 + n_2(y) \int_{\gamma(y)} h_1 \ ,$$

$\gamma(y)$ désignant pour tout y appartenant à $\partial\omega$, l'arc orienté joignant 0 à y sur $\partial\omega$.

En multipliant u et ϕ^* par des constantes convenables, ces relations s'écrivent plus simplement sous la forme canonique (on conserve par abus les mêmes notations)

$$\Delta^2 u - [\phi^*, u] = f \qquad \text{dans } \omega$$

$$\Delta^2\phi^* = -[u,u] \qquad \text{dans } \omega$$

$$\phi^* = 2\varphi_0, \ \partial_n\phi^* = 2\varphi_1 \qquad \text{sur } \partial\omega$$

Soit $\phi^*_0 \in H^2(\omega)$ la solution de

$$\left| \begin{array}{lll} \Delta^2 \phi_0^* = 0 & & \text{dans } \omega \\ \phi_0^* = 2\varphi_0, \ \partial_n \phi_0^* = 2\varphi_1 & & \text{sur } \partial\omega \end{array} \right.$$

et

$$\psi^* = \phi^* - \phi_0^* \in H_0^2(\omega)$$

(u, ψ^*) vérifie :

$$\Delta^2 u - [\psi^*, u] - [\phi_0^*, u] = f$$

$$\Delta^2 \psi^* = -[u, u]$$

Avec les notations introduites précédemment, ces relations équivalent à

$$\psi^* = -B(u, u)$$

$$u + C(u) - B(\phi_0^*, u) = F$$

Or, sous l'hypothèse (25), on a $\phi_0^*(x_1, x_2) = -\lambda\ (x_1^2 + x_2^2)$, d'où l'on déduit que $B(\phi_0^*, u) = \lambda L u$ et u est solution de l'équation

$$u - \lambda L u + C(u) = F$$

■

3.2.2 Flambage d'origine thermique

Nous considérons une plaque thermoélastique totalement encastrée sur sa surface latérale dont la température θ dépend d'un paramètre λ. Précisément, on suppose qu'il existe une constante réelle $\underline{\theta}$ telle que

$$\theta = \lambda \underline{\theta}.$$

L'équation (13) fournit l'équation de flambement

$$\frac{2\,E}{3(1-\nu^2)}\,\Delta^2\,u - n_{\alpha\beta}\,\partial_{\alpha\beta}\,u + \lambda\,\frac{2\,E\,\alpha}{1-\nu}\,\underline{\theta}\,\Delta\,u = f \text{ dans } \omega$$

où l'expression de $n_{\alpha\beta}$ est donnée en (15).

Afin de la comparer à (26), nous écrivons cette équation sous sa forme canonique. C'est le propos du :

Théorème 3.2

Il existe une fonction $\phi_0(u)$ dans $H^2(\omega)$, telle que u vérifie l'équation de flambage, écrite sous forme canonique :

$$u - \lambda L u - B(\phi_0(u), u) + C(u) = F \tag{27}$$

Démonstration :

Soit $\phi \in H^3(\omega)$ vérifiant :

$$\partial_{11}\phi = n_{22}, \quad \partial_{12}\phi = -n_{12} = -n_{21}, \quad \partial_{22}\phi = n_{11}$$

u est alors solution de

$$\frac{2\,E}{3(1-\nu^2)}\Delta^2 u - [\phi, u] + \lambda \frac{2\,E\,\alpha}{1-\nu}\,\underline{\theta}\,\Delta\, u = f$$

et ϕ vérifie

$$\Delta^2\phi = -E[u,u]$$

ou encore, en multipliant u, ϕ, et $\underline{\theta}$ par des constantes appropriées (par abus, on conserve les mêmes notations),

$$\Delta^2 u - [\phi, u] + 2\lambda\Delta\, u = f$$

$$\Delta^2\phi = -[u,u]$$

Or, d'après les résultats de régularité rappelés dans Ciarlet [1990,Chap.1], la solution $(\zeta_\alpha,\ \zeta_3 = u)$ obtenue au théorème 2.1 appartient à l'espace $[H^3(\omega)]^2 \times H^4(\omega)$.

Par conséquent,

$$n_{\alpha\beta} \in H^2(\omega)$$

donc

$$\phi \in H^4(\omega)$$

et les traces de ϕ et $\partial_n\phi$ sur $\partial\omega$ sont définies dans les espaces respectifs $H^{7/2}(\partial\omega)$ et $H^{5/2}(\partial\omega)$. A fortiori, elles ont un sens dans $H^{5/2}(\partial\omega)$ et $H^{3/2}(\partial\omega)$.

Soit $\phi_0(u) \in H^2(\omega)$ l'unique solution du problème

$$\left|\begin{array}{lll} \Delta^2\phi_0(u) = 0 & & \text{dans } \omega \\ \phi_0(u) = \phi \ , \ \partial_n\phi_0(u) = \partial_n\phi & & \text{sur } \partial\omega \end{array}\right.$$

et ψ la fonction de $H_0^2(\omega)$ définie par

$$\psi = \phi - \phi_0(u)$$

(u, ψ) vérifie :

$$\Delta^2 u - [\psi, u] - [\phi_0(u), u] + 2\lambda\Delta\, u = f$$

$$\Delta^2\psi = -[u, u]$$

d'où finalement l'équation de flambage :

$$u - \lambda Lu - B(\phi_0(u), u) + C(u) = F$$

3.2.3 Comparaison

L'équation (26) est l'équation de flambage d'une plaque thermoélastique vérifiant un modèle de von Kármán, lorsque le flambage est d'origine mécanique.

L'équation (27) est l'équation d'une plaque thermoélastique totalement encastrée, lorsque le flambage est d'origine thermique.

On constate une certaine analogie entre les deux équations. Dans toutes deux, le paramètre λ, qu'il représente l'intensité d'une force ou de la température, apparaît linéairement devant le même opérateur L. Lorsque le flambage est d'origine thermique, un terme s'ajoute, $-B(\phi_0(u), u)$.

En remarquant que la dépendance de $\phi_0(u)$ par rapport à u est quadratique et en utilisant la bilinéarité de l'opérateur B, il apparaît que le terme $-B(\phi_0(u), u)$ est cubique en u, comme l'opérateur C.

L'équation (27) peut alors s'écrire sous une forme voisine de celle de (26) : en posant $\tilde{C}(u) = C(u) - B(\phi_0(u), u)$, l'on a effectivement :

$$u - \lambda Lu + \tilde{C}(u) = F$$

RÉFÉRENCES

BAUER, L.; REISS, E.L. [1965] : Nonlinear buckling of rectangular plates, *SIAM J. Appl. Math.* **13**, *603-626.*

BERGER, M.S. [1967] : On the von Kármán equations and the buckling of a thin elastic plate, I. The clamped plate, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20**, *687-719.*

CIARLET, P.G. [1990] : Plates and Junctions in Elastic Multistructures : an Asymptotic Analysis, *Masson, Paris.*

CIARLET, P.G.; RABIER, P. [1980] : Les Equations de von Kármán, *Lectures Notes in Mathematics, Vol. 826, Springer-Verlag, Berlin.*

CIMETIERE, A. [1980] : Un problème de flambement unilatéral en théorie des plaques, *J. Mécanique* **19, 1**, *183-202.*

KEENER, J.P.; KELLER, H.B. [1973] : Perturbed bifurcation theory,*Arch. Rational Theory, Progress in Solid Mech. Anal.* **50**, *159-175.*

LEBELTEL, C. [1989] : Méthode des développements asymptotiques pour un problème de plaque thermoélastique, *Rapport de Recherche n° 1108, INRIA, Rocquencourt.*

RABIER, P. [1980] : Une notion de convexité conduisant à des équations possédant trois solutions et étude locale de problèmes non-linéaires perturbés. *Thèse, Université Pierre et Marie Curie, Paris.*

TAYLOR, G.I. [1933] : The buckling load for a rectangular plate with four clamped edges, *Z. Angew. Math. Mech.* **13**, *147-152.*

WOLKOWISKY, J.H. [1967] : Existence of buckled states of circular plates, *Comm. Pure Appl. Math.* **20**, *549-560.*

ISSN 0249-6399