Sur une famille de polynomes issus de l'analyse numerique

Philippe Flajolet, Xavier Gourdon, Bruno Salvy

▶ **To cite this version:**

Philippe Flajolet, Xavier Gourdon, Bruno Salvy. Sur une famille de polynomes issus de l'analyse numerique. [Rapport de recherche] RR-1857, INRIA. 1993. inria-00074815

HAL Id: inria-00074815
https://inria.hal.science/inria-00074815

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Sur une famille de polynômes issus de l'analyse numérique

Philippe FLAJOLET
Xavier GOURDON
Bruno SALVY

N° 1857
Février 1993

PROGRAMME 2

Calcul Symbolique,
Programmation
et Génie logiciel

Sur une famille de polynômes issus de l'analyse numérique

Philippe FLAJOLET, Xavier GOURDON, et Bruno SALVY

Résumé. Cette note constitue une étude analytique des polynômes de Curtz. Ceux-ci sont les polynômes caractéristiques des matrices qui apparaissent dans la méthode d'Adams de résolution numérique d'équations différentielles ordinaires.

Diverses représentations intégrales sont établies pour ces polynômes qui s'avèrent être liés aux polynômes de Stirling. Il en résulte notamment la localisation de leurs racines réelles et complexes. Les méthodes utilisées reposent principalement sur l'analyse asymptotique complexe élémentaire.

On a Family of Polynomials Arising in Numerical Analysis

Philippe FLAJOLET, Xavier GOURDON, and Bruno SALVY

Abstract. *The present note constitutes an analytic* étude *on Curtz polynomials. These polynomials are defined as the characteristic polynomials of matrices that occur in Adams' method for the numerical solution of ordinary differential equations.*

Various integral representations are established for these polynomials which appear to be related to Stirling polynomials. As a result, their real and complex roots can be precisely located. The methods used essentially relie on elementary techniques of complex asymptotic analysis.

Article à paraître dans la *Gazette des Mathématiciens*, Janvier 1993.

SUR UNE FAMILLE DE POLYNÔMES ISSUS DE L'ANALYSE NUMÉRIQUE

Philippe FLAJOLET, Xavier GOURDON, et Bruno SALVY*

LES POLYNÔMES $P_n(x)$ introduits par Paul Curtz dans [6] sont définis par la récurrence

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = x \sum_{q=0}^{n-1} \frac{(-1)^q}{q+1} P_{n-q-1}(x) + \frac{(-1)^n}{n+1}. \tag{1}$$

On se propose de montrer à leur propos le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les polynômes de Curtz $P_n(x)$ n'ont aucune racine réelle lorsque n est pair. Ils possèdent une unique racine réelle positive lorsque n est impair.*

Ce théorème répond par l'affirmative à la conjecture de Curtz posée dans [6]. On se contentera ici d'une présentation quelque peu allusive des différents ingrédients de la preuve, tout en développant diverses propriétés analytiques des polynômes. Les procédés utilisés constituent notamment une illustration intéressante de méthodes d'analyse asymptotique complexe élémentaire.

Quant à leur origine, les $P_n(x)$ apparaissent dans [5] comme les polynômes caractéristiques des matrices d'Adams sur lesquelles est fondée la "méthode d'Adams", méthode itérative de résolution numérique d'équations différentielles ordinaires [4]. La matrice d'Adams d'ordre n est la matrice dont l'élément (i, j) vaut

$$\frac{(-1)^{n-j}}{n!} \binom{n}{j} \int_0^i \frac{u(u-1)\cdots(u-n)}{u-j}\, du \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n).$$

L'étude qui est faite ici commence par un calcul explicite de série génératrice. Les $P_n(x)$ s'avèrent être, à normalisation près, des transformées de Laplace des polynômes de Stirling. De premières propriétés des racines réelles en découlent. Les représentations intégrales issues de la série génératrice des $P_n(x)$ permettent ensuite de montrer qu'asymptotiquement les zéros réels des $P_n(x)$ pour n impair s'accumulent de manière quantifiable asymptotiquement vers $1/\log 2$. De plus, les zéros complexes admettent une courbe limite. Les polynômes possèdent également une curieuse propriété de platitude. Enfin, leurs coefficients obéissent asymptotiquement à la loi de Gauss.

* Projet Algorithmes, INRIA Rocquencourt, 78153 Le Chesnay. Tel : (1) 39.63.54.43.

1. Polynômes de Curtz et nombres de Stirling

La série génératrice des $P_n(x)$ est définie comme

$$P(z,x) := \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n. \tag{2}$$

On en obtient une forme close en multipliant les deux membres de (1) par z^n et en sommant sur n,

$$P(z,x) = x\log(1+z)P(z,x) + \frac{\log(1+z)}{z},$$

ce qui donne en résolvant par rapport à $P(z,x)$,

$$P(z,x) = \frac{\log(1+z)}{z} \cdot \frac{1}{1-x\log(1+z)}. \tag{3}$$

Les nombres de Stirling ("sans signe") de première espèce, $s_{n,k}$, sont classiquement définis [3] par

$$\sum_{n,k} s_{n,k} u^k \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{(1-z)^u} \equiv \exp\left(u\log\frac{1}{1-z}\right) \equiv \sum_k \frac{u^k}{k!}\left(\log\frac{1}{1-z}\right)^k. \tag{4}$$

ou encore, par les polynômes de Stirling

$$\sum_k s_{n,k} u^k = u(u+1)(u+2)\cdots(u+n-1). \tag{5}$$

La comparaison de (3), développée en x, et de (4) montre que *les coefficients des $P_n(x)$ sont directement reliés aux nombres de Stirling* :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} s_{n+1,k+1}(k+1)!\,(-x)^k. \tag{6}$$

On a ainsi une première expression des P_n en termes de fonctions spéciales classiques.

En 1852, Schlömilch a donné pour les nombres de Stirling la formule [3, p. 216],

$$s_{n,k} = \sum_{0\leqslant j\leqslant h\leqslant n-k} (-1)^{j+h}\binom{h}{j}\binom{n-1+h}{n-k+h}\binom{2n-k}{n-k-h}\frac{(h-j)^{n-k+h}}{h!}.$$

Ceci fournit donc une représentation "explicite" des coefficients comme sommes doubles de fonctions élémentaires.

Enfin, il est bien connu que l'effet d'une transformation de Laplace sur une série de Taylor revient essentiellement à multiplier par $k!$ le coefficient du $k^{\text{ième}}$ terme de la série. Donc, à *normalisation près, les*

$P_n(x)$ *sont des transformées de Laplace des polynômes de Stirling.* Il en découle que le polynôme P_n admet la représentation intégrale réelle :

$$P_n(-x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\frac{1}{x^2}\int_0^\infty e^{-u/x}u(u+1)(u+2)\cdots(u+n)\,du, \quad (x>0). \tag{7}$$

Pour x fixé, on peut dès lors obtenir des renseignements asymptotiques sur $P_n(x)$ lorsque $x < 0$ par la méthode de Laplace, laquelle permet l'estimation d'intégrales dépendant de grands paramètres [7]. On a de même

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\frac{1}{x^2}\int_0^\infty e^{-u/x}u(1-u)(2-u)\cdots(n-u)\,du, \quad (x>0). \tag{8}$$

2. Intégrale de Laplace et racines réelles

Les polynômes $P_n(x)$ ne s'annulent pas pour $x < 0$, d'après leurs représentations (6) ou (7). Leur terme constant est non nul car $P_n(0) = (-1)^n/(n+1)$. Il ne reste donc qu'à les étudier pour $x > 0$.

Lorsque n est impair, on a $P_n(0) < 0$, alors que, d'après (6), le coefficient dominant du polynôme est positif. Il s'ensuit que *les polynômes P_n ont au moins une racine réelle positive pour n impair.*

Lorsque n est pair, l'absence de racine réelle se montre par un argument d'analyse réelle fondé sur la représentation (8). Le polynôme $S_n(u) = u(1-u)\cdots(n-u)$ dans l'intégrale (8) "oscille" pour $u \in [0,n]$, avec des zéros simples en $u = 0, 1, 2, \ldots, n$. Par ailleurs, ces polynômes vérifient une relation de symétrie et une relation de récurrence :

$$S_n(n-u) = (-1)^{n+1}S_n(u), \quad (n-u)S_n(u+1) = -(u+1)S_n(u).$$

Ceci suggère de décomposer (8) en une somme des

$$I_k = \int_{k-1}^{k} e^{-u/x}S_n(u)\,du, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

et d'étudier comment les deux relations ci-dessus se traduisent sur ces intégrales.

Les changements de signe de S_n aux entiers entraînent que I_k est du signe de $(-1)^{k+1}$. Ensuite, la relation de récurrence montre que pour $1 \leqslant k \leqslant n/2$, le signe de $I_k + I_{k+1}$ est celui de I_k. En utilisant la relation de symétrie, et la convexité de l'exponentielle, on obtient (avec un peu plus de calcul) que pour $1 \leqslant k \leqslant n/2 - 1$, le signe de $I_k + I_{k+1} + I_{n-k+1} + I_{n-k}$ est celui de I_k.

Pour conclure, il ne reste plus qu'à remarquer que la part de n à $+\infty$ de l'intégrale (8) est positive, puis à regrouper quatre par quatre

les différentes contributions, elles aussi positives. Donc, *les polynômes $P_n(x)$ pour n pair n'ont aucune racine réelle.*

La suite de cette note s'attache à préciser la position du zéro réel (pour n impair) et à en établir l'unicité, ainsi qu'à localiser les zéros complexes au voisinage d'une courbe limite, indépendante de la parité de n. Nous verrons que les méthodes asymptotiques issues de l'analyse complexe fournissent commodément des renseignements quantitatifs très précis.

3. L'analyse de singularités

Une question cruciale en analyse combinatoire est de déterminer la forme asymptotique des coefficients de Taylor d'une fonction génératrice (laquelle est habituellement issue d'un problème de dénombrement). Hormis le cas élémentaire où la fonction se développe explicitement, les techniques usuelles s'appuient souvent sur la méthode de Darboux [3] (utile par exemple à l'asymptotique des polynômes orthogonaux classiques [14]) ou parfois sur divers théorèmes Taubériens [17].

Notre point de départ est la formule de Cauchy qui, étant donnée une fonction analytique $f(z)$, permet d'exprimer le coefficient de z^n dans $f(z)$ par

$$[z^n]\, f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint f(z)\, \frac{dz}{z^{n+1}}. \tag{9}$$

On a fait appel ici à la notation $[z^n]f(z)$ pour désigner le coefficient de z^n dans f, notation désormais classique en analyse combinatoire [11].

L'utilisation d'un contour de Hankel comme contour d'intégration dans (9) (un tel contour est utilisé dans l'analyse des fonctions gamma et zêta [18]) permet dans le cas de fonctions à singularités "suffisamment isolées" d'extraire commodément la forme asymptotique de $[z^n]\, f(z)$. Le contour choisi (voir la figure 1 dans le cas d'une fonction singulière en -1) passe à distance $\frac{1}{n}$ de la singularité puis s'en éloigne radialement et se referme à l'extérieur du cercle de convergence de la série de Taylor de $f(z)$. L'intégrale de Cauchy (9) se "renormalise" (poser $z = 1 + t/n$) et fait alors apparaître la représentation de Hankel de la fonction gamma multipliée par un terme asymptotique caractéristique de la nature de la singularité. En résumé, le passage dans un voisinage convenable de la singularité permet de transférer l'information asymptotique de la fonction à sa singularité en une information asymptotique sur les coefficients.

Pour se rendre compte de l'intérêt de la méthode, le lecteur pourra

chercher à obtenir par des voies élémentaires la formule

$$[z^n]\frac{z}{\log(1+z)} = -\frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}\left(1-\frac{2\gamma}{\log n}+O(\frac{1}{(\log n)^2})\right), \qquad (10)$$

ainsi que celle qui donne le développement asymptotique du coefficient de z^n dans $z^{1/2}(\log(1+z))^{-1/2}$.

C'est par l'analyse complexe élémentaire que sont développés dans [8] des théorèmes généraux qui établissent une correspondance effective entre échelles asymptotiques de fonctions au voisinage de leurs singularités et échelles asymptotiques de coefficients.

4. Asymptotique des valeurs des polynômes

On se propose d'étudier les $P_n(x)$ pour x réel positif fixé, et $n \longrightarrow +\infty$. La quantité

$$\lambda = \frac{1}{\log 2} = 1.44269\,50408\ldots$$

joue un rôle de seuil pour l'analyse asymptotique.

Si x est fixé, on peut recouvrer $P_n(x)$, comme expliqué à la section précédente, à partir de la série génératrice par une intégrale de Cauchy,

$$P_n(x) = \frac{1}{2i\pi}\oint P(x,z)\frac{dz}{z^{n+1}}. \qquad (11)$$

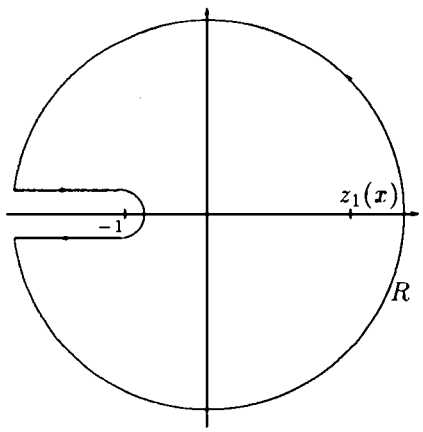

Fig. 1. : Le contour de Hankel utilisé dans l'analyse des polynômes $P_n(x)$.

Les *singularités* de $P(x,z)$ considérées comme fonctions de z sont en

$$z_0 = -1 \quad \text{et} \quad z_1 = z_1(x) = e^{1/x} - 1.$$

Ces singularités dictent le comportement des coefficients $[z^n]\,P(x,z)$. Noter que l'on a $|z_0| > z_1$ lorsque $x > \lambda$. Donc la singularité dominante (singularité la plus proche de l'origine) est en z_1 si $x > \lambda$ et en z_0 si $x < \lambda$.

Comportement à droite de $1/\log 2$. C'est le cas le plus simple. Si $x > \lambda$, alors la singularité dominante de $P(x,z)$ en z_1 est un pôle simple. Un calcul de résidu de l'intégrale de Cauchy montre alors que

$$P_n(x) = \frac{K(x)}{z_1(x)^n} + O\Big(\Big(\frac{2}{1+z_1(x)}\Big)^n\Big) \quad \text{avec} \quad K(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2 z_1(x)^2}. \tag{12}$$

Il suffit d'intégrer le long d'un cercle de rayon $(1 + z_1(x))/2$, et de prendre en compte le résidu.

Comportement à gauche de $1/\log 2$. Si x vérifie $0 < x < \lambda$, alors la singularité dominante de $P(x,z)$ est en $z_0 = -1$. L'analyse est un peu plus délicate et doit être conduite par la méthode d'analyse de singularités déjà évoquée, la méthode de Darboux ne s'appliquant pas ici. Au voisinage de $z_1 = -1$, on a :

$$P(x,z) \sim \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{\log(1+z)} + \frac{1}{x^3}\,\frac{1}{(\log(1+z))^2} + \cdots.$$

Par transfert aux coefficients [8], voir (10), on en déduit que

$$P_n(x) \sim \frac{(-1)^n}{x^2}\left[\frac{1}{n(\log n)^2} + O\Big(\frac{1}{n(\log n)^3}\Big)\right]. \tag{13}$$

Asymptotique uniforme. En résumé, on dispose de deux formes asymptotiques différentes, (12) et (13), selon la position de x par rapport à λ. Il est possible de les combiner de la manière suivante. On évalue l'intégrale de Cauchy (11) sur un cercle de rayon $|z| = R$ où $R > \max(1, z_1(x))$, avec une encoche qui revient à droite de -1 (*cf.* figure 1). Les bords de l'encoche sont à distance $\frac{1}{n}$ de l'axe réel négatif. En tenant compte du résidu en $z_1(x)$, on obtient de la sorte une expression asymptotique de $P_n(x)$ qui est la somme des deux formes asymptotiques précédemment obtenues :

$$P_n(x) = \frac{K(x)}{z_1(x)^n} + \frac{(-1)^n}{x^2}\,\frac{1}{n(\log n)^2} + O\Big(\frac{1}{n(\log n)^3}\Big). \tag{14}$$

La constante impliquée par le terme d'erreur $O(.)$ est uniforme en x pour tout sous-intervalle $[\alpha, +\infty)$, avec $\alpha > 0$.

5. Intégrale de Hankel

L'utilisation du contour de Hankel conduit à une curieuse représentation transcendante pour les $P_n(x)$. On repart de la

représentation par l'intégrale (11) où l'on fait tendre le rayon du cercle extérieur R vers l'infini. Puis l'on rapproche infinitésimalement (comme il est classique dans l'utilisation de tels contours) les deux bords voisins de l'axe réel négatif. La comparaison des deux déterminations du logarithme fournit alors une forme intégrale réelle qui précise (14). Modulo le changement de variable supplémentaire $z \mapsto -z$, on obtient que *les polynômes $P_n(x)$ admettent la représentation intégrale exacte*

$$P_n(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}\frac{1}{(e^{1/x}-1)^{n+2}} + (-1)^n \int_1^\infty \frac{1}{(1-x\log(z-1))^2 + x^2\pi^2}\frac{dz}{z^{n+2}}. \tag{15}$$

En passant, il résulte de (14) et (15) que *les polynômes $P_n(x)$ sont plats sur tout sous-intervalle fermé de l'intervalle* $(0, 1/\log 2)$. Ils sont en effet en $O(1/(n(\log n)^2)$; par contraste leurs coefficients croissent exponentiellement en $(1-e^{-1})^{-n} \approx 1.58^n$ (la forme des coefficients est traitée à la section 8).

6. Asymptotique des zéros réels

De l'étude qui précède, il est aisé de retrouver des propriétés des zéros réels des $P_n(x)$ obtenues à la section 2, puis de les compléter.

Lorsque n est pair et x fixé, $x > 0$, les deux premiers termes du développement asymptotique (14) sont positifs. On a donc $P_n(x) > 0$ pour tout n supérieur à un certain $n_0(x)$. Ceci est cohérent avec le résultat plus fort établi à la section 2. La forme exacte (15) redonne quant à elle directement l'absence de zéro réel.

Lorsque n est impair, les deux termes principaux de (14) sont par contre de signes opposés. En ce cas, la forme (14), jointe au caractère uniforme des termes d'erreur, livre l'existence d'une racine (au moins) dont une approximation asymptotique s'obtient en annulant les termes asymptotiques principaux. Grâce à un calcul asymptotique simple qui consiste à résoudre l'équation

$$\frac{K(x)}{z_1(x)^n} = \frac{1}{x^2}\frac{1}{n(\log n)^2},$$

on tire de (14) : *Lorsque n est impair, il existe une racine réelle positive ζ_n de $P_n(x)$, qui vérifie*

$$\zeta_n = \frac{1}{\log 2} - \frac{\log n + 2\log\log n + \log 2}{2n(\log 2)^2} + o(\frac{1}{n}). \tag{16}$$

L'approximation obtenue est assez bonne : par exemple, pour $n = 25$, on a $\zeta_{25} \simeq 1.18897$, valeur que l'approximation contenue dans (16) donne à 6.4×10^{-3} près.

Unicité. Il reste enfin à établir l'unicité de la racine réelle dans le cas n impair. Pour cela, on distingue deux cas, selon la position de x par rapport à $\lambda = 1/\log 2$.

Pour $x \geqslant \lambda$, la représentation (15) entraîne

$$P_n(x) \geqslant \frac{1}{x^2} - \int_1^\infty \frac{dz}{x^2\pi^2 z^{n+2}} = \frac{1}{x^2}[1 - \frac{1}{(n+1)\pi^2}],$$

et donc $P_n(x) > 0$.

Pour $x \in (0, \lambda)$, par dérivation de (15), on trouve

$$P_n'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{e^{1/x}/x^2}{(e^{1/x}-1)^{n+2}}\right] + (-1)^{n+1}\int_1^\infty \frac{d}{dz}[\frac{1}{D}]\frac{(z-1)\log(z-1)}{x}\,\frac{dz}{z^{n+2}},$$

où $D = (1 - x\log(z-1))^2 + x^2\pi^2$. Le premier terme est toujours positif. Un peu de chirurgie (charcuterie ?) règle le problème de l'intégrale. On décompose

$$\int_1^\infty = \int_1^2 + \int_2^\infty .$$

L'intégrande est positif pour $z \in [1,2]$, donc l'intégrale de 1 à 2 est minorée par l'intégrale de $\frac{5}{4}$ à $\frac{3}{2}$, laquelle est elle-même minorée par un terme de la forme $c_1 \cdot (\frac{2}{3})^n$, ce uniformément pour $x \in [0, \lambda]$. De même, en subdivisant de 2 à $s(x)$, puis de $s(x)$ à $+\infty$ avec $s(x) = e^{1/(2x)} + 1$, la partie négative de l'intégrale de 2 à $+\infty$ apparaît majorée en valeur absolue par $c_2 \cdot 2^{-n}n^{-1}$.

On a donc $\int_1^\infty \geqslant c_1 \cdot (\frac{2}{3})^n - c_2 \cdot 2^{-n}n^{-1}$ uniformément en $x \in [0, \lambda]$. Une étude plus approfondie [10] donne les valeurs de $c_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ et $c_2 = 38$, ce qui prouve la positivité pour $n \geqslant 29$. Pour les cas restants de $n \leqslant 27$, une vérification numérique exhaustive est facile. On a ainsi établi que *les $P_n(x)$ ont un unique zéro réel pour n impair.*

7. Courbe limite des racines complexes

L'estimation asymptotique des $P_n(x)$ vaut aussi pour x complexe. Supposons par exemple n impair. Les racines de $P_n(x)$ s'approximent encore en annulant les deux premiers termes du développement asymptotique (14), soit en résolvant l'équation

$$\frac{K(x)}{z_1(x)^n} = \frac{1}{x^2}\,\frac{1}{n(\log n)^2}. \tag{17}$$

Soit ω une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. La résolution de (17) donne

$$z_1(x) = \omega \cdot K(x)^{1/n}(n(\log n)^2)^{1/n}.$$

Ceci suggère donc que les racines sont de la forme

$$e^{1/x} - 1 = e^{2ik\pi/n}(1 + o(1)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

soit encore

$$x \approx \frac{1}{\log(1+e^{i\theta})} \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{2k\pi}{n}. \tag{18}$$

En d'autres termes, on s'attend à ce que *les racines complexes s'accumulent "régulièrement" autour de la courbe limite*

$$z = \frac{1}{\log(1+e^{i\theta})} \quad \text{avec} \quad \theta \in [-\pi, +\pi].$$

La figure 2 confirme le bien fondé de cette intuition. Ainsi la différence entre n pair et n impair, du point de vue des zéros complexes, correspond-elle simplement à un léger décalage de phase qui "efface" le zéro réel lorsque n est pair.

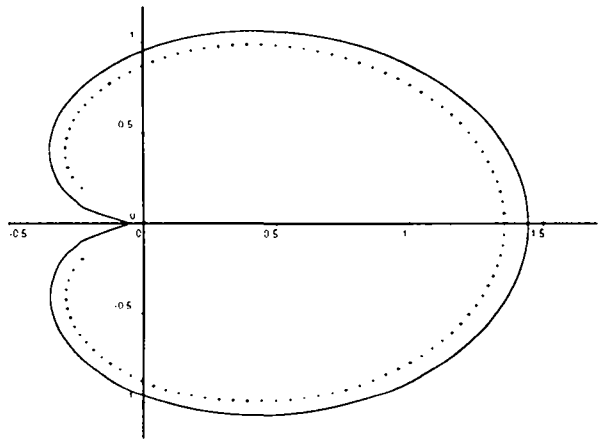

Fig. 2. : Les racines complexes de $P_{101}(x)$ et la courbe limite des racines.

8. Loi limite des coefficients

Il a été montré à la suite des travaux combinatoires de Bender [1] en 1973 que divers schémas de fonctions analytiques à deux variables conduisent à des lois Gaussiennes [16]. Par exemple, la probabilité de k succès lors de n tirages à pile ou face apparaît aussi comme coefficient d'une série double,

$$[z^n x^k] \frac{1}{1-\frac{z}{2}(1+x)},$$

et le théorème principal de Bender [1] redonne alors le théorème central limite (loi de De Moivre–Laplace) comme cas particulier.

Les polynômes $(-1)^n P_n(-x)$ sont à coefficients positifs. Leur tracé (figure 3) révèle une belle courbe en cloche. De fait, il résulte du

théorème de Bender que *les coefficients des $P_n(-x)$ tendent vers une loi Gaussienne, au sens de la convergence en distribution.*

Ultimement, la preuve repose sur l'évaluation des $P_n(-x)$ par analyse perturbative de la singularité polaire $z_1(x)$ déjà décrite avec $-x$ dans un voisinage complexe de 1, puis sur le théorème de continuité des fonctions caractéristiques (transformées de Fourier des mesures de probabilité) dû à Paul Lévy [2].

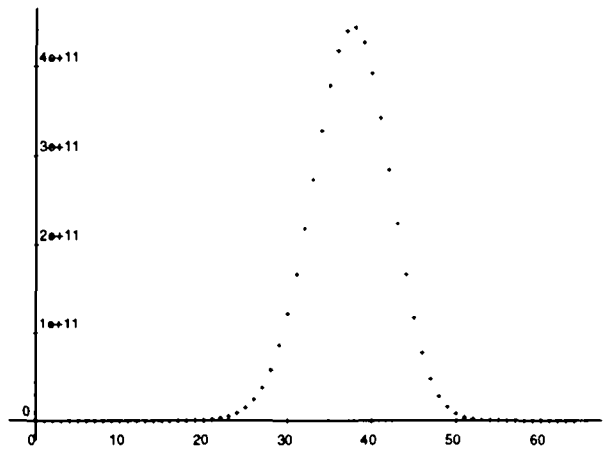

Fig. 3. : Les coefficients de $P_{64}(-x)$ s'approchent de la loi de Gauss.

Conclusion

L'étude menée ici touche à divers points de la théorie des fonctions spéciales, de l'analyse asymptotique et du calcul formel.

Les polynômes de Curtz sont étroitement liés aux familles de polynômes de série génératrice $(1 - xa(z))^{-1}$, lesquelles vérifient diverses identités générales et se rattachent, par transformation de Laplace, à la théorie de Rota des "polynômes de type binomial", voir [12]. Les méthodes développées ici sont, avec les ajustements nécessaires, applicables à de nombreuses autres familles du même type. Quelques exemples instructifs à considérer pour $a(z)$ sont

$$e^z - 1,\ ze^z,\ z + z^2,\ z + z^2 + z^3,\ \sin z,\ \arcsin z,\ \tan z,\ \arctan z.$$

La méthode d'analyse de singularités a été implantée en calcul formel par Salvy [13], et des développements dans le style de (10) peuvent désormais être obtenus automatiquement. Il y a là une direction particulièrement utile aux dénombrements asymptotiques et à l'analyse d'algorithmes en informatique théorique [9].

Enfin, par leur caractère plat sur $(0, 1/\log 2)$, la discontinuité de leur comportement asymptotique en 0 et la faible séparation de leurs racines complexes, les polynômes $P_n(x)$ constituent d'excellents tests pour les algorithmes numériques de recherche de racines. De fait l'algorithme du système de calcul formel Maple se bloque sur ces polynômes à partir du degré 25, et ce quelle que soit la précision numérique adoptée. Des méthodes fines sont ainsi nécessaires pour isoler les racines de polynômes de degrés qui dépassent la centaine (voir le diagramme de la figure 2 relatif à P_{101}), ce quel que soit leur conditionnement. Ceci a été réalisé par Gourdon [10] au moyen d'une implantation et d'une optimisation soignée de l'algorithme de Schönhage [15], lequel présente l'avantage d'un comportement parfaitement garanti mathématiquement.

Références

[1] BENDER, E. A. — *Central and local limit theorems applied to asymptotic enumeration*, Journal of Combinatorial Theory, **15** (1973), 91–111.

[2] BILLINGSLEY, P. — *Probability and Measure*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1986.

[3] COMTET, L. — *Advanced Combinatorics*, Reidel, Dordrecht, 1974.

[4] CROUZEIX, M., ET MIGNOT, A. L. — *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris, 1989.

[5] CURTZ, P. — Intégration numérique des systèmes différentiels à conditions initiales. Rapport Technique LA 12 du CELAR, 1986. Première édition 1969.

[6] CURTZ, P. — *Problème soumis*, Gazette des Mathématiciens, **52** (1992), 44.

[7] DE BRUIJN, N. G. — *Asymptotic Methods in Analysis*, Dover, 1981.

[8] FLAJOLET, P., ET ODLYZKO, A. M. — *Singularity analysis of generating functions*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, **3** (1990), 216–240.

[9] FLAJOLET, P., SALVY, B., ET ZIMMERMANN, P. — *Automatic average-case analysis of algorithms*, Theoretical Computer Science, Series A, **79** (1991), 37–109.

[10] GOURDON, X. — Algorithmique du théorème fondamental de l'algèbre. Rapport de Recherche INRIA, 1992.

[11] GRAHAM, R., KNUTH, D., ET PATASHNIK, O. — *Concrete Mathematics*, Addison Wesley, 1989.

[12] ROTA, G. C. — *Finite Operator Calculus*, Academic Press, 1975.

[13] SALVY, B. — Asymptotique automatique et fonctions génératrices. Thèse de l'École Polytechnique, 1991.

[14] SZEGŐ, G. — *Orthogonal Polynomials*, A.M.S. Colloquium Series Publication, 1939.

[15] SCHÖNHAGE, A. — Equation solving in terms of computational complexity. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Berkeley, 1987.

[16] SORIA-COUSINEAU, M. — Méthodes d'analyse pour les constructions combinatoires et les algorithmes. Doctorat ès Sciences. Université de Paris–Sud Orsay, 1990.

[17] TITCHMARSH, E. C. — *The Theory of Functions*, Oxford University Press, 1939.

[18] WHITTAKER, E. T., ET WATSON, G. N. — *A Course of Modern Analysis*, 4$^{\text{ième}}$ édition, Cambridge University Press 1927. Réimprimé en 1973 ■

Unité de Recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

Unité de Recherche INRIA Lorraine Technopôle de Nancy-Brabois - Campus Scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 VILLERS LES NANCY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rennes IRISA, Campus Universitaire de Beaulieu 35042 RENNES Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Sophia Antipolis 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)

EDITEUR
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399