



HAL
open science

Meilleur frontal bidimensionnel controle par une carte de tailles

Paul-Louis George, Eric Saltel

► **To cite this version:**

Paul-Louis George, Eric Saltel. Meilleur frontal bidimensionnel controle par une carte de tailles. [Rapport de recherche] RR-1917, INRIA. 1993. inria-00074757

HAL Id: inria-00074757

<https://inria.hal.science/inria-00074757>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Mailleur frontal
bidimensionnel contrôlé
par une carte de tailles*

Paul Louis GEORGE
Eric SALTEL

N° 1917
Mai 1993

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,
modélisation et
logiciels numériques

*R*apport
de recherche

1993

Maillageur frontal bidimensionnel contrôlé par une carte de tailles

Paul Louis George, Eric Saltel

INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France.

Résumé

Ce rapport se propose de faire le point sur les différentes phases nécessaires à la mise en œuvre d'un maillageur automatique de type frontal gouverné par une carte de tailles spécifiée en entrée. En premier lieu, il rappelle la méthode dans sa version classique puis il indique les modifications à apporter pour introduire la carte de tailles et s'y conformer. Le cas bidimensionnel isotrope est entièrement décrit et des extensions possibles sont indiquées.

Advancing-front mesh generation method in two dimensions with prescribed stepsizes

Abstract

This report aims to outline the different phases necessary to implement an advancing-front automatic mesh generator governed by a map indicating the stepsizes that must be satisfied. It, firstly, summarizes this method in its classical version, and indicates the way to incorporate and conform the stepsize control. The two-dimensional isotropic case is described in full and possible extensions are indicated.

1 Introduction

La résolution par la méthode des éléments finis d'un problème physique formulé en termes d'équations aux dérivées partielles s'appuie sur une discrétisation spatiale ou maillage du domaine étudié. De nombreuses méthodes permettent de construire, généralement à partir de la donnée du contour du domaine, un maillage de celui-ci.

L'adaptation locale des maillages à la physique des problèmes permet d'obtenir une meilleure précision des solutions calculées, en particulier il est ainsi possible de bien capter des évolutions rapides de la solution dans les zones de forte variation tout en conservant un nombre total de degrés de liberté raisonnable.

Un couplage des techniques de régularisation et de découpe locale des éléments du maillage permet d'envisager la construction de maillages adaptés à la physique des problèmes traités. Dans une première phase un maillage du domaine est construit par l'emploi de telle ou telle méthode puis un premier calcul de la solution du problème est effectué. Après choix d'un critère pertinent (gradient de la solution, champ dérivé, estimation d'erreurs, ...), on détecte dans le maillage initial les zones à adapter (par raffinement ou par déraffinement) et on génère un nouveau maillage mieux adapté au problème; ce processus est généralement itératif.

A coté de cette approche basée sur des modifications locales prend place une méthode plus globale. Elle consiste à utiliser un mailleur automatique en le gouvernant par un critère. Le maillage est alors entièrement recréé à chaque itération en fonction des résultats obtenus à l'itération précédente.

On se propose d'indiquer ce qu'il est possible de faire en suivant cette seconde approche. Pour ce faire, on présentera rapidement les différentes étapes intervenant dans la mise en application d'une méthode automatique. La méthode frontale (ou méthode d'avancée de front) est discutée en insistant particulièrement sur les aspects de flexibilité présents qui permettent d'envisager l'adaptation. Seul le cas isotrope est envisagé.

2 Méthode frontale "naturelle"

Adapté aux géométries quelconques, ce type de mailleur va construire le recouvrement du domaine en triangles, à partir essentiellement des points de son contour. Il utilise comme donnée ce contour et plus précisément une approximation polygonale de ce dernier (c'est-à-dire une liste de segments) enrichie, le cas échéant, de points et arêtes (internes) spécifiés au départ qu'il conviendra de respecter.

Quand il s'agit de générer un *premier maillage* du domaine, le maillage "naturel", on dispose uniquement de ces informations qui sont de type géométrique. La section 2 rappelle les grandes lignes de la méthode de génération de maillage correspondante qui est décrite en détails dans [6], rapport dans lequel on trouvera par ailleurs les références utiles concernant les méthodes frontales, références non rappelées ici.

Pour générer un *maillage contrôlé*, on dispose de ces informations (de type géométrique) et, de plus, d'un contrôle (lié à la physique du problème) permettant de gouverner l'algorithme. La section 3 décrit la méthode de génération de maillage dans ce cas. En pratique, le contrôle considéré est constitué par le champ des tailles souhaitées en tout point du domaine.

2.1 Principe général

Le processus est itératif: à partir d'un front donné (initialisé par l'ensemble des items du contour du domaine), une analyse des propriétés géométriques des items présents (points et

arêtes) permet de sélectionner une zone de départ. Selon la nature de cette zone, on va former un ou plusieurs triangles. Cette construction se fait en :

- considérant les propriétés géométriques des items (points, arêtes et éléments) proches de la zone traitée;
- créant un point (jugé optimal) ou en prenant un point existant qui est connecté aux arêtes voulues de la zone de départ et permet de former de nouveaux éléments.

Un nouveau front est alors formé en éliminant du front actuel les arêtes du ou des éléments construits qui sont communes avec le front précédent et en insérant à leur place la ou les arêtes construites non communes à deux triangles. Ce nouveau front est alors traité par la même méthode. Quand le front est réduit à l'ensemble vide, le maillage final est obtenu.

Les difficultés liées à cette méthode sont clairement identifiées. A chaque étape du processus, il faut, d'une part, savoir *où l'on est* et, d'autre part, savoir *ce qu'il faut faire* à l'endroit où l'on est. Ainsi, lors de la création d'un point, il faut trouver une bonne position et s'assurer que le point est intérieur au domaine. Un autre cas de figure posant problème est celui où il y a des données disparates, la méthode induit alors la rencontre de fronts composés d'éléments de tailles très différentes qu'il convient de raccorder. Le premier problème conduit en particulier à résoudre des problèmes d'intersection tandis que le second nécessite la création de structures de contrôle permettant, à chaque stade, de savoir quelle est la nature des éléments, arêtes et points voisins de la zone considérée. La méthode permettant de résoudre ces trois problèmes repose sur :

- des calculs d'intersection pour s'assurer que tout point, que l'on se propose de créer, est intérieur au domaine,
- la création d'un **espace de voisinage** permettant de connaître l'environnement de la zone traitée et limiter ainsi le nombre de ces calculs d'intersection,
- la création d'un **espace de contrôle** permettant de positionner les points à créer.

2.2 Intérieur du domaine

Pour s'assurer qu'un point est intérieur au domaine, il suffit de vérifier que :

- aucune arête ayant ce point comme extrémité ne coupe une arête du front actuel;
- aucun triangle formé ne contient de points (en cas de points internes spécifiés).

Cette vérification repose sur l'examen des items du front actuel et non de tous les items présents. En fait, il suffit de ne considérer que les items situés dans un certain voisinage de la zone traitée et par suite, le calcul est très rapide. Pour définir la zone à visiter, on utilise les espaces de contrôle et de voisinage tels que définis plus bas.

2.3 Création et positionnement d'un point

Trouver la position optimale du point à associer à l'arête, AB , du front en cours de traitement revient à effectuer la construction suivante (figure 1) :

- le point C est construit tel que le triangle ABC soit équilatéral;
- $h_{loc}(C)$, la taille d'une arête d'extrémité C , est calculée grâce à l'espace de contrôle: selon h_{loc} et les distances de C à A et B , le point C est bougé sur la médiatrice de AB afin que ces trois valeurs soient égales;

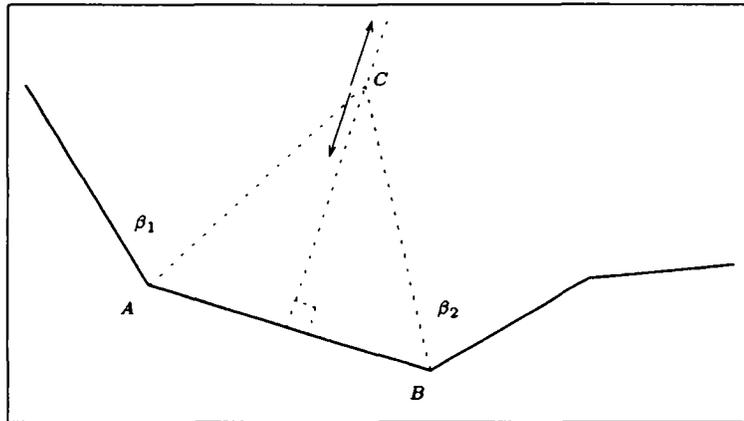


FIG. 1 - *Point optimal.*

- a) les points du front, autre que C , qui sont dans un certain voisinage sont aussi examinés afin de décider s'ils peuvent être connectés avec AB de telle sorte que les triangles ABP_i , P_i étant l'un de ces points, soient corrects. Les points retenus forment l'ensemble $\{P_i\}$, $i = 1, n$;
- cet ensemble est trié par rapport à la distance à C , puis C est mis à la fin de l'ensemble trié;
- on parcourt alors cet ensemble: on prend un de ses points (en débutant par le premier), P_k , et on vérifie que P_k est interne (cf. ci-dessus), que le triangle ABP_k est positif et vide et que, de plus, les angles β_1 et β_2 sont assez grands (figure 3). Par exemple, cette figure montre un cas où le point optimal C est le seul a priori possible mais son choix conduirait à des problèmes plus tard. Alors r , définissant la taille de la région visitée, est augmenté jusqu'à ce qu'un point P , pouvant être retenu, soit trouvé dans l'ensemble des candidats. Quand un point est trouvé, on le retient. Dans le cas inverse, on retourne en a) en augmentant r (figures 2 ou 3);
- le triangle ABP_k est alors formé et le front est mis à jour.

Notons que la méthode proposée ne construit qu'un seul triangle à la fois.

2.4 Mise à jour du front

Mettre à jour le front revient à:

- supprimer l'arête de l'ancien front qui a servi à la construction dans le cas où un point a été créé ou supprimer les arêtes des triangles formés dans le cas où un point existant a été utilisé;
- ajouter les arêtes du triangle formé non communes à deux éléments.

En parallèle de cette mise à jour du front, on effectue la mise à jour de l'espace de voisinage (cf. plus bas).

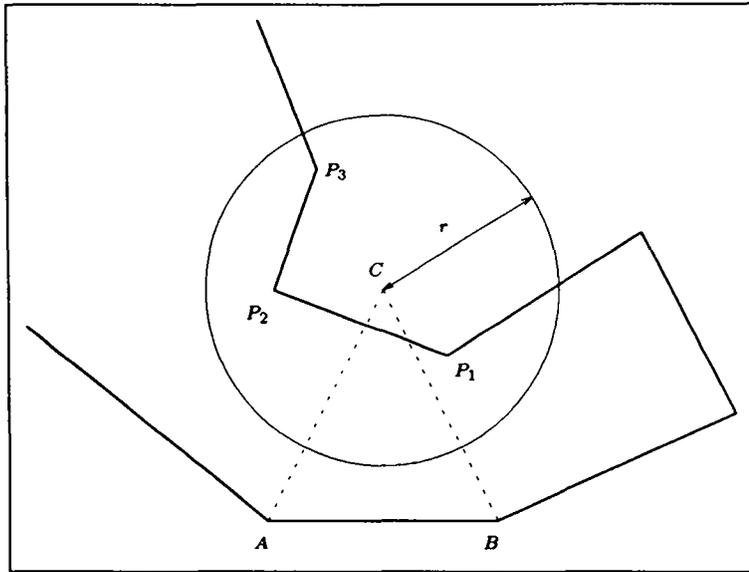


FIG. 2 - *Candidats.*

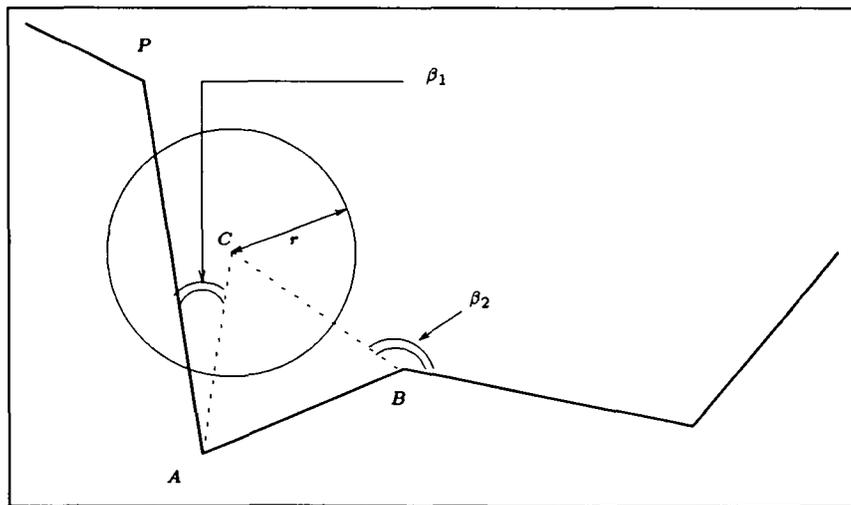


FIG. 3 - *Cas où il n'y a pas de candidats naturels autre que C.*

2.5 Espaces de contrôle et de voisinage

L'application des différentes opérations décrites ci-dessus nécessite l'utilisation d'un **espace de contrôle** pour calculer les h_{loc} mentionnés et d'un **espace de voisinage** pour déterminer au mieux la zone à explorer lors du traitement considéré. Cette idée naturelle est présente sous une forme ou sous une autre dans tous les mailleurs frontaux. Le choix retenu ici consiste à construire un recouvrement régulier du domaine composé de cases. Pour l'espace de contrôle, on définit aux sommets des cases la valeur de la fonction h_{loc} . Le h_{loc} des points sera alors obtenu par interpolation entre les quatre valeurs associées à la case contenant le point considéré.

La construction de l'espace de contrôle se fait de la manière suivante:

- on définit un quadrilatère englobant le domaine;
- on maille ce domaine en utilisant une méthode de Voronoï, cf. [3], pour créer un maillage dont les sommets d'éléments sont les points définissant le quadrilatère englobant et les points du contour de ce domaine, soit M_{boite} ce maillage, voir la figure 4 (où le domaine réel, que l'on découvrira plus tard, est au centre du dessin);
- on définit la grille de l'espace de contrôle comme un quadrilatère légèrement plus grand que le domaine. Cette grille est composée de cases quadrangulaires. Pour chaque sommet, Q , de chaque case, on cherche, dans le maillage ci-dessus, un triangle le contenant (il est alors précieux de se trouver dans un domaine convexe afin de faciliter cette recherche, c'est la raison pour laquelle on utilise le maillage de la figure 4). On calcule (figure 5), par interpolation $P1$, la valeur h_{loc} au point Q à partir des h_{loc} des 3 sommets du triangle trouvé (Le champ , i.e. les h_{loc} , est connu à partir de la taille des segments constituant le contour du domaine).

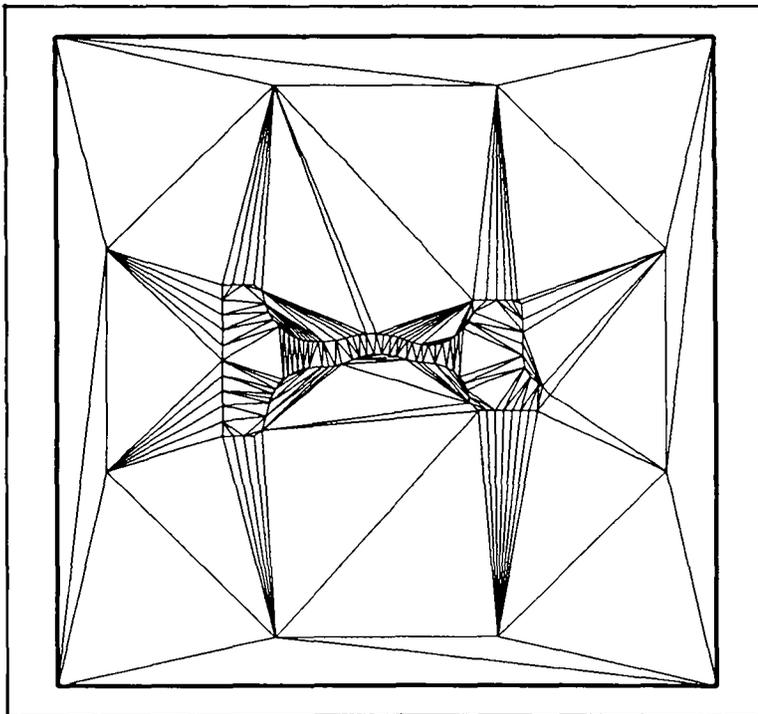


FIG. 4 - Maillage "boite".

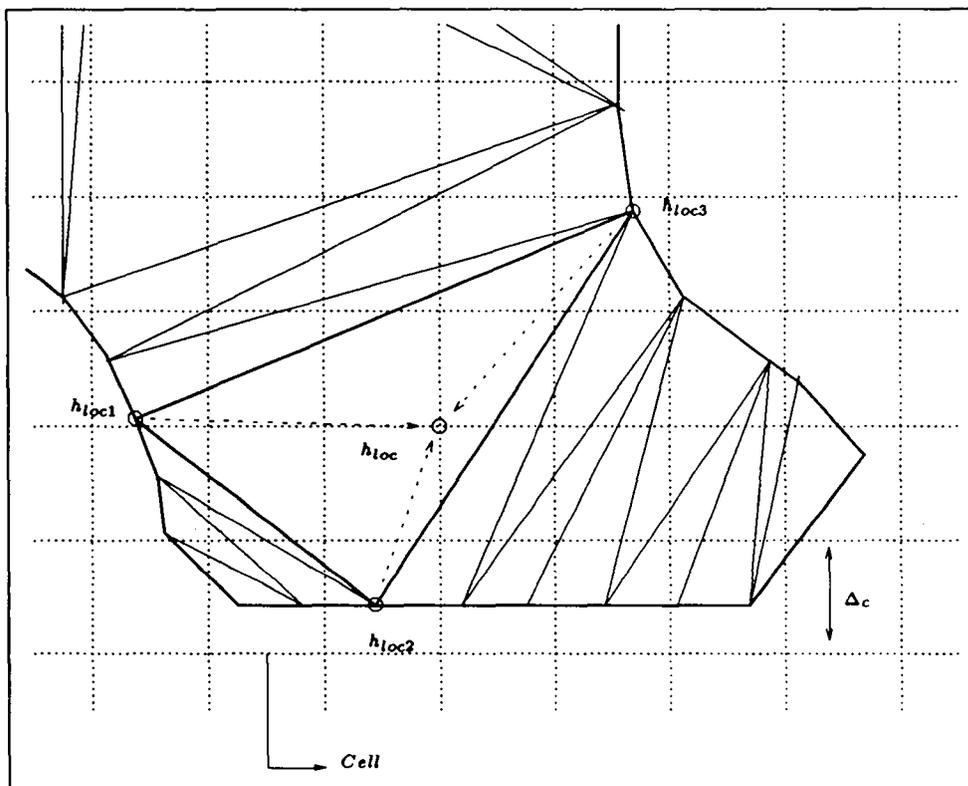


FIG. 5 - Espace de contrôle (construit à partir du maillage "boite").

L'utilisation de l'espace de contrôle se fait de la manière suivante (voir la figure 6):

- pour chaque point examiné, cf 2.3, on trouve la case de l'espace le contenant;
- on calcule h_{loc} au point examiné par interpolation $Q1$ à partir des valeurs des h aux 4 sommets de la case trouvée ci-dessus.

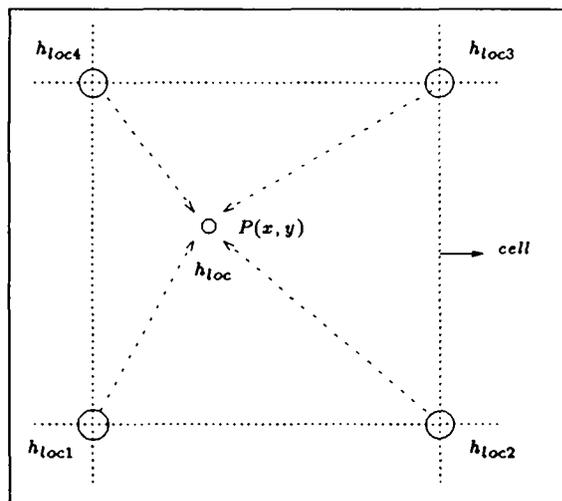


FIG. 6 - Espace de contrôle (utilisation).

Construire, par une méthode de Voronoï, un maillage du domaine ne s'appuyant que sur les points du contour peut surprendre et paraître compliqué. Néanmoins, cette solution a été retenue pour les raisons suivantes:

- la création d'un tel maillage est très rapide,
- c'est le seul maillage que l'on soit capable de créer avec les données dont on dispose à ce stade et ce, quelque soit la géométrie du domaine,
- le maillage ainsi créé permet, par une approximation cohérente ($P1$ de fait) des tailles des segments du contour (seules tailles connues), de calculer une taille "raisonnable" en tout point du domaine ce qui est justement le but à atteindre.

Pour l'espace de voisinage, on associe à chaque case une clé permettant de parcourir la liste des points et arêtes situés dans la case traitée. En pratique, ces informations sont stockées sous la forme d'un arbre binaire (cf. [6]) qui permet des recherches très rapides.

2.6 Schéma général

L'ensemble de la discussion précédente conduit à construire pour le maillage le schéma suivant:

- lecture des données (contour discrétisé du domaine et éventuels points internes),
- création du front initial,
- création de l'espace de voisinage,

- création de l'espace de contrôle à partir du maillage de Voronoï d'une boîte englobant le domaine en s'appuyant sur les seuls points connus,
- méthode frontale proprement dite : création de points, formation d'éléments, mise à jour du front et de l'espace de voisinage,
- régularisation éventuelle du maillage obtenu.

Ce mailleur est le mailleur frontal de la bibliothèque *Modulef* (cf. [4]). L'étape de régularisation comprend, en pratique, deux phases. La première phase, inconditionnelle, consiste à supprimer tout triangle dont deux arêtes sont frontières en inversant la diagonale du quadrangle formé par le triangle considéré et son voisin (dans le cas où l'opération est possible, i.e. le quadrangle est convexe). La seconde phase consiste à optimiser la qualité des triangles en bougeant les points libres (par une technique de barycentrage pondéré), cette phase n'est effectuée que si le maillage obtenu par la méthode présente des triangles de qualité plus mauvaise qu'un seuil donné.

3 Méthode frontale gouvernée par une carte de tailles

3.1 Principe général

On suppose, dans ce cas, que l'on a effectué un calcul de la solution du problème physique considéré. Le premier calcul est fait avec le maillage "naturel" généré par la méthode décrite dans la section 2. De la solution on tire un champ scalaire définissant la taille souhaitable en chaque sommet de ce premier maillage. *On ne s'intéresse pas ici à la manière d'obtenir ce champ* mais on suppose uniquement que l'on dispose d'un tel champ. On note par M_{cont} et CH_{cont} le maillage actuel, le maillage "naturel", et son champ de contrôle. Le problème est maintenant de recréer un maillage du domaine respectant ce champ. Ce nouveau maillage étant connu, on peut itérer le processus en utilisant comme maillage de contrôle non plus le maillage "naturel", mais ce maillage et comme champ de contrôle, le champ obtenu à partir de l'analyse de la solution calculée sur ce maillage.

La méthode proposée est extrêmement simple. On utilise la méthode décrite dans la section 2 en changeant l'espace de contrôle.

3.2 Espace de contrôle

La construction de l'espace de contrôle se fait de la manière suivante (voir les figures 7 à 9):

- on génère M_{boite} comme dans le cas classique (sans contrôle);
- on en déduit M_{ext} (figure 8), le maillage obtenu en éliminant de M_{boite} les triangles internes au domaine;
- on recolle M_{ext} et M_{cont} (figure 7) pour former M_{CONT} (figure 9);
- on recolle, en parallèle, CH_{ext} et CH_{cont} , le champ CH_{cont} est connu tandis que le champ CH_{ext} est initialisé à 0., pour obtenir CH_{CONT} , le champ associé au maillage M_{CONT} ;
- on définit la grille de l'espace de contrôle comme le quadrilatère décrit dans le cas classique. Pour chaque sommet, Q , de chaque case, on cherche, dans le maillage M_{CONT} (maillage d'un domaine convexe), un triangle le contenant et on calcule par interpolation $P1$, la valeur h_{loc} au point Q à partir des h_{loc} des 3 sommets du triangle trouvé (le champ utilisé est CH_{CONT}).

La figure 7 montre le maillage, M_{cont} , créé par la méthode classique. La méthode est alors gouvernée uniquement par la donnée du contour du domaine. La figure 8 montre M_{ext} le maillage compris entre le quadrilatère englobant et le domaine à traiter. Dans le maillage M_{cont} , la taille moyenne autour des sommets, le h_{loc} , est de l'ordre de 11. Afin de tester la méthode d'adaptation, on construit alors un champ de contrôle, CH_{cont} , constant de valeur 7. La figure 9 montre M_{CONT} , le maillage de contrôle construit en recollant M_{cont} et M_{ext} , auquel est associé le champ de contrôle construit en recollant CH_{cont} et CH_{ext} comme décrit ci-dessus. La dernière figure, i.e. la figure 10, montre le maillage obtenu avec ce contrôle. Le maillage initial compte 500 triangles tandis que le maillage contrôlé en compte 1273. Il semble donc que le résultat obtenu correspond au contrôle fourni comme le montre le rapport entre les deux nombres d'éléments et le carré du rapport entre les h_{loc} .

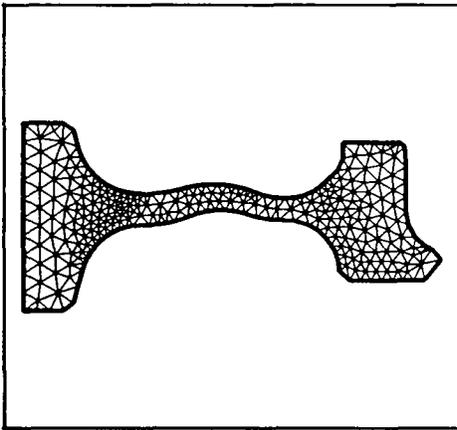


FIG. 7 - Maillage M_{cont} .

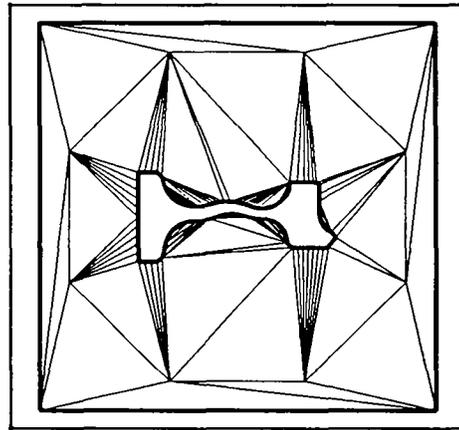


FIG. 8 - Maillage M_{ext} .

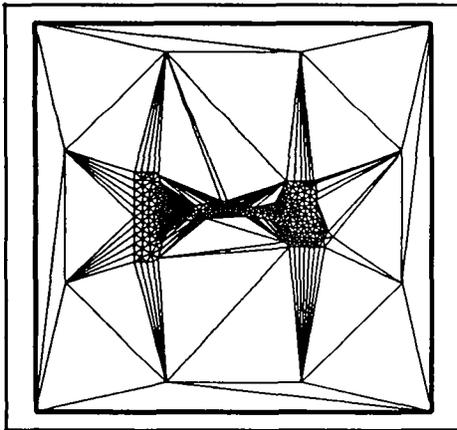


FIG. 9 - Maillage M_{CONT} .

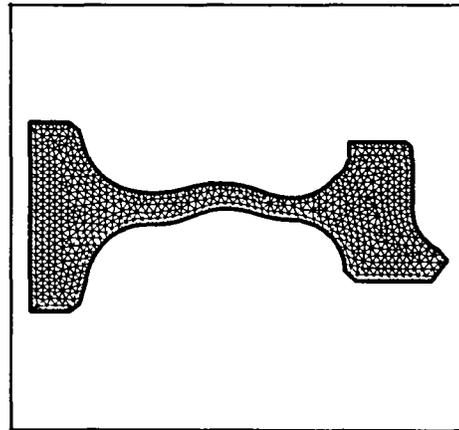


FIG. 10 - Maillage final.

3.3 Remaillage de la frontière du domaine

La donnée du maillage consiste, rappelons le, en une discrétisation du contour du domaine et des éventuels points internes spécifiés. Il est alors fréquent que la discrétisation de la frontière ne soit pas en accord avec la carte de tailles donnée via le champ CH_{CONT} . On est alors amené à remailler le contour de manière à générer une nouvelle discrétisation conforme à ce champ.

La discrétisation initiale du contour est formée, en suivant les normes de [4], de manière descendante. Elle consiste en:

- un ensemble de composantes;
- chaque composante est constituée d'un ensemble de lignes caractéristiques;
- chaque ligne caractéristique est définie comme l'ensemble des segments construits à partir des informations suivantes:
 - deux points caractéristiques, A et B : les extrémités de la ligne considérée,
 - un brisé formé de un ou plusieurs segments dont les extrémités sont:
 - $A_0 = A$, le premier point de la ligne,
 - une suite $\{A_i\}$, ($i = 1, n - 1$) de points générés automatiquement entre A et B en utilisant la définition géométrique de la ligne (ligne droite, cercle, (autre) courbe, spline, ...),
 - $A_n = B$, le dernier point de la ligne.

A partir de cette description et en utilisant la carte de tailles maintenant connue, on va recréer la nouvelle discrétisation.

On spécifie en premier lieu les points fixes, c'est-à-dire les points, parmi les précédents, qui devront être présents dans la nouvelle discrétisation: il s'agit essentiellement des extrémités des lignes initiales. A partir de là, on procède de la manière suivante:

- on détermine une ligne en repérant un couple (A, B) ;
- on trouve la suite des $\{A_i\}$ compris entre A et B ;
- on forme une courbe C , approchant la ligne AB , en échantillonnant cette ligne en $p + 2$ échantillons construits par approximation cubique. Prenant 4 points de AB "consécutifs" (voir ci-dessous), on définit la portion de courbe $C(t)$ comme:

$$C(t) = [T][\mathcal{M}][\mathcal{P}_i]$$

avec:

$$[T] = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]$$

$$[\mathcal{P}] = {}^t [P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3]$$

et

$$[\mathcal{M}] = 0.5 \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où:

- P_0 est le point situé avant A sur le contour initial,
- P_1 est le point A_0 , alias A ,
- P_2 est le point A_1 ,
- P_3 est le point A_2 ,

qui définit l'échantillonnage de la portion de ligne comprise entre A_0 et A_1 , puis, en décalant de 1:

- P_0 devient le point A_0 ,
- P_1 devient le point A_1 ,
- P_2 devient le point A_2 ,
- P_3 devient le point A_3 ,

qui définit l'échantillonnage de la portion de la ligne comprise entre A_1 et A_2 ; on poursuit le décalage de 1 et la définition de la portion de ligne associée jusqu'à ce que:

- P_0 soit le point A_{n-2} ,
- P_1 soit le point A_{n-1} ,
- P_2 soit le point A_n , alias B ,
- P_3 soit le point situé après B sur le contour initial,

qui permet de définir l'échantillonnage de la portion de ligne comprise entre A_{n-1} et A_n .

Remarque: Si P_1 est un point anguleux, alors on construit P_0 comme le symétrique du point P_2 par rapport au point P_1 . Il en va de même si P_2 est un point anguleux. Un point est dit anguleux si l'angle formé entre le point précédant, le point considéré et son suivant est plus grand qu'un seuil donné.

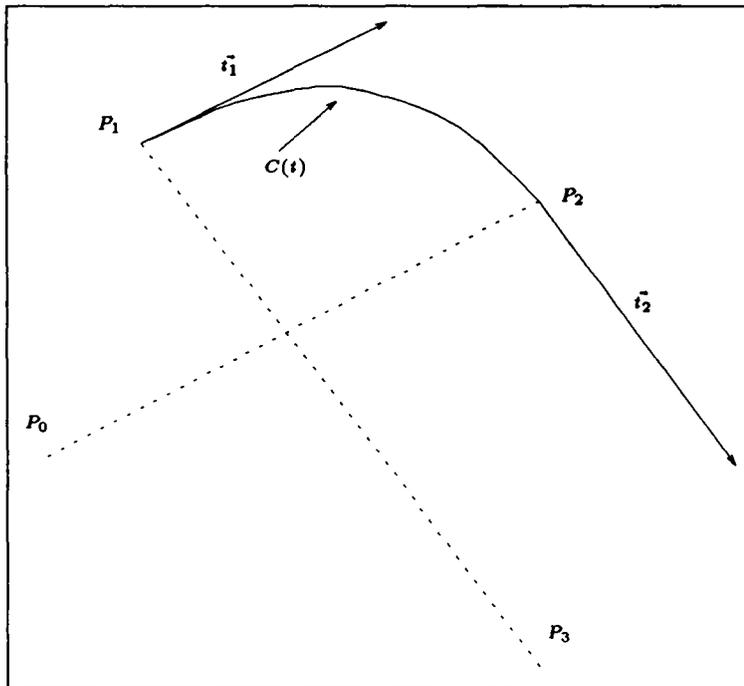


FIG. 11 - Approximation cubique (situation normale).

Chaque portion de courbe passe par les points P_1 et P_2 en se servant des points P_0 et P_3 pour définir les tangentes en P_1 et P_2 . La tangente en P_1 est définie comme $\vec{t}_1 = 0.5\vec{P}_2\vec{P}_0$ tandis que la tangente en P_2 est $\vec{t}_2 = 0.5\vec{P}_3\vec{P}_1$. $C(t)$ est de classe C^1 (voir les figures 11 et 12). En résultat, on obtient un échantillonnage de la ligne AB en construisant C , son

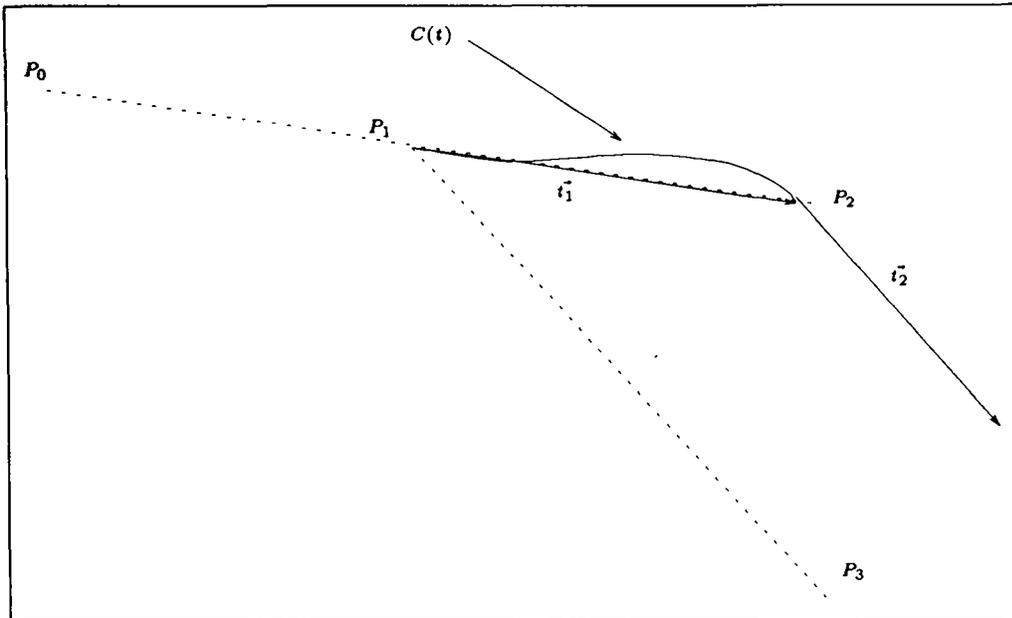


FIG. 12 - Approximation cubique (point anguleux).

approximation, comme la mise bout à bout des différents $C(t)$. La courbe C passe par les points $\{A_i\}$, $(i = 0, n)$ et est de classe C^1 par construction.

On utilise alors cet échantillonnage pour former la nouvelle discrétisation du contour. Considérons une ligne AB et notons $[E_k, E_{k+1}]$ un segment de son échantillonnage (on a $E_1 = A$ et $E_{p+1} = B$):

On pose $k = 1$, $debut = 1$, $fin = p$, $new = 0$ et on initialise P , le pivot de recherche, par A . L'algorithme de remaillage est alors le suivant:

- on pose $i = 0$ et on crée comme point initial le point $M_i = A$,
- a): pour $k = debut, fin$
 - on pose $d_1 = 0$ si $new \neq k$, sinon on calcule $d_1 = d(P, E_k)$ la distance entre P et E_k ,
 - on calcule $d_2 = d(P, E_{k+1})$ la distance entre P et E_{k+1} ,
 - si $h(P)$ est compris entre d_1 et d_2 , on calcule:

$$\alpha = \frac{h(P) - d_1}{d_2 - d_1}$$

si $new \neq k$ ou

$$\alpha = \frac{d(P, E_k) + h(P)}{d(E_k, E_{k+1})}$$

sinon,
 - on fait $i = i + 1$ et on construit le point $M_i = E_k - \alpha(E_k - E_{k+1})$,
 - on affecte $new = k$, $debut = k$, on remplace le pivot de recherche P par M_i puis on va en a),

- sinon on fait $k = k + 1$ et on continue la boucle,
- on fait $i = i + 1$ et on crée comme point final le point $M_i = B$.

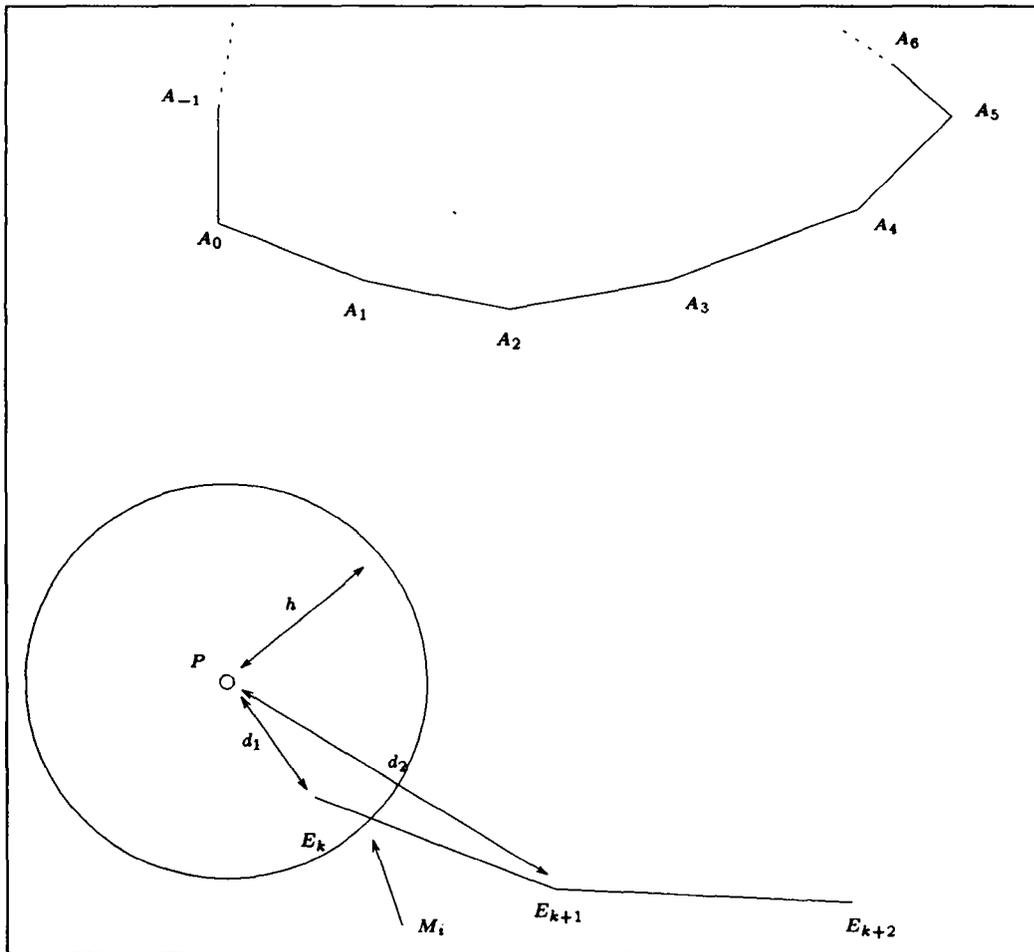


FIG. 13 - Remaillage d'une ligne.

Notons que cet algorithme suppose implicitement une régularité raisonnable du champ des h . En particulier il est bon de:

- supprimer le point situé immédiatement avant B dans le cas où il est trop proche de B ,
- s'assurer qu'en passant d'un point au suivant on n'a pas traversé une zone où le h passe par des valeurs très inférieures qui seraient ainsi violées,
- rééquilibrer la distribution de points créés.

La sortie de cet algorithme est l'ensemble des points M_i qui forme la nouvelle discrétisation de la ligne AB . Appliqué à chaque ligne de chaque composante du contour initial, il permet de former le remaillage cherché.

3.4 Espace de voisinage

L'espace de voisinage est construit comme dans le cas classique en prenant en compte les points créés lors du remaillage du contour (et non les points du contour initialement donné) et

les éventuels points internes donnés.

3.5 Autres étapes de la méthodes

Les autres étapes de la méthode sont identiques à celles du cas classique.

3.6 Schéma général

L'ensemble de la discussion précédente conduit à construire pour le mailleur gouverné le schéma suivant:

- lecture des données (contour discrétisé du domaine et éventuels points internes),
- lecture du maillage de contrôle et du champ de contrôle associé,
- création de l'espace de contrôle à partir du maillage de contrôle et de son complémentaire par rapport à la boîte englobant le domaine,
- remaillage du contour,
- création du front initial à partir de ce remaillage et des éventuels points internes donnés,
- création de l'espace de voisinage,
- méthode frontale proprement dite: création de points, formation d'éléments, mise à jour du front et de l'espace de voisinage,
- régularisation éventuelle du maillage obtenu.

Ce mailleur est construit à partir du mailleur frontal de la bibliothèque Modulef (cf. [4]) décrit dans la section 2 et présenté en détails dans [6]. Il utilise comme données les données habituelles plus un maillage de contrôle (une structure de données *NOPO*, la structure de maillage de la bibliothèque Modulef) et un champ de contrôle contenant en chaque sommet du maillage de contrôle la taille souhaitée (ce champ est une structure de données *B*, la structure ad-hoc de cette bibliothèque).

4 Exemples

Pour valider la méthode, plusieurs types de domaines ont été traités. L'exemple de la figure 10 montre le cas d'un domaine non convexe de frontière à une seule composante. Le cas de domaine de frontière à plusieurs composantes est montré sur les figures 18 et 20. Les autres exemples concernent un domaine carré avec plusieurs types de contrôle.

La figure 14 montre le maillage obtenu en utilisant la méthode dans sa version classique. Les figures suivantes montrent les maillages obtenus pour différentes sortes de contrôle. Le premier cas, figure 15, correspond à une carte de h_{loc} radiale. La taille est fonction de la distance au centre du domaine et diminue quand on s'approche de ce centre:

$$h(x, y) = 0.25\sqrt{(x - 5)^2 + (y - 5)^2} + 0.1$$

(le domaine étant $[0, 10] \times [0, 10]$).

Pour le second cas, figure 16, le contrôle impose de tasser les éléments sur la diagonale du carré:

$$h(x, y) = 0.1 \times |x - y| + 0.1$$

Le dernier cas, figure 17, correspond à un contrôle le long d'une direction (l'axe des x) symétrique par rapport à la valeur $x = 5$, plus on se rapproche de la droite $x = 5$. et plus la taille demandée est grande:

$$h(x, y) = 0.2 \times (5 - |x - 5|) + 0.1$$

Il semble que ces trois cas test traduisent bien le contrôle donné.

La figure 18 montre le maillage obtenu en utilisant la méthode dans sa version classique. La figure suivante montre le maillage obtenu avec une carte de h_{loc} constante.

La figure 20 montre le maillage obtenu en utilisant la méthode dans sa version classique. La figure suivante montre le maillage obtenu avec une carte de h_{loc} imposant de tasser les éléments sur la diagonale du carré correspondant à l'enveloppe convexe du domaine (ce contrôle est du même type que celui de l'exemple de la figure 16).

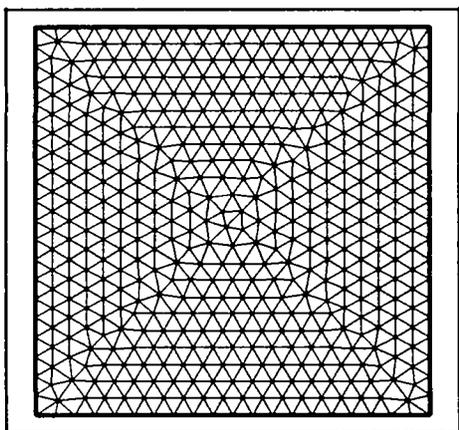


FIG. 14 - *Maillage initial.*

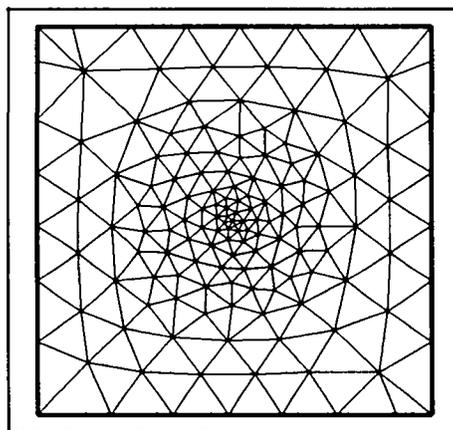


FIG. 15 - *Maillage contrôlé (1).*

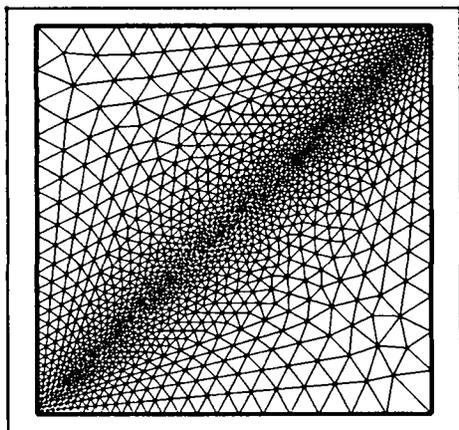


FIG. 16 - *Maillage contrôlé (2).*

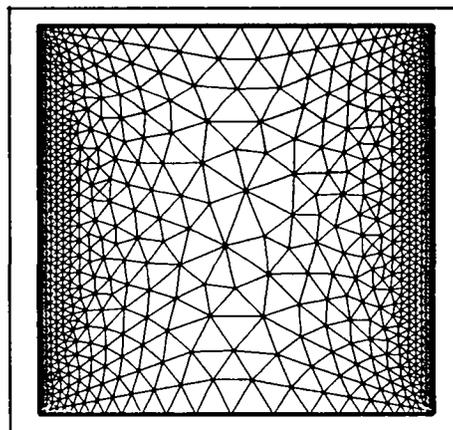


FIG. 17 - *Maillage contrôlé (3).*

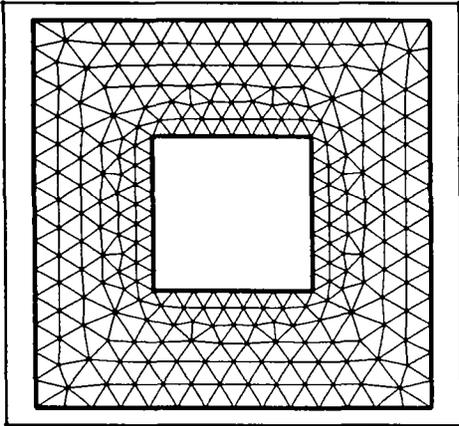


FIG. 18 - *Maillage initial.*

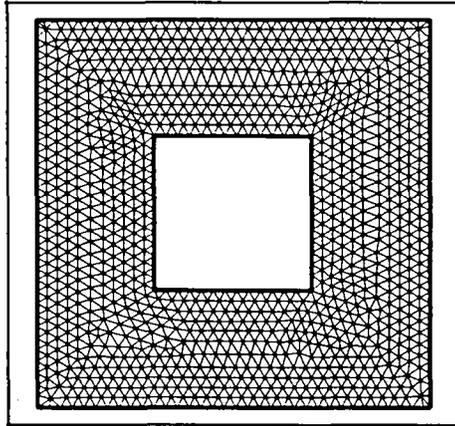


FIG. 19 - *Maillage contrôlé (4).*

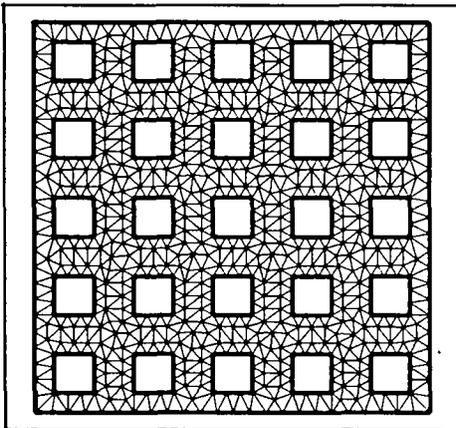


FIG. 20 - *Maillage initial.*

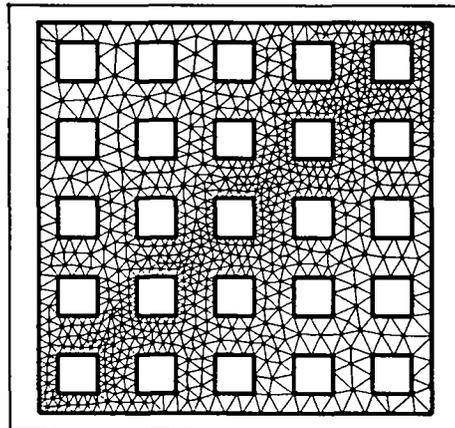


FIG. 21 - *Maillage contrôlé (5).*

Les statistiques relatives à ces exemples sont donnés dans les tableaux suivants avec:

- np le nombre de sommets,
- ne le nombre de triangles,
- Q la qualité du maillage,
- nq le nombre de triangles de qualité plus mauvaise que 1.5,
- t le temps CPU nécessaire (en secondes sur une station HP 425).

La qualité d'un maillage est mesurée comme la qualité du plus mauvais triangle de ce maillage. La qualité d'un triangle est calculée par:

$$Q = \alpha \frac{h}{\rho}$$

avec h le diamètre du triangle (la longueur de son plus grand coté), ρ le rayon de son cercle inscrit et α un coefficient de normalisation tel que la qualité d'un triangle équilatéral soit 1.

-	np	ne	Q	nq	t
Maillage initial	492	902	1.64	4	4.7
Controle 1	148	266	1.92	10	4.4
Controle 2	1542	2984	1.71	18	22.6
Controle 3	1258	2266	1.81	15	18.5

Tableau 1: *Cas numéros 1, 2 et 3.*

-	np	ne	Q	nq	t
Maillage initial	284	480	1.65	4	4.0
Controle	1141	2094	1.81	5	12.2

Tableau 2: *Cas numéro 4.*

-	np	ne	Q	nq	t
Maillage initial	788	1228	1.79	52	8.2
Controle	981	1592	1.94	26	17.4

Tableau 3: *Cas numéro 5.*

5 Conclusion

La méthode proposée dans ce papier semble réagir de manière appropriée vis-à-vis d'une carte de h_{loc} spécifiée par l'utilisateur. Les modifications à apporter au mailleur classique sont peu nombreuses et concernent essentiellement la construction de l'espace de contrôle et le remaillage de la frontière du domaine.

Une suite naturelle de ce travail consiste à étendre la méthode au cas directionnel ou anisotrope lorsque l'on cherche à obtenir des éléments étirés dans une direction, ceci nécessite de changer de métrique, cf. [7], pour créer comme point optimal (cf. section 2) non plus le point tel que le triangle formé soit équilatéral mais tel que ce triangle soit optimal pour la métrique associée.

Un autre point à développer est la mise en place de la méthode de contrôle dans le cas d'un mailleur automatique de type Delaunay-Voronoi, en dimension 2, cf. [3] pour la version "naturelle" d'un tel mailleur et en dimension 3, cf. [5] pour la version "naturelle" dans ce cas.

Enfin, à partir du moment où l'on dispose d'un mailleur automatique contrôlable, il faut l'appliquer sur différents problèmes physiques pour lesquels on donne des champs de contrôle non plus sous forme de fonction analytique (comme cela a été fait ici pour montrer la validité de la méthode de maillage) mais comme le résultat de l'analyse des résultats physiques obtenus. La champ de contrôle est alors la traduction en termes de taille de l'évolution de la solution via un estimateur approprié.

Références

- [1] P.G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problem*, North Holland, 1978.
- [2] P.L. GEORGE, Génération automatique de maillage. Applications aux méthodes d'éléments finis, Masson, *RMA* n° 16, Paris, 1991. Also as Automatic mesh generation. Applications to finite element methods, Wiley, 1991.
- [3] P.L. GEORGE, Génération de maillages par une méthode de type Voronoï, *RR INRIA* n° 1398, 1991.
- [4] P.L. GEORGE, Construction et modification de maillages, *Guide Modulef* n° 3, 1993.
- [5] P.L. GEORGE, Génération de maillages par une méthode de type Voronoï, partie 2: le cas tridimensionnel *RR INRIA* n° 1664, 1992.
- [6] P.L. GEORGE, E. SEVENO, Génération de maillages par une méthode de type frontal, *RR INRIA* n° 1725, 1992.
- [7] M.G. VALLET, Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs, Thèse, Université Paris 6, 1992.



Unité de Recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Lorraine Technopôle de Nancy-Brabois - Campus Scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 VILLERS LES NANCY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rennes IRISA, Campus Universitaire de Beaulieu 35042 RENNES Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Sophia Antipolis 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)

EDITEUR
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399



★ R R . 1 9 1 7 ★