



HAL
open science

Generation de maillages quadrangulaires en utilisant une methode de type frontal

J.F. Bougel, L. Francez, Paul-Louis George

► **To cite this version:**

J.F. Bougel, L. Francez, Paul-Louis George. Generation de maillages quadrangulaires en utilisant une methode de type frontal. [Rapport de recherche] RR-2047, INRIA. 1993. inria-00074625

HAL Id: inria-00074625

<https://inria.hal.science/inria-00074625>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Génération de maillages
quadrangulaires en utilisant
une méthode de type frontal*

Jean-François BOUGEL
Laurent FRANCEZ
Paul-Louis GEORGE

N° 2047
Septembre 1993

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,
modélisation et
logiciels numériques

*R*apport
de recherche

1993

Génération de maillages quadrangulaires en utilisant une méthode de type frontal

Jean-François Bougel, Laurent Francez, Paul-Louis George

INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France.
Simulog, 1 rue James Joule, 78286 Guyancourt Cedex, France.
Université de Nancy I, Faculté des Sciences, BP 239,
54506 Vandoeuvre-Les-Nancy Cedex, France.

RÉSUMÉ. *Toute simulation par la Méthode des Eléments Finis de problèmes physiques modélisés en termes d'équations aux dérivées partielles nécessite dans une première phase la construction d'un maillage du domaine de calcul. Cet article se propose de présenter une méthode permettant la génération automatique d'un maillage composé essentiellement de quadrangles, méthode applicable quelle que soit la nature du domaine considéré.*

MOTS-CLÉS. *Génération automatique de maillages - Quadrangles - Eléments Finis*

Generation of quadrilateral meshes for finite element simulation

ABSTRACT. *This paper describes an automatic approach to be used for the purpose of generation of quadrilateral meshes almost everywhere whatever is the domain under consideration, this task being related with Finite Element computation of physical problems discretized in terms of P.D.E. .*

KEY-WORDS. *Automatic mesh generation - Quadrilateral elements - Finite Element*

1 Introduction

On se propose de décrire ici une méthode permettant d'obtenir automatiquement un maillage composé essentiellement de quadrangles pour tout domaine plan décrit par la donnée sous forme discrète (une liste de segments) de son contour. Il existe a priori trois manières d'atteindre ce résultat qui reposent sur :

- la construction directe de quadrangles,
- la construction de deux triangles tels que regroupés immédiatement on forme un quadrangle,
- le post-traitement d'un maillage composé exclusivement de triangles afin de former les quadrangles par regroupement, par exemple deux à deux, des triangles.

La première méthode revient à développer entièrement un nouveau mailleur, la deuxième méthode peut se concevoir, par exemple, comme l'utilisation d'une méthode de génération automatique de triangles modifiée "au vol" tandis que la troisième méthode permet de traiter tout maillage triangulaire, quelle que soit la méthode ayant permis de le créer en concentrant son attention uniquement sur l'aspect regroupement des triangles. Le choix retenu ici correspond à ce dernier cas. Les deux premiers choix sont possibles mais écartés car ils nécessitent l'écriture d'un nouveau mailleur et sa validation complète.

Le but visé est de construire un maillage composé de quadrangles. Il est clair que cet objectif n'est pas atteignable si le nombre de points du contour du domaine est impair, dans ce cas il restera, dans l'absolu, un triangle. Dans le cas inverse, c'est-à-dire si le nombre de points du contour est pair, on peut, toujours dans l'absolu, ne générer aucun triangle. Dans la pratique, et en particulier pour l'application éléments finis envisagée, il est possible que quoique le nombre de points du contour soit pair, il reste quelques triangles car on s'interdira, bien sûr, de tolérer la formation de quadrangles ayant deux cotés consécutifs alignés ou presque alignés ainsi que celle de quadrangles non convexes dans le cas où ce défaut est lié au contour. Ces considérations, rarement mentionnées dans la littérature, justifient à l'avance le fait que, indépendamment de la parité du nombre de points du contour, les maillages issus de la méthode proposée dans ce papier contiendront zéro, un ou plusieurs triangles.

Le problème que l'on veut résoudre est donc le suivant (on se place délibérément en dimension 2) : *Trouver un maillage essentiellement quadrangulaire, acceptable du point de vue éléments finis, d'un domaine quelconque soit à partir de la donnée de son contour sous la forme d'un ensemble de segments (le domaine peut avoir des points internes spécifiés à l'avance et sa frontière peut comporter plusieurs composantes connexes), soit à partir d'un maillage triangulaire connu.*

Le papier décrit en détails la méthode de création dans le cas où on part de la donnée du contour discrétisé. Les grandes lignes de la méthode consistent alors à créer un maillage triangulaire en utilisant une méthode frontale standard (i.e. construisant des triangles), cf. [6] par exemple, dont le schéma général est indiqué dans la section 2, puis à empiler de manière judicieuse ces triangles de manière à permettre leur regroupement afin de former les quadrangles (section 3). On introduit ensuite une série de processus permettant de modifier localement des ensembles d'éléments afin d'améliorer la qualité du maillage

(section 4). On propose alors, à la section 5, le schéma général de la méthode puis on indique rapidement (section 6) la manière de procéder dans le cas où l'on part d'un maillage existant. Des exemples sont donnés à la section 7, la section 8 est une annexe technique qui précise quelques aspects plus directement pratiques puis, section 9, une conclusion indique en particulier les extensions possibles de la méthode.

2 Rappels sur les méthodes frontales

Dans cette section, nous rappelons brièvement les grandes lignes d'une méthode frontale traditionnelle (c'est-à-dire, générant des triangles). Adapté aux géométries à priori quelconques, ce type de mailleurs a été étudié par [3], [2], [9], [10], [7] (et bien d'autres). Il va permettre de construire un recouvrement du domaine à partir de son contour. Les éléments générés sont des triangles (en dimension 2). On utilise comme donnée une approximation polygonale du contour, sous la forme d'une liste de segments. L'intérieur du domaine, donc la zone à mailler, est déterminé grâce à l'orientation du contour servant de donnée. Brièvement, le processus de création des éléments est le suivant :

- Initialisation du front;
- Analyse du front :
 - Détermination d'une zone de départ;
 - Analyse de cette zone :
 - * Création de point(s) interne(s) et d'élément(s) interne(s);
 - * Mise à jour du front;
- Tant que le front n'est pas vide, aller à (Analyse du front).

Lors de l'implémentation d'une méthode frontale, on est conduit à se poser, entre autres, les deux questions suivantes :

- Comment connaître le contexte géométrique d'un élément, c'est-à-dire connaître le voisinage "utile" de tout triangle du maillage en cours d'évolution ?
- Quelle taille doit avoir un élément ?

Parmi les solutions possibles à ces problèmes, on a choisi, cf. [6], d'introduire

- Un espace de voisinage pour un accès direct aux éléments voisins d'un élément donné. Pour chaque point (resp. segment) du front, la recherche des points (resp. segments) du front voisins s'effectue ainsi dans une zone limitée du domaine et non pas dans le domaine tout entier.
- Un espace de contrôle permettant d'orienter la création des points internes et des éléments en résultant. Il devra fournir, en chaque point du domaine, la taille d'un élément ou la longueur de ses arêtes dans le cas isotrope, ou éventuellement indiquer qu'il convient de privilégier une direction dans le cas d'un maillage anisotrope.

Ces considérations, nous amènent à proposer le schéma général du mailleur frontal "triangle" suivant :

- Création d'un espace de contrôle.
- Création d'un espace de voisinage.
- Initialisation du maillage et du front.
- Tant que le front n'est pas vide :
 - Choix d'un segment $[AB]$ du front.
 - Construction d'un sommet idéal C à partir du segment $[AB]$.
 - Calcul d'un rayon de recherche initial et d'un angle minimal initial permettant d'une part de limiter la recherche des voisins et d'autre part, d'éviter la création de triangles trop plats.
 - Répéter :
 - * Recherche des points candidats autour de C .
 - * Tri des candidats dans l'ordre des distances croissantes à C (C est rangé en dernier).
 - * Détermination parmi les candidats du point P vérifiant :
 - le triangle ABP est orienté positivement;
 - le triangle ABP ne contient aucun point du front;
 - les segments $[AP]$ et $[BP]$ ne coupent aucun segment du front;
 - les angles formés par les segments $[AP]$ et $[BP]$ avec les segments du front sont assez grands.
 - * Si aucun point ne convient : augmenter le rayon de recherche et diminuer l'angle minimal.
 - Jusqu'à l'obtention d'un point convenable.
 - Mise à jour du maillage.
 - Mise à jour du front.
- Fin tant que.
- Régularisation éventuelle.

La première phase de la méthode proposée revient à appliquer ce schéma pour obtenir un maillage composé exclusivement de triangles. L'étape suivante consiste alors à traiter ce maillage afin de former les quadrangles.

3 Méthode de création des quadrangles

Nous allons étudier à présent une technique qui permet de générer des quadrangles par regroupements des triangles du maillage obtenu ci-dessus. Typiquement, l'algorithme proposé, qui s'inspire d'une routine de Emc2 (cf. [8]), consiste à se déplacer, en suivant certaines règles, sur le maillage initial. Nous utiliserons une pile comme structure de données principale pour mémoriser l'ordre de parcours des triangles.

L'idée est de construire une pile comme indiquée ci-dessous, c'est-à-dire d'empiler les éléments selon certaines règles tant que cela est possible et, en cas contraire, de dépiler des éléments, opération conduisant, dans certains cas, à la formation de quadrangles.

Le triangle de départ est choisi parmi ceux ayant deux arêtes sur la frontière et, le cas échéant, parmi ceux ayant une seule arête sur la frontière. Ce triangle sera le premier de la pile.

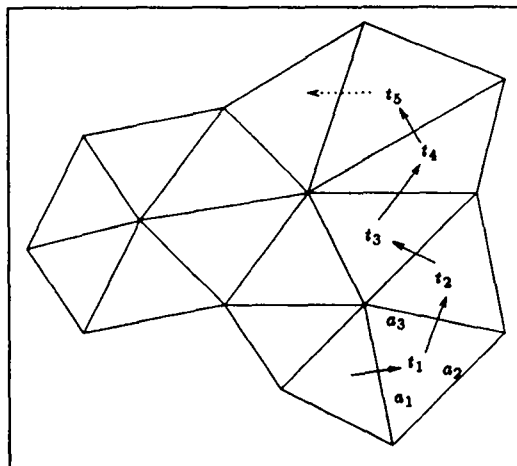


Figure 1: *Constitution de la pile.*

La figure 1 montre quelques étapes de la constitution d'une pile. On peut notamment y voir l'ordre dans lequel un certain nombre de triangles sont empilés : supposons qu'on se soit déplacé jusqu'au triangle t_1 , la dernière arête franchie étant a_1 . Il faut signaler qu'à cette étape, un certain nombre de quadrangles ont déjà pu être générés. Le triangle t_1 est alors placé en sommet de pile. On dira aussi que le triangle t_1 est marqué et on lui affecte pour marque le numéro du triangle qui l'a précédé dans le cheminement. On tente ensuite de franchir l'arête qui suit l'arête a_1 en tournant dans le sens direct; on sera en mesure de le faire si d'une part, elle n'est pas frontière, et si d'autre part, le triangle voisin de t_1 par cette arête n'est pas marqué. Dans la situation de la figure 1, l'arête a_2 ne peut être franchie; on passe donc à l'arête a_3 pour arriver sur le triangle t_2 : on place ce triangle en sommet de pile et sa marque sera le numéro du triangle t_1 . On dira que t_2 est le fils de t_1 .

On empile ainsi successivement les triangles, du moins tant qu'on peut franchir au moins une arête du triangle courant. Dans le cas où aucune des arêtes du triangle courant t_i ne peut être franchie, on compte le nombre de fils du triangle t_i , en retenant uniquement ceux n'ayant pas servi à construire un quadrangle et :

- si le nombre de fils de t_i est nul, on dépile t_i , qui toutefois conserve sa marque, et on poursuit l'algorithme à partir du triangle t_{i-1} , voir la figure 2.
- si le nombre de fils de t_i est égal à 1 et que le triangle est encore actif¹, alors on construit un quadrangle en réunissant le triangle t_i et son fils en vérifiant, dans le

¹Un triangle est dit actif s'il n'a pas déjà servi à construire un quadrangle.

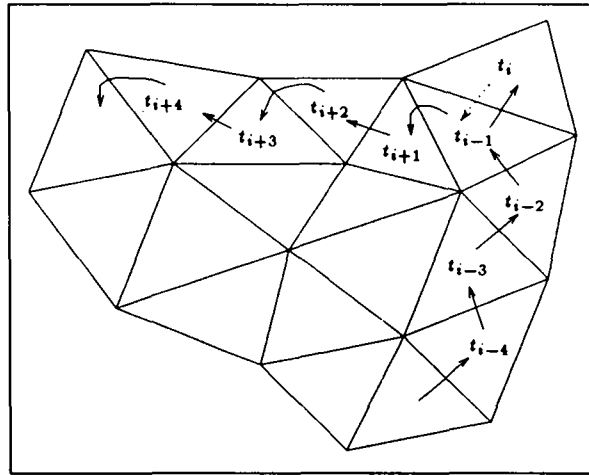


Figure 2: *Dépilage simple.*

cas où trois sommets (ou plus) du quadrangle sont des points de la frontière, que ce quadrangle est convexe. Ensuite, on dépile t_i . Les trois configurations de la figure 3 conduisent à des traitements différents. Dans sa partie gauche, on montre le cas où on construira un quadrangle en regroupant le triangle t_i et son fils t_{i+1} , tandis que les deux autres situations montrent des cas qui conduisent à laisser un triangle : t_{i+1} . Les zones ombrées sur le dessin représentent des triangles déjà marqués, actifs ou non.

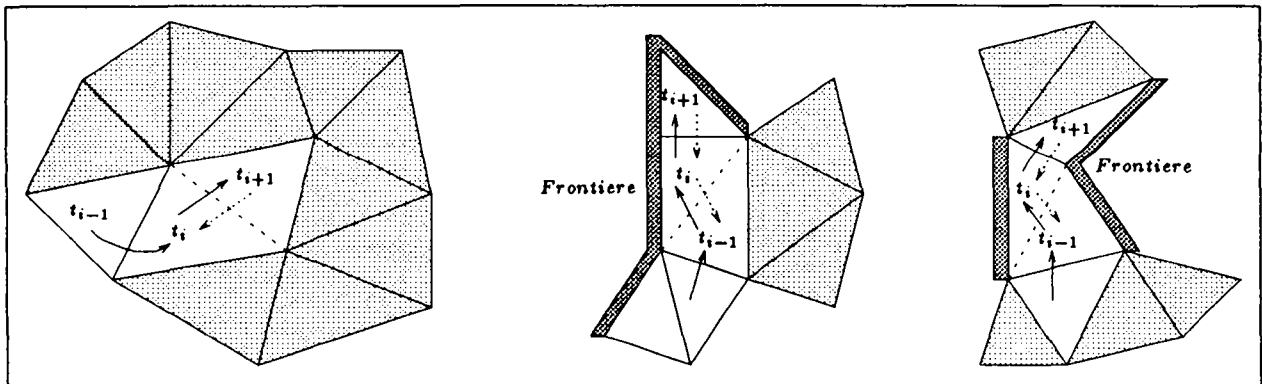


Figure 3: *Dépilage avec formation possible d'un quadrangle.*

- si le nombre de fils de t_i est égal à 2 et que le triangle est encore actif, alors on construit 3 quadrangles à partir du triangle t_i et de ses 3 voisins puis on dépile t_i , voir la figure 4 (les triangles ombrés sont des triangles marqués).

L'algorithme se poursuit ainsi tant que la pile n'est pas vide. Lorsque la pile est vide, le maillage quadrangle est obtenu (quelques triangles pouvant subsister).

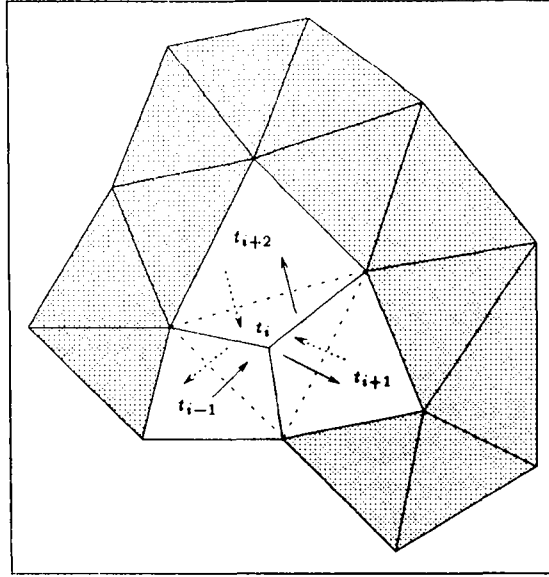


Figure 4: *Dépilage avec formation de trois quadrangles.*

4 Procédures de modification de maillage

Les maillages obtenus par la méthode que nous venons de décrire ne sont pas, la plupart du temps, d'une qualité très satisfaisante. Il s'avère donc nécessaire de développer des outils qui permettent de régulariser ces maillages.

Dans ce qui suit, la boule B_P désigne l'ensemble des éléments dont un noeud P donné est sommet; on note ne_P le nombre de ces éléments. Il est clair, du point de vue de la régularité du maillage, que la valeur optimale de ne est 4, pour les noeuds intérieurs. Dans cette optique, nous présentons maintenant des procédures qui modifient localement le maillage afin de le rendre plus régulier. On trouvera, parmi ces procédures, un certain nombre d'outils présentés dans [12] repris tel quels ou améliorés ainsi que quelques outils développés spécifiquement.

En pratique, la régularité d'un maillage est liée à la qualité de ses éléments. On définit simplement la qualité d'un triangle par la formule $Q = \alpha \frac{h}{\rho}$ où α est un coefficient de normalisation tel que la qualité d'un triangle équilatéral soit 1, h est le diamètre du triangle (i.e. la longueur de son plus grand coté) et ρ est le rayon de son cercle inscrit. Pour un quadrangle, la notion de qualité est plus délicate à définir (plus exactement, on trouve plusieurs manières de l'évaluer). On choisit ici d'affecter comme qualité à un quadrangle la qualité du plus mauvais des 4 triangles construits en tirant l'une ou l'autre des diagonales. Cette solution permet, en particulier, de détecter très simplement les quadrangles croisés ou non convexes.

Avec ces choix, l'optimum de Q est 1. et plus la valeur de Q augmente et plus l'élément est mauvais.

4.1 Elimination de points

Dans ce processus, on parcourt successivement tous les noeuds internes du maillage. Le noeud A sera éliminé s'il est sommet d'exactly deux éléments (deux quadrangles (figure 5 partie gauche), ou un quadrangle et un triangle (même figure partie droite)). Ces derniers sont alors regroupés en un seul.

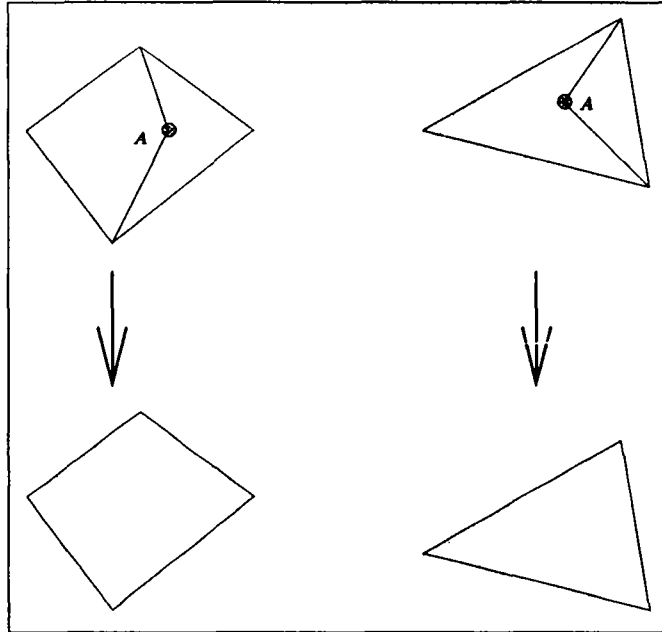


Figure 5: *Suppression d'un point si $ne = 2$.*

On réalisera également l'élimination de points, sommets de trois éléments, si l'un des quadrangles est de mauvaise qualité (i.e. non convexe ou ayant deux arêtes pratiquement alignées). On procédera selon le schéma indiqué sur la figure 6.

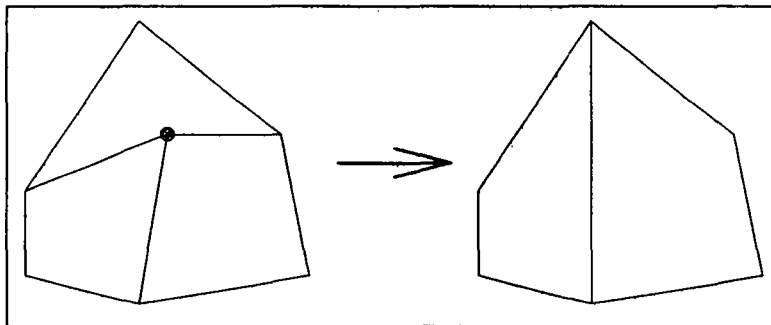


Figure 6: *Suppression d'un point si $ne = 3$ et si un des quadrangles de sa boule associée est de mauvaise qualité.*

4.2 Elimination d'éléments

On examine successivement tous les quadrangles du maillage. L'élément E_i sera supprimé du maillage si deux de ses noeuds, A et B , intérieurs, et extrémités d'une même diagonale, sont sommets d'exactly 3 éléments, i.e. $ne_A = ne_B = 3$. Ces deux noeuds seront alors confondus en un seul, leur barycentre par exemple, voir la figure 7.

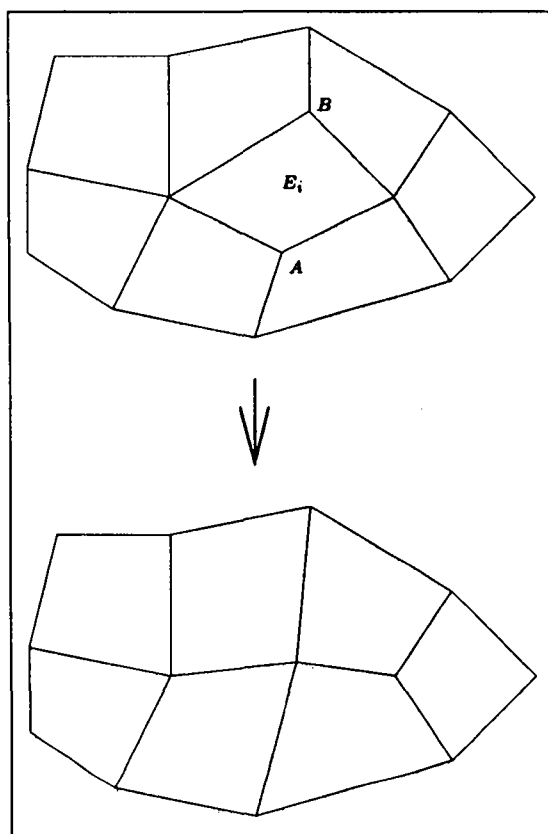


Figure 7: *Elimination d'un élément par identification de deux points.*

4.3 "Swapping" de diagonales

On examine toutes les arêtes dont les extrémités sont des noeuds internes et on considère les deux situations suivantes:

Situation 1: Considérons l'hexagone formé par les noeuds A, F, D, B, E et C , appartenant aux éléments adjacents E_i et E_j , voir la figure 8 qui montre deux exemples d'une telle configuration. Si les extrémités A et B d'une arête vérifient :

$$ne_A + ne_B \geq 9$$

alors, la diagonale $[AB]$ sera remplacée par la diagonale $[CD]$ si :

$$(ne_A + ne_B) - (ne_C + ne_D) \geq 3$$

et

$$(ne_A + ne_B) - (ne_C + ne_D) \geq (ne_A + ne_B) - (ne_E + ne_F)$$

et par la diagonale [EF] si :

$$(ne_A + ne_B) - (ne_E + ne_F) \geq 3$$

et

$$(ne_A + ne_B) - (ne_E + ne_F) \geq (ne_A + ne_B) - (ne_C + ne_D)$$

Situation 2 : Considérons cette fois le pentagone formé par les noeuds A, D, B, E et C, appartenant aux éléments adjacents E_i et E_j (un quadrangle et un triangle, figure 9). Si les extrémités A et B d'une arête vérifient :

$$ne_A + ne_B \geq 9$$

alors, la diagonale [AB] sera remplacée par la diagonale [BC] si :

$$(ne_A + ne_B) - (ne_B + ne_C) \geq 2$$

et

$$(ne_A + ne_B) - (ne_B + ne_C) \geq (ne_A + ne_B) - (ne_A + ne_E)$$

et par la diagonale [AE] si :

$$(ne_A + ne_B) - (ne_A + ne_E) \geq 2$$

et

$$(ne_A + ne_B) - (ne_A + ne_E) \geq (ne_A + ne_B) - (ne_B + ne_C)$$

Remarque: Les modifications locales proposées ci-dessus ne sont effectivement appliquées que si le résultat ne contient pas de quadrangles croisés ou non convexes.

Le tableau 1 indique le nombre d'éléments des boules associées aux points A à F avant et après modification dans le cas de la configuration montrée sur la partie gauche de la figure 8. Le tableau 2 donne ces mêmes indications pour la configuration de la partie droite de cette figure. Le tableau 3 a trait au maillage de la figure 9.

Taille	A	B	C	D	E	F
Maillage initial	5	5	4	4	3	3
Maillage final	4	4	4	4	4	4

Tableau 1 : Taille de la boule associée avant et après modification (figure 8, partie gauche).

Taille	A	B	C	D	E	F
Maillage initial	5	5	4	3	4	4
Maillage final	4	4	5	4	4	4

Tableau 2 : Taille de la boule associée avant et après modification (figure 8, partie droite).

Taille	A	B	C	D	E
Maillage initial	5	5	3	5	4
Maillage final	4	5	4	5	4

Tableau 3 : Taille de la boule associée avant et après modification (figure 9).

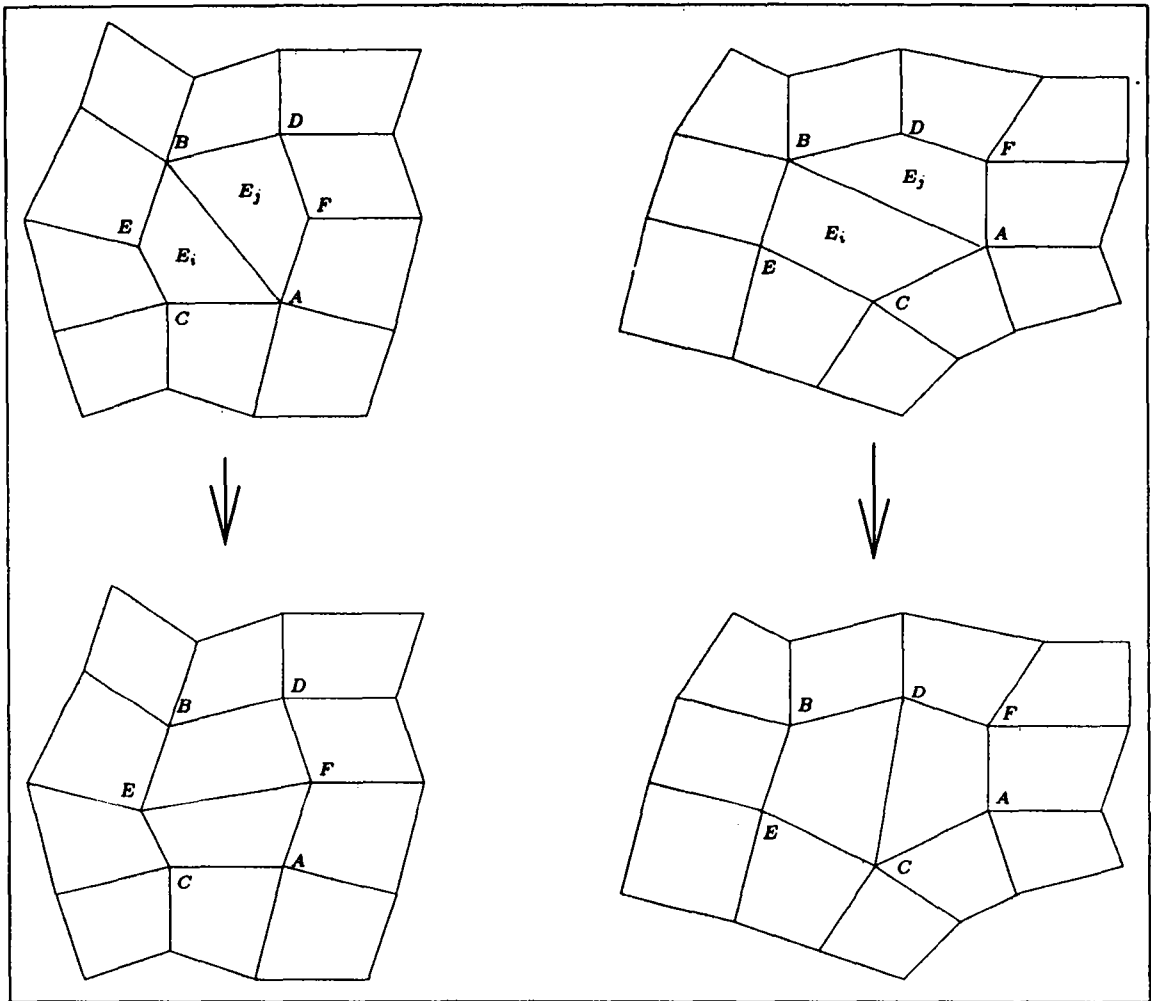


Figure 8: *Swapping pour la situation 1.*

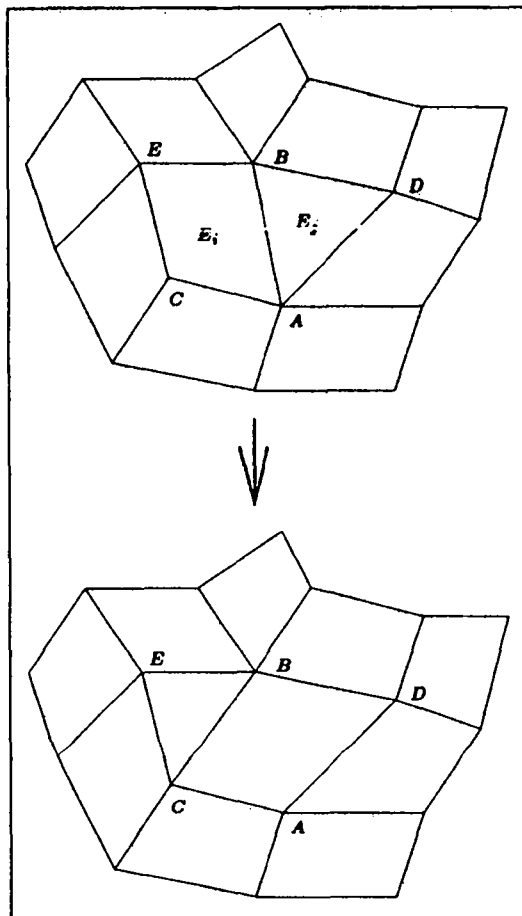


Figure 9: *Swapping pour la situation 2.*

4.4 Elimination d'arêtes

On parcourt là encore toutes les arêtes dont les extrémités sont des noeuds internes. Une arête sera supprimée si ses deux extrémités E et F vérifient $ne_E = ne_F = 3$ et si aucun des deux éléments E_i et E_j qui sont adjacents par l'arête [EF] ne contient une arête frontière. Les éléments E_i et E_j seront supprimés eux aussi. On crée alors une nouvelle arête [AD] si on a l'inégalité suivante :

$$ne_A + ne_D \leq ne_B + ne_C$$

Dans le cas contraire, la nouvelle arête sera l'arête [BC], voir la figure 10. La remarque ci-dessus reste valable. Le tableau 4 a trait au maillage de la figure 10 et reprend les mêmes informations que les tableaux ci-dessus.

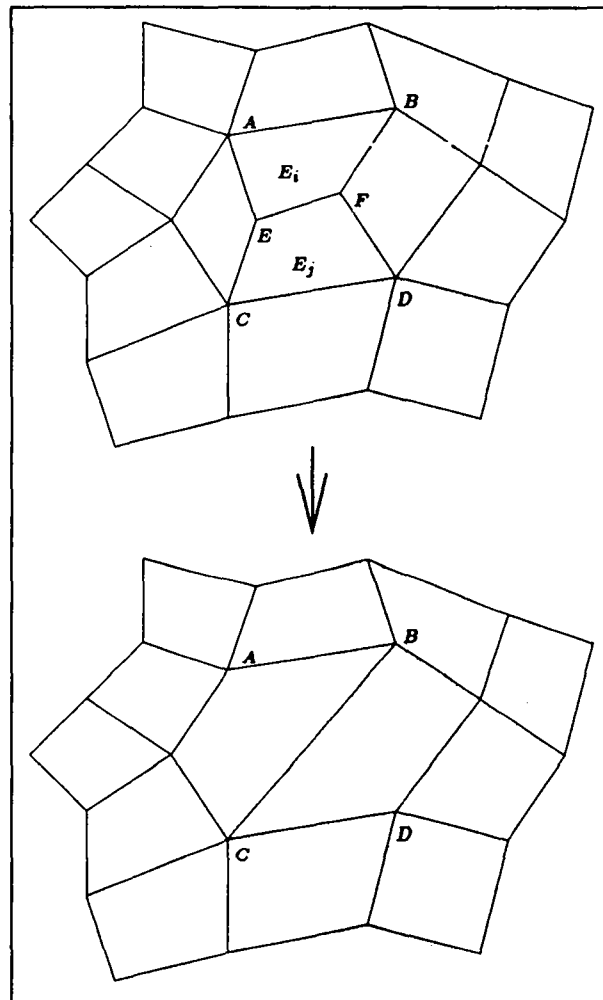


Figure 10: Motif à 4 éléments.

Taille	A	B	C	D	E	F
Maillage initial	5	4	5	5	3	3
Maillage final	4	4	5	4		

Tableau 4 : Taille de la boule associée avant et après modification.

4.5 Traitement d'un coin

Ce processus local consiste à vérifier, dans le cas où il reste au moins un triangle dans le maillage, si cet élément ne possède pas deux arêtes frontières. Dans ce cas, on prend son voisin et on essaye d'effectuer le swapping d'arête permettant de supprimer cette situation particulière.

4.6 Remarques

Il est préférable d'enchaîner ces procédures en débutant par l'élimination de points sommets de deux éléments et en terminant par le traitement des coins. L'ordre dans lequel on activera ensuite les autres procédures a peu d'importance. D'autre part, il est possible d'enchaîner plusieurs fois ces procédures mais nous avons remarqué qu'il est suffisant de ne le faire qu'une ou deux fois.

Enfin, une fois ces techniques de modifications de maillages effectuées, on pourra appliquer une procédure de régularisation consistant, par exemple, à déplacer chaque sommet au barycentre des barycentres de ses éléments voisins. Il faut toutefois prendre soin que les déplacements des points n'entraînent pas la formation de quadrangles négatifs ou croisés. Pour terminer, dans le cas où le maillage contient des quadrangles non convexes, on découpe ceux-ci en deux triangles.

5 Schéma général

Nous reprenons ici les différentes étapes de l'algorithme pour proposer le schéma suivant :

- Créer un maillage triangulaire du domaine en utilisant une méthode frontale standard.
- Choisir un triangle et une arête de départ pour initialiser la pile.
- Tant que la pile n'est pas vide :
 - Si les 3 arêtes du triangle courant (i.e. le triangle de sommet de pile) n'ont pas toutes été franchies, alors :
 - * Changer l'arête courante dans le triangle courant, par rotation dans le sens direct.
 - * Déterminer, s'il existe, le voisin du triangle courant par l'arête courante.
 - * Si ce voisin n'est pas marqué, alors :
 - Marquer le triangle voisin par le numéro du triangle courant.
 - Placer ce triangle voisin en sommet de pile.
 - * Fin si.
 - Sinon
 - * Si le triangle courant est encore actif alors on compte le nombre de fils du triangle courant, en ne retenant que les triangles n'ayant pas encore servi à constituer un quadrangle et:

- si le triangle courant a un fils, alors, assembler ces deux triangles pour former un quadrangle, en vérifiant, dans le cas où deux arêtes (ou plus) du quadrangle sont frontalières, que ce quadrangle est convexe.
 - si le triangle courant a deux fils, alors, assembler le triangle courant et ses trois voisins pour former trois quadrangles.
- * Fin si.
 - * Dépiler le triangle courant.
- Fin si.
- Fin tant que.
 - Activer les procédures de modification de maillage.
 - Régularisation éventuelle.

6 Départ d'un maillage "triangle" donné

La première étape de l'algorithme ci-dessus consiste à générer un maillage triangulaire par une méthode frontale. Par la suite, le procédé de construction des quadrangles est tout à fait indépendant de la triangulation. On peut donc envisager de démarrer l'algorithme avec un maillage "triangle" donné, sous la forme d'une structure NOPO² par exemple. Eventuellement, ce maillage pourra déjà contenir un certain nombre de quadrangles, que l'on commencera par convertir en triangles.

Signalons également qu'il s'avère nécessaire, dans l'implémentation effectivement réalisée, d'effectuer une renumérotation des points avant de réaliser la quadrangulation. Plus précisément, s'il y a N points sur le contour, on doit faire en sorte que ces points soient numérotés de 1 à N , deux points voisins portant deux numéros consécutifs (à l'exception du "premier" et du "dernier" point de chaque composante connexe de la frontière). Les P points internes référencés devront quant à eux être renumérotés de $N + 1$ à $N + P$.

7 Exemples d'application

Voici à présent quelques exemples de maillages résultant de la méthode proposée. On donnera, pour chaque exemple, le nombre de quadrangles, de triangles, le nombre de points, le temps CPU (HP 425) ainsi que la qualité (au sens vu ci-dessus) relatifs aux maillages résultats.

La figure 11 montre l'exemple d'un carré pour lequel, typiquement, un procédé de type algébrique (cf. [4]) serait plus adéquat.

La figure 12 montre la section d'une roue de matériel ferroviaire.

La figure 13 représente la coupe d'un disque de frein (données fournies par Telma); on remarque qu'il subsiste quelques triangles dans le maillage final. Cette situation est due à la discrétisation du contour, comme on peut le constater sur la figure 14 qui est un détail de la figure 13. On voit également sur cette dernière figure qu'il ne suffit pas de rajouter un point sur le contour pour changer notablement de résultat.

La figure 15 quant à elle, montre l'exemple d'un carré percé de 25 trous.

²La structure de données NOPO est l'organisation choisie, dans Modulef, pour stocker les maillages.

Exemple	1	2	3	4
Nombre de sommets	132	306	2397	778
Nombre d'éléments	111	249	2127	598
Nombre de quadrangles	111	249	2115	594
Nombre de triangles	0	0	12	4
Qualité	1.55	2.50	3.36	4.02
Temps CPU (en sec.)	5.1	9.4	67.0	16.3

Tableau 5 : Résultats relatifs aux maillages ci-dessous.

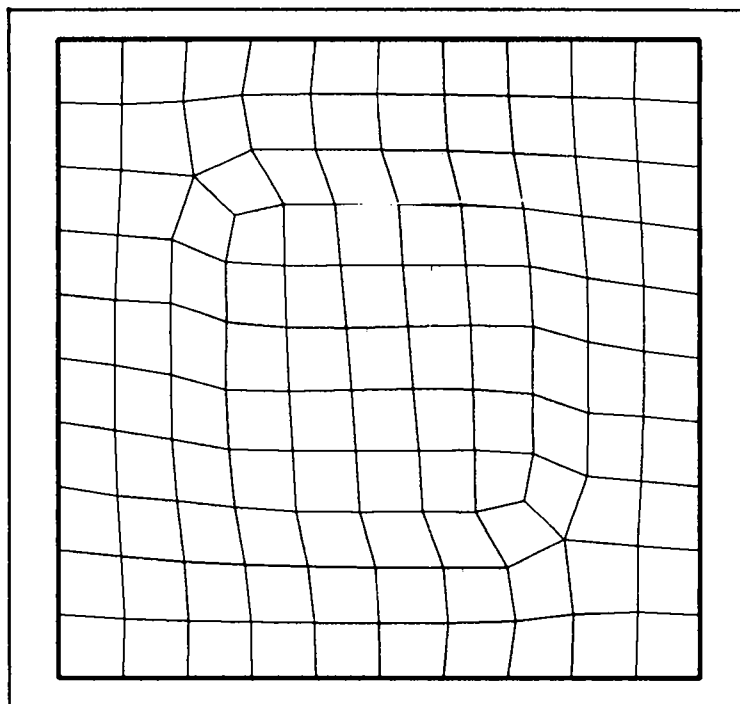


Figure 11: Exemple 1.

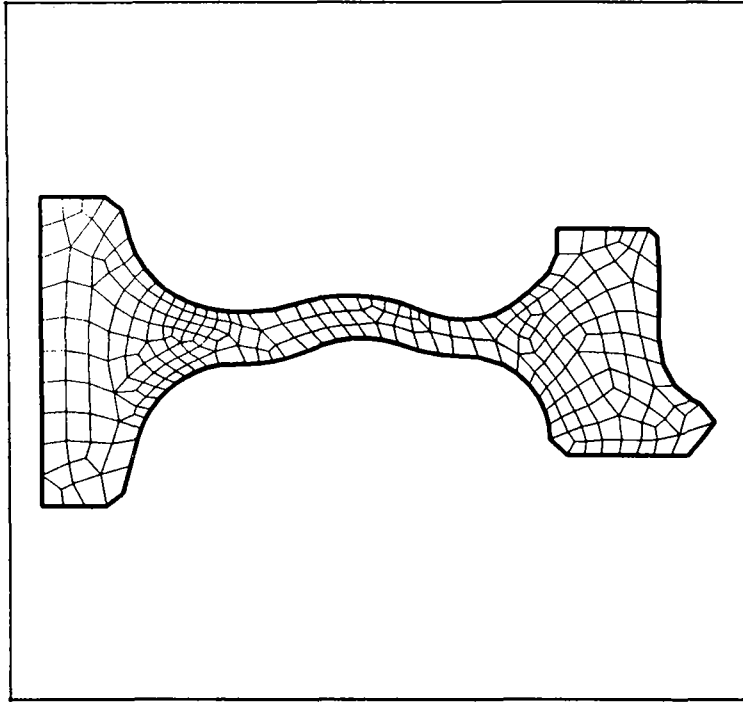


Figure 12: *Exemple 2.*

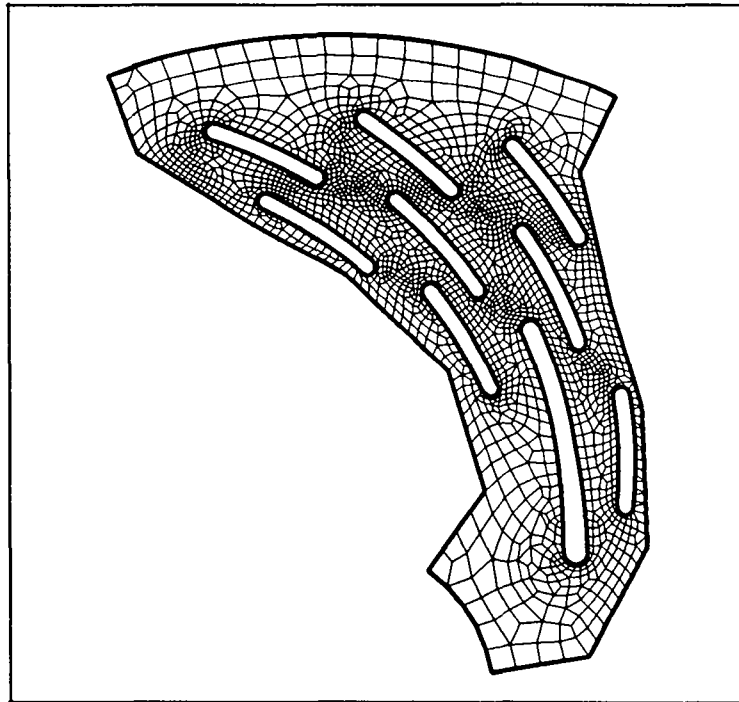


Figure 13: *Exemple 3.*

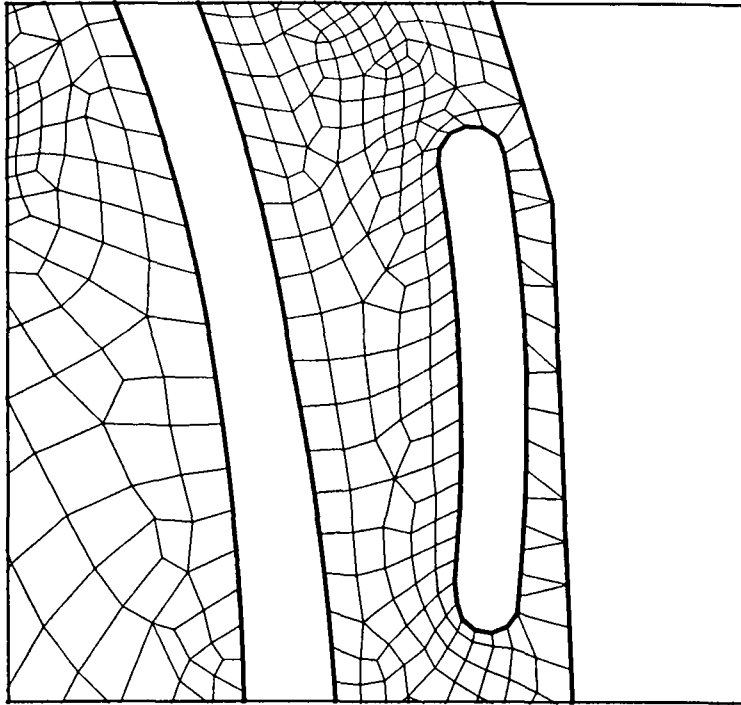


Figure 14: *Un détail de l'exemple 3.*

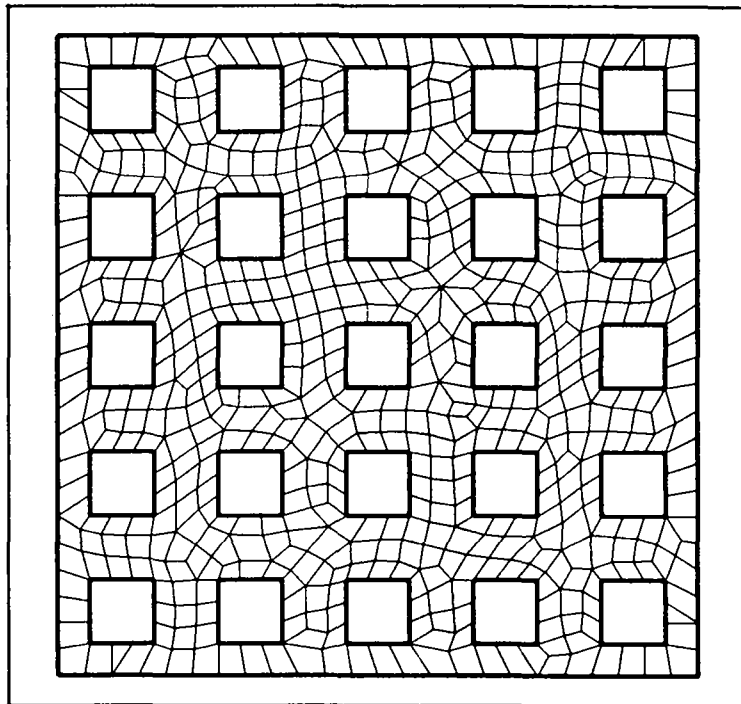


Figure 15: *Exemple 4.*

8 Aspects techniques

Le but de cette section est d'évoquer quelques aspects plus pratiques, pour la programmation notamment, et d'indiquer ensuite la liste des différentes routines développées. Nous y présentons un certain nombre de structures, classiques pour la plupart, qui caractérisent un maillage et sur lesquelles nous avons été conduits à travailler.

8.1 Remarques sur les structures internes

Rappelons tout d'abord qu'un triangle K est défini par la liste orientée de ses sommets, que l'on notera $SIMP(I, K)$, pour $I = 1, 2, 3$. Ses arêtes sont également orientées, sa surface est positive. On associe au triangle K l'ensemble de ses éléments voisins (par ses arêtes) : $VOIS(I, K)$, pour $I = 1, 2, 3$, le premier étant le triangle vu par le sommet 1 du triangle donné (avec les conventions suivantes : $VOIS(I, K) = 0$ signifie que l'arête I , opposée au sommet I , de l'élément K est frontière). Sur le même principe, il est utile de connaître l'ensemble des "arêtes voisines" d'un triangle donné : considérons l'arête I du triangle K , alors $AVOI(I, K)$ désignera le numéro de cette même arête pour le triangle $VOIS(I, K)$. La figure 16 illustre ces notions élémentaires.

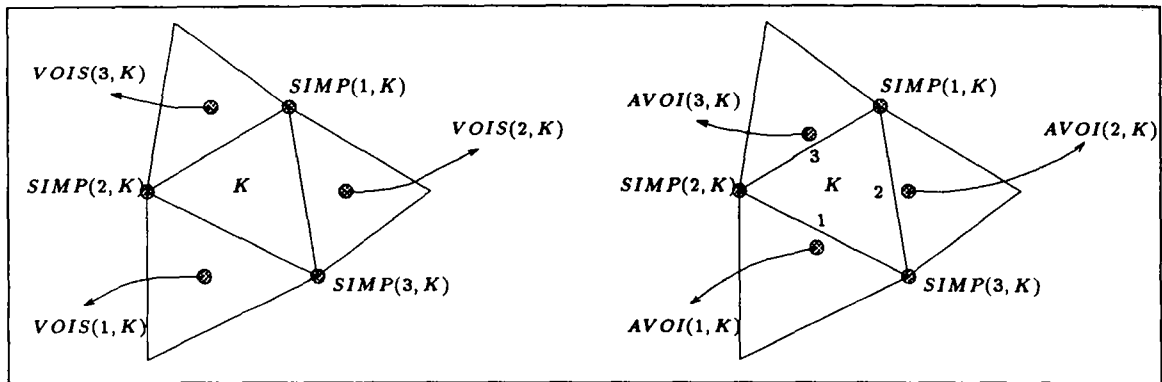


Figure 16: Définitions élémentaires.

De façon analogue au cas du triangle, un quadrangle sera défini par la liste orientée de ses sommets, que l'on notera cette fois $GEOM(I, L)$, pour $I = 1, \dots, 4$.

Lorsqu'on passe de la triangulation à la quadrangulation, nous sommes conduits à construire une pile. Celle-ci permet en fait d'avoir accès aux informations suivantes :

- En $PILE(1, I)$, I étant l'indice de sommet de pile, on note le numéro de l'arête courante, pour le triangle de sommet de pile.
- En $PILE(2, I)$, on note le numéro du triangle courant.
- $PILE(3, I)$ est un compteur indiquant le nombre d'arêtes du triangle courant ayant déjà été traitées.

Lorsqu'on veut appliquer les diverses procédures de modification de maillage, il est indispensable de connaître, pour chaque point P , le nombre d'éléments dont il est sommet (i.e. ne_p). On introduit pour cela un tableau $NOEL$ tel que :

- $NOEL(0, P)$ est le nombre d'éléments dont le point P est sommet noté ne_P dans ce qui précède.
- $NOEL(J, P)$, pour $J = 1, \dots, NOEL(0, P)$ désigne les numéros des éléments dont le point P est sommet.

Dans la pratique, ce tableau est complété à chaque fois que l'on crée un quadrangle.

8.2 Descriptif rapide des routines

Nous mentionnons à présent la liste des différentes routines, en y précisant le rôle de chacune. La première partie de ces routines est propre à la méthode de création de quadrangles, la seconde regroupe les outils de modifications de maillages alors que la troisième partie correspond aux outils développés dans le cas où on utilise comme donnée un maillage construit par ailleurs.

- Partie 1 : subroutines de génération de maillages quadrangulaires :
 - arevoi.f : crée le tableau des "arêtes voisines" des triangles de départ.
 - cquad1.f : crée un quadrangle par regroupement de deux triangles.
 - cquad3.f : crée trois quadrangles par regroupement de quatre triangles.
 - nbfls.f : compte le nombre de fils d'un triangle donné.
 - noqadj.f : détermine le numéro de l'élément adjacent à un quadrangle donné, par une arête donnée.
 - poelso.f : détermine, pour un point P tel que $ne_P = 3$, l'élément de sa boule associée, différent de deux autres éléments donnés; elle fournit également, le numéro du point opposé à P dans cet élément si c'est un quadrangle.
 - qdrglr.f : génère le maillage quadrangulaire à partir du maillage triangulaire, puis fait appel aux différentes procédures de modifications de maillages.
 - trgdeb.f : détermine le triangle de départ.
- Partie 2 : subroutines de modifications de maillages :
 - chngno.f : change le numéro d'un élément de la boule associée à un point donné.
 - instr.f : insère un élément dans un tableau trié.
 - rectab.f : remet à jour les tableaux $GEOM$, $COOR$ (tableau des coordonnées des points) et $NOEL$ en tenant compte des différentes suppressions de points et d'éléments qui ont pu intervenir lors des modifications de maillages.
 - sunocl.f : découpe un quadrangle non convexe en deux triangles.
 - sunoco.f : découpe les quadrangles non convexes d'un maillage en deux triangles.
 - suppr1.f : élimination d'éléments dont deux sommets opposés sont sommets de trois éléments.
 - suppr2.f : élimination de points internes sommets de deux éléments.

- `suppr3.f` : élimination d'arêtes dont les extrémités sont sommets de trois éléments.
 - `suppr4.f` : swapping de diagonales.
 - `suppr5.f` : élimination de points sommets de trois éléments si l'un de ceux-ci est de mauvaise qualité.
 - `suppr6.f` : traitement d'un coin.
- **Partie 3** : sous-routines complémentaires pour le cas où l'algorithme démarre avec un maillage "triangle" donné :
 - `cocofr.f` : détermine le nombre de composantes connexes de la frontière ainsi que le nombre de noeuds de chaque composante.
 - `cosico.f` : complète les tableaux *SIMP* et *COOR* par la donnée d'un nouvel élément.
 - `nouvno.f` : détermine le tableau de correspondance entre les anciens et les nouveaux numéros des points (afin que les *NBPFR* points de la frontière soient numérotés de 1 à *NBPFR* et les *NBPINT* points internes référencés de $NBPFR + 1$ à $NBPFR + NBPINT$).
 - `nouvpo.f` : identique à "nouvno.f", mais on impose de plus que les numéros de points voisins soient consécutifs.
 - `pasref.f` : complète, élément par élément, les tableaux de références des points du contour, des points caractéristiques et des arêtes frontalières.
 - `poinin.f` : détermine les numéros des points internes référencés et marque ces points.
 - `poinfr.f` : détermine les numéros des points frontaliers et marque ces points; détermine également les numéros des extrémités de chaque arête du contour.
 - `qua2t1.f` : divise un quadrangle en deux triangles suivant la plus petite diagonale.
 - `qua2tr.f` : transforme un maillage composé de triangles et quadrangles en un maillage composé uniquement de triangles en divisant chaque quadrangle en deux triangles.
 - `quadra.f` : transforme un maillage essentiellement triangulaire en un maillage quadrangulaire.

L'ensemble de ces routines totalise environ 3000 lignes de code.

9 Conclusions

On a décrit ici une méthode permettant d'obtenir automatiquement un maillage composé essentiellement de quadrangles pour tout domaine plan décrit par la donnée, sous forme discrète, de son contour. Cette méthode revient à effectuer le post-traitement d'un maillage composé exclusivement de triangles afin de former les quadrangles par regroupements de triangles puis à appliquer quelques outils de régularisation.

De par sa nature, la validation de la méthode a été relativement rapide. Elle est entièrement automatique et s'applique sans problème quelle que soit la géométrie considérée. Il est néanmoins clair que dans le cas d'un domaine de géométrie particulière (par exemple un carré ou un rectangle de contour discrétisé de manière ad hoc) un procédé de type algébrique, cf [4], représente une solution plus naturelle.

Comme indiqué dans l'introduction, indépendamment de la parité du nombre de points du contour, les maillages issus de l'algorithme proposé contiennent zéro, un ou plusieurs triangles.

D'autre part, le critère de qualité utilisé a tendance à privilégier la formation d'éléments de type carré. En aucun cas il ne favorisera une direction de l'espace quelconque pour aboutir à la construction d'éléments de type rectangle par exemple. En modifiant le critère de qualité, on pourra néanmoins obtenir cet effet.

Une extension, en cours d'implémentation, consiste à appliquer la méthode dans le cas où un champ de taille est spécifié en entrée. Le choix retenu pour ce cas consiste à fournir en entrée du mailleur un maillage (le maillage obtenu à l'étape précédente d'une boucle de calculs) et le champ de taille associé (i.e. en chaque nœud du maillage la valeur souhaitée de la taille des éléments à construire en son voisinage). Un premier exemple de cette extension est montré sur la figure 17 qui correspond à la spécification d'un champ de taille relatif au domaine de la figure 15. Ce test correspond à un champ de taille défini sous forme analytique par :

$$h(x, y) = 0.05 \times |x - y| + 0.02$$

Le maillage obtenu contient 975 sommets, 795 éléments (787 quadrangles et 8 triangles), la qualité est 3.53 et le temps CPU de 26.1 s.

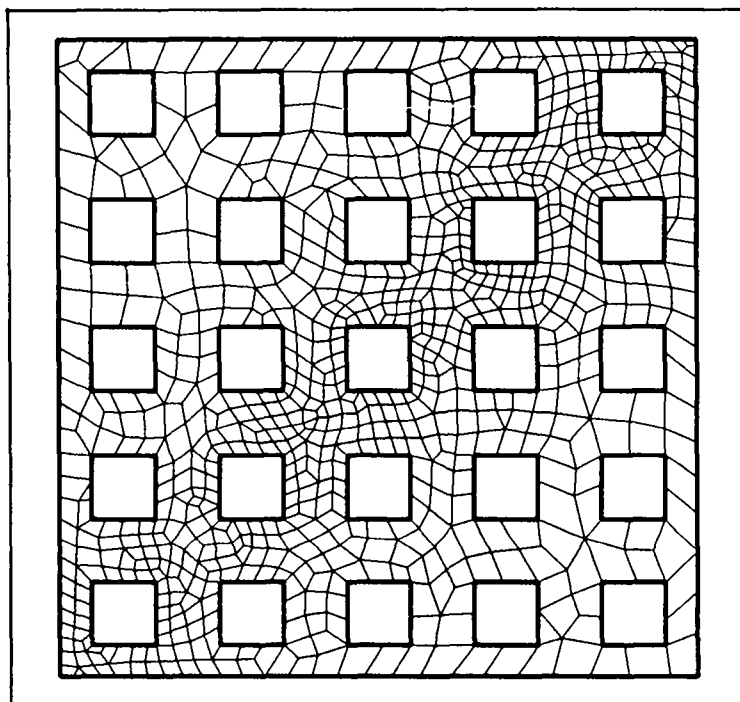


Figure 17: *Exemple 4 + contrôle.*

References

- [1] T.D. BLACKER, M.R. STEPHENSON, Paving : a new approach to automated quadrilateral mesh generation, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.* 32, pp 811-847, 1991.
- [2] J. CARNET, Une méthode heuristique de maillage dans le plan pour la mise en oeuvre des éléments finis, Thèse, Paris, 1978.
- [3] J.A. GEORGE, Computer implementation of the finite element method, Stan-CS, Ph. D., 1971.
- [4] P.L. GEORGE, *Génération automatique de maillage. Applications aux méthodes d'éléments finis*, Masson, RMA n° 16, Paris, 1991. Also as *Automatic mesh generation. Applications to finite element methods*, Wiley, 1991.
- [5] P.L. GEORGE, Automatic mesh generation and finite element computation, in: P.G. Ciarlet and J.L. Lions, ed., *Finite Element Methods, Handbook of Numerical Analysis*, vol IV, North-Holland, à paraître.
- [6] P.L. GEORGE, E. SEVENO, Génération de maillages par une méthode de type frontal, *RR INRIA* n° 1725, 1992.
- [7] A. GOLGOLAB, Mailleur tridimensionnel automatique pour des géométries complexes, *RR INRIA* n° 1004, 1989.
- [8] F. HECHT, E. SALTEL, Emc2 : Un logiciel d'édition de maillages et de contours bidimensionnels, *RT INRIA* n° 118, 1990.
- [9] R. LÖHNER, P. PARIKH, Three-dimensional grid generation by the advancing-front method, *Int. Jour. Num. Meth. Fluids*, n° 8, pp 1135-1149, 1988.
- [10] J. PERAIRE, J. PEIRO, L. FORMAGGIA, K. MORGAN, O.C. ZIENKIEWICZ, Finite element Euler computations in three dimensions, *Int. Jour. Num. Meth. in Eng.*, vol 26, pp 2135-2159, 1988.
- [11] E. RANK, M. SCHWEINGRUBER, M. SOMMER, Adaptive mesh generation and transformation of triangular to quadrilateral meshes, *Com. in Num. Meth. in Eng.*, vol 9, pp 121-129, 1993.
- [12] J.Z. ZHU, O.C. ZIENKIEWICZ, E. HINTON, J. WU, A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation, *Int. Jour. Num. Meth. in Eng.* 32, pp 849-866, 1991.



Unité de Recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Lorraine Technopôle de Nancy-Brabois - Campus Scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 VILLERS LES NANCY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rennes IRISA, Campus Universitaire de Beaulieu 35042 RENNES Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Sophia Antipolis 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)

EDITEUR
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399



★ R R - 2 8 4 7 ★