



**HAL**  
open science

## Mailleur de Voronoi bidimensionnel controle par une carte de tailles

E. Briere de L'Isle, Paul-Louis George, Eric Saltel

► **To cite this version:**

E. Briere de L'Isle, Paul-Louis George, Eric Saltel. Mailleur de Voronoi bidimensionnel controle par une carte de tailles. [Rapport de recherche] RR-2056, INRIA. 1993. inria-00074616

**HAL Id: inria-00074616**

**<https://inria.hal.science/inria-00074616v1>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Mailleur de Voronoï  
bidimensionnel contrôlé  
par une carte de tailles*

Eric BRIÈRE de L'ISLE  
Paul-Louis GEORGE - Eric SALTEL

N° 2056  
Octobre 1993

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,  
modélisation et  
logiciels numériques

*R*apport  
*de recherche*

1993

# Mailleur de Voronoï bidimensionnel contrôlé par une carte de tailles

Eric Brière de l'Isle, Paul Louis George et Eric Saltel

INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France.

## Résumé

*Ce rapport se propose de faire le point sur les différentes phases nécessaires à la mise en œuvre d'un mailleur automatique de type Voronoï gouverné par une carte de tailles spécifiée en entrée. En premier lieu, il rappelle brièvement la méthode dans sa version classique puis il indique les modifications à apporter pour introduire la carte de tailles et s'y conformer. Le cas bidimensionnel isotrope est entièrement décrit et des extensions possibles sont indiquées.*

## Voronoi's type mesh generation method in two dimensions with prescribed stepsizes

## Abstract

*This report presents the different phases necessary to implement a Voronoi' type automatic mesh generator governed by a map indicating the stepsizes that must be satisfied. It, firstly, summarizes the main lines of the method in its classical version, and indicates the way to incorporate and conform the stepsize control. The two-dimensional isotropic case is described in full and possible extensions are indicated.*

# 1 Introduction

La résolution par la méthode des éléments finis d'un problème physique formulé en termes d'équations aux dérivées partielles s'appuie sur une discrétisation spatiale ou maillage du domaine étudié. De nombreuses méthodes, voir par exemple [3], permettent de construire, généralement à partir de la donnée du contour du domaine, un maillage de celui-ci.

L'adaptation locale des maillages à la physique des problèmes permet d'obtenir une meilleure précision des solutions calculées, en particulier il est ainsi possible de bien capter des évolutions rapides de la solution dans les zones de forte variation tout en conservant un nombre total de degrés de liberté raisonnable.

Un couplage des techniques de régularisation et de découpe locale des éléments du maillage permet d'envisager la construction de maillages adaptés à la physique des problèmes traités. Dans une première phase un maillage du domaine est construit par l'emploi de telle ou telle méthode puis un premier calcul de la solution du problème est effectué. Après choix d'un critère pertinent (gradient de la solution, champ dérivé, estimation d'erreurs, ...), on détecte dans le maillage initial les zones à adapter (par raffinement ou par déraffinement) et on génère un nouveau maillage mieux adapté au problème; ce processus est généralement itératif.

A coté de cette approche basée sur des modifications locales prend place une méthode plus globale. Elle consiste à utiliser un mailleur automatique en le gouvernant par un critère. Le maillage est alors entièrement recréé à chaque itération en fonction des résultats obtenus à l'itération précédente.

On se propose d'indiquer ce qu'il est possible de faire en suivant cette seconde approche. Pour ce faire, on présentera rapidement les différentes étapes intervenant dans la mise en application d'une méthode automatique. La méthode de Voronoï (ou méthode de Delaunay, ou encore méthode de Voronoï-Delaunay) est discutée en insistant particulièrement sur les aspects de flexibilité présents qui permettent d'envisager l'adaptation. Seul le cas isotrope est envisagé.

## 2 Méthode de Voronoï "naturelle"

Adapté aux géométries quelconques, ce type de mailleur va construire le recouvrement du domaine en triangles, à partir essentiellement des points de son contour. Il utilise comme donnée ce contour et plus précisément une approximation polygonale de ce dernier (c'est-à-dire une liste de segments) enrichie, le cas échéant, de points et arêtes (internes) spécifiés au départ qu'il conviendra de respecter.

Quand il s'agit de générer un *premier maillage* du domaine, le maillage "naturel", on dispose uniquement de ces informations qui sont de type géométrique. La section 2 rappelle les grandes lignes de la méthode de génération de maillage correspondante qui est décrite en détails dans [3], rapport dans lequel on trouvera par ailleurs les références utiles concernant les méthodes de Voronoï, références non rappelées ici.

Pour générer un *maillage contrôlé*, on dispose de ces informations (de type géométrique) et, de plus, d'un contrôle (lié à la physique du problème) permettant de gouverner l'algorithme. La section 3 décrit la méthode de génération de maillage dans ce cas. En

pratique, le contrôle considéré est constitué par le champ des tailles souhaitées en tout point du domaine.

## 2.1 Principe général

A partir d'un maillage de Delaunay d'un domaine quelconque et d'un point interne (distinct des sommets déjà présents dans le maillage actuel), on construit un processus permettant de créer un nouveau maillage de Delaunay tel que ce point soit sommet d'éléments. Ce processus, servira de noyau au mailleur et sera utilisé dans deux de ses étapes:

- l'insertion des points initialement connus (ceux du contour essentiellement),
- l'insertion des points internes créés par la suite.

La méthode de maillage proposée consiste à mailler un quadrilatère englobant le domaine (de manière à ce placer dans une géométrie convexe) à l'aide de quelques triangles puis à insérer, un à un, les points connus dans ce maillage en utilisant le processus mentionné ci-dessus. Après ces opérations on dispose d'un maillage du quadrilatère englobant composé de triangles dont la liste des sommets comprend les points donnés et quelques points supplémentaires; ce maillage est notée  $M_{boite}$  dans la suite. On vérifie alors que les arêtes du contour existent dans ce maillage, si tel est le cas, on marque les triangles internes et on garde les triangles externes (pour disposer d'un maillage "convexe"), en cas contraire, on régénère, par modifications locales, les arêtes initiales afin de pouvoir effectuer ce marquage des éléments.

L'étape suivante consiste à créer les points internes utiles dans les triangles marqués puis à les insérer dans le maillage actuel en utilisant, une nouvelle fois, le processus d'insertion de points déjà mentionné. Enfin, on détruit les éléments externes, on régularise (cf. plus bas) le maillage pour obtenir le maillage final.

Les trois opérations principales utilisées dans le mailleur sont donc:

- l'insertion d'un point,
- la régénération du contour initial,
- la création des points internes.

Ces trois opérations sont décrites en détails dans [3]. Dans le cadre du contrôle envisagé, seule la troisième est sensiblement modifiée. Par suite, nous ne rappellerons ici que cette dernière afin de voir les modifications à apporter pour passer de la version "classique" à la version contrôlée.

## 2.2 Création et positionnement des points internes

Au moment où l'on aborde cette opération, on dispose d'un maillage  $T$  dont les éléments sont marqués. Ce maillage ne contient comme sommets que les points de la frontière donc est (généralement) impropre aux calculs. Il est donc nécessaire de créer des points internes dans les éléments marqués puis de les insérer dans  $T$ . Pour procéder à ce travail, il faut répondre aux deux questions suivantes:

- Faut il créer un (des) point(s) dans un triangle de  $T$  ?

- Où mettre ce (ces) points ?

La réponse à ces questions dépend étroitement de ce que l'on veut faire du maillage final en terme de calculs. Il est clair que la nature de celui-ci (mécanique du solide, simulation thermique, mécanique des fluides, ...) et que la nature des données physiques (caractéristiques des matériaux, vitesse, pression, nature des efforts, températures imposées, etc.) influent sur la nature attendue du maillage.

La seule donnée, actuellement disponible, étant la description discrète de la frontière du domaine (et éventuellement la donnée de quelques points internes), on ne peut utiliser, pour créer  $T$ , que des informations relatives à cette donnée. Ainsi le but visé ne peut être *raisonnablement* que d'obtenir un maillage isotrope reflétant les propriétés des données.  $T$  sera donc adapté aux données et non, a priori au problème physique à résoudre<sup>1</sup>. On ne peut pas faire mieux, sans choix discutables, en l'absence d'informations supplémentaires. Par suite, la seule ambition de la méthode proposée est de construire un maillage  $T$  raisonnable, dit maillage "classique" ou "naturel" qui permettra d'effectuer un premier calcul du problème posé; le résultat de celui-ci et l'analyse des champs de solutions permettra alors d'adapter  $T$  au problème (point discuté dans la section 3 du papier).

Pour la version "naturelle" du mailleur, on procède de la manière suivante:

- on associe, à chaque point connu à ce stade, un  $h$  local qui est considéré comme la distance souhaitable entre ce point et ses voisins. Si le point est un point interne spécifié,  $h$  est fourni par l'utilisateur; si le point est un point de la frontière,  $h$  est calculé comme la moyenne entre les longueurs des 2 arêtes ayant ce point comme extrémité.
- on considère les 3 arêtes des éléments de  $T$  et on compare la longueur  $d_i$  de ces arête avec les  $h$  de leurs extrémités (soient  $h_{i1}$  et  $h_{i2}$  les  $h$  des extrémités de l'arête  $i$ );
  - Si  $d_i$  est plus grand que  $h_{i1} + h_{i2}$ , on calcule  $n_i$  le nombre de points à créer sur l'arête de telle sorte que ces points suivent une répartition donnée (voir ci-dessous);
  - Si les 3  $n_i$  sont égaux, on génère les 3 ensembles de  $n_i$  points sur les arêtes de  $K$ ;
  - Sinon, on pose  $n1 = \max(n_i)$  et  $n2 = \min(n_i)$  et on génère  $n1$  points sur les 2 arêtes dont le  $n_i$  vaut  $n1$  ou est proche de  $n1$  et  $n2$  points sur la troisième arête;
  - on applique une méthode algébrique (voir ci-dessous) pour générer les points internes correspondant;
  - parmi les points, ainsi créés, on empile ceux qui:
    - \* ne sont pas sur une frontière donnée;
    - \* ne sont pas trop proches (au sens de  $h$ ) d'un point existant.

---

<sup>1</sup>Il est néanmoins clair qu'un utilisateur averti fournira a priori des données raisonnables tenant le meilleur compte de son expérience du problème physique considéré.

Dans la suite de cette section, nous allons donner quelques indications relatives aux différentes étapes de cet algorithme en supposant que le choix de la découpe d'une arête est de créer une répartition arithmétique de points.

Soit  $A_k$  l'arête examinée et  $d_k$  sa longueur, on note par  $P_k(0)$  et  $P_k(n)$  ses 2 extrémités et par  $h(0)$  and  $h(n)$  les  $h$  correspondants, on définit la suite:

$$\alpha_i = d(P_k(i), P_k(i + 1)) \text{ pour } i = 0, n$$

avec

$$\alpha_0 = h(0) + r \text{ et } \alpha_n = h(n) - r$$

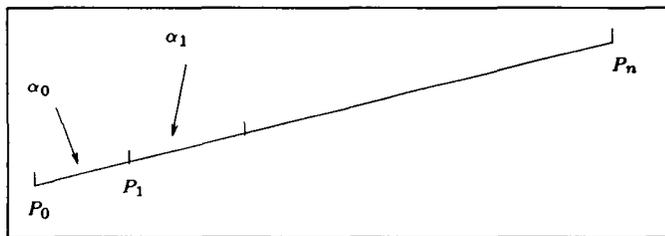


Figure 1: Découpe d'une arête.

Le problème est de calculer  $n$  et  $r$  donc les  $\alpha_i$  tels que la suite des points ainsi définie soit arithmétique, c'est-à-dire que:

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i + r$$

où  $r$  est la raison cherchée. Le système à résoudre est:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \alpha_i = d_k \\ (n+2)r = \Delta H = \|h(0) - h(n)\| \end{cases} \quad (1)$$

Ce système traduit que  $d_k$  est la somme des longueurs des sous-segments que l'on cherche à créer pour découper l'arête  $A_k$  et que la variation de  $h(0)$  à  $h(n)$  est équirépartie entre tous ces segments. On en déduit:

$$\begin{cases} (n+1) \cdot (h(0) + \frac{(n+2)}{2} \cdot r) = d_k \\ (n+2)r = \Delta H \end{cases} \quad (2)$$

Pour trouver  $n$ , on exprime  $r$  en fonction de  $n$  et on obtient:

$$n = \frac{2d_k}{h(0) + h(n)} - 1$$

Toutefois,  $n$  doit être entier ce que ne donne pas ce calcul, par suite, on choisit pour  $n$  la valeur entière la plus proche de la valeur calculée.  $n$  étant connu, on calcule  $r$ :

$$r = \frac{2d_k(h(n) - h(0))}{(n+1)(n+2)(h(n) + h(0))}$$

Cette valeur est utilisée pour remettre à l'échelle  $h(0)$  et  $h(n)$  avec un facteur  $\alpha$  ( $\beta$ ) calculé comme suit:

$$\alpha = \frac{2.d_k - (n+1)(n+2)r}{2.(n+1)h(0)}$$

$$\beta = \frac{2.d_k + (n+1)(n+2)r}{2.(n+1)h(n)}$$

Ces nouvelles valeurs,  $n$  connu, permettent de recalculer  $r$  et de définir correctement la suite  $\alpha$ ; donc les points intermédiaires.

Les autres arêtes de  $K$  sont traitées de la même manière vis-à-vis des valeurs qui leur sont attribuées. En pratique, seul un paramètre ou deux paramètres  $n$  sont possibles, on calcule donc a priori les 3 valeurs réelles et on en déduit la ou les valeurs possibles.

Une fois les points des arêtes créés, on utilise une méthode algébrique [3] dans chaque triangle afin de créer des points à l'intérieur des éléments.

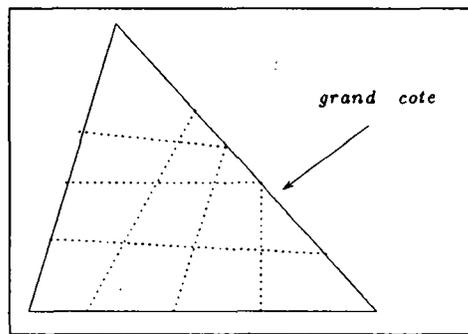


Figure 2: *Le motif à un seul paramètre.*

Si chaque arête du triangle considéré a été découpée avec  $n$  points intermédiaires, on applique la méthode algébrique générale dans une version simplifiée adaptée à la particularité du cas traité (domaine convexe de côtés droits). Cette méthode n'est pas utilisée pour mailler le triangle mais seulement pour créer des points internes. On classe les 3 côtés en fonction de leur longueur (de manière à isoler le "grand" côté des deux autres dits "petits"). La création des points dans un triangle s'effectue en connectant les points se correspondant d'un côté à l'autre du triangle. Pour ce faire, on construit deux droites déterminées par les points des arêtes logiquement reliés (cf. figure 2); l'intersection de ces droites donne le point. La première droite passe par un point intermédiaire d'un "petit" côté et par son correspondant sur le "grand" côté; la seconde utilise l'autre "petit" côté.

Pour traiter le cas, fréquent dans la pratique, où on a deux paramètres de découpe sensiblement différents ( $n_1$  et  $n_2$ ), on définit une méthode algébrique adaptée. On classe, de même, les 3 côtés en fonction de leur longueur (de manière à isoler le "petit" côté des deux autres dits "grands"). La création des points dans un triangle s'effectue en connectant les points se correspondant d'un côté à l'autre du triangle. Pour ce faire, on construit deux droites déterminées par les points des arêtes logiquement reliés (cf. figure 3); l'intersection de ces droites donne le point. La première droite passe par un point intermédiaire d'un "grand" côté et par son correspondant sur l'autre "grand" côté; la

seconde passe par le sommet commun aux 2 "grands" côtés et le point voulu du "petit" côté.

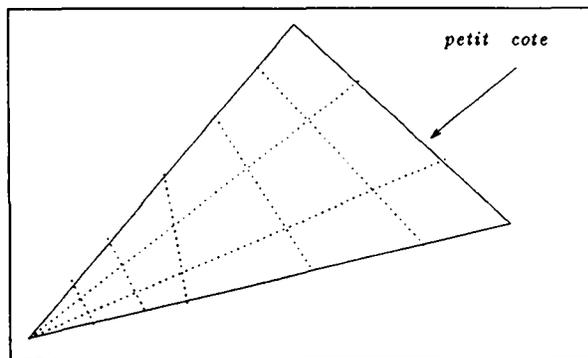


Figure 3: *Le motif à 2 paramètres.*

Appliquant l'opération (découpe à un ou deux paramètres) à tous les triangles marqués de  $T$ , on dispose, à ce stade, d'une série de points placés sur les arêtes de  $T$  et à l'intérieur de ses éléments. Le résultat est un ensemble de points bien situés localement (dans chaque triangle) mais, à cause de la localité du procédé, il est en général possible d'avoir généré trop de points et en particulier, le même point plusieurs fois ou des points très voisins. Pour éviter ce problème, on examine maintenant tous les points afin de supprimer ceux qui ne sont pas nécessaires. Pour ce faire, on introduit une grille régulière et on code dans ses cases les points présents:

- chaque case est analysée: si elle contient plusieurs points, ceux-ci sont comparés et supprimés le cas échéant (en fonction de leur  $h$ ); sinon on regarde les cases voisines (en spirale, voir la figure 4 où  $C_{init}$  désigne la case de la grille contenant le point examiné) tant que les points présents sont trop proche au regard des  $h$  des points examinés;
- les points des frontières sont enlevés de la liste.

Les points retenus sont insérés dans  $T$  en utilisant les algorithmes décrits au début du papier:

- Faire, pour tous les points de la pile:
  - Insérer le point dans  $T$
- Fin.

Notons, dans ce cas, le cas classique, que tous les points internes sont créés en une seule passe à l'issue de laquelle, on obtient le maillage final avant élimination des éléments externes et éventuelle régularisation.

Introduisant le vocabulaire nécessaire plus tard, on peut dire que la grille utilisée pour écarter (ou filtrer) les points trop proches d'un point donné constitue un **espace de contrôle** (particulièrement simple) composé par les  $n \times n$  cases ( $n$  est fixé au départ) recouvrant un quadrilatère englobant le domaine.

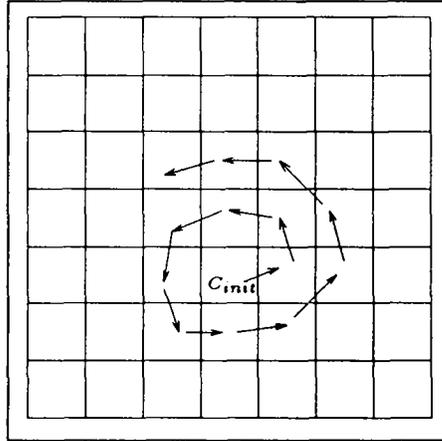


Figure 4: *Grille de sélection des points.*

## 2.3 Schéma général

L'ensemble de la discussion précédente conduit à construire comme schéma du mailleur, dans la version classique, l'ensemble des étapes suivantes:

- lecture des données (contour discrétisé du domaine et éventuels points internes),
- création et maillage d'un quadrilatère englobant le domaine,
- insertion des points connus à ce stade (points du contour et éventuels points internes),
- régénération de la discrétisation du contour initialement donnée,
- marquage des éléments internes,
- création des points internes dans les éléments marqués,
- insertion, parmi tous ces points, des points retenus après filtrage via une grille de contrôle,
- suppression des éléments externes.
- régularisation éventuelle du maillage obtenu.

Ainsi la version classique du mailleur utilise comme contrôle:

- le maillage obtenu après insertion des points du contour pour déterminer les  $h$  en tous points du domaine (via la découpe des arêtes des triangles),
- la grille ci-dessus pour sélectionner, parmi l'ensemble des points internes créés, ceux qui seront effectivement pris en compte.

Ce mailleur est le mailleur Voronoï de la bibliothèque Modulef (cf. [4]). L'étape de régularisation comprend, en pratique, deux phases. La première phase, inconditionnelle, consiste à supprimer tout triangle dont deux arêtes sont frontières en inversant la diagonale du quadrangle formé par le triangle considéré et son voisin (dans le cas où l'opération est possible, i.e. le quadrangle est convexe). La seconde phase consiste à optimiser la qualité des triangles en bougeant les points libres (par une technique de barycentrage pondéré), cette phase n'est effectuée que si le maillage obtenu par la méthode présente des triangles de qualité plus mauvaise qu'un seuil donné.

La section suivante va montrer comment modifier ce processus, le processus "classique", afin de permettre, cette fois ci, de suivre une carte de tailles donnée.

## 3 Méthode de Voronoï gouvernée par une carte de tailles

### 3.1 Principe général

On suppose, dans ce cas, que l'on a effectué un calcul de la solution du problème physique considéré. Le premier calcul est fait avec le maillage "naturel" généré par la méthode décrite dans la section 2. De la solution on tire un champ scalaire définissant la taille souhaitable en chaque sommet de ce premier maillage. *On ne s'intéresse pas ici à la manière d'obtenir ce champ* mais on suppose uniquement que l'on dispose d'un tel champ. On note par  $M_{cont}$  et  $CH_{cont}$  le maillage actuel, le maillage "naturel", et son champ de contrôle. Le problème est maintenant de recréer un maillage du domaine respectant ce champ. Ce nouveau maillage étant connu, on peut itérer le processus en utilisant comme maillage de contrôle non plus le maillage "naturel", mais ce maillage et comme champ de contrôle, le champ obtenu à partir de l'analyse de la solution calculée sur ce maillage.

L'idée générale de la méthode proposée est d'utiliser la méthode décrite dans la section 2 en définissant de manière judicieuse un espace de contrôle permettant de gouverner l'algorithme. En pratique, on va utiliser la grille de la figure 4 comme support géométrique et on va associer un  $h$ , la taille souhaitée, en chacun des sommets des cases de cette grille.

### 3.2 Espace de contrôle

La construction de l'espace de contrôle se fait de la manière suivante (voir les figures 5 à 9):

- on génère  $M_{boite}$  comme dans le cas classique (sans contrôle);
- on en déduit  $M_{ext}$  (figure 6), le maillage obtenu en éliminant de  $M_{boite}$  les triangles internes au domaine;
- on recolle  $M_{ext}$  et  $M_{cont}$  (figure 5) pour former  $M_{CONT}$  (figure 7);
- on recolle, en parallèle,  $CH_{ext}$  et  $CH_{cont}$ , le champ  $CH_{cont}$  est connu tandis que le champ  $CH_{ext}$  est initialisé à 0., pour obtenir  $CH_{CONT}$ , le champ associé au maillage  $M_{CONT}$ ;

- on définit la grille de l'espace de contrôle comme le quadrilatère décrit dans le cas classique. Pour chaque sommet,  $Q$ , de chaque case, on cherche, dans le maillage  $M_{CONT}$  (maillage d'un domaine convexe), un triangle le contenant et on calcule par interpolation  $P1$ , la valeur  $h_{loc}$  au point  $Q$  à partir des  $h_{loc}$  des 3 sommets du triangle trouvé (le champ utilisé est  $CH_{CONT}$ ). La figure 8 montre cette construction tandis que la figure 9 indique l'utilisation qui sera faite de la grille pour trouver la valeur du  $h$  souhaité autour d'un point quelconque du domaine.

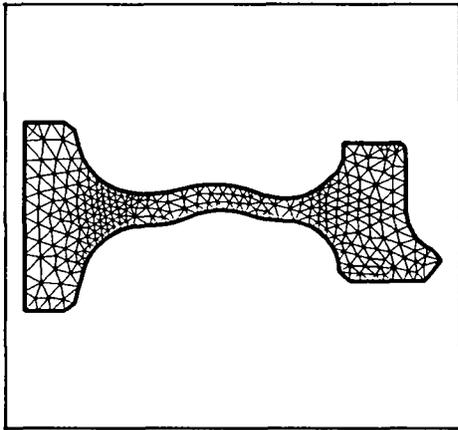


Figure 5: Maillage  $M_{cont}$ .

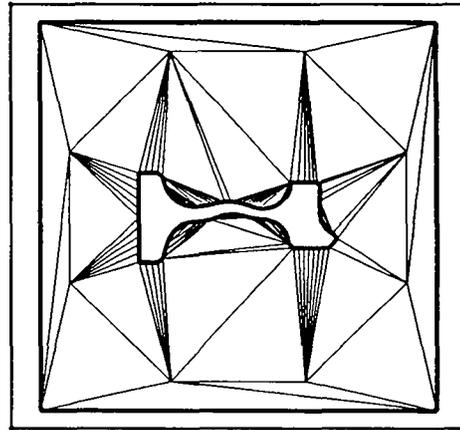


Figure 6: Maillage  $M_{ext}$ .

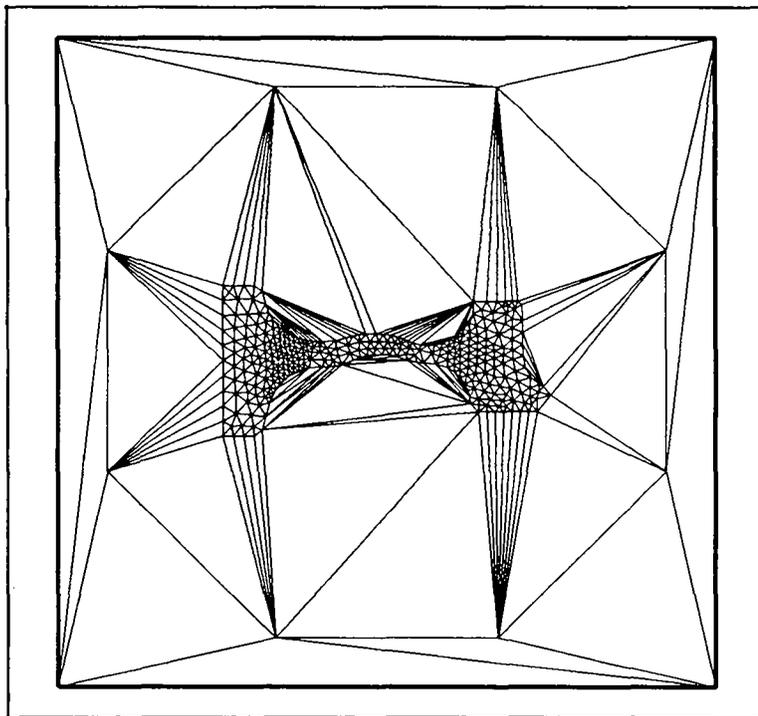


Figure 7: Maillage  $M_{CONT}$ .

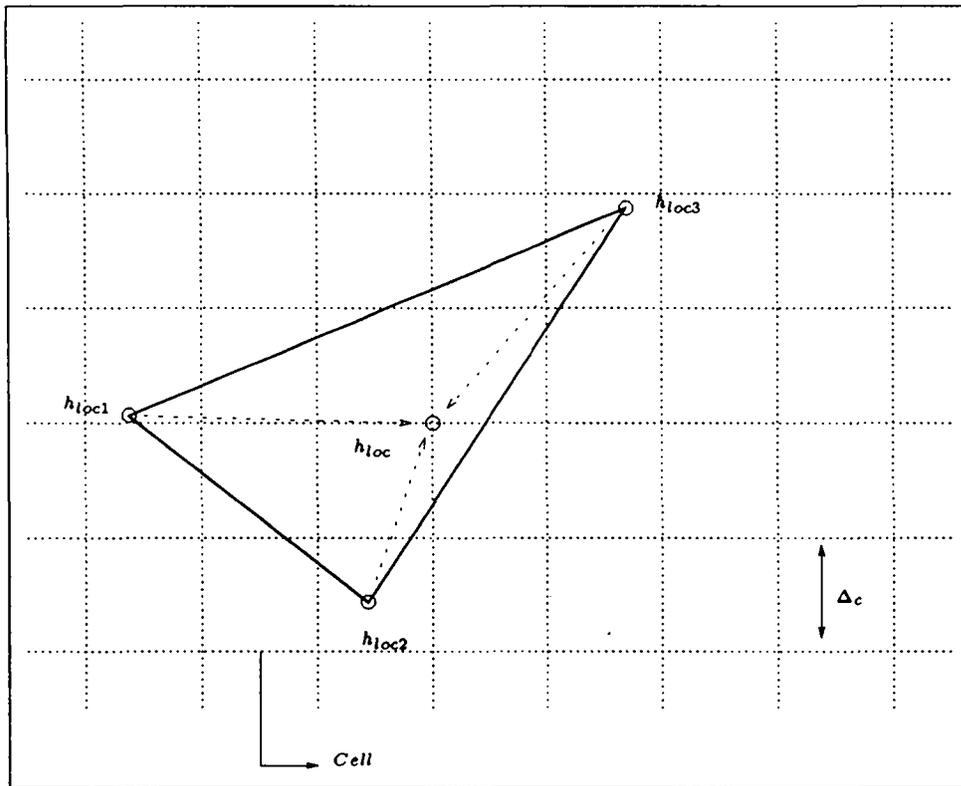


Figure 8: *Espace de contrôle (construit à partir du maillage  $M_{CONT}$ ).*

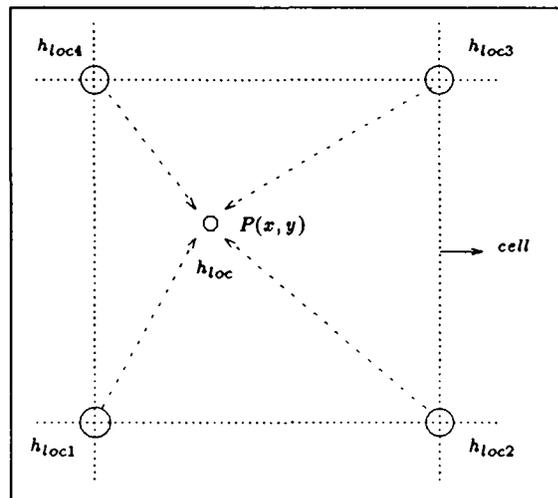


Figure 9: *Espace de contrôle (utilisation).*

### 3.3 Remaillage de la frontière du domaine

La donnée du maillage consiste, rappelons le, en une discrétisation du contour du domaine et des éventuels points internes spécifiés. Il est alors fréquent que la discrétisation de la frontière ne soit pas en accord avec la carte de tailles donnée via le champ  $CH_{CONT}$ . On est alors amené à remailler le contour de manière à générer une nouvelle discrétisation conforme à ce champ.

La discrétisation initiale du contour est formée, en suivant les normes de [4], de manière descendante. Elle consiste en:

- un ensemble de composantes;
- chaque composante est constituée d'un ensemble de lignes caractéristiques;
- chaque ligne caractéristique est définie comme l'ensemble des segments construits à partir des informations suivantes:
  - deux points caractéristiques,  $A$  et  $B$ : les extrémités de la ligne considérée,
  - un brisé formé de un ou plusieurs segments dont les extrémités sont:
    - \*  $A_0 = A$ , le premier point de la ligne,
    - \* une suite  $\{A_i\}$ , ( $i = 1, n - 1$ ) de points générés automatiquement entre  $A$  et  $B$  en utilisant la définition géométrique de la ligne (ligne droite, cercle, (autre) courbe, spline, ...),
    - \*  $A_n = B$ , le dernier point de la ligne.

A partir de cette description et en utilisant la carte de tailles maintenant connue, on va recréer la nouvelle discrétisation.

On spécifie en premier lieu les points fixes, c'est-à-dire les points, parmi les précédents, qui devront être présents dans la nouvelle discrétisation: il s'agit essentiellement des extrémités des lignes initiales. A partir de la, on procède de la manière suivante:

- on détermine une ligne en repérant un couple  $(A, B)$ ;
- on trouve la suite des  $\{A_i\}$  compris entre  $A$  et  $B$ ;
- on forme une courbe  $C$ , approchant la ligne  $AB$ , en échantillonnant cette ligne en  $p + 2$  échantillons construits par approximation cubique. Prenant 4 points de  $AB$  "consécutifs" (voir ci-dessous), on définit la portion de courbe  $C(t)$  comme:

$$C(t) = [T][\mathcal{M}][\mathcal{P}_i]$$

avec:

$$[T] = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]$$

$$[\mathcal{P}] = {}^t [P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad P_3]$$

et

$$[\mathcal{M}] = 0.5 \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où:

- $P_0$  est le point situé avant  $A$  sur le contour initial,
- $P_1$  est le point  $A_0$ , alias  $A$ ,
- $P_2$  est le point  $A_1$ ,
- $P_3$  est le point  $A_2$ ,

qui définit l'échantillonnage de la portion de ligne comprise entre  $A_0$  et  $A_1$ , puis, en décalant de 1:

- $P_0$  devient le point  $A_0$ ,
- $P_1$  devient le point  $A_1$ ,
- $P_2$  devient le point  $A_2$ ,
- $P_3$  devient le point  $A_3$ ,

qui définit l'échantillonnage de la portion de la ligne comprise entre  $A_1$  et  $A_2$ ; on poursuit le décalage de 1 et la définition de la portion de ligne associée jusqu'à ce que:

- $P_0$  soit le point  $A_{n-2}$ ,
- $P_1$  soit le point  $A_{n-1}$ ,
- $P_2$  soit le point  $A_n$ , alias  $B$ ,
- $P_3$  soit le point situé après  $B$  sur le contour initial,

qui permet de définir l'échantillonnage de la portion de ligne comprise entre  $A_{n-1}$  et  $A_n$ .

**Remarque :** Si  $P_1$  est un point anguleux, on construit  $P_0$  comme le symétrique du point  $P_2$  par rapport au point  $P_1$ . Il en va de même si  $P_2$  est un point anguleux. Un point est dit anguleux si l'angle formé entre le point précédent, le point considéré et son suivant est plus grand qu'un seuil donné.

Chaque portion de courbe passe par les points  $P_1$  et  $P_2$  en se servant des points  $P_0$  et  $P_3$  pour définir les tangentes en  $P_1$  et  $P_2$ . La tangente en  $P_1$  est définie comme  $\vec{t}_1 = 0.5P_2\vec{P}_0$  tandis que la tangente en  $P_2$  est  $\vec{t}_2 = 0.5P_3\vec{P}_1$ .  $C(t)$  est de classe  $C^1$  (voir les figures 10 et 11). En résultat, on obtient un échantillonnage de la ligne  $AB$  en construisant  $C$ , son approximation, comme la mise bout à bout des différents  $C(t)$ . La courbe  $C$  passe par les points  $\{A_i\}, (i = 0, n)$  et est de classe  $C^1$  par construction.

On utilise alors cet échantillonnage pour former la nouvelle discrétisation du contour. Considérons une ligne  $AB$  et notons  $[E_k, E_{k+1}]$  un segment de son échantillonnage (on a  $E_1 = A$  et  $E_{p+1} = B$ ):

On pose  $k = 1$ ,  $debut = 1$ ,  $fin = p$ ,  $new = 0$  et on initialise  $P$ , le pivot de recherche, par  $A$ . L'algorithme de remaillage est alors le suivant:

#### Algorithme 1:

- on pose  $i = 0$  et on crée comme point initial le point  $M_i = A$ ,

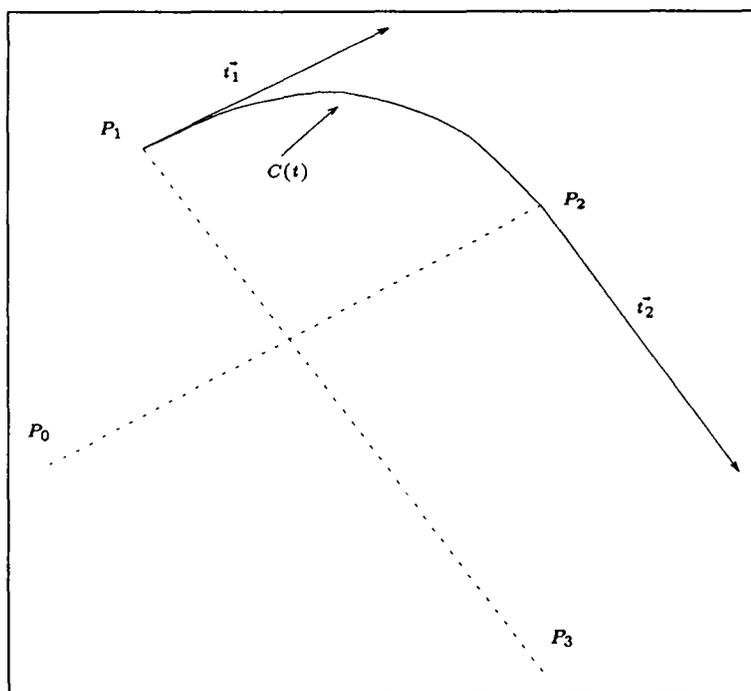


Figure 10: *Approximation cubique (situation normale).*

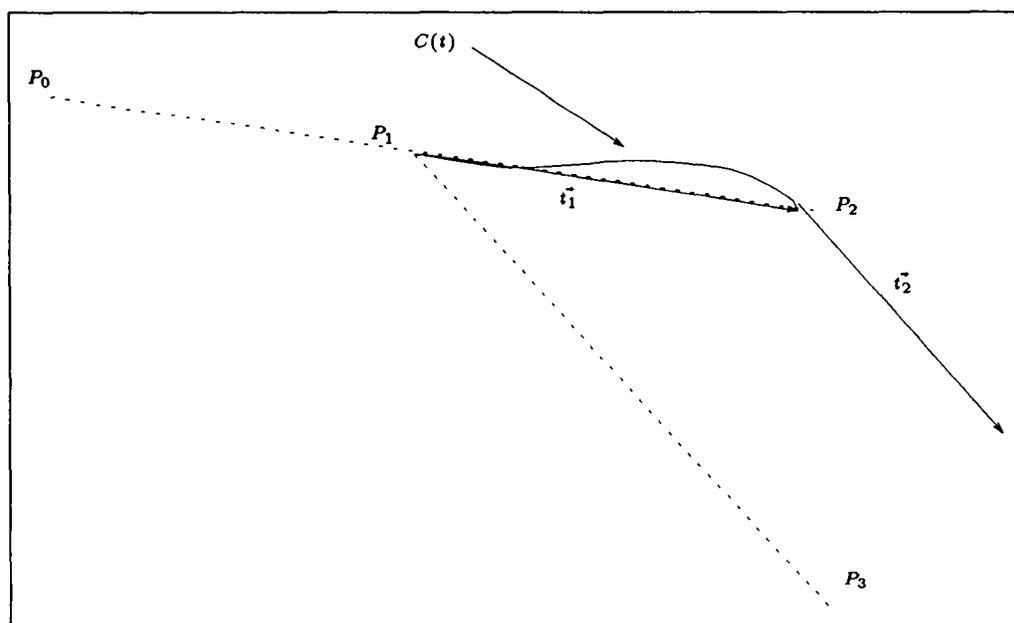


Figure 11: *Approximation cubique (point anguleux).*

- a): pour  $k = debut, fin$

- on pose  $d_1 = 0$  si  $new \neq k$ , sinon on calcule  $d_1 = d(P, E_k)$  la distance entre  $P$  et  $E_k$ ,
- on calcule  $d_2 = d(P, E_{k+1})$  la distance entre  $P$  et  $E_{k+1}$ ,
- si  $h(P)$  est compris entre  $d_1$  et  $d_2$ , on calcule:

\*

$$\alpha = \frac{h(P) - d_1}{d_2 - d_1}$$

si  $new \neq k$  ou

\*

$$\alpha = \frac{d(P, E_k) + h(P)}{d(E_k, E_{k+1})}$$

sinon,

- \* on fait  $i = i + 1$  et on construit le point  $M_i = E_k - \alpha(E_k - E_{k+1})$ ,

- \* on affecte  $new = k$ ,  $debut = k$ , on remplace le pivot de recherche  $P$  par  $M_i$  puis on va en a),

- sinon on fait  $k = k + 1$  et on continue la boucle,

- on fait  $i = i + 1$  et on crée comme point final le point  $M_i = B$ . □

Notons que cet algorithme suppose implicitement une régularité raisonnable du champ des  $h$ . En particulier il est bon de:

- supprimer le point situé immédiatement avant  $B$  dans le cas où il est trop proche de  $B$ ,
- s'assurer qu'en passant d'un point au suivant on n'a pas traversé une zone où le  $h$  passe par des valeurs très inférieures qui seraient ainsi violées,
- rééquilibrer la distribution de points créés.

La sortie de cet algorithme est l'ensemble des points  $M_i$  qui forme la nouvelle discrétisation de la ligne  $AB$ . Appliqué à chaque ligne de chaque composante du contour initial, il permet de former le remaillage cherché.

La méthode consiste alors à redémarrer l'algorithme général en prenant comme donnée ce remaillage de la frontière du domaine complété des éventuels points internes spécifiés. On obtient de la sorte le nouveau maillage du domaine ne comprenant comme sommets d'éléments que les points donnés. Après avoir régénérer la discrétisation du contour et après avoir marquer les éléments, il faut créer puis insérer les points internes.

### 3.4 Création et positionnement des points internes

On dispose, à ce stade, d'un maillage  $T$  dont les éléments sont marqués. Ce maillage ne contient comme sommets que les points de la frontière donc est (généralement) impropre aux calculs. Il est donc nécessaire de créer des points internes dans les éléments marqués puis de les insérer dans  $T$ . Pour procéder à ce travail, il faut répondre, comme dans le cas classique, aux deux questions suivantes:

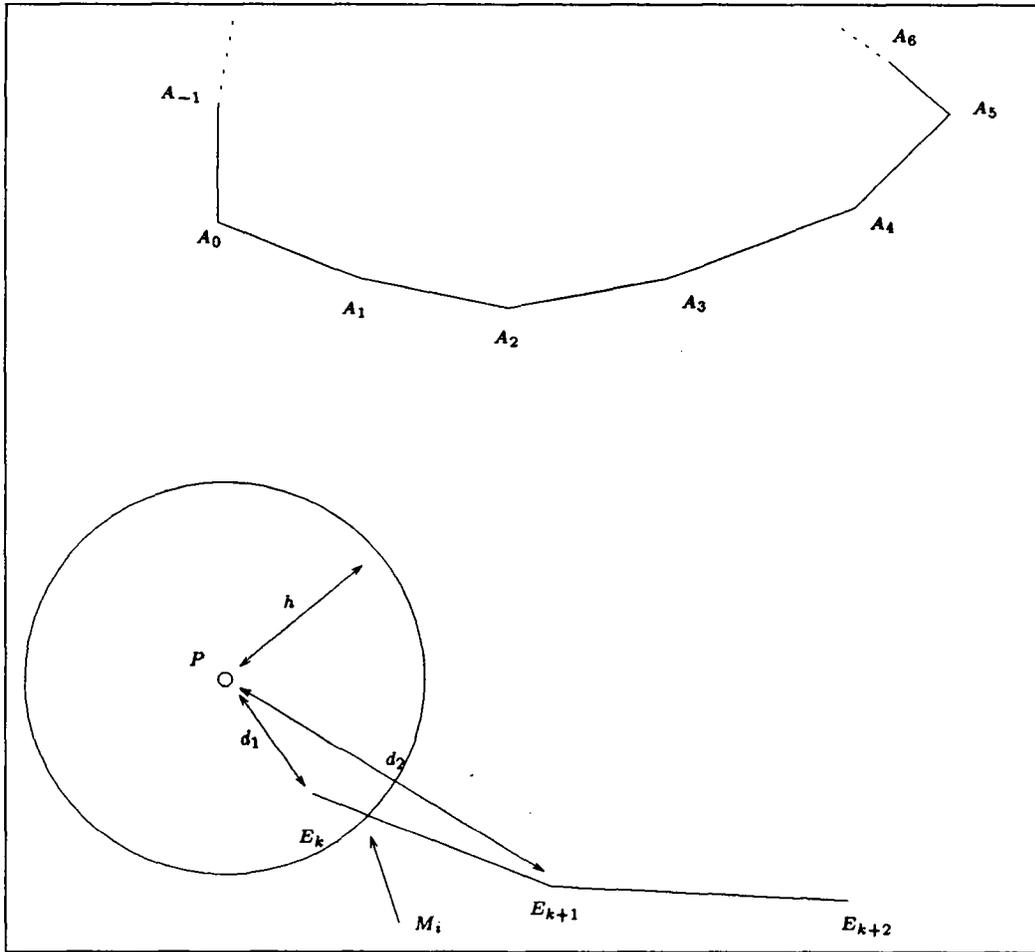


Figure 12: *Remaillage d'une ligne.*

- Faut-il créer un (des) point(s) dans un triangle de  $T$  ?
- Où mettre ce (ces) points ?

Les **données**, actuellement disponibles, sont:

- la description discrète de la frontière du domaine (et éventuellement la donnée de quelques points internes),
- l'espace de contrôle précédemment créé.

La réponse aux deux questions posées est alors guidée par ces connaissances. Pour des raisons de simplicité, qui apparaîtront par la suite, on ne va créer de points que sur les arêtes du maillage,  $T$ , actuellement connu. Ensuite, on itérera le processus. Ceci constitue une différence importante avec la version "naturelle" du mailleur où l'on construisait les points sur les arêtes puis dans les éléments en une seule passe. La méthode proposée est la suivante:

- on considère les arêtes internes des éléments de  $T$  et on construit  $n$  points sur chaque arête en utilisant une méthode analogue à celle employée pour remailler la frontière (en pratique, la situation est beaucoup plus simple puisque les arêtes sont des segments de droite et la partie approximation cubique n'est pas utile);
- parmi les points, ainsi créés, on empile ceux qui ne sont pas trop proches (au sens de leur  $h$ ) d'un point existant.

Pour filtrer les points, i.e. effectuer la deuxième partie de l'étape de création des points internes, chaque case de la grille de contrôle est analysée: si elle contient plusieurs points, ceux-ci sont comparés et supprimés le cas échéant (en fonction de leur  $h$ ); sinon on regarde les cases voisines (en spirale, voir de nouveau la figure 4) tant que les points présents sont trop proches au regard des  $h$  des points examinés.

Appliquant l'opération précédente à tous les triangles marqués de  $T$ , on dispose, à ce stade, d'une série de points correctement placés sur les arêtes de  $T$ . Ces points sont insérés dans  $T$  en utilisant les algorithmes décrits au début du papier:

- Faire, pour tous les points de la pile:
  - Insérer le point dans  $T$
- Fin.

Contrairement au cas classique, une fois ces points insérés, on itère le processus en analysant de nouveau les arêtes du maillage obtenu tant que des points sont créés (en pratique, comme on le verra à la section 4, très peu d'itérations sont nécessaires).

La fin de cette sous-section donne quelques indications sur le traitement d'une arête (partie un de la méthode de création des points internes).

A ce stade, il suffit d'examiner les arêtes internes (les arêtes frontières ont déjà été traitées lors de la phase de remaillage des contours). On utilise la grille de contrôle

constituée au départ. Cette grille comprend  $n \times n$  cases carrées ( $n$  étant déterminé à partir de la taille de la grille et de la taille du plus petit  $h$  de contrôle<sup>2</sup>). Soit donc  $AB$  une telle arête, on détermine les indices des cases de la grille contenant  $A$  et  $B$ , soient  $ind_i(A), ind_j(A)$  et  $ind_i(B), ind_j(B)$  ces indices. On échantillonne alors  $AB$  en  $p = 2 \times \max(|ind_i(A) - ind_i(B)|, |ind_j(A) - ind_j(B)|)$  échantillons  $E_k, E_{k+1}$  avec  $E_1 = A$  et  $E_{p+1} = B$ . Il suffit alors d'appliquer l'algorithme 1 ci-dessus.

### 3.5 Autres étapes de la méthodes

Les autres étapes de la méthode sont identiques à celles du cas classique (processus d'insertion d'un point, régénération d'une frontière, marquage des éléments), hormis la régularisation qui doit, pour des raisons de cohérences, utiliser des formules d'attraction-répulsion plutôt que des barycentrages simples (ou contrôlés).

### 3.6 Schéma général

L'ensemble de la discussion précédente conduit à construire pour le mailleur gouverné le schéma suivant:

- lecture des données (contour discrétisé du domaine et éventuels points internes),
- lecture du maillage de contrôle et du champ de contrôle associé,
- création de l'espace de contrôle à partir du maillage de contrôle et de son complémentaire par rapport à la boîte englobant le domaine,
- remaillage du contour.

Suivi de:

- lecture des nouvelles données (contour remaillé et éventuels points internes),
- création et maillage d'un quadrilatère englobant le domaine,
- insertion des points connus à ce stade (points du contour et éventuels points internes),
- régénération de la discrétisation du contour remaillé,
- marquage des éléments internes,
- création des points internes dans les éléments marqués,
- insertion, parmi tous ces points, des points retenus après filtrage via l'espace de contrôle,
- suppression des éléments externes.

---

<sup>2</sup>Dans le cas où les tailles spécifiées sont très différentes, une structure de quadtree est préférable à une structure de grille régulière. En fait, l'utilisation d'une grille ou d'un quadtree n'est qu'une facilité informatique permettant de trouver rapidement le  $h$  d'un point. En théorie on pourrait se passer de cette structure et travailler directement à partir du maillage de contrôle

- régularisation éventuelle du maillage obtenu.

Ce mailleur est construit à partir du mailleur Voronoï de la bibliothèque Modulef (cf. [4]) décrit dans la section 2 et présenté en détails dans [3]. Il utilise comme données les données habituelles plus un maillage de contrôle (une structure de données *NOPO*, la structure de maillage de la bibliothèque Modulef) et un champ de contrôle contenant en chaque sommet du maillage de contrôle la taille souhaitée (ce champ est une structure de données *B*, la structure ad-hoc de cette bibliothèque).

## 4 Exemples

Pour valider la méthode, plusieurs types de domaines ont été traités. L'exemple de la figure 14 montre le cas d'un domaine non convexe de frontière à une seule composante. Le cas de domaine de frontière à plusieurs composantes est montré sur les figures 19 et 21. Les autres exemples concernent un domaine carré avec plusieurs types de contrôle.

Dans le maillage  $M_{cont}$  (figure 13), la taille moyenne autour des sommets, le  $h_{loc}$ , est de l'ordre de 11. Afin de tester la méthode d'adaptation, on construit alors un champ de contrôle,  $CH_{cont}$ , constant de valeur 7. La figure 14 montre le maillage obtenu avec ce contrôle. Le maillage initial compte 536 triangles tandis que le maillage contrôlé en compte 1199. Il semble donc que le résultat obtenu correspond au contrôle fourni comme le montre le rapport entre les deux nombres d'éléments et le carré du rapport entre les  $h_{loc}$ .

La figure 15 montre le maillage obtenu en utilisant la méthode dans sa version classique. Les figures suivantes montrent les maillages obtenus pour différentes sortes de contrôle. Le premier cas, figure 16, correspond à une carte de  $h_{loc}$  radiale. La taille est fonction de la distance au centre du domaine et diminue quand on s'approche de ce centre:

$$h(x, y) = 0.25\sqrt{(x - 5)^2 + (y - 5)^2} + 0.1$$

(le domaine étant  $[0, 10] \times [0, 10]$ ).

Pour le second cas, figure 17, le contrôle impose de tasser les éléments sur la diagonale du carré:

$$h(x, y) = 0.1 \times |x - y| + 0.1$$

Le dernier cas, figure 18, correspond à un contrôle le long d'une direction (l'axe des  $x$ ) symétrique par rapport à la valeur  $x = 5.$ , plus on se rapproche de la droite  $x = 5.$  et plus la taille demandée est grande:

$$h(x, y) = 0.2 \times (5 - |x - 5|) + 0.1$$

Il semble que ces trois cas test traduisent bien le contrôle donné.

Les derniers exemples montrent des domaines dont la frontière possède plusieurs composantes. La figure 19 montre le maillage obtenu en utilisant la méthode dans sa version classique. La figure suivante montre le maillage obtenu avec une carte de  $h_{loc}$  constante. La figure 21 montre le maillage obtenu en utilisant la méthode dans sa version classique. La figure suivante montre le maillage obtenu avec une carte de  $h_{loc}$  imposant de tasser les éléments sur la diagonale du carré correspondant à l'enveloppe convexe du domaine (ce contrôle est du même type que celui de l'exemple de la figure 17).

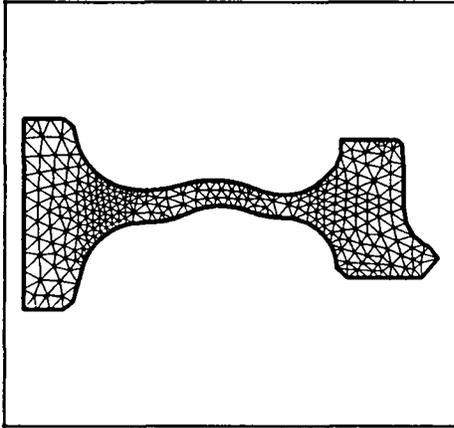


Figure 13: *Maillage initial.*

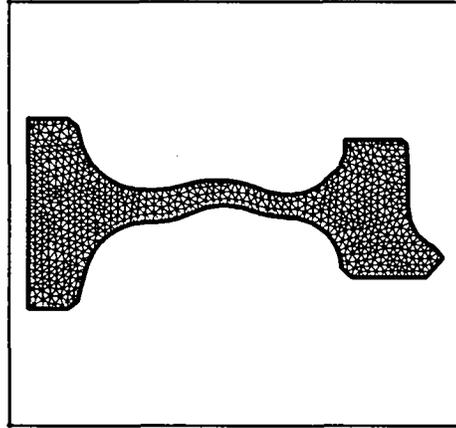


Figure 14: *Maillage controlé (0).*

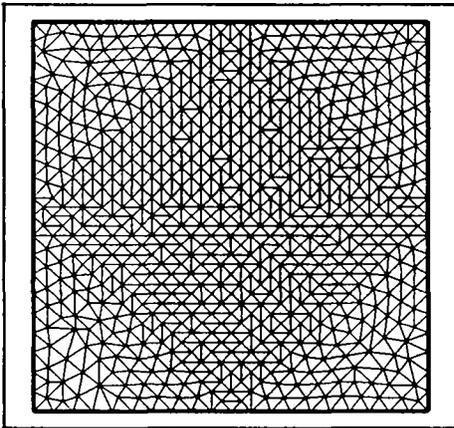


Figure 15: *Maillage initial.*

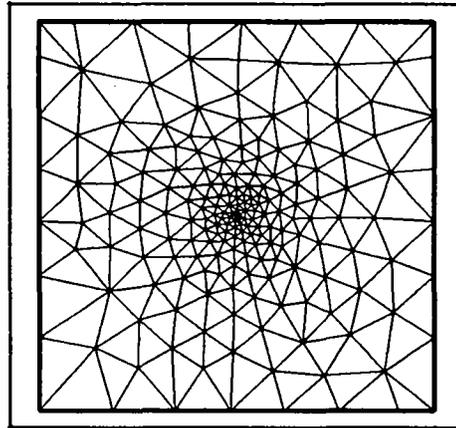


Figure 16: *Maillage controlé (1).*

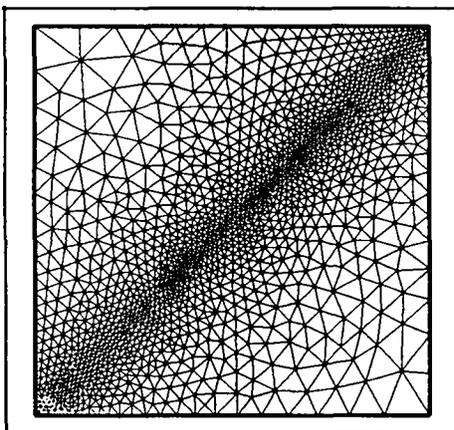


Figure 17: *Maillage controlé (2).*

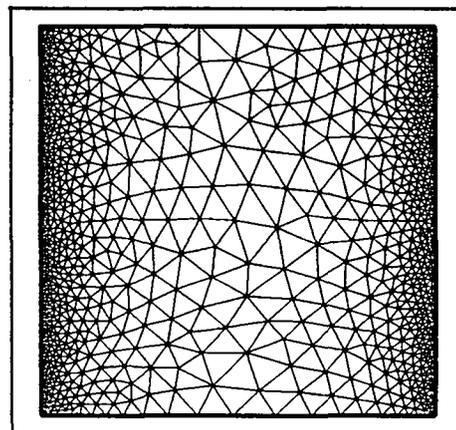


Figure 18: *Maillage controlé (3).*

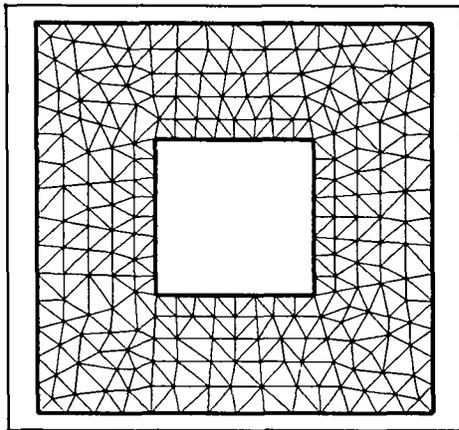


Figure 19: *Maillage initial.*

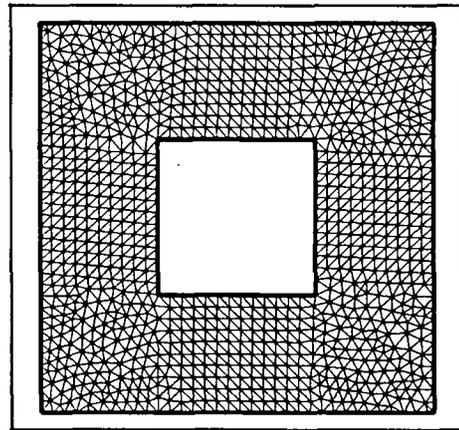


Figure 20: *Maillage controlé (4).*

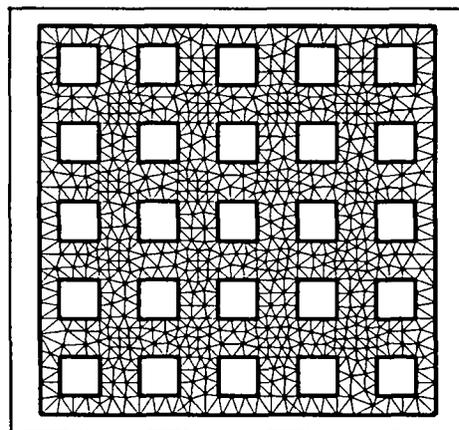


Figure 21: *Maillage initial.*

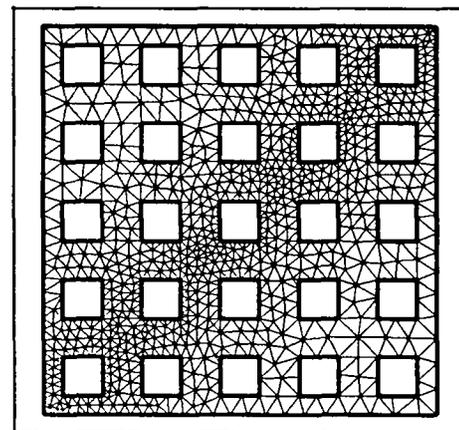


Figure 22: *Maillage controlé (5).*

Les statistiques relatives à ces exemples sont donnés dans les tableaux suivants avec:

- $np$  le nombre de sommets,
- $ne$  le nombre de triangles,
- $Q$  la qualité du maillage,
- $nq$  le nombre de triangles de qualité plus mauvaise que 1.5,
- $t$  le temps CPU nécessaire (en secondes sur une station HP 425),
- $iter$  le nombre d'itérations sur les arêtes lors de la création des points internes.

La qualité d'un maillage est mesurée comme la qualité du plus mauvais triangle de ce maillage. La qualité d'un triangle est calculée par:

$$Q = \alpha \frac{h}{\rho}$$

avec  $h$  le diamètre du triangle (la longueur de son plus grand côté),  $\rho$  le rayon de son cercle inscrit et  $\alpha$  un coefficient de normalisation tel que la qualité d'un triangle équilatéral soit 1.

-	np	ne	Q	nq	t	iter
Maillage initial	325	536	1.82	20	5.5	.
Controle	691	1199	2.09	26	14.7	5

Tableau 1 : *Cas numéro 0.*

-	np	ne	Q	nq	t	iter
Maillage initial	741	1400	1.90	16	4.3	.
Controle 1	197	364	1.84	6	16.0	5
Controle 2	1595	3090	1.74	18	33.2	6
Controle 3	1104	1958	1.87	52	26.2	5

Tableau 2 : *Cas numéros 1, 2 et 3.*

-	np	ne	Q	nq	t	iter
Maillage initial	277	466	1.87	30	2.6	.
Controle	1063	1938	1.80	8	16.8	5

Tableau 3 : *Cas numéro 4.*

-	np	ne	Q	nq	t	iter
Maillage initial	879	1410	1.87	32	9.2	.
Controle	918	1466	2.33	35	15.8	5

Tableau 4 : *Cas numéro 5.*

## 5 Conclusion

La méthode proposée dans ce papier semble réagir de manière appropriée vis-à-vis d'une carte de  $h_{loc}$  spécifiée par l'utilisateur. Les modifications à apporter au mailleur classique ont été peu nombreuses et concernent essentiellement la construction de l'espace de contrôle, le remaillage de la frontière du domaine et la manière de créer les points internes.

Une suite naturelle de ce travail consiste à étendre la méthode au cas directionnel ou anisotrope lorsque l'on cherche à obtenir des éléments étirés dans une direction, ceci nécessite de changer de métrique, cf. [7], pour créer comme point optimal (cf. section 2) non plus le point tel que le triangle formé soit équilatéral mais tel que ce triangle soit optimal pour la métrique associée.

Un autre point à développer est la mise en place de la méthode de contrôle dans le cas d'un mailleur automatique de type Delaunay-Voronoi en dimension 3, cf. [5] pour la version "naturelle" dans ce cas.

Enfin, à partir du moment où l'on dispose d'un mailleur automatique contrôlable, il faut l'appliquer sur différents problèmes physiques pour lesquels on donne des champs de contrôle non plus sous forme de fonction analytique (comme cela a été fait ici pour montrer la validité de la méthode de maillage) mais comme le résultat de l'analyse des résultats physiques obtenus. La champ de contrôle est alors la traduction en termes de taille de l'évolution de la solution via un estimateur approprié.

## References

- [1] P.G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problem*, North Holland, 1978.
- [2] P.L. GEORGE, Génération automatique de maillage. Applications aux méthodes d'éléments finis, Masson, *RMA* n° 16, Paris, 1991. Also as Automatic mesh generation. Applications to finite element methods, Wiley, 1991.
- [3] P.L. GEORGE, Génération de maillages par une méthode de type Voronoï, *RR INRIA* n° 1398, 1991.
- [4] P.L. GEORGE, Construction et modification de maillages, *Guide Modulef* n° 3, 1993.
- [5] P.L. GEORGE, Génération de maillages par une méthode de type Voronoï, partie 2: le cas tridimensionnel, *RR INRIA* n° 1664, 1992.
- [6] P.L. GEORGE, E. SALTEL, Mailleur frontal bidimensionnel contrôlé par une carte de tailles, *RR INRIA* n° 1917, 1993.
- [7] M.G. VALLET, Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs, Thèse, Université Paris 6, 1992.



---

Unité de Recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
Unité de Recherche INRIA Lorraine Technopôle de Nancy-Brabois - Campus Scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 VILLERS LES NANCY Cedex (France)  
Unité de Recherche INRIA Rennes IRISA, Campus Universitaire de Beaulieu 35042 RENNES Cedex (France)  
Unité de Recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex (France)  
Unité de Recherche INRIA Sophia Antipolis 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)

---

EDITEUR  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399



★ R R - 2 8 5 6 ★