HAL
open science

Calcul des modes guides dans un milieu elastique a symetrie de revolution

L. Chorfi

To cite this version:

L. Chorfi. Calcul des modes guides dans un milieu elastique a symetrie de revolution. [Rapport de recherche] RR-2152, INRIA. 1994. inria-00074520

HAL Id: inria-00074520

https://inria.hal.science/inria-00074520

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Calcul des modes guidés dans un milieu élastique à symétrie de révolution

Lahcène CHORFI

N° 2152
Janvier 1994

PROGRAMME 6

Calcul scientifique,
modélisation et
logiciels numériques

Rapport de recherche

1994

CALCUL DES MODES GUIDÉS DANS UN MILIEU ÉLASTIQUE À SYMÉTRIE DE RÉVOLUTION

COMPUTATION OF GUIDED MODES IN ELASTIC MEDIA WITH A SYMMETRY OF REVOLUTION

Lahcène CHORFI [1]

Résumé

Dans ce rapport, nous présentons une étude numérique de la propagation des ondes guidées dans un milieu élastique hétérogène à symétrie de révolution. Ce travail est une suite de l'étude mathématique que nous avons réalisée sur ce modèle dans un récent rapport [5]. Nous proposons un schéma numérique basé sur la méthode des éléments finis localisés qui consiste à poser le problème initial sur un domaine borné [15]. La méthode est validée sur des cas connus puis testée sur des milieux hétérogènes.

Mots Clés

Élasticité hétérogène, Mode Guidé, Courbe de Dispersion, Seuil, Opérateur à résolvante compacte, Eléments finis localisés.

Abstract

In this report, we present a numerical analysis of the propagation of guided waves in heterogeneous media with a symmetry of revolution. This work extends the mathematical analysis which we have achieved on this model in a recent report [5]. We propose a numerical schema based on the localized finite element method which consist to formulate the initial problem on bounded domain [15]. The method is validated on well-known cases and tested on others heterogeneous media.

KeyWords

Heterogeneous elasticity, Guided modes, Dispersion curves, Thresholds, Spectral theory, Operator with compact resolvant, Localized finite element.

[1] J.E.180, *Equations Aux Dérivées Partielles-Analyse Numérique.*
UFR-MIM. Université de Provence. Place Victor-Hugo, 13331 Marseille Cedex 3. France.

Table des matières

1 Position du problème et rappels **3**

2 Approximation numérique des valeurs propres discrètes **8**

2.1 Introduction 8

2.2 Formulation de $P_n(\beta)$ sur l'intervalle I 9

2.2.1 Opérateur de Dirichlet-Neumann 11

2.2.2 Position du problème $P_n^I(\beta)$ 12

3 Discrétisation de l'opérateur $C_n(\omega, \beta)$ **20**

3.1 Introduction 20

3.2 Interpolation des fonctions propres 21

3.3 Définition de $V_{n,h}(I)$ et théorème de convergence 27

3.4 Formulation matricielle 31

3.5 Méthode numérique pour le tracé des courbes de dispersion 36

4 Etude numérique de l'équation des seuils **38**

4.1 Formulation de l'équation des seuils sur I 38

4.2 Discrétisation de l'opérateur $d_n(\beta)$ 45

5 Résultats numériques **49**

5.1 Modes axisymétriques ($n = 0$) 49

5.1.1 Profil constant par morceaux 49

5.1.2 Profil en forme de sinus 53

5.2 Modes de flexion ($n = 1$) 59

5.2.1 Profil constant par morceaux 59

5.2.2 Le cas d'un profil en forme de sinus 61

5.2.3 Le cas d'un profil avec deux puits 63

A Relations de dispersion des modes axisymétriques : le cas d'un profil constant par morceaux **65**

A.1 Modes de torsion 65

A.2 Modes de compression. 68

Chapitre 1

Position du problème et rappels

On s'intéresse à la propagation d'ondes dans un milieu élastique occupant l'espace entier $\mathbf{R}^3$, et invariant dans la direction x_3 ((O, x_1, x_2, x_3) étant un repère orthonormé). De plus, on suppose que ce milieu présente une symétrie de révolution ; de façon précise les coefficients de Lamé (λ, μ) et la densité ρ sont des fonctions de la variable radiale $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ telles que :

1. λ, μ et $\rho \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$
2. $\lambda(r) = \lambda_\infty, \quad \mu(r) = \mu_\infty, \quad \rho = \rho_\infty \quad$ si $r \geq R$.
3. $$\begin{cases} 0 < \lambda_- \leq \lambda_+ \\ 0 < \mu_- \leq \mu_+ \\ 0 < \rho_- \leq \rho_+ \end{cases}$$

   où, pour $f \in L^\infty(\mathbf{R}^+)$ et $f \geq 0$, on a posé :

$$f_- = \operatorname*{ess\,inf}_{r \in \mathbf{R}^+} f(r), \qquad f_+ = \operatorname*{ess\,sup}_{r \in \mathbf{R}^+} f(r)$$

Nous définissons les vitesses :

$$\begin{cases} v_s = \left(\dfrac{\mu_\infty}{\rho_\infty}\right)^{\frac{1}{2}} : & \text{vitesse des ondes S du milieu extérieur} \quad (r \geq R) \\ v_p = \left(\dfrac{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}{\rho_\infty}\right)^{\frac{1}{2}} : & \text{vitesse des ondes P du milieu extérieur} \end{cases}$$

La figure 1.1 représente le domaine de propagation.

On s'intéresse aux modes guidés par les génératrices du cylindre intérieur $\{(r, x_3) : |r| \leq R\}$, c'est à dire aux champs de déplacements $\tilde{u}(x,t) = (\tilde{u}_r(x,t), \tilde{u}_\theta(x,t), \tilde{u}_3(x,t))$ solutions

des équations de l'élastodynamique en coordonnées cylindriques (r, θ, x_3) (cf.[7],[5]) dans $\mathbf{R}^3$ de la forme :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \tilde{u}(x,t) = \tilde{u}(r,\theta) \exp i(\omega t - \beta x_3) \\ \displaystyle\int_0^\infty |\tilde{u}(r,\theta)|^2 r dr d\theta < +\infty \end{cases}$$

ω et β sont des réels qui représentent respectivement la pulsation et le nombre d'onde.

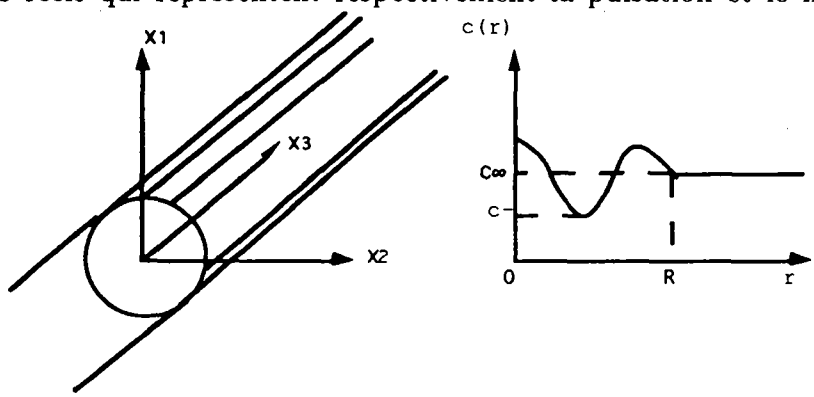


Fig. 1.1 : le milieu cylindrique et les variations des coefficients élastiques.

En décomposant l'amplitude $\tilde{u}(r,\theta)$ en série de Fourrier par rapport à la variable azimutale θ :

$$\begin{cases} \tilde{u}_r(r,\theta) &= u_1(r) \cos n\theta \\ \tilde{u}_\theta(r,\theta) &= u_2(r) \sin n\theta \\ \tilde{u}_3(r,\theta) &= -i u_3(r) \cos n\theta \end{cases}$$

on peut montrer que la recherche des modes guidés est équivalente à la suite des problèmes aux valeurs propres suivants [5] (n étant le numéro de l'harmonique) :

$$(\tilde{P}_n(\beta)) \qquad \begin{cases} Trouver \quad \omega \in \mathbf{R}^+ \quad et \quad u = (u_1, u_2, u_3), \quad u \neq 0 \quad tels \quad que : \\ \qquad -\dfrac{d}{dr}(B\dfrac{du}{dr}) + B_1 \dfrac{du}{dr} - \dfrac{d}{dr}(B_2 u) + B_3 u = \omega^2 \rho r u \quad dans \quad D'(\mathbf{R}^+) \\ \qquad et \qquad \int_0^\infty |u|^2 r dr < \infty \end{cases}$$

où les matrices B, B_i, $i = 1, 2, 3$, sont définies par :

$$B = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) r & 0 & 0 \\ 0 & \mu r & 0 \\ 0 & 0 & \mu r \end{pmatrix}$$

$$B_1 = B_2^t = \begin{pmatrix} \lambda & -n\mu & \beta\mu r \\ n\lambda & -\mu & 0 \\ -\beta\lambda r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{(n^2+2)\mu+\lambda}{r} + \beta^2\mu r & \dfrac{n(\lambda+3\mu)}{r} & -\beta\lambda \\ \dfrac{n(\lambda+3\mu)}{r} & \dfrac{(2n^2+1)\mu+n^2\lambda}{r} + \beta^2\mu r & -n\beta(\lambda+\mu) \\ -\beta\lambda & -n\beta(\lambda+\mu) & \dfrac{n^2\mu}{r} + \beta^2 r(\lambda+2\mu) \end{pmatrix}$$

Nous désignons par $a_n(\beta; u, v)$ la forme quadratique associée à $\hat{P}_n(\beta)$:

$$a_n(\beta; u, v) = \int_0^\infty (B\frac{du}{dr}\cdot\frac{dv}{dr} + B_1\frac{du}{dr}\cdot v + B_2 u\cdot\frac{dv}{dr} + B_3 u\cdot v)dr \qquad \forall u, v \in V_n$$

V_n est un espace de Hilbert muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{V_1}^2 = \int_0^\infty \Big(|\, u\,|^2 + |\,\frac{du}{dr}\,|^2 + \Big(\frac{u_1+u_2}{r}\Big)^2 + \Big(\frac{u_3}{r}\Big)^2\Big) r dr,$$

$$\|u\|_{V_n}^2 = \int_0^\infty \Big(|\, u\,|^2 + |\,\frac{du}{dr}\,|^2 + \frac{n^2+1}{r^2}(u_1^2+u_2^2) + n^2\Big(\frac{u_3}{r}\Big)^2\Big) r dr \qquad si \quad n \neq 1.$$

Cette forme est continue et coercive ; elle engendre un opérateur autoadjoint $A_n(\beta)$ défini par :

$$\begin{cases} D(A_n(\beta)) = \{u \in V_n; \mathcal{A}_n(\beta)u \in H\} \\ \mathcal{A}_n(\beta)u = \dfrac{1}{\rho r}\Big[-\dfrac{d}{dr}(B\dfrac{du}{dr} + B_2 u) + B_1\dfrac{du}{dr} + B_3 u\Big] \quad \text{au sens de } D'(\mathbf{R}^+)^3 \end{cases}$$

où $H = \{u \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+)^3; \sqrt{r}u \in L^2(\mathbf{R}^+)^3\}$ est un Hilbert (espace support) muni du produit scalaire :

$$(u, v) = \int_0^\infty u.v\rho r dr$$

La formulation spectrale du problème $\hat{P}_n(\beta)$ est donc :

$$(P_n(\beta)) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \omega^2 \in \mathbf{R}^+ \text{et } u \in D(A_n(\beta)), u \neq 0 \text{ vérifiant :} \\ A_n(\beta)u = \omega^2 u \end{cases}$$

Dans le problème $P_n(\beta)$, β apparaît comme un paramètre, ω^2 joue le rôle de valeur propre et u celui de fonction propre associée.

L'analyse mathématique du problème $P_n(\beta)$ a été menée dans ([5],[6]). Rappelons l'essentiel de ces résultats.

On montre que le spectre essentiel de l'opérateur $A_n(\beta)$ est l'intervalle $[\beta^2 v_s^2, +\infty[$ et que $A_n(\beta)$ n'admet pas de valeurs propres dans l'intervalle $]\beta^2 v_p^2, +\infty[$, la borne $\beta^2 v_p^2$ étant

l'unique point d'accumulation possible pour les valeurs propres. Dans certaines situations il peut exister des valeurs propres plongées dans le spectre continu, c'est à dire dans l'intervalle $[v_s^2\beta^2, v_p^2\beta^2]$ (cf. [12]). Les résultats concernant le spectre discret $\sigma_d(n)$ de l'opérateur $A_n(\beta)$ sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 1.1 *([5]) Posons $N_n(\beta) = card(\sigma_d(n))$ et $N(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} N_n(\beta)$. Alors*

- $\sigma_d(n) \subset \left[\frac{\mu_-}{\rho_+}, \beta^2 v_s^2\right[$
- $\forall\beta, \quad N(\beta)$ *est fini*
- *Si* $\int_0^R \left(\frac{\mu}{\rho} - \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}\right)\rho r dr > 0$ *alors* $N_1(\beta) > 1$ *pour tout* β
- *Si l'hypothèse* $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_- < v_s^2$ *est réalisée, alors* $\exists\beta_m^*(n) \geq 0$, $m \in \mathbf{N}^*$ *tel que :*

$$\begin{cases} \beta_m^*(n) < \beta < \beta_{m+1}^*(n) \Longrightarrow \sigma_d(n) = \{S_1^n(\beta), S_2^n(\beta), ..., S_m^n(\beta)\} \\ \beta_m^*(n) \nearrow +\infty \qquad quand\ m \to +\infty \end{cases}$$

  Le nombre $\beta_m^*(n)$ est appelé $m^{ième}$ seuil.

- $\beta_1^*(0) > 0, \quad \beta_1^*(1) = 0, \quad \beta_4^*(1) > 0, \quad \beta_m^*(n) > C(n-1)$ *si* $n \geq 2$ *(C étant une constante qui dépend de (λ, μ, ρ))*
- $\forall m \quad \limsup_{\beta\to+\infty} \frac{S_m^n(\beta)}{\beta^2} \leq \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_-$

On montre que les seuils $\beta_m^*(n)$ vérifient l'équation variationnelle :

Théorème 1.2 *([5]) Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $\beta_m^*(n)$ sont solutions du problème suivant :*

$$(S_n) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \beta \in \mathbf{R}^+ \text{ tel qu'il existe } u \text{ vérifiant :} \\ u \in W_n, \ u \neq 0 \\ q_n(\beta; u, v) = 0 \qquad \forall v \in W_n \end{cases}$$

avec

$$q_n(\beta; u, v) = a_n(\beta; u, v) - \beta^2 v_s^2(u, v)$$

W_n est un espace qui contient strictement V_n, il admet toute fonction $u = (u_1, u_2, u_3)$ qui vérifie tous les axiomes de V_n à l'exception du voisinage de l'infini où on n'impose pas aux composantes $\sqrt{r}u_1$ et $\sqrt{r}u_2$ d'appartenir à L^2.

Ce rapport complète l'étude théorique faite dans le rapport [5]. Le but est de proposer un schéma numérique qui permet le calcul des modes guidés (solutions du problème $P_n(\beta)$). Plus précisemment, il s'agit de :

(i) déterminer les seuils,

(ii) tracer les courbes de dispersion $\beta \longrightarrow S_m^n(\beta)$,

(iii) obtenir les champs de déplacement correspondants.

Présentation des résultats.

Au second chapitre , nous donnons une nouvelle formulation du problème $P_n(\beta)$ équivalente mais posé sur un intervalle borné. L'idée consiste à construire l'opérateur de "Dirichlet-Neumann" qui sert à relier la solution analytique du problème extérieur à la solution numérique du problème intérieur. Le chapitre 3 est consacré à la discrétisation de ce problème par éléments finis et à l'analyse d'erreur de l'approximation. Dans le choix des espaces d'éléments finis, nous avons tenu compte de la singularité du problème. Enfin, on obtient un problème matriciel qui convient à la mise en œuvre sur ordinateur. A notre connaissance, une telle étude n'a pas été faite auparavant avec la précision nécessaire (théorème de convergence et estimations d'erreur). Par contre, il existe dans les revues d'acoustique des travaux qui ont abordé l'aspect numérique mais de manière non rigoureuse. Nous pouvons citer l'article d'A.D. BURDEN [3] qui donne des résultats numériques concernant la propagation d'ondes de surface le long d'une cavité cylindrique de section elliptique, et les articles de LAGASSE ([14],[18]) où on approche par éléments finis les ondes élastiques dans les guides topographiques.

Pour le calcul des seuils, nous présentons, dans le chapitre 4, une méthode numérique qui reprend les idées du chapitre 2. On arrive à la conclusion (au moins dans le cas $n = 0$) que l'équation des seuils est un cas limite de l'équation de dispersion.

Dans le cinquième et dernier chapitre, nous présentons les résultats numériques. Pour valider la méthode proposée, nous comparons certains de ces résultats avec la solution exacte d'un problème modèle qui est calculée en annexe. Enfin nous effectuons des expériences numériques dans une situation à coefficients variables afin d'illustrer le guidage dû à des hétérogénéités du milieu.

Chapitre 2

Approximation numérique des valeurs propres discrètes

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude numérique du problème $P_n(\beta)$. Ce problème est posé sur l'intervalle non borné $]0,+\infty[$, ce qui présente des difficultés. Dans notre cas il est possible d'obtenir un problème posé sur un intervalle borné et rigoureusement équivalent au problème initial. Pour cela, on utilisera la méthode des éléments finis localisés étudiée par M. LENOIR [15] dans le cadre de l'hydrodynamique navale et également utilisée par A.S BONNET [2] pour le calcul des fréquences de coupure dans les fibres optiques.

La méthode consiste à relier deux représentations de la solution, l'une étant numérique sur l'intervalle $]0,R[$, et l'autre analytique sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Avant d'exposer la méthode, introduisons quelques notations.

Désignons par $I =]0,R[$ et $I' =]R,+\infty[$.

Pour $J = I$ ou I', on pose :

$$H(J) = \{u \in L^2_{loc}(J)^3;\ \sqrt{r}u \in L^2(J)^3\}; \qquad \|u\|_J^2 = \int_J |u|^2 \rho r dr$$

$$V_n(J) = \{u|_J\,;\ u \in V_n\}; \quad \text{munis des normes induites.}$$

L'espace V_n a été introduit au chapitre 1. $H(J)$ et $V_n(J)$ sont deux espaces de Hilbert.

$$a_n^J(\beta;u,v) = \int_J \left[\left(B\frac{du}{dr} + B_2 u\right)\cdot\frac{dv}{dr} + B_1\frac{du}{dr}\cdot v + B_3 u\cdot v\right] dr, \quad u,v \in V_n(J)$$

2.2 Formulation de $P_n(\beta)$ sur l'intervalle I

Introduisons le problème auxiliaire suivant :

$$(Q_n(\omega,\beta)) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in V_n(I') \text{ vérifiant :} \\ A_n(\beta)u = \omega^2 u \quad \text{sur} \quad I' \\ u(R) = \phi, \quad \phi \quad \text{donné} \end{cases}$$

Lemme 2.1 *Si $0 \leq \omega < \beta v_s$, $Q_n(\omega,\beta)$ possède une solution unique $u = R(\omega,\beta)\phi$. De plus $R(\omega,\beta)$ est un opérateur linéaire borné qui vérifie :*

$$\|R(\omega,\beta)\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^3, H(I'))} \leq \frac{C_1\beta^2 + C_0}{\beta^2 v_s^2 - \omega^2} \tag{2.1}$$

Preuve Le lemme est une conséquence du Lemme de Lax-Milgram et de la coercivité de $a_n^{I'}(\beta; u, v)$. En effet en reprenant la démonstration de la proposition 2.12 de la [5], on établit l'inégalité :

$$a_n^{I'}(\beta; u, u) - \beta^2 v_s^2 \|u\|_{I'}^2 = b_n^{I'}(\beta; u, u) \geq 0 \qquad \forall u \in V_{n,0}(I')$$

L'expression de $b_n^{I'}(\beta; u, u)$ s'obtient à partir de $b_n(\beta; u, u)$ (cf. [5], formule (2.9)) en intégrant sur l'intervalle I'.

L'espace $V_{n,0}(I')$ est défini par :

$$V_{n,0}(I') = \{u \in V_n(I');\ u(R) = 0\}.$$

Par conséquent l'opérateur $A_{n,0}(\beta)$ défini par :

$$\begin{cases} D(A_{n,0}(\beta)) = \{u \in V_{n,0}(I');\ \mathcal{A}_n(\beta)u \in H(I')\} \\ A_{n,0}(\beta)u = \mathcal{A}_n(\beta)u \quad sur\ I' \end{cases}$$

est autoadjoint et possède un spectre inclu dans l'intervalle $[\beta^2 v_s^2, +\infty[$.

Nous construisons un relèvement de ϕ, noté u_ϕ, de la façon suivante :

$$u_\phi(r) = w(r - R)\phi$$

avec $w \in D([0, +\infty[)$, $w(0) = 1$ et $0 \leq w \leq 1$.

Posons

$$\bar{u} = u - u_\phi$$

Alors le problème $Q_n(\omega, \beta)$ est équivalent à :

$$\bar{Q}_n(\omega, \beta) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \bar{u} \in V_{n,0}(I') \text{ vérifiant :} \\ (A_{n,0}(\beta) - \omega^2)\bar{u} = f \in H(I') \end{cases}$$

avec $f = -(\mathcal{A}_n(\beta) - \omega^2)u_\phi$.

Comme $\omega^2 < \beta^2 v_s^2$, ω^2 n'appartient pas au spectre de $A_{n,0}(\beta)$, et $\bar{Q}_n(\omega, \beta)$ possède une solution unique qui vérifie :

$$\|\bar{u}\|_{I'} \leq \frac{\|f\|_{I'}}{\beta^2 v_s^2 - \omega^2}$$

D'autre part on peut établir les inégalités :

$$\left| \begin{array}{l} \|u_\phi\|_{I'} \leq C|\phi| \\ \|f\|_{I'} \leq (C_1\beta^2 + C_0)|\phi| \end{array} \right.$$

ce qui entraîne :

$$\|u\|_{I'} \leq \|\bar{u}\|_{I'} + \|u_\phi\|_{I'} \leq \frac{(C_1\beta^2 + C_0)}{\beta^2 v_s^2 - \omega^2}|\phi|$$

Ainsi le lemme est établi. □

Remarque 2.2 L'expression analytique de la solution $u(r)$ est donnée par ([8], page 776, formules (8.9.17)) :

$$u(r) = A_n\chi_n^{(1)}(r) + B_n\chi_n^{(2)}(r) + C_n\chi_n^{(3)}(r) \quad (r > R) \tag{2.2}$$

avec

$$\chi_n^{(1)}(r) = \begin{pmatrix} -k_1K_{n-1}(k_1r) - \frac{n}{r}K_n(k_1r) \\ -\frac{n}{r}K_n(k_1r) \\ \beta K_n(k_1r) \end{pmatrix}$$

$$\chi_n^{(2)}(r) = \begin{pmatrix} \frac{n}{r}K_n(k_2r) \\ k_2K_{n-1}(k_2r) + \frac{n}{r}K_n(k_2r) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_n^{(3)}(r) = \begin{pmatrix} \beta\left(k_2K_{n-1}(k_2r) + \frac{n}{r}K_n(k_2r)\right) \\ \beta\frac{n}{r}K_n(k_2r) \\ -k_2^2K_n(k_2r) \end{pmatrix}$$

où

$$k_1^2 = \left(\beta^2 - \frac{\omega^2}{v_p^2}\right) \qquad k_2^2 = \left(\beta^2 - \frac{\omega^2}{v_s^2}\right)$$

Les coefficients (A_n, B_n, C_n) vérifient :

$$\left| \begin{array}{l} (A_n, B_n, C_n)^t = U_n^{-1}\phi \; ; \\ U_n = \left(\chi_n^{(1)}(R), \chi_n^{(2)}(R), \chi_n^{(3)}(R)\right) \end{array} \right.$$

2.2.1 Opérateur de Dirichlet-Neumann

Avec $u \in D(A_n(\beta))$, on pose :

$$t_n^\beta(u) = B\frac{du}{dr} + B_2 u$$

Comme

$$\mathcal{A}_n(\beta)u = \frac{1}{\rho r}\{ -\frac{d}{dr}(t_n^\beta(u)) + B_1 u + B_3 u\} \in H \quad .$$

on voit bien que $t_n^\beta(u)$ appartient à $H^1_{loc}(\mathbf{R}^+)^3$ de sorte que la trace $t_n^\beta(u)(R)$ est un vecteur de $\mathbf{R}^3$.

Remarquons que $t_n^\beta(u)$ est lié à la contrainte radiale $\sigma(\tilde{u})e_r$ du déplacement :

$$\tilde{u}(r,\theta,z) = u(r)\begin{pmatrix}\cos n\theta \\ \sin n\theta\end{pmatrix}\exp(-i\beta z)$$

par la formule :

$$\sigma(\tilde{u})e_r = \frac{1}{r}t_n^\beta(u)\begin{pmatrix}\cos n\theta \\ \sin n\theta\end{pmatrix}\exp(-i\beta z)$$

Dans notre cas, l'opérateur de Dirichlet-Neumann est une matrice (3×3) définie par :

$$B_n(\omega,\beta)\phi = t_n^\beta \circ R(\omega,\beta)\phi\Big|_{r=R} \quad \text{si } \phi \in \mathbf{R}^3$$

$B_n(\omega,\beta)$ admettant la décomposition suivante :

$$B_n(\omega,\beta) = \frac{2\mu}{R}T_n U_n^{-1}$$

avec

$$\frac{2\mu}{R}T_n = \left(t_n^\beta\chi_n^{(1)}(R), t_n^\beta\chi_n^{(2)}(R), t_n^\beta\chi_n^{(3)}(R)\right)$$

Après calcul, on obtient les coefficients de la matrice T_n :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T_n^{11} & = & \left[n^2 + n + \frac{1}{2}R^2(\beta^2 + k_2^2)\right] K_n(k_1R) + k_1RK_{n-1}(k_1R) \\ T_n^{12} & = & -n\left[(n+1)K_n(k_2R) + k_2RK_{n-1}(k_2R)\right] \\ T_n^{13} & = & -\beta\left[(n^2 + n + R^2k_2^2)K_n(k_2R) + k_2RK_{n-1}(k_2R)\right] \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} T_n^{21} &= n\left[(n+1)K_n(k_1R) + k_1RK_{n-1}(k_1R)\right] \\ T_n^{22} &= -\left(n^2+n+\dfrac{R^2k_2^2}{2}\right)K_n(k_2R) - k_2RK_{n-1}(k_2R) \\ T_n^{23} &= -n\beta\left[(n+1)K_n(k_2R) + k_2RK_{n-1}(k_2R)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_n^{31} &= -\beta R\left[nK_n(k_1R) + k_1RK_{n-1}(k_1R)\right] \\ T_n^{32} &= n\dfrac{\beta R}{2}K_n(k_2R) \\ T_n^{33} &= \dfrac{R}{2}(\beta^2+k_2^2)\left[nK_n(k_2R) + k_2RK_{n-1}(k_2R)\right] \end{cases}$$

Ces formules sont valables lorsque $n = 0$, il suffit d'identifier les fonctions $K_{-1}(r)$ et $K_1(r)$. Nous avons mené les calculs jusqu'au bout dans le cas particulier $n = 0$ (cas axisymétrique) et obtenu les coefficients de la matrice $B_0(\omega, \beta) = (b_{ij})$:

$$\begin{aligned} b_{12} &= b_{21} = b_{23} = b_{32} = 0 \\ b_{11} &= \mu_\infty\left[\frac{R^2k_2^2(\beta^2-k_2^2)}{k_2^2S(k_1R)-\beta^2S(k_2R)} - 2\right] \\ b_{22} &= -\mu_\infty\left[2+\frac{R^2k_2^2}{S(k_2R)}\right] \\ b_{33} &= \frac{\mu_\infty(\beta^2-k_2^2)S(k_1R)S(k_2R)}{k_2^2S(k_1R)-\beta^2S(k_2R)} \\ b_{31} &= b_{13} = \mu_\infty\beta R\left[\frac{k_2^2\left(S(k_1R)-S(k_2R)\right)}{k_2^2S(k_1R)-\beta^2S(k_2R)} + 1\right] \end{aligned}$$

avec

$$S(x) = \frac{xK_1(x)}{K_0(x)}$$

2.2.2 Position du problème $P_n^I(\beta)$

Dans ce paragraphe nous montrons que le problème $P_n(\beta)$ est équivalent à un problème $P_n^I(\beta)$ posé sur l'intervalle I.

Nous énonçons $P_n^I(\beta)$ comme suit :

$$\mathcal{P}_n^I(\beta) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \omega \geq 0 \text{ et } u \in V_n(I)\ , u \neq 0\ , \text{ vérifiant :} \\ \mathcal{A}_n(\beta)u = \omega^2 u \text{ sur } I & (E) \\ B\dfrac{du}{dr} + B_2 u\Big|_{r=R} = B_n(\omega,\beta)u(R) & (C.L) \end{cases}$$

A l'aide d'une intégration par parties et en utilisant la densité de $D(]0,R])^3$ dans $V_n(I)$, on montre que $P_n^I(\beta)$ est équivalent à la formulation variationnelle :

$$P_n^I(\beta) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \omega \geq 0 \text{ et } u \in V_n(I)\ , u \neq 0\ , \text{ vérifiant :} \\ a_n^I(\beta; u, v) - < B_n(\omega,\beta)u(R), v(R) >= \omega^2(u,v)_I \quad \forall v \in V_n(I) \end{cases}$$

Théorème 2.3 *1. Si (ω^2, u) est une solution de $P_n(\beta)$ alors $(\omega^2, u|_I)$ est une solution de $P_n^I(\beta)$.*

2. Réciproquement, si (ω^2, u) est une solution de $P_n^I(\beta)$, il existe un prolongement (unique) $\tilde{u}$ tel que $(\omega^2, \tilde{u})$ soit solution de $P_n(\beta)$.

Preuve Soit (ω^2, u) une solution de $P_n(\beta)$, alors u vérifie l'équation $\mathcal{A}(\beta)u = \omega^2 u$ sur $\mathbf{R}^+$, par suite $u|_I$ vérifie (E). La condition limite $(C.L)$ est vérifiée car $B\dfrac{du}{dr} + B_2 u = t_n^\beta(u) \in H^1_{loc}(\mathbf{R}^+)$, et donc $t_n^\beta(u)$ est continue à l'interface $r = R$.
Inversement, supposons que le couple (ω^2, u_1) soit une solution de $P_n^I(\beta)$.
Posons :

$$u_2 = R(\omega,\beta)u_1(R)$$

et

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{sur } I\ ; \\ u_2 & \text{sur } I' \end{cases}$$

Comme $u_2(R) = u_1(R)$, le principe de recollement entraîne que $u \in V_n$.
D'autre part, par construction, u vérifie l'équation $\mathcal{A}_n(\beta)u = \omega^2 u$ sur $\mathbf{R}^+$ ce qui implique que u est une solution de $P_n(\beta)$. Remarquons enfin que le prolongement de u_1 est unique (d'après le lemme 2.1). □

Nous introduisons la forme bilinéaire $c_n(\omega,\beta; u, v)$ définie par :

$$c_n(\omega,\beta; u, v) = a_n^I(\beta; u, v) - < B_n(\omega,\beta)u(R), v(R) > \qquad u, v \in V_n(I)$$

Cette forme est continue et symétrique sur $V_n(I)$.

On a le résultat de coercivité suivant :

Proposition 2.4 *Il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ et $C > 0$ tels que :*

$$c_n(\omega, \beta; u, u) + \lambda \|u\|_I^2 \geq C \|u\|_{V_n(I)}^2 \qquad \forall u \in V_n(I) \tag{2.3}$$

La démonstration utilise le lemme suivant :

Lemme 2.5 *Il existe deux constantes C_1 et C_2 (qui dépendent de R) telles que, pour tout $u \in V_n(I)$ et pour tout $0 < \epsilon \leq 1$, on ait :*

$$|u(R)|^2 \leq \frac{C_1}{\epsilon} \int_0^R |u|^2 r dr + C_2 \epsilon \int_0^R \delta_n(u) dr \tag{2.4}$$

avec

$$\delta_n(u) = \begin{cases} r|u'|^2 & si\ n = 0, 1\ ; \\ r|u'|^2 + \dfrac{|u|^2}{r} & si\ n \geq 2 \end{cases} \tag{2.5}$$

Preuve Soit $u \in V_n(I)$. Si $n \geq 2$, alors $\sqrt{r}u \in H^1(I)^3$ et $\lim_{r \to 0} \sqrt{r}u = 0$; ce qui justifie la formule :

$$R|u(R)|^2 = 2 \int_0^R \sqrt{r}u \frac{d}{dr}(\sqrt{r}u) dr$$

et entraîne, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} R|u(R)|^2 &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^R |u|^2 r dr + \epsilon \int_0^R \left| \frac{d}{dr}(\sqrt{r}u) dr \right|^2 dr \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^R |u|^2 r dr + 2\epsilon \int_0^R \left(r|u'|^2 + \frac{|u|^2}{r} \right) dr \end{aligned}$$

L'inégalité (2.4) est prouvée. Maintenant, si $n = 0, 1$, on a (voir [5], chapitre 2) :

$$ru \in H^1(I)^3 \quad et \quad \lim_{r \to 0} ru = 0$$

donc

$$R^2|u(R)|^2 = 2 \int_0^R ru \frac{d}{dr}(ru) dr$$

d'où

$$\begin{aligned} R^2|u(R)|^2 &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_0^R |u|^2 r dr + \epsilon \int_0^R \left| \frac{d}{dr}(ru) dr \right|^2 dr \\ &\leq \frac{C_1(R)}{\epsilon} \int_0^R |u|^2 r dr + C_2(R) \epsilon \int_0^R r|u'|^2 dr \end{aligned}$$

Le tout est vrai. □

Preuve de la proposition 1.4

Soit $u_1 \in V_n(I)$; nous posons :

$$u_2 = R(\omega, \beta) u_1(R)$$

et

$$\tilde{u} = \begin{cases} u_1 & \text{sur } I \\ u_2 & \text{sur } I' \end{cases}$$

On vérifie , sans difficultés, que :

$$c_n(\omega, \beta; u_1, u_1) = a_n(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) - \omega^2 (u_2, u_2)_{I'} \tag{2.6}$$

La coercivité de $a_n(\beta; ., .)$ (cf. [5], formule (2.1)) entraîne :

$$a_n(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) \geq \frac{\mu_-}{\rho_+} \beta^2 \|\tilde{u}\|^2 + \frac{1}{5} \mu_- \int_0^\infty D_n(\tilde{u}) dr \tag{2.7}$$

avec

$$D_n(\tilde{u}) = \begin{cases} |\frac{d\tilde{u}}{du}|^2 r + \frac{(n^2+1)}{r}(\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2) + \frac{n^2}{r}\tilde{u}_3^2 & \text{si } n \neq 1 \, ; \\ |\frac{d\tilde{u}}{du}|^2 r + \frac{(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2)^2}{r} + \frac{\tilde{u}_3^2}{r} & \text{si } n = 1 \, ; \end{cases}$$

où $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = \tilde{u}$.

En tenant compte simultanément de (2.6) et (2.7) on a :

$$\begin{aligned} c_n(\omega, \beta; u_1, u_1) \;\; &\geq \;\; \frac{\mu_-}{\rho_+} \beta^2 \|u_1\|_I^2 + \left(\beta^2 \frac{\mu_-}{\rho_+} - \omega^2 \right) \|u_2\|_{I'}^2 \\ &+ \;\; \frac{1}{5} \mu_- \int_0^R D_n(u_1) dr. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.1 il existe une constante $C(\omega, \beta) \geq 0$ telle que :

$$\|u_2\|_{I'}^2 \leq C(\omega, \beta) |u_1(R)|^2$$

ce qui entraîne avec (2.4) :

$$\|u_2\|_{I'}^2 \leq \left(\frac{C_1(\omega, \beta)}{\epsilon \rho_-} \|u_1\|_I^2 + C_2(\omega, \beta) \epsilon \int_0^R D_n(u_1) dr \right)$$

Comme $\omega \geq \frac{\mu_-}{\rho_+}$, on déduit

$$\begin{aligned} c_n(\omega, \beta; u_1, u_1) \;\; &\geq \;\; \left[\beta^2 \frac{\mu_-}{\rho_+} + \frac{C_1(\omega, \beta)}{\epsilon \rho_-} \left(\beta^2 \frac{\mu_-}{\rho_+} - \omega^2 \right) \right] \|u_1\|_I^2 \\ &+ \;\; \left[\frac{\mu_-}{5} - \epsilon C_2(\omega, \beta) \left(\beta^2 \frac{\mu_-}{\rho_+} - \omega^2 \right) \right] \int_0^R D_n(u_1) dr \end{aligned}$$

Nous choisissons ϵ pour que :

$$\frac{\mu_-}{5} - \epsilon C_2(\omega,\beta)\left(\beta^2\frac{\mu_-}{\rho_+} - \omega^2\right) > 0$$

puis λ tel que :

$$\lambda \geq -\beta^2\frac{\mu_-}{\rho_+} - \frac{C_1(\omega,\beta)}{\epsilon\rho_-}\left(\beta^2\frac{\mu_-}{\rho_+} - \omega^2\right)$$

Avec ce choix, il existe une constante $C(\omega,\beta,\epsilon) > 0$ telle que :

$$c_n(\omega,\beta;u_1,u_1) + \lambda\|u_1\|_I^2 \geq C(\omega,\beta,\epsilon)\|u_1\|_{V_n(I)}^2$$

Nous avons prouvé en même temps l'existence d'une constante C (qui dépend seulement de R) telle que :

$$c_n(\omega,\beta;u_1,u_1) \geq \left[\beta^2\frac{\mu_-}{\rho_+} - \frac{C}{\mu_-\rho_-}\left(\frac{\beta^2\frac{\mu_-}{\rho_+} - \omega^2}{\beta^2 v_s^2 - \omega^2}\right)^2\right]\|u_1\|_I^2$$

ce qui achève la démonstration. □

Notons par $C_n(\omega,\beta)$ l'opérateur engendré par la forme quadratique $c_n(\omega,\beta;.,.)$ de domaine :

$$\begin{cases} D(C_n(\omega,\beta)) = \left\{u \in V_n(I)\,;\mathcal{A}_n(\beta) \in H(I)\,;\, t_n^\beta(u)\Big|_{r=R} = B_n(\omega,\beta)u(R)\right\} \\ C_n(\omega,\beta)u = \mathcal{A}_n(\beta)u \quad \text{sur } I \end{cases}$$

Corollaire 2.6 *L'opérateur $C_n(\omega,\beta)$ est autoadjoint et à résolvante compacte. Son spectre $\{\lambda_k(\omega,\beta)\}_{k\in\mathbf{N}^*}$ vérifie :*

(i) $\lambda_k(\omega,\beta) \leq \lambda_{k+1}(\omega,\beta)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k(\omega,\beta) = +\infty$

(ii) $\lambda_1(\omega,\beta) \geq \beta^2\frac{\mu_-}{\rho_+} - \frac{C}{\mu_-\rho_-}\left(\frac{\beta^2\frac{\mu_-}{\rho_+} - \omega^2}{\beta^2 v_s^2 - \omega^2}\right)^2$

Preuve Le résultat découle du lemme de Lax-Milgram et de l'injection compacte de $V_n(I)$ dans $H(I)$. □

Corollaire 2.7 *Pour $0 \leq \omega < \beta v_s$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *ω^2 est une valeur propre de $A_n(\beta)$*

(ii) $\exists k \in \mathbf{N}^*/ \quad \lambda_k(\omega,\beta) = \omega^2$

Preuve C'est une conséquence immédiate du théorème 2.3.

Conséquence.

L'équation $\lambda_k(\omega,\beta) = \omega^2$ caractérise la relation de dispersion du mode guidé d'ordre k. Dans le prochain chapitre, nous approcherons numériquement la valeur de $\lambda_k(\omega,\beta)$, ce qui nous permettra de résoudre numériquement cette équation implicite par rapport à ω. La fonction propre de $A_n(\beta)$, associée à ω^2, sera alors l'unique prolongement sur $\mathbf{R}^+$ de la fonction propre de $C_n(\omega,\beta)$ associée à $\lambda_k(\omega,\beta)$.

Théorème 2.8 *Pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $\beta > 0$ fixés, la fonction :*

$$\omega \longmapsto \lambda_k(\omega,\beta) - \omega^2 \qquad (0 < \omega < \beta v_s)$$

est continue et strictement décroissante.

Preuve Pour $(\beta,\lambda) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, on introduit l'opérateur $A_n(\beta,\lambda)$ défini par :

$$\begin{cases} D(A_n(\beta,\lambda)) = D(A_n(\beta)) \\ A_n(\beta,\lambda)u = A_n(\beta)u - \lambda\chi_I u \quad \text{avec} \quad \chi_I(r) = \begin{cases} 1 & \text{sur } I\,; \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \end{cases}$$

L'injection de $V_n(I)$ dans $H(I)$ étant compacte, l'opérateur :

$$V_n \longmapsto H : \; u \longrightarrow \lambda\chi_I u$$

est compact. Ainsi $A_n(\beta,\lambda)$ est une perturbation compacte de $A_n(\beta)$. On en déduira, par le théorème de Weyl [19] que :

$$\begin{aligned} \sigma_{ess}(A_n(\beta,\lambda)) &= \sigma_{ess}(A_n(\beta)) = [\beta^2 v_s^2, \infty[\\ \sigma_d(A_n(\beta,\lambda)) &= \left\{S_m^n(\beta,\lambda); \quad 1 \le m \le N(\beta,\lambda)\right\} \end{aligned}$$

où les nombres $S_m^n(\beta,\lambda)$ sont définis par :

$$S_m^n(\beta,\lambda) = \sup_{[v_1,v_2,\ldots,v_m]} \left(\inf_{\substack{v \in [v_1,v_2,\ldots,v_m]^\perp \\ v \neq 0}} \frac{a_n(\beta;v,v) - (v,v)_I}{\|v\|^2} \right)$$

1- Montrons l'équivalence :

$$\exists m \in \mathbf{N}^* / \quad S_m^n(\beta,\lambda) = \omega^2 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbf{N}^* / \quad \lambda_k(\omega,\beta) - \omega^2 = \lambda \tag{2.8}$$

($\Longleftarrow$) Si $\lambda_k = \lambda + \omega^2$ alors il existe $u \in V_n(I)$, $u \neq 0$, tel que :

$$a_n^I(\beta;u,v) - < B_n(\omega,\beta)u(R), v(R) >= (\lambda + \omega^2)(u,v)_I \quad \forall v \in V_n(I) \tag{2.9}$$

D'autre part, si $u' = R(\omega, \beta)u(R)$, on a :

$$a_n^{I'}(\beta; u', v') + < B_n(\omega, \beta)u(R), v(R) >= \omega^2(u', v') \quad \forall v' \in V_n(I) \tag{2.10}$$

En posant :

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{sur } I\,; \\ u' & \text{sur } I'. \end{cases}$$

les équations (2.9) et (2.10) entraînent :

$$a_n(\beta; \tilde{u}, \tilde{v}) - \lambda(u, \tilde{v})_I = \omega^2(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in V_n$$

ce qui est équivalent à :

$$A_n(\beta, \lambda)\tilde{u} = \omega^2\tilde{u}$$

donc il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$S_m^n(\beta, \lambda) = \omega^2$$

($\Longrightarrow$) Inversement, supposons que $S_m^n(\beta, \lambda) = \omega^2$. Alors il existe $\tilde{u} \in V_n$, $\tilde{u} \neq 0$, tel que :

$$a_n(\beta; \tilde{u}, \tilde{v}) = \omega^2(\tilde{u}, \tilde{v}) + \lambda(\tilde{u}, \tilde{v})_I \quad \forall \tilde{v} \in V_n \tag{2.11}$$

Avec la décomposition :

$$\begin{cases} \tilde{u} & = & u + u' & \text{avec } u = \chi_I \tilde{u} \\ \tilde{v} & = & v + v' & \text{avec } v = \chi_I \tilde{v} \end{cases}$$

l'équation (2.11) s'écrit :

$$a_n^I(\beta; u, v) + a_n^{I'}(\beta; u', v') - \omega^2(u', v')_{I'} = (\lambda + \omega^2)(u, v)_I \tag{2.12}$$

Comme

$$\mathcal{A}_n(\beta)\tilde{u} - \lambda u = \omega^2\tilde{u} \quad \text{sur } \mathbf{R}^+$$

la fonction u' vérifie :

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\beta)u' = \omega^2 u' \text{ sur } I' \\ \\ u'(R) = u(R) \end{cases}$$

donc

$$u' = R(\omega, \beta)u(R)$$

et

$$a_n^{I'}(\beta; u', v') - \omega^2(u', v')_{I'} = - < B_n(\omega, \beta)u(R), v(R) >$$

ce qui entraîne en prenant en compte (2.12) que

$$a_n^I(\beta; u, v) - < B_n(\omega, \beta)u(R), v(R) >= (\omega^2 + \lambda)(u, v)_I$$

Ainsi il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $\omega^2 + \lambda = \lambda_k(\omega, \beta)$.
2– Le principe du Min – Max entraîne que les fonctions :

$$\lambda \longrightarrow S_n^m(\beta, \lambda)$$

sont décroissantes. Supposons maintenant que $S_m^n(\beta, \lambda)$ reste constante et égale à $\omega^2 < \beta^2 v_s^2$ pour $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. D'après (2.8) cela signifierait que $\lambda + \omega^2$ appartient au spectre de $C_n(\omega, \beta)$ ce qui est impossible puisque ce spectre est purement ponctuel. Donc la fonction $S_n^m(\beta, \lambda)$ est strictement décroissante dès que $S_n^m(\beta, \lambda) < \beta^2 v_s^2$.

Il apparaît d'après (2.8), au moins formellement, que les fonctions $\omega^2 \longrightarrow \lambda_k(\omega, \beta) - \omega^2$ sont les inverses de $\lambda \longrightarrow S_m^n(\beta, \lambda)$, donc strictement décroissantes. On peut démontrer rigoureusement cette affirmation comme il a été fait dans le travail de P. JOLY et J. TLILI ([9], théorème 2.3).

Remarque 2.9 Supposons que le profil du milieu vérifie la condition :

$$\inf_{r \in I} \left(\frac{\mu}{\rho}\right) < v_s^2$$

Alors, moyennant la technique du théorème 3.3 de [5], on prouve que :

$$\lim_{\omega \to \beta v_s} \lambda_k(\omega, \beta) < \beta^2 v_s^2 \quad (\beta > \beta_k^*(n) \text{ fixé})$$

Ceci joint à l'inégalité (ii) du corollaire 2.6 entraîne l'existence d'une solution unique de l'équation $\lambda_k(\omega, \beta) - \omega^2 = 0$ dans l'intervalle $\left[\beta^2 \frac{\mu_-}{\rho_+}, \beta^2 v_s^2\right[$. Ce résultat est en accord avec la définition de $\beta_k^*(n)$.

Chapitre 3

Discrétisation de l'opérateur $C_n(\omega, \beta)$

3.1 Introduction

Le but de ce chapitre consiste à approcher numériquement les valeurs propres et les fonctions propres de $C_n(\omega, \beta)$ ($\omega < \beta v_s$). Nous allons utiliser une méthode d'éléments finis basée sur la formulation variationnelle $P_n^I(\beta)$. On introduit un sous-espace $V_{n,h}(I) \subset V_n(I)$ de dimension finie $\mathcal{N}(h)$ (h étant le paramètre de discrétisation) et on cherche $\lambda \in \mathbf{R}$ pour lequel il existe $u_h \in V_{n,h}(I)$, $u_h \neq 0$, solution de l'équation :

$$(P_{n,h}(\omega, \beta)) \qquad \forall v_h \in V_{n,h}(I) \qquad c_n(\omega, \beta; u_h, v_h) = \lambda(u_h, v_h)_I$$

Alors les valeurs propres de $P_{n,h}(\omega, \beta)$ forment une suite croissante (cf.[10]) :

$$\lambda_{1,h}(\omega, \beta) \leq \lambda_{2,h}(\omega, \beta) \leq \ldots \leq \lambda_{\mathcal{N}(h),h}(\omega, \beta)$$

et il existe une base orthonormale $\{w_{m,h}\}_m$ de $V_{n,h}(I)$ dans $H(I)$ formée de vecteurs propres tels que :

$$(3.1) \qquad \forall v_h \in V_{n,h}(I) \qquad c_n(\omega, \beta; w_{m,h}, v_h) = \lambda_{m,h}(w_{m,h}, v_h)_I \quad (1 \leq m \leq \mathcal{N}(h))$$

Si $\mathcal{B}_{n,h} = \{\Phi_j\}$, $(1 \leq j \leq \mathcal{N}(h))$ est une base de $V_{n,h}(I)$, on cherche u_h sous la forme :

$$u_h = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}(h)} \xi_j \Phi_j$$

Alors le problème $P_{n,h}(\omega, \beta)$ est équivalent au problème matriciel :

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \exists \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{\mathcal{N}}) \in \mathbf{R}^{\mathcal{N}}, \quad \xi \neq 0 \quad et \quad \lambda \in \mathbf{R} \ \ tels\ que : \\ \\ C\xi = \lambda M \xi \end{cases}$$

où la matrice de rigidité $C = C(\omega, \beta; h)$ et la matrice de masse $M = M(h)$ sont données par :

$$\begin{cases} C_{i,j} = c_n(\omega, \beta, \Phi_i, \Phi_j) \\ \\ M_{i,j} = (\Phi_i, \Phi_j)_I \qquad (1 \leq i, j \leq \mathcal{N}(h)) \end{cases}$$

C'est la forme matricielle (3.2) qui est utilisée pour le calcul numérique sur ordinateur. Dans ce chapitre nous allons proposer une base $\mathcal{B}_{n,h}$ qui garantit la convergence :

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} |\lambda_{m,h} - \lambda_m| = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0} \|w_{m,h} - w_m\|_{V_n(I)} = 0 \end{cases}$$

Du point de vue pratique, il est important d'utiliser un schéma d'ordre élevé, c'est à dire des estimations d'erreurs de la forme :

$$\begin{cases} |\lambda_{m,h} - \lambda_m| = O(h^{k+1}) \\ \|w_{m,h} - w_m\|_{V_n(I)} = O(h^k) \end{cases}$$

Pour atteindre cette précision (du moins théoriquement), il est nécessaire de tenir compte, dans le choix de $\mathcal{B}_{n,h}$, de la singularité du problème continu à l'origine. Dans ce cas la régularité des fonctions propres joue un rôle essentiel dans l'analyse d'erreur.

3.2 Interpolation des fonctions propres

Dans ce paragraphe, on définit un opérateur d'interpolation de Lagrange puis on établit des estimations d'erreur d'interpolation sur les fonctions propres de $C_n(\omega, \beta)$.

Hypothèses sur (λ, μ) :

$\lambda(r)$ et $\mu(r)$ sont deux fonctions lipschitziennes par morceaux, c'est à dire qu'il existe une partition de l'intervalle $[0, R]$, $R_0 = 0 < R_1 < ... < R_p = R$, telle que $(\lambda, \mu) \in W^{1,\infty}(I_k)^2$, $I_k =]R_{k-1}, R_k[$, $k \in [1, p]$. Notons cet espace $\mathcal{L}_m$.

Rappelons le résultat suivant sur la régularité des fonctions propres (cf. [5], chap. 4) :

Théorème 3.1 *Supposons que $(\lambda, \mu) \in \mathcal{L}_m$ et $\rho \in L^\infty(I)$. Soit u une fonction propre de $A_n(\beta)$. Alors $u \in H^2(I_k)^3$, $k \in [1, p]$, et u vérifie sur $I_1 =]0, R_1[$ les estimations suivantes :*

1. *Si $n = 0$, on a :*

$$\sum_{i=1}^{2} |u_i(r)| + r|u_3(r)| + |u_3'(r)| \leq Cr\|u\|_{H^1(I_1)^3}$$

2. *Si $n = 1$, on a :*

$$\begin{cases} |u_3(r)| + |u_1'(r)| + |u_2'(r)| & \leq Cr\|u\|_{H^1(I_1)^3} \\ |u_1(r) + u_2(r)| & \leq Cr^2\|u\|_{H^1(I_1)^3} \\ |u_1(r)| + |u_2(r)| + |u_3'(r)| & \leq C\|u\|_{H^1(I_1)^3} \end{cases}$$

3. Si $n \geq 2$, on a :

$$|u_i(r)| \leq Cr\|u\|_{H^1(I_1)^3} \quad (i = 1,2,3)$$

Remarque 3.2 Les conclusions du théorème 3.1 demeurent valables si u est une fonction propre de $C_n(\omega, \beta)$ car u est la restriction à I d'une fonction propre de $A_n(\beta)$.

Soient $N \in \mathbf{N}$ et $h = \dfrac{R}{N}$. A ce pas h, nous associons les points :

$$r_i = ih \; ; \qquad 0 \leq i \leq N$$

qui subdivisent l'intervalle I en N sous-intervalles $\Delta_i =]r_i, r_{i+1}[$, $0 \leq i \leq N-1$, de longueur h. Par commodité nous supposons que les bornes R_k, $1 \leq k \leq p$, appartiennent à la suite (r_i).

Considérons la suite de fonctions ϕ_i, $1 \leq i \leq N$, définie par :

$$\phi_i(r) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|r - r_i|}{h} & \text{si } r \in]r_{i-1}, r_{i+1}[\,; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \phi_N(r) = \begin{cases} 1 - \dfrac{R - r}{h} & \text{si } r \in]R - h, R[\,; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la fonction $\tilde{\phi}_1$ telle que :

$$\tilde{\phi}_1(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < r < h\,; \\ 2 - \dfrac{r}{h} & \text{si } h < r < 2h\,; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

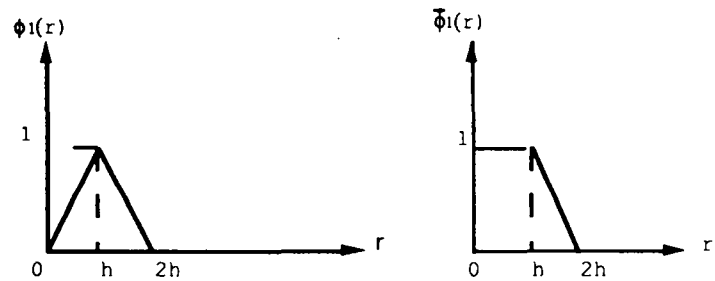


Fig 8.1 : fonctions de base.

Pour tout $v \in H^1(I)$ on pose :

$$v_h = \sum_{j=0}^{N} v(jh)\phi_j$$

Rappelons le résultat classique d'interpolation ([10]) : *si $v \in H^2(I_k)$, alors $\exists C \geq 0$ telle que :*

(3.3) $$\|v - v_h\|_{L^2(I_k)} + h\|v' - v_h'\|_{L^2(I_k)} \leq Ch^2\|v\|_{H^2(I_k)}$$

Introduisons l'espace de Hilbert :

$$W(I_1) = \left\{v \in L^2(I_1) : \|v\|^2_{W(I_1)} = \int_0^{R_1} \left(r|v|^2 + r|v'|^2 + \frac{|v|^2}{r}\right)dr < +\infty\right\}$$

D'après ([5], propriété 2.5) toute fonction $v \in W(I_1)$ est continue sur $\bar{I}_1$ et vérifie $v(0) = 0$.

Lemme 3.3 *Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ une fonction propre de $C_n(\omega, \beta)$. Supposons que v soit une composante de u qui vérifie (cf. théorème 3.1) :*

$$|v(r)| \leq Cr\|u\|_{H^1(I_1)^3}\ , \quad \forall r \in I_1$$

Alors on a :

$$\|v - v_h\|_{W(I_1)} \leq Ch\|u\|_{H^2(I_1)^3}$$

Preuve Nous avons l'inégalité :

$$\|v - v_h\|^2_{W(I_1)} \leq R_1\|v - v_h\|^2_{H^1(I_1)} + \int_0^{R_1} |v - v_h|^2 \frac{dr}{r}$$

et d'après (3.3) nous savons que

$$\|v - v_h\|_{H^1(I_1)} \leq Ch\|v\|_{H^2(I_1)}$$

Montrons l'inégalité :

$$\int_0^{R_1} |v - v_h|^2 \frac{dr}{r} \leq Ch^2\|u\|^2_{H^2(I_1)^3}$$

h étant fixé, nous avons pour tout $0 < \epsilon \leq R_1$:

$$\int_0^{R_1} |v - v_h|^2 \frac{dr}{r} \leq \int_0^{\epsilon} |v - v_h|^2 \frac{dr}{r} + \frac{1}{\epsilon}\int_0^{R_1} |v - v_h|^2 dr$$

L'hypothèse sur v permet d'écrire :

$$|v_h(r)| \leq Cr\|u\|_{H^1(I_1)^3} \sum_{j=1}^{N_1} \phi_j \leq Cr\|u\|_{H^2(I_1)^3}\ , \forall r \in I_1 \qquad (R_1 = N_1 h)$$

d'où

$$|v(r) - v_h(r)|^2 \leq 2(|v(r)|^2 + |v_h(r)|^2) \leq Cr^2\|u\|^2_{H^2(I_1)^3}$$

et

$$\int_0^{\epsilon} |v - v_h|^2 \frac{dr}{r} \leq C\epsilon^2\|u\|^2_{H^2(I_1)^3}$$

L'inégalité (3.3) montre que :

$$\int_0^{R_1} |v - v_h|^2 dr \leq Ch^4\|v\|^2_{H^2(I_1)^3}$$

et en ajoutant les inégalités, on a :

$$\int_0^{R_1} |v - v_h|^2 \frac{dr}{r} \leq C\Big(\epsilon^2 + \frac{h^4}{\epsilon}\Big)\|u\|^2_{H^2(I_1)^3}$$

En posant $\epsilon = h$, on obtient le lemme. □

Considérons maintenant l'espace $\mathcal{W}(I_1)$ défini par la norme :

$$\|w\|^2_{\mathcal{W}(I_1)} = \int_0^{R_1} (w^2 + w'^2) r dr < +\infty$$

Remarquons que l'espace $\mathcal{W}(I_1)$ contient des fonctions non bornées : à titre d'exemple, on peut citer toute fonction $u(r) \in C^1(]0, R_1])$ qui se comporte comme $u(r) \simeq \mathrm{Log}(|\mathrm{Log}\, r|)$ lorsque $r \to 0$. On veut approcher une fonction $w \in \mathcal{W}(I_1)$ par une fonction bornée. Pour cette raison on utilise la fonction de base $\tilde{\phi}_1$ pour tronquer w au voisinage de 0 en posant :

$$w_h = w(h)\tilde{\phi}_1 + \sum_{j=2}^{N_1} w(jh)\phi_j$$

Lemme 3.4 *Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ une fonction propre de $C_0(\omega, \beta)$. Alors $u_3 \in \mathcal{W}(I_1)$ et vérifie :*

$$\|u_3 - u_{3h}\|_{\mathcal{W}(I_1)} \leq Ch\|u\|_{H^2(I_1)^3}$$

Preuve Nous avons l'inégalité :

$$\|u_3 - u_{3h}\|^2_{\mathcal{W}(I_1)} \leq \int_0^h (r|u_3 - u_{3h}|^2 + r|u_3'|^2) dr + R_1\|u_3 - u_{3h}\|^2_{H^1(]h,R_1[)}$$

On sait, d'après le théorème 3.1 (cas $n = 0$), que u_3 vérifie :

$$\begin{cases} u_3 \in H^2(I_1); \\ r|u_3(r)| + |u_3'(r)| \leq Cr\|u\|_{H^1(I_1)^3}. \end{cases}$$

donc

$$\int_0^h (r|u_3 - u_{3h}|^2 + r|u_3'|^2) dr \leq Ch^2\|u\|^2_{H^1(I_1)^3}$$

D'autre part, la propriété 3.3 entraîne :

$$\|u_3 - u_{3h}\|_{H^1(]h,R_1[)} \leq Ch\|u_3\|_{H^2(I_1)}$$

d'où

$$\|u_3 - u_{3h}\|_{\mathcal{W}(I_1)} \leq Ch\|u\|_{H^2(I_1)^3}$$

□

Lemme 3.5 *Soit $u = (u_1, u_2, u_3)$ une fonction propre de $C_1(\omega, \beta)$. Posons :*

$$\begin{cases} u_{1h} = u_1(h)\tilde{\phi}_1 + \sum_{j=2}^{N_1} u_1(jh)\phi_j \\ u_{2h} = -u_1(h)\tilde{\phi}_1 + \sum_{j=2}^{N_1} u_2(jh)\phi_j \\ u_{3h} = \sum_{j=1}^{N_1} u_3(jh)\phi_j \end{cases}$$

Alors on a l'estimation :

$$\|u - u_h\|_{V_1(I_1)} \leq Ch\|u\|_{H^2(I_1)^3} \tag{3.4}$$

Preuve Avec les notations $v = u_1 + u_2$ et $v_h = u_{1h} + u_{2h}$, on a l'inégalié :

$$\|u - u_h\|^2_{V_1(I_1)} \leq \|u_1 - u_{1h}\|^2_{W(I_1)} + \|u_2 - u_{2h}\|^2_{W(I_1)} + \int_0^{R_1} |v - v_h|^2 \frac{dr}{r}$$

- Le lemme 3.4 entraîne, pour $i = 1, 2$:

$$\|u_i - u_{ih}\|_{W(I_1)} \leq Ch\|u\|_{H^2(I_1)^3}$$

- On peut écrire :

$$\int_0^{R_1} |v - v_h|^2 \frac{dr}{r} = \int_0^{2h} \frac{v^2}{r} dr + \int_{2h}^{R_1} |v - v_h|^2 \frac{dr}{r}$$

et comme

$$|v(r)| \leq Cr^2\|u\|_{H^2(I_1)^3}$$

on déduit

$$\begin{aligned} \int_0^{R_1} |v - v_h|^2 \frac{dr}{r} &\leq Ch^4\|u\|^2_{H^2(I_1)^3} + \frac{1}{2h}\|v - v_h\|^2_{L^2(2h,R_1)} \\ &\leq C\{h^4\|u\|^2_{H^2(I_1)^3} + h^3\|v\|^2_{H^2(I_1)}\} \\ &\leq Ch^3\|u\|^2_{H^2(I_1)^3} \end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme. □

Remarque 3.6 Le fait d'avoir choisi $v_h(r)$=0 sur $[0, h]$ est justifié par l'inégalité $|v(r)| \leq Cr^2\|u\|_{H^2(I_1)^3}$, $\forall r \in I_1$.

Considérons maintenant $u = (u_1, u_2, u_3) \in V_n(I)$ une fonction propre de $C_n(\omega, \beta)$. Nous approchons u sur I par $u_h = (u_{1h}, u_{2h}, u_{3h})$ qui est défini de la manière suivante :

- Pour $n = 0$, on pose :

$$\begin{cases} u_{ih} = \sum_{j=1}^{N} u_i(jh)\phi_j \ ; \quad i = 1, 2; \\ u_{3h} = u_3(h)\phi_1 + \sum_{j=2}^{N} u_3(jh)\phi_j \end{cases} \tag{3.5}$$

- Pour $n = 1$, on pose :

$$(3.6) \qquad \begin{cases} u_{1h} = u_1(h)\tilde{\phi}_1 + \sum_{j=2}^{N} u_1(jh)\phi_j \ ; \\ u_{2h} = -u_1(h)\tilde{\phi}_1 + \sum_{j=2}^{N} u_2(jh)\phi_j \\ u_{3h} = \sum_{j=1}^{N} u_3(jh)\phi_j \end{cases}$$

- Pour $n \geq 2$, on pose :

$$(3.7) \qquad u_{ih} = \sum_{j=1}^{N} u_i(jh)\phi_j \ ; \quad i = 1, 2, 3.$$

Avec ces définitions, nous avons la proposition :

Proposition 3.7 *Il existe une constante C (indépendante de h) telle que :*

$$(3.8) \qquad \|u - u_h\|_{V_n(I_1)} \leq Ch\|u\|_{H^2(I_1)^3}$$

Preuve Si $n = 1$ la proposition se réduit au Lemme 3.5. Si $n \neq 1$, la proposition découle des lemmes 3.3 et 3.4 en tenant compte des inégalités suivantes qui montrent le lien entre $V_n(I_1)$ et les espaces $\mathcal{W}(I_1)$ et $W(I_1)$:

- si $n = 0$:

$$\|u - u_h\|_{V_0(I_1)} \leq C_0(\sum_{i=1}^{2} \|u_i - u_{ih}\|_{W(I_1)} + \|u_3 - u_{3h}\|_{\mathcal{W}(I_1)})$$

- si $n \geq 2$:

$$\|u - u_h\|_{V_n(I_1)} \leq C_n \sum_{i=1}^{3} \|u_i - u_{ih}\|_{W(I_1)}$$

Corollaire 3.8 *Il existe une constante C (indépendante de h) telle que :*

$$(3.9) \qquad \|u - u_h\|_{V_n(I)} \leq Ch \sum_{k=1}^{p} \|u\|_{H^2(I_k)^3}$$

Preuve Elle découle des majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{V_n(I)} &\leq \|u - u_h\|_{V_n(I_1)} + C \sum_{k=1}^{p} \|u - u_h\|_{H^1(I_k)^3} \\ &\leq Ch \sum_{k=2}^{p} \|u\|_{H^2(I_k)^3} \quad \text{d'après (3.3) et (3.8)} \end{aligned}$$

□

3.3 Définition de $V_{n,h}(I)$ et théorème de convergence

Désignons par $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Posons :

$$\begin{aligned} \Phi_{ik} &= \phi_i e_k \ ; \quad (1 \leq i \leq N;\ 1 \leq k \leq 3) \\ \tilde{\Phi}_{13} &= \tilde{\phi}_1 e_3 \ ; \\ \tilde{\Phi}_{12} &= \tilde{\phi}_1 (e_1 - e_2). \end{aligned}$$

Nous définissons $V_{n,h}(I) \subset V_n(I)$ par la donnée de sa base $\mathcal{B}_{n,h}$:

1– $\mathcal{B}_{0,h} = \left\{\tilde{\Phi}_{13}\ ; \Phi_{11}\ ; \Phi_{12}\right\} \bigcup \left\{\Phi_{ik}\ ; \quad 2 \leq i \leq N;\ 1 \leq k \leq 3\right\}$

2– $\mathcal{B}_{1,h} = \left\{\tilde{\Phi}_{12}\ ; \Phi_{13}\right\} \bigcup \left\{\Phi_{ik}\ ; \quad 2 \leq i \leq N;\ 1 \leq k \leq 3\right\}$

3– $\mathcal{B}_{n,h} = \left\{\Phi_{ik}\ ; \quad 1 \leq i \leq N;\ 1 \leq k \leq 3\right\}, \quad n \geq 2$

Introduisons l'opérateur de projection $\Pi_h \in \mathcal{L}(V_n(I), V_{n,h}(I))$ défini par :

$$\forall v_h \in V_{n,h}(I) \qquad d_n(\Pi_h u - u, v_h) = 0$$

avec

$$d_n(u,v) = c_n(\omega, \beta; u, v) + t(u,v)_I\ , \qquad t \in \mathbf{R}$$

Si t est suffisamment grand, $d_n(.,.)$ est un produit scalaire dont la norme associée est équivalente à celle de $V_n(I)$ (voir proposition 2.4).

Désignons par $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$, le sous espace de $V_n(I)$ engendré par les m premières fonctions propres de $C_n(\omega, \beta)$.

Supposons que les coefficients (λ, μ, ρ) vérifient les hypothèses du théorème 3.1 pour avoir $w_i\,|_{I_k} \subset H^2(I_k)^3\ , k \in [1, p]$.

Lemme 3.9 *Il existe $C \geq 0$ telle que :*

$$\|v - \Pi_h v\|_{V_n(I)} \leq Ch \sum_{k=1}^{p} \|v\|_{H^2(I_k)^3} \qquad \forall v \in V_m \tag{3.10}$$

Preuve Soit $v \in V_m$. Par définition de Π_h, nous avons :

$$\forall w_h \in V_{n,h}(I) \qquad d_n(v - \Pi_h v, w_h) = 0$$

et posons $w_h = v_h - \Pi_h v$, où v_h est l'interpolée de v défini par les formules (3.5), (3.6) et (3.7).

Alors

$$d_n(v - \Pi_h v, v - \Pi_h v) = d_n(v - \Pi_h v, v - v_h)$$

Comme d_n est continue et coercive, il existe $\alpha > 0$ et $C \geq 0$ telles que :

$$\alpha \|v - \Pi_h v\|^2_{V_n(I)} \leq C \|v - \Pi_h v\|_{V_n(I)} \|v - v_h\|_{V_n(I)}$$

d'où

$$\|v - \Pi_h v\|_{V_n(I)} \leq \frac{C}{\alpha} \|v - v_h\|_{V_n(I)}$$

A son tour, le corollaire 3.8 entraîne :

$$\|v - \Pi_h v\|_{V_n(I)} \leq C' h \sum_{k=1}^{p} \|v\|_{H^2(I_k)^3} \qquad \square$$

Lemme 3.10 *L'espace $V_{n,h}(I)$ vérifie la propriété d'approximation :*

$$\forall u \in V_n(I) \qquad \lim_{h \to 0} \Big[\inf_{v \in V_{n,h}(I)} \|u - v\|_{V_n(I)} \Big] = 0 \tag{3.11}$$

Preuve • Si $n \neq 1$, $V_n(I)$ etant un produit cartésien d'espaces du type $W(I)$ ou $\mathcal{W}(I)$, il suffit de prouver (3.11) pour chacun de ces espaces avec la projection correspondante de $V_{n,h}(I)$.

1- Soit $u \in W(I)$ et $\epsilon > 0$ arbitraire, alors il existe $\phi_\epsilon \in D(]0, R])$ telle que :

$$\|u - \phi_\epsilon\|_{W(I)} < \epsilon \tag{3.12}$$

En posant :

$$\phi_{\epsilon,h} = \sum_{j=1}^{N} \phi_\epsilon(jh) \phi_j$$

on obtient, grâce à la propriété (3.3) :

$$\|\phi_\epsilon - \phi_{\epsilon,h}\|_{H^1(I)} \leq h \|\phi_\epsilon\|_{H^2(I)}$$

Il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que :

$$\text{supp } \phi_\epsilon \subset [\alpha(\epsilon), R]$$

d'où

$$\|\phi_\epsilon - \phi_{\epsilon,h}\|_{W(I)} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha(\epsilon)}} \|\phi_\epsilon - \phi_{\epsilon,h}\|_{H^1(I)} \leq \frac{Ch}{\sqrt{\alpha(\epsilon)}} \|\phi_\epsilon\|_{H^2(I)} \tag{3.13}$$

Joignant (3.12) et (3.13), on obtient :

$$\|u - \phi_{\epsilon,h}\|_{W(I)} \leq \epsilon + \frac{Ch}{\sqrt{\alpha(\epsilon)}} \|\phi_\epsilon\|_{H^2(I)}$$

Il existe $h_0(\epsilon)$ tel que :

$$h \leq h_0(\epsilon) \Longrightarrow \|u - \phi_{\epsilon,h}\|_{W(I)} \leq 2\epsilon$$

2– Maintenant si $u \in W(I)$ et $\phi_\epsilon \in D(]0, R])$ sont tels que :

$$\|u - \phi_\epsilon\|_{W(I)} < \epsilon$$

on pose :

$$\phi_{\epsilon,h} = \phi_\epsilon(h)\tilde{\phi}_1 + \sum_{j=2}^{N} \phi_\epsilon(jh)\phi_j$$

Supposons que supp $\phi_\epsilon \subset [\alpha(\epsilon), R]$, alors $h < \alpha(\epsilon)$ entraîne :

$$\phi_{\epsilon,h} = \sum_{j=2}^{N} \phi_\epsilon(jh)\phi_j$$

et comme

$$\|\phi_\epsilon - \phi_{\epsilon,h}\|_{W(I)} \leq R\|\phi_\epsilon - \phi_{\epsilon,h}\|_{H^1(I)} \leq Ch\|\phi_\epsilon\|_{H^2(I)}$$

on voit que

$$\|u - \phi_{\epsilon,h}\|_{W(I)} \leq 2\epsilon \quad \text{si h est assez petit.}$$

• Le cas $n = 1$ se démontre en combinant les étapes 1 et 2. En effet, si $u = (u_1, u_2, u_3) \in V_1(I)$ il existe, d'après les théorèmes de densité, une fonction $\Phi_\epsilon = (\phi_\epsilon^1, \phi_\epsilon^2, \phi_\epsilon^3) \in D(I)^3$ telle que :

$$\|u_i - \phi_\epsilon^i\|_{W(I)} < \epsilon \quad (i = 1, 2, 3); \text{ et } \int_0^R |\bar{u} - \bar{\phi}_\epsilon|^2 \frac{dr}{r} < \epsilon$$

où

$$\begin{cases} \text{supp } \phi_\epsilon^i \subset [\alpha(\epsilon), R]; \\ \bar{u} = (u_1, u_2) \text{ et } \bar{\phi}_\epsilon = (\phi_\epsilon^1, \phi_\epsilon^2). \end{cases}$$

Avec $0 < h \leq \alpha(\epsilon)$, suffisamment petit, on peut vérifier sans difficulté que la fonction

$$\Phi_{\epsilon,h} = \sum_{j=2}^{N} \Phi_\epsilon(jh)\phi_j \quad \text{(appartenant à } V_{1,h}(I)\text{)}$$

est telle que :

$$\|u - \Phi_{\epsilon,h}\|_{V_1(I)} \leq 2\epsilon\,,$$

ce qui achève la preuve. □

Maintenant nous sommes en mesure de démontrer le

Théorème 3.11 *(de convergence).*

1. *On a :*

$$\lim_{h\to 0} |\lambda_m - \lambda_{m,h}| = 0$$

Par ailleurs, lorsque λ_m est une fonction propre simple, on a :

$$\lim_{h\to 0} \|w_m - w_{m,h}\|_{V_n(I)} = 0$$

2. *Supposons que $\lambda(r)$ et $\mu(r)$ appartiennent à $\mathcal{L}_m$, alors on a les majorations :*

$$|\lambda_m - \lambda_{m,h}| \leq Ch^2$$

et lorsque λ_m est une valeur propre simple, on a :

$$\|w_m - w_{m,h}\|_{V_n(I)} \leq Ch$$

Preuve Ce théorème est analogue au théorème 6.5.1 de [10].

1. La partie 1 du théorème est une conséquence du lemme 3.10.
2. Si les coefficients (λ, μ) appartiennent à $\mathcal{L}_m$, alors les fonctions propres sont de classe H^2 par morceaux (voir théorème 3.1). En appliquant la technique du chapitre 6 de la référence [10], on aboutit à l'inégalité :

$$0 \leq \lambda_{m,h} - \lambda_m \leq c_1 \sum_{i=1}^{m} \|w_i - \Pi_h w_i\|^2_{V_n(I)}$$

On obtient en vertu du lemme 3.7 :

$$0 \leq \lambda_{m,h} - \lambda_m \leq c_2 h^2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \|w_i\|^2_{H^2(I_k)^3}$$

Si, de plus, λ_m est une valeur propre simple, on obtient :

$$\begin{aligned} \|w_{m,h} - w_m\|_{V_n(I)} &\leq c_3 \Big(\sum_{i=1}^{m} \|w_i - \Pi_h w_i\|^2_{V_n(I)} \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_4 h \Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \|w_i\|^2_{H^2(I_k)^3} \Big)^{\frac{1}{2}} \quad \square \end{aligned}$$

Remarque 3.12 Si la valeur propre λ_m est multiple, $w_{m,h}$ converge vers une combinaison linéaire des fonctions propres associées à λ_m. Pour plus de précision sur cette question nous renvoyons le lecteur à un article de I. BABUSKA et J. OSBORN ([1]).

3.4 Formulation matricielle

$\mathcal{B}_{n,h} = \left\{\Phi_{i,k}\ ;\ 1 \leq i \leq N;\ 1 \leq k \leq 3\right\}$ étant la base de $V_{n,h}(I)$, on cherche la solution du problème (3.1) sous la forme :

$$u_h = \sum_{i,k} X_{ki}\Phi_{ik}$$

En posant :

$$\begin{cases} X_k = (X_{k1}, X_{k2}, .., X_{kN}) \in \mathbf{R}^N \\ X = (X_1, X_2, X_3) \in \mathbf{R}^{3N} \end{cases}$$

le problème (3.1) est équivalent alors à un problème aux valeurs propres généralisées :

$$C_{n,h}(\omega, \beta)X = \lambda M X \tag{3.14}$$

Les matrices $C_{n,h}(\omega, \beta)$ et M sont formées des blocs d'ordre N :

$$\begin{cases} C_{n,h}(\omega, \beta) = \left(C_{kl}\right)_{1 \leq k,l \leq 3} \\ M = \text{diag}\left(M_1, M_1, M_1\right) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} M_1(i,j) = (\phi_i, \phi_j)_I; \\ C_{kl}(i,j) = A_{kl}(i,j) - b_{kl}\delta_{iN}\delta_{jN}; \quad 1 \leq i,j \leq N \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} A_{kl}(i,j) = a_n^I(\beta; \Phi_{il}, \Phi_{jk}) \\ (b_{kl}) = B_n(\omega, \beta) \end{cases}$$

La symétrie de $c_n(\omega, \beta; ., .)$ montre que $C_{kl} = {}^tC_{lk}$.
Comme les supports de $(\phi_i)_i$ vérifient :

$$|i - j| \geq 2 \Longrightarrow \text{supp } \phi_i \cap \text{supp } \phi_j = \emptyset$$

les blocs C_{kl} et M_1 sont alors tridiagonaux.

Remarque 3.13 Si $n = 0$, le système (3.14) se découple en deux systèmes :

1. Modes de torsion (T) : $\quad C_{22}X_2 = \lambda M_1 X_2$
2. Modes de compression :

$$(C) \qquad \begin{cases} \bar{C}\bar{X} = \begin{pmatrix} C_{11} & {}^tC_{31} \\ C_{31} & C_{22} \end{pmatrix} \bar{X} = \lambda \bar{M}\bar{X} \\ \text{avec} \quad \bar{X} = (X_1, X_3), \quad \bar{M} = diag\ (M_1, M_1). \end{cases}$$

Calcul des coefficients.

Pour $0 \leq i \leq N-1$, on pose :

$$\rho_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}\int_{\Delta_i} \rho(r)dr \ ; \quad \mu_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}\int_{\Delta_i} \mu(r)dr \ ; \quad \lambda_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h}\int_{\Delta_i} \lambda(r)dr$$

et on fait l'approximation :

$$(\rho_h, \lambda_h, \mu_h) = (\rho, \lambda, \mu)_{i+\frac{1}{2}} \quad sur\ \Delta_i =]ih, (i+1)h[$$

Avec ces notations les coefficients des blocs A_{kl} et M_1 (tridiagonaux) sont donnés par les expressions suivantes :

Bloc M_1

$$\begin{aligned}
M_1(i,i) &= (4i-1)\rho_{i-\frac{1}{2}} + (4i+1)\rho_{i+\frac{1}{2}} \quad (1 \leq i \leq N-1) \\
M_1(N,N) &= (4N-1)\rho_{N-\frac{1}{2}} \\
M_1(i,i+1) &= (2i+1)\rho_{i+\frac{1}{2}} \quad (1 \leq i \leq N-1)
\end{aligned}$$

Bloc A_{22}

$$\begin{aligned}
A_{22}(i,i) &= \frac{1}{12}[(4i-1)\mu_{i-\frac{1}{2}} + (4i+1)\mu_{i+\frac{1}{2}}]\beta^2h^2 \\
&+ [n^2\lambda_{i-\frac{1}{2}} + (2n^2+1)\mu_{i-\frac{1}{2}}]\Big[-i + \frac{3}{2} + (i-1)^2 \operatorname{Log}\Big(\frac{i}{i-1}\Big)\Big] \\
&+ [n^2\lambda_{i+\frac{1}{2}} + (2n^2+1)\mu_{i+\frac{1}{2}}]\Big[-i - \frac{3}{2} + (i-1)^2 \operatorname{Log}\Big(\frac{i}{i-1}\Big)\Big] \\
&+ (i - \frac{3}{2})\mu_{i-\frac{1}{2}} + (i + \frac{3}{2})\mu_{i+\frac{1}{2}} \quad (1 \leq i \leq N-1) \\
A_{22}(N,N) &= \frac{1}{12}(4N-1)\beta^2h^2\mu_{N-\frac{1}{2}} + (N - \frac{3}{2})\mu_{N-\frac{1}{2}} \\
&+ [n^2\lambda_{N-\frac{1}{2}} + (2n^2+1)\mu_{N-\frac{1}{2}}]\Big[\frac{3}{2} - N + (N-1)^2 \operatorname{Log}\Big(\frac{N}{N-1}\Big)\Big] \\
A_{22}(i,i+1) &= \beta^2h^2\frac{2i+1}{12}\mu_{i+\frac{1}{2}} - \mu_{i+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}) \qquad (1 \leq i \leq N-1) \\
&+ [n^2\lambda_{i+\frac{1}{2}} + (2n^2+1)\mu_{i+\frac{1}{2}}]\Big[i + \frac{1}{2} - i(i+1) \operatorname{Log}\Big(\frac{i+1}{i}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

Bloc A_{11} :

$$\begin{aligned}
A_{11}(i,i) &= \frac{1}{12}\beta^2h^2\Big[(4i-1)\mu_{i-\frac{1}{2}} + (4i+1)\mu_{i+\frac{1}{2}}\Big] \quad (1 \leq i \leq N-1) \\
&+ \Big[\frac{3}{2} - i - (i-1)^2 \operatorname{Log}\Big(\frac{i-1}{i}\Big)\Big][\lambda_{i-\frac{1}{2}} + (n^2+2)\mu_{i-\frac{1}{2}}] \\
&+ \Big[-\frac{3}{2} - i + (i+1)^2 \operatorname{Log}\Big(\frac{i+1}{i}\Big)\Big][\lambda_{i+\frac{1}{2}} + (n^2+2)\mu_{i+\frac{1}{2}}] + \lambda_{i-\frac{1}{2}} - \lambda_{i+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (\lambda+2\mu)_{i-\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}) + (\lambda+2\mu)_{i+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) \\
A_{11}(N,N) &= \frac{1}{12}\beta^2h^2(4N-1)\mu_{N-\frac{1}{2}} + \lambda_{N-\frac{1}{2}} + (\lambda+2\mu)_{N-\frac{1}{2}}(N-\frac{1}{2}) \\
&+ \quad [\lambda_{N-\frac{1}{2}} + (n^2+2)\mu_{N-\frac{1}{2}}]\Big[\frac{3}{2} - N + (N-1)^2\,\mathrm{Log}\,(\frac{N}{N-1})\Big] \\
A_{11}(i,i+1) &= \frac{1}{12}\beta^2h^2(2i+1)\mu_{i+\frac{1}{2}} - (\lambda+2\mu)_{i+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) \\
&+ \quad [\lambda_{i+\frac{1}{2}} + (n^2+2)\mu_{i+\frac{1}{2}}]\Big[i+\frac{1}{2} - i(i+1)\,\mathrm{Log}\,(\frac{i+1}{i})\Big] \quad (1 \le i \le N-1)
\end{aligned}
$$

<u>Bloc A_{31}</u> :

$$
\begin{aligned}
A_{31}(i,i) &= -\frac{\beta h}{6}[(3i+1)(\lambda_{i-\frac{1}{2}} + \mu_{i+\frac{1}{2}}) + (1-3i)(\lambda_{i+\frac{1}{2}} + \mu_{i-\frac{1}{2}})], \quad (1 \le i \le N-1) \\
A_{31}(N,N) &= -\frac{\beta h}{6}[(1+3N)\lambda_{N-\frac{1}{2}} + (1-3N)\mu_{N-\frac{1}{2}}] \\
A_{13}(i,i+1) &= \frac{\beta h}{6}(3i+1)(\lambda_{i+\frac{1}{2}} + \mu_{i+\frac{1}{2}}), \quad (1 \le i \le N-1) \\
A_{13}(i+1,i) &= -\frac{\beta h}{6}(3i+2)(\lambda_{i+\frac{1}{2}} + \mu_{i+\frac{1}{2}}), \quad (1 \le i \le N-1)
\end{aligned}
$$

<u>Bloc A_{33}</u> :

$$
\begin{aligned}
A_{33}(i,i) &= \frac{1}{12}\beta^2h^2[(4i-1)(\lambda+2\mu)_{i-\frac{1}{2}} + (4i+1)(\lambda+2\mu)_{i+\frac{1}{2}}] \\
&+ \quad n^2\mu_{i-\frac{1}{2}}\Big[\frac{3}{2} - i + (i-1)^2\,\mathrm{Log}(\frac{i}{i-1})\Big] \\
&+ \quad n^2\mu_{i+\frac{1}{2}}\Big[-\frac{3}{2} - i + (i+1)^2\,\mathrm{Log}(\frac{i+1}{i})\Big] \\
&+ \quad (i-\frac{1}{2})\mu_{i-\frac{1}{2}} + (i+\frac{1}{2})\mu_{i+\frac{1}{2}} \quad (2 \le i \le N-1) \\
A_{33}(N,N) &= \frac{1}{12}\beta^2h^2(4N-1)(\lambda+2\mu)_{N-\frac{1}{2}} \\
&+ \quad n^2\mu_{N-\frac{1}{2}}\Big[\frac{3}{2} - N + (N-1)^2\,\mathrm{Log}(\frac{N}{N-1})\Big] + (N-\frac{1}{2})\mu_{N-\frac{1}{2}} \\
A_{33}(i,i+1) &= \frac{1}{12}\beta^2h^2(2i+1)(\lambda+2\mu)_{i+\frac{1}{2}} - (i+\frac{1}{2})\mu_{i+\frac{1}{2}} \quad (1 \le i \le N-1) \\
&+ \quad n^2\mu_{i+\frac{1}{2}}\Big[\frac{1}{2} - i + i(i+1)\,\mathrm{Log}(\frac{i+1}{i})\Big]
\end{aligned}
$$

<u>Bloc A_{32}</u> :

$$
\begin{aligned}
A_{32}(i,i) &= -\frac{n\beta h}{3}[(\lambda+\mu)_{i-\frac{1}{2}} + (\lambda+\mu)_{i+\frac{1}{2}}] \quad (1 \le i \le N-1) \\
A_{32}(N,N) &= -\frac{n\beta h}{3}(\lambda+\mu)_{N-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$A_{32}(i,i+1) = -\frac{n\beta h}{6}(\lambda+\mu)_{i+\frac{1}{2}} \quad (1 \le i \le N-1)$$

<u>Bloc A_{21}</u> :

$$\begin{aligned}
A_{21}(i,i) &= \frac{1}{2}[(\lambda - n\mu)_{i-\frac{1}{2}} - (\lambda - n\mu)_{i+\frac{1}{2}}] \quad (1 \le i \le N-1) \\
&+ (\lambda + 3n\mu)_{i-\frac{1}{2}}\Big[\frac{3}{2} - i + (i-1)^2 \operatorname{Log}(\frac{i}{i-1})\Big] \\
&+ (\lambda + 3n\mu)_{i+\frac{1}{2}}\Big[-\frac{3}{2} - i + (i+1)^2 \operatorname{Log}(\frac{i+1}{i})\Big] \\
A_{21}(N,N) &= \frac{1}{2}(\lambda - n\mu)_{N-\frac{1}{2}} \\
&+ (\lambda + 3n\mu)_{N-\frac{1}{2}}\Big[\frac{3}{2} - N + (N-1)^2 \operatorname{Log}(\frac{N}{N-1})\Big] \\
A_{21}(i,i+1) &= -\frac{1}{2}(\lambda + n\mu)_{i+\frac{1}{2}} \quad (1 \le i \le N-1) \\
&+ (\lambda + 3n\mu)_{i+\frac{1}{2}}\Big[\frac{1}{2} + i - i(i+1) \operatorname{Log}(\frac{i+1}{i})\Big]
\end{aligned}$$

Remarque 3.14 Si on permute les lignes et les colonnes du système (3.14) à l'aide du changement de base :

$$Y = (X_{11}, X_{21}, X_{31}, ..., X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}, ..., X_{1N}, X_{2N}, X_{3N})$$

il se transforme en un système équivalent :

$$DY = \lambda NY \tag{3.15}$$

où les matrices D et N sont tridiagonales par blocs (3×3).

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & \dots & 0 \\ {}^tB_1 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{N-1} \\ 0 & \dots & {}^tB_{N-1} & A_N \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} D_1 & E_1 & \dots & 0 \\ E_1 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & E_{N-1} \\ 0 & \dots & E_{N-1} & D_N \end{pmatrix}$$

La structure de bande des matrices D et N présente des avantages pour le calcul numérique sur ordinateur ; en effet elle permet de diminuer le temps CPU (en diminuant le nombre d'opérations) et d'économiser de la mémoire lors du stockage.

Remarque 3.15 Dans la pratique, nous réduisons le problème généralisé (3.15) à un problème standard à l'aide des transformations suivantes :

1. Soit $N = LL^T$, la décomposition de Cholesky de N qui est symétrique et définie positive.

2. En posant :
$$\begin{cases} Z = L^T Y \\ E = L^{-1} D L^{-T} \end{cases}$$

l'équation (3.15) est équivalente à :

(3.16) $$EZ = \lambda Z$$

où E est symétrique. Pour extraire les valeurs propres, nous utilisons une méthode classique. D'après le théorème 3.11, comme l'erreur d'interpolation est de l'ordre $O(N^{-2})$, on peut choisir $N \leq 50$ et utiliser la méthode QR ([21]) . Si $N \geq 50$, cette méthode n'est pas économique, surtout pour le calcul des vecteurs propres (la complexité de l'algorithme est de l'ordre de $(3N)^3$).

Remarque 3.16 La discrétisation des cœfficients (λ, μ, ρ) engendre une erreur dans le résultat final ; mais celle-ci est controlée par le théorème 4.7. du rapport [5]. Essayons de développer cette idée.

Soit $\Lambda = (\lambda, \mu, \rho)$ fixé. Considérons une perturbation $\Lambda_h = (\lambda_h, \mu_h, \rho_h)$ de Λ à laquelle correspond une perturbation $\lambda_k(\Lambda_h)$ de la valeur propre $\lambda_k = \lambda_k(\Lambda)$ de l'opérateur $C_n(\omega, \beta) = C_n(\Lambda, \omega, \beta)$.

D'après [5] (proposition 4.3, théorème 4.7), on a :
$$\begin{cases} |\lambda_k - \lambda_k(\Lambda_h)| \leq C\beta^2 k^2 \|\Lambda - \Lambda_h\|_\infty & \text{si } \Lambda \in L^\infty(I)^3 \\ |\lambda_k - \lambda_k(\Lambda_h)| \leq C\beta^2 k^2 \int_0^R |\Lambda - \Lambda_h| r dr & \text{si } \Lambda \in \mathcal{L}^2_m \times L^\infty(I) \end{cases}$$

avec
$$\begin{cases} |\Lambda - \Lambda_h| = |\lambda - \lambda_h| + |\mu - \mu_h| + |\rho - \rho_h| \\ \|\Lambda - \Lambda_h\|_\infty = \sup_{r \in I} |\Lambda - \Lambda_h| \end{cases}$$

En particulier :

1. si $\Lambda \in L^\infty(I)^3$ et $\Lambda_h = \frac{1}{h} \int_{\Delta_i} \Lambda(r) dr$ sur Δ_i alors :
$$\|\Lambda - \Lambda_h\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{quand } h \to 0$$

2. si Λ est C^2 par morceaux et $\Lambda_h = \sum_{i=0}^{N} \Lambda(ih)\phi_i$ alors :
$$\int_0^R |\Lambda - \Lambda_h| r dr = O(h^2) \quad \text{quand } h \to 0$$

Maintenant, si on discrétise simultanément les coefficients (λ, μ, ρ) et l'espace $V_n(I)$, le théorème 3.11 et les considérations précédentes entraînent :

1. si $\Lambda \in L^\infty(I)^3$ et $\Lambda_h = \frac{1}{h}\int_{\Delta_i} \Lambda(r)dr$ sur Δ_i, alors :

$$|\lambda_k - \lambda_{k,h}| \leq |\lambda_k - \lambda_k(\Lambda_h)| + |\lambda_k(\Lambda_h) - \lambda_{k,h}| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } h \to 0$$

2. si Λ est C^2 par morceaux et $\Lambda_h = \sum_{i=0}^{N} \Lambda(ih)\phi_i$, alors :

$$|\lambda_k - \lambda_{k,h}| \leq |\lambda_k - \lambda_k(\Lambda_h)| + |\lambda_k(\Lambda_h) - \lambda_{k,h}| = O(h^2) \quad \text{quand } h \to 0$$

où $\lambda_{k,h}$ est une approximation de $\lambda_k(\Lambda_h)$ due à la discrétisation de $V_n(I)$.

3.5 Méthode numérique pour le tracé des courbes de dispersion

Nous présentons dans ce paragraphe un schéma utilisé par J.TLILI [20] pour tracer de manière approchée la courbe de dispersion $\omega = \omega_k(\beta)$ d'équation (implicite) :

$$\lambda_k(\omega, \beta) - \omega^2 = 0$$

$\lambda_k(\omega, \beta)$ étant la valeur propre d'ordre k du problème matriciel (3.14).

Pour cela, on fait d'abord le changement de variables :

- $\bar{\beta} = \beta R$, qui sera le nombre d'onde normalisé.
- $\bar{c} = \dfrac{\omega}{\beta v_s}$, qui sera la vitesse de phase normalisée inconnue.

Donc $\bar{c}$ varie dans l'intervalle $[c_{min}, 1[$; $\bar{c}_{min} \leq \dfrac{\mu_-}{\rho_+ v_s}$.

Posons :

$$F_k(\bar{c}, \bar{\beta}) = \lambda_k(\omega, \beta) - \omega^2$$

Avec ces notations, l'équation de dispersion devient : $F_k(\bar{c}, \bar{\beta}) = 0$.

On sait, d'après le théorème 2.8, que la fonction $\bar{c} \longmapsto F_k(\bar{c}, \bar{\beta})$ est continue et strictement décroissante sur $[c_{min}, 1[$.

On montrera dans le chapitre 4 que les seuils normalisés $\bar{\beta}_k^* = \beta_k^* R$ vérifient l'équation :

$$F_k(1, \bar{\beta}) = 0$$

De plus la fonction $\bar{\beta} \longmapsto F_k(1,\bar{\beta})$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}^+$. Le schéma que nous allons proposer pour tracer la courbe $\bar{\beta} \longmapsto \bar{c}_k(\bar{\beta})$ utilise essentiellement ces deux propriétés.

Afin de simplifier les notations, le couple $(\bar{\beta},\bar{c})$ sera encore noté (β, c).

Nous procédons de la manière suivante :
Première étape : nous choisissons un nombre β_{max} et nous subdivisons l'intervalle $]0,\beta_{max}[$ avec une suite $(\beta_i)_{i=1,n}$ telle que :

$$0 < \beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_n = \beta_{max} \; ; \qquad \beta_{i+1} = \beta_i + \delta\beta$$

De la même manière, nous subdivisons l'intervalle $[c_{min}, 1]$ avec une suite $(c_j)_{j=1,m}$ telle que :

$$c_{min} < c_1 < c_2 < ... < c_m = 1 \; ; \qquad c_{i+1} = c_i + \delta c$$

Deuxième étape (recherche des seuils) : nous suivons l'évolution de $F_k(1,\beta_i)$ jusqu'à ce qu'elle change de signe entre les valeurs β_{i_0} et β_{i_0+1}. Par application du théorème des valeurs intermédiaire, β_k^* appartient à l'intervalle $[\beta_{i_0}, \beta_{i_0+1}]$. Nous faisons une interpolation linéaire afin d'approcher au mieux β_k^* ; β_k^* est donc équivalent à :

$$\beta_k^* \simeq \beta_{i_0} - \frac{F_k(1,\beta_{i_0})}{F_k(1,\beta_{i_0+1}) - F_k(1,\beta_{i_0})}\delta\beta$$

Troisième étape : $i \geq i_0 + 1$ étant fixé, on calcule les valeurs de la suite $F_k(\beta_i, c_j)$ pour $j = m, m-1, ...,$ jusqu'à ce qu'elle change de signe à partir d'un rang j_0. On approche $c_k(\beta_i)$ par la formule d'interpolation :

$$c_k(\beta_i) = c_{j_0} - \frac{F_k(c_{j_0},\beta_i)}{F_k(c_{j_0+1},\beta_i) - F_k(c_{j_0},\beta_i)}\delta c$$

En répétant le processus pour $i = i_0 + 1, i_0 + 2, ..., n$, on construit une courbe discrète :

$$\beta_i \longmapsto c_k(\beta_i) \qquad (i_0 + 1 \leq i \leq n)$$

qui approche la courbe exacte (sur le réseau (β_i)) avec une erreur qui n'exède pas δc. La figure 3.1 illustre cette étape.

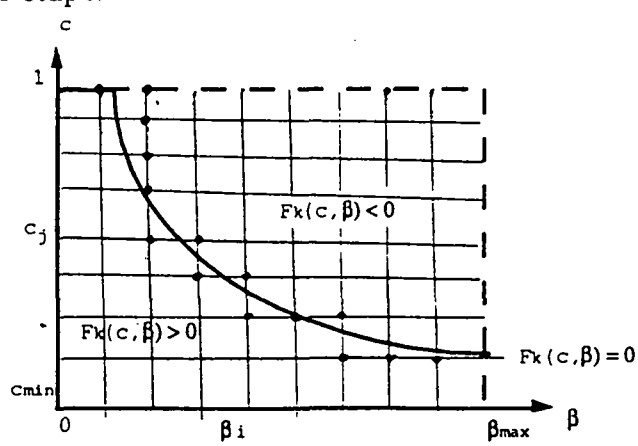


Figure 3.1 : Algorithme pour tracer une courbe de dispersion

Chapitre 4

Etude numérique de l'équation des seuils

Le résultat le plus important de ce chapitre est le suivant : l'équation des seuils s'obtient par passage à la limite, quand $\omega \longrightarrow \beta v_s$, dans l'équation de dispersion :

$$\lambda_k(\omega, \beta) - \omega^2 = 0 \quad k = 1, 2, \ldots$$

Plus précisément, on montrera que la suite $\mu_k(\beta) = \lambda_k(\beta v_s, \beta) - \beta^2 v_s^2$ décrit le spectre ponctuel d'un certain opérateur autoadjoint à résolvante compacte. Le seuil β_k^* sera une racine de l'équation :

$$\mu_k(\beta) = 0 \quad (\beta \geq 0)$$

La technique utilisée ici ne différant pas beaucoup de celle utilisée dans le chapitre 2, nous allons énoncer certaines propositions sans détailler la démonstration.

<u>Notations</u> :

Avec $J = I$ ou I', on pose, par définition :

- $W_n(J) = \{ u|_J \, ; \, u \in W_n \}$
- $q_n^J(\beta; ., .) =$ restriction de $q_n(\beta; \ldots)$ à $W_n(J)^2$

W_n et $q_n(\beta)$ ont été introduits dans le chapitre 1.

4.1 Formulation de l'équation des seuils sur I

Selon le théorème 1.1, les seuils β_k^* (resp. β_k^0) vérifient le problème variationnel (S_n). Nous allons définir un problème , qu'on note $S_n(I)$, posé sur l'intervalle borné I, et qui sera équivalent à S_n. Pour cela, on construira un opérateur de Dirichlet-Neumann, noté $B_n(\beta)$, qui relie la solution du problème intérieur à celle du problème extérieur.

Considérons le problème aux limites :

$$(Q_n(\beta)) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } u \in W_n(I') \text{ vérifiant :} \\ \mathcal{A}_n(\beta)u = \beta^2 v_s^2 u \quad \text{sur } I' \\ u(R) = \phi\ , \quad \phi \text{ donné} \end{cases}$$

Pour $\beta \geq 0$, on définit la suite de vecteurs de $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{cases} v_0 = (1, 1, 0) \\ v_n(\beta) = (k_1 \dfrac{dK_n}{dr}(k_1 R), -\dfrac{n}{R} K_n(k_1 R), \beta K_n(k_1 R))\ ,\ n \geq 1 \end{cases}$$

avec

$$k_1^2 = \beta^2 \left(1 - \frac{v_s^2}{v_p^2}\right) = \beta^2 \frac{\lambda_\infty + \mu_\infty}{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}$$

On pose :

$$\begin{cases} L_0(\beta) = \mathbf{R}^3 \\ L_n(\beta) = [v_0, v_n(\beta)]\ ,\ n \geq 1 \end{cases}$$

Avec ces définitions, nous avons

Proposition 4.1 *Si $\phi \in L_n(\beta)$, le problème $Q_n(\beta)$ possède une solution unique $u = R_n(\beta)\phi$ qui vérifie l'équation variationnelle :*

$$(4.1) \qquad q_n^{I'}(\beta; u, v) + <(B\frac{du}{dr} + B_2 u)(R), v(R)> = 0 \quad \forall v \in W_n(I')$$

Preuve. Si $r \geq R$, la solution générale du système $\mathcal{A}_n(\beta)u = \beta^2 v_s^2 u$ admet la représentation suivante [8] :

$$u(r) = A\chi_1(r) + B\chi_2(r) + C\chi_3(r) \qquad ((A, B, C) \text{ constantes réelles})$$

avec

$$\begin{aligned} \chi_1(r) &= \left(k_1 \frac{dK_n}{dr}(k_1 r), -\frac{n}{r} K_n(k_1 r), \beta K_n(k_1 r)\right) \\ \chi_2(r) &= \left(\frac{n}{r} f_n(r), -\frac{df_n}{dr}(r), 0\right) \\ \chi_3(r) &= \left(-\beta \frac{df_n}{dr}(r), \beta \frac{n}{r} f_n(r), 0\right) \end{aligned}$$

où f_n vérifie l'équation d'Euler :

$$r^2 f_n'' + r f_n' - n^2 f_n = 0$$

donc

$$f_n(r) = \begin{cases} c_1 \operatorname{Log} r + c_2 & \text{si } n = 0\,; \\ c_3 r^n + c_4 r^{-n} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

On voit que :

$$u \in W_n(I') \Longleftrightarrow c_3 = 0$$

par suite :

$$u(r) = A(-k_1 K_1(k_1 r), 0, \beta K_0(k_1 r)) + \frac{B}{r}(0,1,0) + \frac{C}{r}(1,0,0) \quad \text{si } n = 0$$

$$u(r) = A\left(k_1 \frac{dK_n}{dr}(k_1 r), -\frac{n}{r} K_n(k_1 r), \beta K_n(k_1 r)\right) + \frac{B}{r^{n+1}}(1,1,0) \quad \text{si } n \neq 0$$

Les coefficients (A, B, C) doivent vérifier le système $u(R) = \phi$ qui est résoluble si et seulement si $\phi \in L_n(\beta)$.

2– Soit u la solution de $Q_n(\beta)$ et $v \in W_n(I')$ quelconques.

En intégrant par parties, on obtient pour tout $R' > R$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_R^{R'} (\mathcal{A}_n(\beta)u - \beta^2 v_s^2 u) \cdot v \rho r dr \\ &= q_n^{R'}(\beta; u, v) + < (B\frac{du}{dr} + B_2 u)(R), v(R) > \\ &- < \left(B\frac{du}{dr} + B_2 u\right)(R'), v(R') > \end{aligned} \tag{4.2}$$

$q_n^{R'}(\beta, u, v)$ s'obtient à partir de $q_n^{I'}(\beta, u, v)$ en intégrant sur l'intervalle $]R, R'[$ (au lieu de I').

On a :

$$q_n^{R'}(\beta, u, v) \underset{R' \to \infty}{\longrightarrow} q_n^{I'}(\beta, u, v)$$

car $u, v \in W_n(I')$.

Le comportement de u à l'infini entraîne :

$$r\left(B\frac{du}{dr} + B_2 u\right)(r) \simeq C\,, \quad C \in \mathbf{R}^3 \text{ étant un vecteur constant.}$$

D'autre part, v appartient à $W_n(I')$ ce qui entraîne $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{v}{\sqrt{r}} = 0$ et le comportement asymptotique :

$$\begin{aligned} < \left(B\frac{du}{dr} + B_2 u\right)(R'), v(R') > &= \frac{1}{\sqrt{R'}} < R'\left(B\frac{du}{dr} + B_2 u\right)(R'), \frac{v(R')}{\sqrt{R'}} > \\ &= o\left(\frac{1}{\sqrt{R'}}\right), \quad (R' \to \infty) \end{aligned}$$

En passant à la limite dans l'égalité (4.2), quand $R' \to \infty$, on obtient l'équation (4.1). □

Définition 4.2 *Avec $\phi \in L_n(\beta)$, posons :*

$$B_n(\beta)\phi = \Big(B\frac{du}{dr} + B_2 u\Big)(R)$$

où $u = R_n(\beta)\phi$ est la solution du problème $Q_n(\beta)$.

On peut considérer $B_n(\beta)$ comme une matrice dans $\mathbf{R}^3$. $B_n(\beta)$ est de rang 3 si $n = 0$ et de rang 2 si $n \geq 1$. On peut la décomposer de la manière suivante :

$$B_n(\beta) = T_n U_n^{-1}$$

Avec les notations suivantes :

- $\{e_1, e_2, e_3\}$ étant la base canonique de $\mathbf{R}^3$
- $F_1(r) = \dfrac{1}{r}e_1$; $F_2(r) = \dfrac{1}{r}e_2$; $F_3(r) = \dfrac{1}{r^{n+1}}(e_1 + e_2)$

les matrices U_n et T_n sont données par leurs colonnes :

$$U_n = \begin{cases} \big(\chi_1(R), F_1(R), F_2(R)\big) & \text{si } n = 0\,; \\ \big(\chi_1(R), F_3(R), 0\big) & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

$$T_n = \begin{cases} \big(t_n^\beta(\chi_1)(R), t_n^\beta(F_1)(R), t_n^\beta(F_2)(R)\big) & \text{si } n = 0\,; \\ \big(t_n^\beta(\chi_1)(R), t_n^\beta(F_3)(R), 0\big) & \text{si } n \geq 1\,; \\ \text{avec } t_n^\beta(u) = B\dfrac{du}{dr} + B_2 u. \end{cases}$$

Après calcul on obtient :

$$B_0(\beta) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \beta R \\ 0 & -2 & 0 \\ \beta R & 0 & -S(k_1 R) \end{pmatrix}$$

$$B_n(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

avec

$$\begin{aligned}
b_{12} &= b_{22} = -2\mu_\infty \\
b_{32} &= \beta R \mu_\infty \\
b_{13} &= \frac{2\mu}{\beta R}\Big[1 + n(n+1) + \beta^2 R^2 \Big(\frac{\lambda_\infty + \mu_\infty}{2\mu_\infty}\Big) + S(k_1 R)\Big] \\
b_{23} &= \frac{2n\mu}{\beta R}\Big[1 + \Big(\frac{\lambda_\infty + \mu_\infty}{2\mu_\infty}\Big)\Big(n + 1 + S(k_1 R)\Big)\Big] \\
b_{33} &= \mu_\infty [n + S(k_1 R)]
\end{aligned}$$

Remarque 4.3 1. On vérifie que :

$$B_0(\beta) = \lim_{\omega \to \beta v_s} B_0(\omega, \beta)$$

2. Lorsque $\omega \to \beta v_s$, la matrice $B_n(\omega, \beta)$, $n \geq 1$, dégénère et son rang devient égal à 2 ; plus précisément, la matrice limite est unitairement équivalente à $B_n(\beta)$.

Définition 4.4 *On pose par définition :*

$$\begin{aligned}
V_0(\beta) &= V_0(I) \\
V_n(\beta) &= \{u \in V_n(I);\ u(R) \in L_n(\beta)\}\ , \quad n \geq 1
\end{aligned}$$

$V_n(\beta)$ est un sous-espace fermé de $V_n(I)$.

Proposition 4.5 *L'équation des seuils (S_n) (théorème 1.1) est équivalente à la formulation variationnelle :*

$$S_n(I) \qquad \begin{cases} \textit{Trouver } \beta \geq 0 \textit{ et } u \in V_n(\beta), u \neq 0, \textit{ vérifiant :} \\ \\ q_n^I(\beta; u, v) - \langle B_n(\beta) u(R), v(R) \rangle = 0. \quad \forall v \in V_n(\beta) \end{cases}$$

Preuve. La démonstration est analogue à celle du théorème 2.3 ; elle est basée sur la proposition 3.1. La contrainte $u(R) \in L_n(\beta)$ sert à prolonger sur $\mathbf{R}^+$ une solution de $S_n(I)$ en une solution de S_n. □

Considérons la forme bilinéaire symétrique suivante :

$$d_n(\beta; u, v) = q_n^I(\beta; u, v) - \langle B_n(\beta) u(R), v(R) \rangle, \quad u, v \in V_n(\beta)$$

$d_n(\beta; u, v)$ engendre un opérateur non borné dans $H(I)$, noté $d_n(\beta)$, qui a les propriétés suivantes :

Proposition 4.6 *$d_n(\beta)$ est autoadjoint et à résolvante compacte. La suite des valeurs propres $\{\mu_k(\beta);\ k = 1, 2, ..\}$ vérifie :*

1. $\mu_k(\beta) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. $\mu_1(\beta) \geq -C\beta^2$.

Preuve. On montre qu'il existe $\mu \in \mathbf{R}$ assez grand pour lequel la forme quadratique :

$$d_n(\beta; u, v) + \mu(u, v)_I$$

est coercive. En particulier, il existe une constante $C \geq 0$ (indépendante de β) telle que :

$$d_n(\beta; u, u) \geq -C\beta^2 \|u\|_I^2, \quad \forall u \in V_n(\beta)$$

Le résultat est alors une conséquence du lemme de Lax-Milgram et de l'injection compacte de $V_n(\beta)$ dans $H(I)$. L'opérateur $d_n(\beta)$ est défini par :

$$\begin{cases} D(d_n(\beta)) = \{u \in V_n(\beta);\ \mathcal{A}_n(\beta)u \in H(I)\,;\, t_n^\beta(u)\Big|_{r=R} = B_n(\beta)u(R)\} \\ d_n(\beta)u = \mathcal{A}_n(\beta)u - \beta^2 v_s^2 u\,, \quad u \in D(d_n(\beta)) \end{cases}$$

□

Corollaire 4.7 1. *Supposons que (β, u) vérifie Q_n. Alors il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que :*

$$\mu_k(\beta) = 0 \quad et \quad u|_I \in Ker(d_n(\beta))$$

2. *Inversement, si $u \in Ker(d_n(\beta))$, $u \neq 0$, il existe $\tilde{u} \in W_n$, prolongement de u, tel que $(\beta, \tilde{u})$ soit une solution de Q_n.*

Proposition 4.8 *Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$\frac{\mu(r)}{\rho(r)} + \delta \leq \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \quad p.p.\ r \in I$$

Alors :

1. $\mu_1(0) \geq 0$
2. *Il existe une suite (β_k), tendant vers l'infini, telle que :*

$$\beta > \beta_k \Longrightarrow \mu_k(\beta) < 0$$

3. *Si $n = 0$, l'équation $\mu_k(\beta) = 0$ possède une seule solution dans l'intervalle $[0, \beta_k[$.*

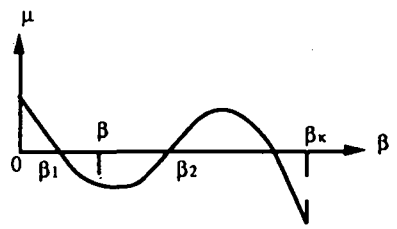
Preuve.

1. Il découle de la propriété 2 de la proposition 4.6.

2. Ce résultat se démontre de la même manière que le théorème 3.3 de [5] ; il suffit de remarquer que :
$$d_n(\beta; u, u) = a_n(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) - \beta^2 v_s^2 \|\tilde{u}\|^2$$
où $\tilde{u}$ est un prolongement de u à $\mathbf{R}^+$.

3. D'après ce qui précède l'équation $\mu_k(\beta) = 0$ admet au moins une racine dans l'intervalle $[0, \beta_k[$ car la fonction $\mu_k(\beta)$ est continue (la famille des opérateurs $(d(\beta))_\beta$ dépend analytiquement de β, au sens de Kato [13]).

Supposons qu'il existe plus d'une racine ; alors la courbe de la fonction $\mu_k(\beta)$ a l'allure suivante :



Avec $\beta \in]\beta_1, \beta_2[$, considérons l'isomorphisme de $V_0(I)$:
$$J_{\beta_2,\beta}(u_1, u_2, u_3) = (u_1, u_2, \frac{\beta}{\beta_2} u_3)$$

Pour $u \in V_0(I)$, posons :
$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{sur } I\,; \\ R_0(\beta) u(R) & \text{sur } I'. \end{cases}$$
alors
$$d_0(\beta; u, u) = q_0(\beta_2; \tilde{u}, \tilde{u})$$
Utilisant la décomposition (2.8)-(2.9) de [5], on peut écrire :
$$q_0(\beta_2; J_{\beta_2,\beta}(\tilde{u}), J_{\beta_2,\beta}(\tilde{u})) = q_0(\beta; \tilde{u}, \tilde{u}) - (\beta_2^2 - \beta^2) \times$$
$$\left[\frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty \mu\Big(r|\frac{d\tilde{u}_3}{dr}|^2 + \frac{\tilde{u}_3^2}{r}\Big) dr + \int_0^R \Big(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho}\Big)(u_1^2 + u_2^2) \rho r dr\right]$$

ou encore

$$d_0(\beta_2; J_{\beta_2,\beta}(\tilde{u}), J_{\beta_2,\beta}(\tilde{u})) = d_0(\beta; u, u) - (\beta_2^2 - \beta^2) \times \Big[\frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty \mu\Big(r|\frac{d\tilde{u}_3}{dr}|^2 + \frac{\tilde{u}_3^2}{r}\Big) dr$$
(4.3)
$$+ \int_0^R \Big(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\mu}{\rho}\Big)(u_1^2 + u_2^2) \rho r dr\Big]$$

Compte tenu de l'hypothèse, on déduit :

$$d_0(\beta_2; J_{\beta_2,\beta}(\tilde{u}), J_{\beta_2,\beta}(\tilde{u})) \leq d_0(\beta; u, u) \quad \forall u \in V_0(I) \tag{4.4}$$

Soit $0 < \epsilon \leq -\mu_k(\beta)$, alors, d'après le principe du Min−Max, on peut trouver un sous-espace $V_k \subset V_0(I)$, de dimension k, tel que ;

$$\frac{d_0(\beta; u, u)}{\|u\|^2} \leq \mu_k(\beta) + \epsilon \leq 0 \quad \forall u \in V_k \tag{4.5}$$

L'inégalité $\|J_{\beta_2,\beta}(u)\| \leq \|u\|$ entraîne avec (4.4) et (4.5)

$$\frac{d_0(\beta_2; J_{\beta_2,\beta}(\tilde{u}), J_{\beta_2,\beta}(\tilde{u}))}{\|J_{\beta_2,\beta}(\tilde{u})\|^2} \leq \frac{d_0(\beta; u, u)}{\|u\|^2} \leq \mu_k(\beta) + \epsilon \leq 0$$

$J_{\beta_2,\beta}(V_k)$ étant un sous-espace de $V_0(I)$ de dimension k, on a

$$0 = \mu_k(\beta_2) \leq \max_{u \in V_k} \frac{d_0(\beta_2; J_{\beta_2,\beta}(\tilde{u}), J_{\beta_2,\beta}(\tilde{u}))}{\|J_{\beta_2,\beta}(\tilde{u})\|^2} \leq \mu_k(\beta) + \epsilon \leq 0$$

d'où

$$\mu_k(\beta) = 0 \quad \forall \beta \in]\beta_1, \beta_2[$$

ce qui contredit l'analyticité de $\mu_k(\beta)$. □

Remarque 4.9 Il y a des difficultés pour généraliser la propriété 3 au cas $n \geq 1$ pour deux raisons :

1. Si $n \geq 1$, l'espace $V_n(\beta)$ dépend de β ; alors que nous n'avons pas un théorème de Kato qui garantit l'analyticité de la fonction $\mu_k(\beta)$.

2. Si V_k est un sous-espace de $V_n(\beta)$, $J_{\beta_2,\beta}(V_k)$ n'est pas forcément un sous espace de $V_n(\beta_2)$.

4.2 Discrétisation de l'opérateur $d_n(\beta)$

Dans ce paragraphe, on veut discrétiser l'opérateur $d_n(\beta)$ par la méthode des éléments finis. Nous distinguons deux cas :

1-$\boxed{n = 0}$:

On pose $V_{0,h}(\beta) = V_{0,h}(I)$ (pour la définition de $V_{0,h}(I)$ voir le paragraphe 3.3)

Le nombre réel $\mu_{k,h}$ sera (par définition) une approximation de μ_k (valeur propre de $d_n(\beta)$) s'il existe $u_h \in V_{0,h}(I)$, $u_h \neq 0$. vérifiant :

$$d_0(\beta; u_h, v_h) = \mu_{k,h}(u_h, v_h)_I \quad \forall v_h \in V_{0,h}(I)$$

ou, écrit sous forme matricielle :

$$D_{0,h}(\beta)X = \mu_{k,h}MX, \quad X \in \mathbf{R}^{3N}$$

A partir des relations :

$$\begin{cases} q_0^I(\beta; u, v) = a_0^I(\beta; u, v) - \beta^2 v_s^2 (u, v)_I \\ B_0(\beta) = \lim\limits_{\omega \to \beta v_s} B_0(\omega, \beta) \end{cases}$$

on déduit :

$$D_{0,h}(\beta) = \lim_{\omega \to \beta v_s} C_{0,h}(\omega, \beta) - \beta^2 v_s^2 M$$

et

$$\mu_{k,h}(\beta) = \lim_{\omega \to \beta v_s} \lambda_{k,h}(\omega, \beta) - \beta^2 v_s^2 \ ,$$

les matrices $C_{0,h}(\omega, \beta)$ et $M = M(h)$ étant définies au paragraphe 3.4.

2- $\boxed{n \geq 1}$: Pour définir $V_{n,h}(\beta)$, on tient compte de la contrainte $u(R) \in L_n(\beta)$.

Posons :

$$\begin{cases} \psi_1 = \phi_N v_0 \\ \psi_2 = \phi_N v_n(\beta) \end{cases}$$

$V_{n,h}(\beta)$ est un sous-espace de dimension $(3N - 1)$ défini par l'équivalence :

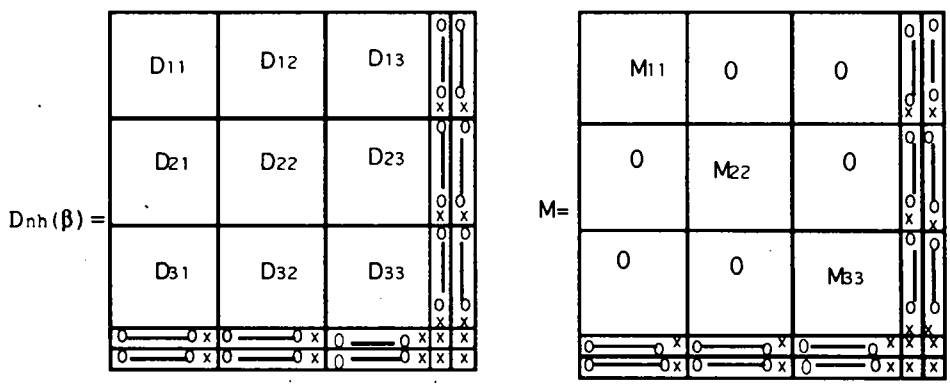
$$u \in V_{n,h}(\beta) \Longleftrightarrow u = \sum_{k=1}^{3} \Big(\sum_{i=1}^{N-1} X_{ki} \Phi_{ki} \Big) + X_{3N-2}\psi_1 + X_{3N-1}\psi_2 \ , \quad X = (X_{ki}) \in \mathbf{R}^{3N-1}$$

$\{\Phi_{ki}\}$ étant la base choisie de $V_{nh}(I)$.

Avec ces conventions le problème matriciel qui approche $S_n(I)$ prend la forme suivante :

$$D_{n,h}(\beta)X = \mu_{k,h}MX$$

où $D_{n,h}(\beta)$ et M sont deux matrices qui ont les profils suivants :



Le bloc D_{kl} est un bloc tridiagonal d'ordre $(N - 1)$ dont les éléments vérifient :

$$D_{kl}(i, j) = q_n^I(\beta; \Phi_{ki}, \Phi_{lj}), \quad (1 \leq k, l \leq 3), \quad (1 \leq i, j \leq N - 1)$$

Les éléments désignés par une croix sont les contributions des fonctions de base ψ_1 et ψ_2 :

$$D_{n,h}(\beta)(k(N-1),3N-3+l) = q_n^I(\beta;\Phi_{k,N-1},\psi_l), \quad (1 \le k \le 3), \quad (1 \le l \le 2)$$

$$D_{n,h}(\beta)(3N-3+k,3N-3+l) = q_n^I(\beta;\psi_k,\psi_l) - < B_n(\beta)\psi_k(R),\psi_l(R) > \ (1 \le k,l \le 2)$$

Les coefficients de la matrice M sont donnés par :

$$\begin{cases} M_{kk}(i,j) = (\phi_i,\phi_j)_I, & (1 \le k \le 3),\ (1 \le i,j \le N-1) \\ M(k(N-1),3N-3+l) = (\Phi_{k,N-1},\psi_l)_I, & (1 \le k \le 3),(1 \le l \le 2) \\ M(3N-3+k,3N-3+l) = (\psi_k,\psi_l)_I, & (1 \le k,l \le 3) \end{cases}$$

Proposition 4.10 *L'espace $V_{n,h}(\beta)$ a la propriété d'approximation suivante :*

$$\forall u \in V_{n,h}(\beta), \quad \lim_{h\to 0}\Big[\inf_{v\in V_{n,h}(\beta)} \|u-v\|_{V_n(I)}\Big] = 0 \tag{4.6}$$

Preuve. Soient $u \in V_n(\beta)$ et $\delta > 0$ tel que $R-\delta = mh$ ($m \in \mathbf{N}^*$), alors il existe une fonction $\phi_\delta \in \mathcal{D}(]0,R])$ telle que :

$$\|u-\phi_\delta\|_{V_n(I)} < \delta \tag{4.7}$$

Posons $I_\delta =]0,R-\delta[$ et désignons par $\phi_{\delta h}$ l'interpolée de ϕ_δ sur l'intervalle I_δ, i.e :

$$\phi_{\delta h} = \sum_{j=1}^{m} \phi_\delta(jh)\phi_j \quad (\phi_j \text{ fonction chapeau})$$

alors il existe une constante $C \ge 0$ telle que :

$$\|\phi_\delta - \phi_{\delta h}\|_{H^1(I_\delta)^3} \le Ch\|\phi_\delta\|_{H^2(I_\delta)^3} \tag{4.8}$$

Choisissons un élément $\tilde{\phi}_{\delta h} \in V_{n,h}(\beta)$ qui prolonge $\phi_{\delta h}$ sur I de la manière suivante :

$$\tilde{\phi}_{\delta h}(r) = \begin{cases} \phi_{\delta h}(r) & \text{sur } I_\delta\,; \\ \text{affine} & \text{sur } I \setminus I_\delta\,; \\ u(R) & \text{si } r = R. \end{cases}$$

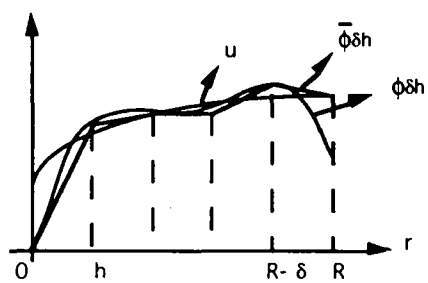


Fig 4.1 : Fonction $\tilde{\phi}_{\delta h}$.

Il existe une constante $C' \geq 0$ (indépendante de δ) telle que :

$$(4.9)\qquad \begin{aligned} \|u - \tilde{\phi}_{\delta h}\|_{H^1(I\setminus I_\delta)^3} &\leq \frac{C'}{\sqrt{\delta}}|u(R) - \phi_\delta(R-\delta)| \\ &\leq \frac{C'}{\sqrt{\delta}}(|u(R) - \phi_\delta(R)| + |\phi_\delta(R) - \phi_\delta(R-\delta)|) \end{aligned}$$

La continuité de la trace et (3.7) entraînent :

$$|u(R) - \phi_\delta(R)| \leq C''\delta$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |\phi_\delta(R) - \phi_\delta(R-\delta)| &\leq \int_{R-\delta}^{R} |\frac{d\phi_\delta}{dr}|dr \\ &\leq \sqrt{\frac{\delta}{R-\delta}}\Big(\int_{R-\delta}^{R} |\frac{d\phi_\delta}{dr}|^2 r dr\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\frac{2\delta}{R-\delta}}\Big[\delta + \Big(\int_{R-\delta}^{R} |\frac{du}{dr}|^2 r dr\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] = \sqrt{\delta}\alpha(\delta) \qquad \text{(d'après (3.7))} \end{aligned}$$

avec $\lim_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0$.

L'inégalité (3.9) devient :

$$\|u - \tilde{\phi}_{\delta h}\|_{H^1(I\setminus I_\delta)^3} \leq C\sqrt{\delta} + \alpha(\delta) = \gamma(\delta) \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par suite :

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{\phi}_{\delta h}\|_{V_n(I)} &\leq \|u - \phi_{\delta h}\|_{V_n(I_\delta)} + \|u - \tilde{\phi}_{\delta h}\|_{V_n(I\setminus I_\delta)^3} \\ &\leq \|u - \phi_\delta\|_{V_n(I)} + \|\phi_\delta - \phi_{\delta h}\|_{V_n(I_\delta)} + C_1\|u - \tilde{\phi}_{\delta h}\|_{H^1(I\setminus I_\delta)^3} \\ &\leq \delta + C_2(\delta)\|\phi_\delta - \phi_{\delta h}\|_{H^1(I_\delta)^3} + C_1\gamma(\delta), \quad (C_2(\delta) \text{ dépend de supp } \phi_\delta) \\ &\leq \delta + hC_3(\delta) + C_1\gamma(\delta) \end{aligned}$$

Le réel $\epsilon > 0$ étant arbitraire, nous choisissons δ assez petit pour que :

$$\delta + C_1\gamma(\delta) < \frac{\epsilon}{2}$$

puis $h < \dfrac{\epsilon}{2C_3(\delta)}$ pour avoir :

$$\|u - \tilde{\phi}_{\delta,h}\|_{V_n(I)} \leq \epsilon$$

ce qui prouve la proposition. □

Une conséquence immédiate de la propriété (4.6) est le corollaire suivant :

Corollaire 4.11 *On a la convergence :*

$$\lim_{h\to 0} |\mu_k - \mu_{kh}| = 0$$

Chapitre 5

Résultats numériques

Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus à partir de simulations numériques effectuées sur des milieux de profils particuliers. Nous avons mené les calculs pour les modèles suivants :

1. profil constant par morceaux
2. profil en forme de sinus.

Pour le type (1) nous disposons de calculs analytiques effectués dans l'annexe A. Ils nous permettent d'évaluer la précision et la qualité de notre méthode d'approximation.

5.1 Modes axisymétriques ($n = 0$)

5.1.1 Profil constant par morceaux

A Modes de torsion.

Les constantes élastiques de ce test prennent les valeurs (A.7) et (A.8) données en annexe A. La figure 5.1 illustre les courbes de dispersion des premiers modes axisymétriques. Les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants compte tenu du faible nombre de points de maillage. En effet, avec $N = 30$ (et $\delta c = 10^{-2}$), l'erreur d'interpolation ne dépasse pas 0.1% uniformément par rapport à $\beta \in [0, 20]$.

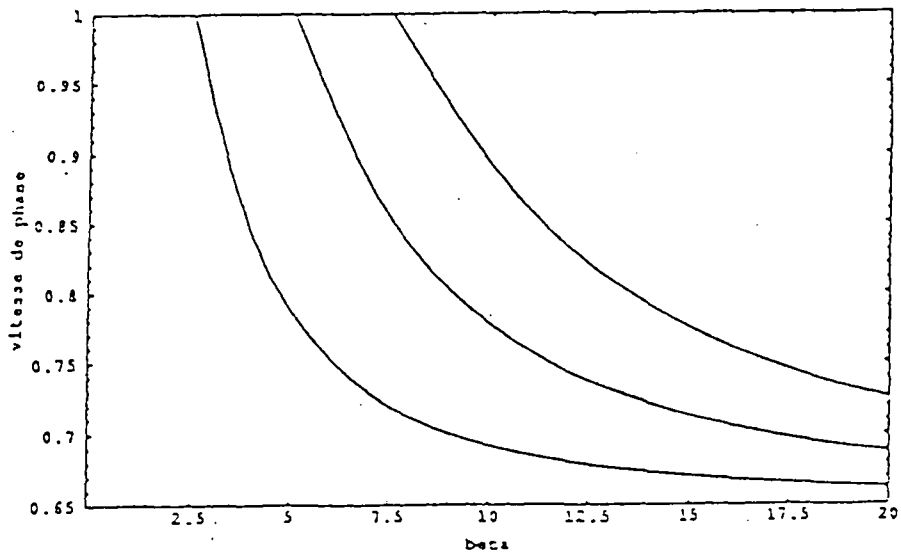


Fig 5.1 : Courbes de dispersion des premiers modes de torsion

Nous voyons que la vitesse de phase décroit quand le nombre d'onde augmente et tend vers la vitesse v_1 du milieu intérieur. Nous avons déjà obtenu cette limite dans l'étude théorique (cf. [5], corollaire 3.13), la décroissance n'ayant pas été établie en général.

Nous étudions la convergence des valeurs propres lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. Avec $h = 5.10^{-3}$ la première valeur propre est calculée avec une borne d'erreur égale à 10^{-5} (qui est, en général, inférieure à celle faite sur la solution exacte) ; donc on peut considérer que ce pas donne un résultat de référence sur la précision d'une valeur propre. La figure 5.2 montre l'évolution de la précision sur la première valeur propre avec le nombre de subdivisions N.

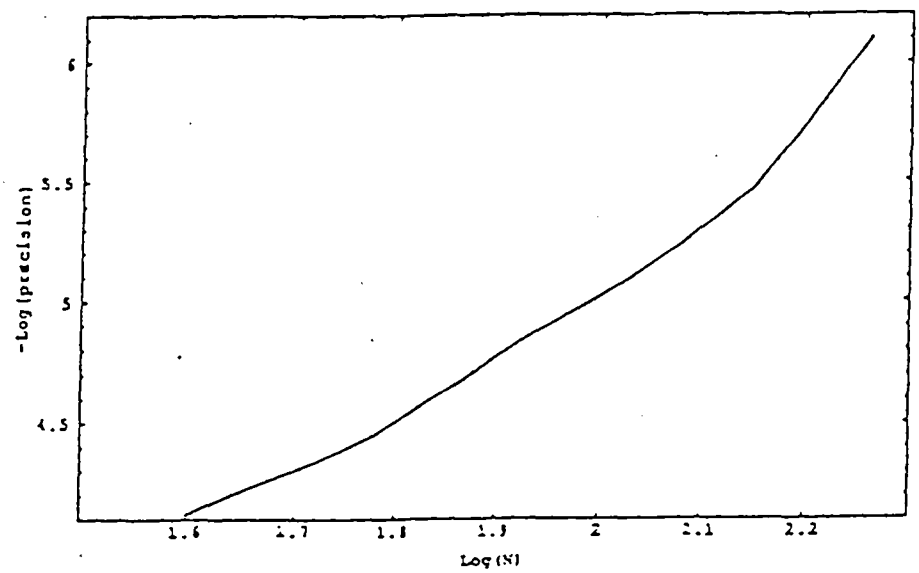


Figure 5.2 Erreur relative de la 1ere valeur propre pour $c = 0.9$ et $\beta = 5$.

On constate que la courbe est affine par morceaux, la pente de chaque segment de droite

correspond à l'ordre de précision k, ie :

$$\left|\frac{\lambda_1 - \lambda_{1h}}{\lambda_1}\right| \leq Ch^k$$

Donc la précision est d'ordre 2 en N dans l'intervalle [60,140], ce qui est en accord avec l'analyse d'erreur.

B Modes de compression

Dans ce cas nous avons rencontré des difficultés liées à la nature du problème matriciel $\bar{C}\bar{X} = \lambda\bar{M}\bar{X}$ (voir remarque 3.13). En appliquant la méthode QR au problème réduit (voir remarque 3.15) nous avons constaté qu'elle n'est pas efficace pour extraire les valeurs propres internes au spectre (c'est à dire la 2eme, 3eme,...etc) ; en effet dans certains cas on obtient des courbes translatées. A notre avis, cela est dû au fait que les valeurs propres sont proches l'une de l'autre (le taux de convergence $\frac{\lambda_{i+1}-\lambda_i}{\lambda_N-\lambda_{i+1}}$ est très petit, ce qui rend difficile la séparation des valeurs propres [4]) . Pour contourner cette difficulté, nous avons programmé la méthode de la puissance inverse avec translation (schift) qui permet de sélectionner n'importe quelle valeur propre à condition de connaitre une approximation de celle-ci, ce qui nous suffit car nous n'avons pas besoin de calculer toutes les valeurs propres, seules les plus petites ont un intérêt physique. L'algorithme est le suivant [11] :

1- Choisir u_0, $\|u_0\|_\infty = 1$, σ_0 proche de λ.

2- Pour $k = 1, 2, ...$

calculer w_k en résolvant :

$(\bar{C} - \sigma_0\bar{M})w_k = \bar{M}w_{k-1} \quad (\star)$

$\sigma_k = w_k(i) \quad$ où $\quad |w_k(i)| = \|w_k\|_\infty$

$u_k = \dfrac{w_k}{\sigma_k}$

3- test d'arrêt $|\sigma_k - \sigma_{k-1}| \leq \epsilon|\sigma_k|$

On a la convergence :

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \frac{1}{\lambda - \sigma_0}$$

et u_k tend vers la direction du vecteur propre associé à λ.

Comme nous avons un problème paramétré, à chaque nœud du réseau $\{\beta_i, c_j\}$ nous choisissons, pour initialiser le processus, (σ_0, u_0) égal aux éléments propres $(\lambda(\beta_i, c_j), u(\beta_i, c_j))$ calculés à une étape précédente (de nœud voisin).

Ce schéma a fourni des résultats qui ne sont pas encore satisfaisants. En suivant une idée de I.PARLETT [17], nous l'avons modifié en remplaçant l'équation ($\star$) par l'équation équivalente :

$$\bar{M}^{-\frac{1}{2}}(\bar{C} - \sigma_0\bar{M})\bar{M}^{-\frac{1}{2}}z_k = z_{k-1} \quad \text{avec } z_k = \bar{M}^{\frac{1}{2}}w_k$$

Ce système a l'avantage d'être mieux conditionné (le conditionnement ne dépend plus de N). Effectivement les résultats sont meilleurs : nous avons obtenu un écart inférieur à 3% (uniformément en β) par rapport au résultats analytiques sauf pour le 1er mode lorsque β devient assez grand. Ce dernier défaut est dû probablement aux erreurs d'arrondi qui augmentent sensiblement avec β. Ce qui est acceptable avec une interpolation du type P^1. Nous avons tracé sur la figure 10.3 les courbes de dispersion des premiers modes de compression avec $N = 30$ et $\delta c = 0.01$ (les courbes exactes sont tracées en trait pointillé).

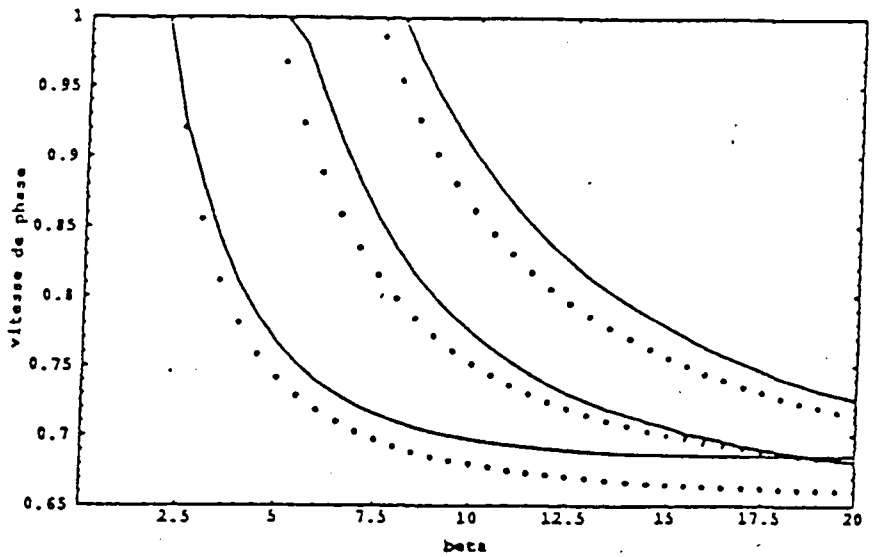


Fig 5.3 : Courbes de dispersion des premiers modes de compression

Ces courbes possèdent les mêmes propriétés que celles des courbes des ondes de torsion.

La figure 5.4 montre le résultat d'un test de convergence sur la première valeur propre. On constate que l'ordre de précision est 1.6 (égal à la pente de la droite de régression). Cette baisse de précision (par rapport à la théorie qui prévoyait un schéma d'ordre 2) est due certainement, d'une part, au couplage entre les composantes u_1 et u_3 et, d'autre part, à la manière d'approcher u_3 au voisinage de $r = 0$.

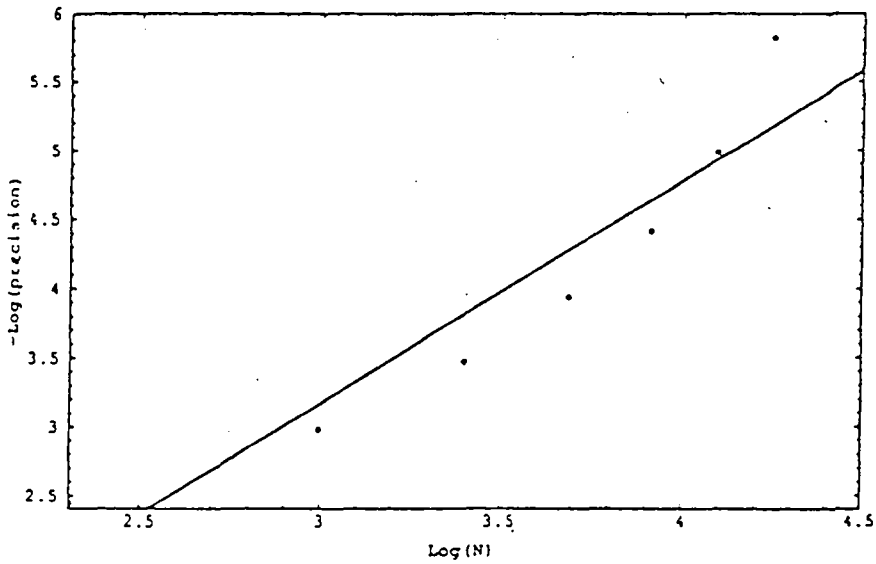


Fig 5.4 Erreur relative de la première valeur propre pour $c = 0.8$ et $\beta = 5$.

5.1.2 Profil en forme de sinus

Dans ce paragraphe nous exposons les résultats d'expériences numériques effectuées sur un milieu hétérogène dont le profil est en forme de sinus. En particulier, nous mettons en évidence le caractère de guide d'onde lié à l'hétérogénéité.

Les coefficients de Lamé et la densité vérifient :

(i) $(\lambda, \rho) = \begin{cases} (\lambda_1, \rho_1) & \text{sur } I \\ (\lambda_2, \rho_2) & \text{sur } I' \end{cases}$

(ii) $\mu(r) = \begin{cases} \mu_2 + (\mu_2 - \mu_1) \sin \dfrac{2\pi r}{R} & \text{si } r \in I \\ \mu_2 & \text{si } r \in I' \end{cases}$

où $(\lambda_i, \mu_i, \rho_i), i = 1, 2$, prennent les valeurs (A.7) et (A.8) de l'annexe A.

A- Les courbes de dispersion

La figure 5.5 montre les courbes de dispersion des trois premiers modes de torsion (en trait pointillé) et de compression (en trait continu).

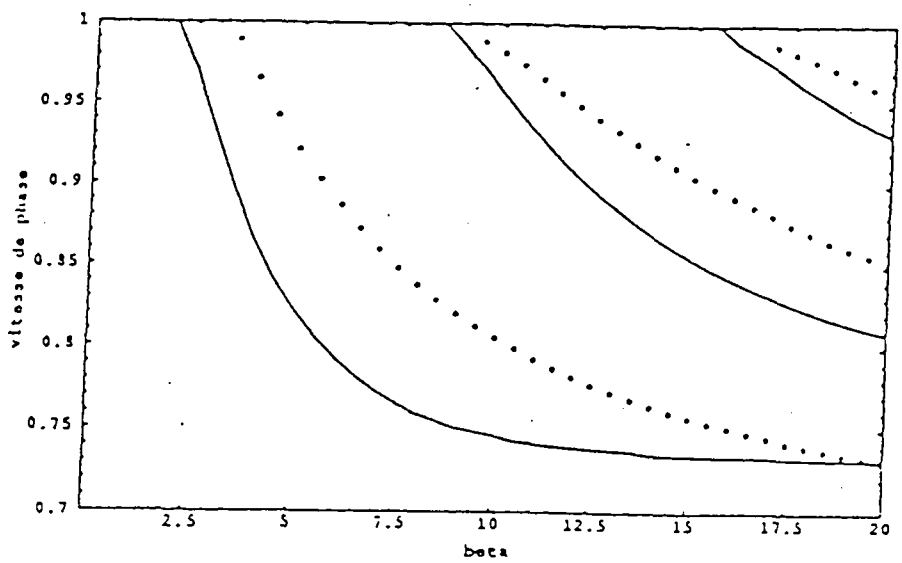


Fig 5.5 : Courbes de dispersion (profil "sinus")

B- les amplitudes

Les amplitudes du milieu intérieur correspondent aux fonctions propres de la matrice $C_{n,h}(\omega,\beta)$ (opérateur discrétisé) pour des couples (β, c) situés sur la courbe de dispersion. Celles du milieu extérieur sont obtenues analytiquement. A l'infini elles décroissent comme la fonction de Bessel $K_1(r)$. Nous présentons pour des valeurs différentes de $\bar{\beta}$, les amplitudes de tous les modes qui apparaissent à la vitesse $\bar{c} = \bar{c}_k(\beta)$:

$\boxed{\bar{\beta} = 5}$

Nous avons uniquement un mode de compression et un mode de torsion de vitesses respectives :

mode de compression : $\bar{c} = 0.883$
mode de torsion : $\bar{c} = 0.929$

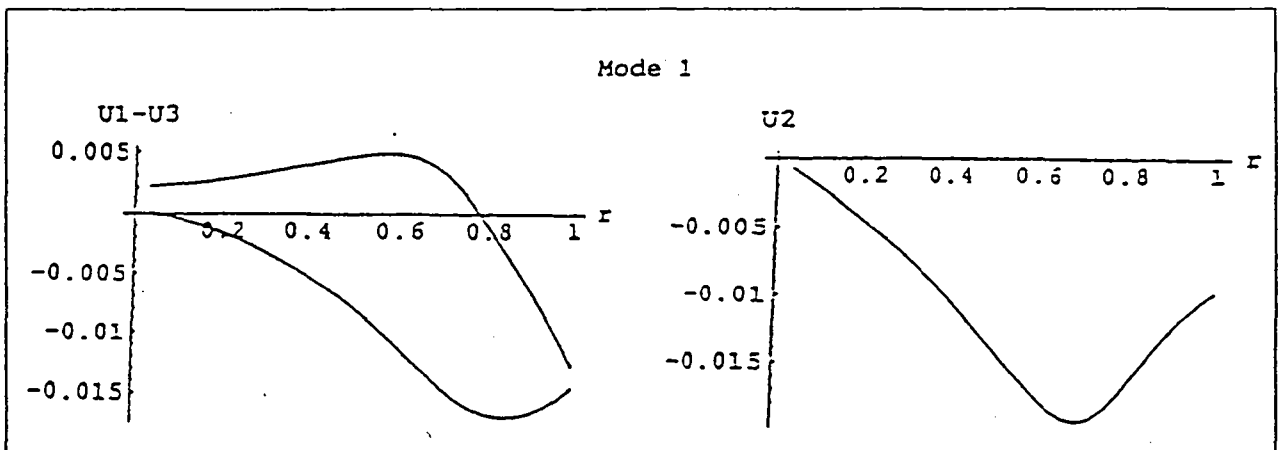


Fig 5.6 : Amplitudes des modes qui apparaissent à $\bar{\beta} = 5$

$\boxed{\bar{\beta} = 12}$

A cette valeur du nombre d'onde apparaissent deux modes de compression et deux modes de torsion. Les vitesses de phase correspondantes sont :

1er mode de compression : $\bar{c} = 0.739$
1er mode de torsion : $\bar{c} = 0.785$
2eme mode de compression : $\bar{c} = 0.906$
2eme mode de torsion : $\bar{c} = 0.958$

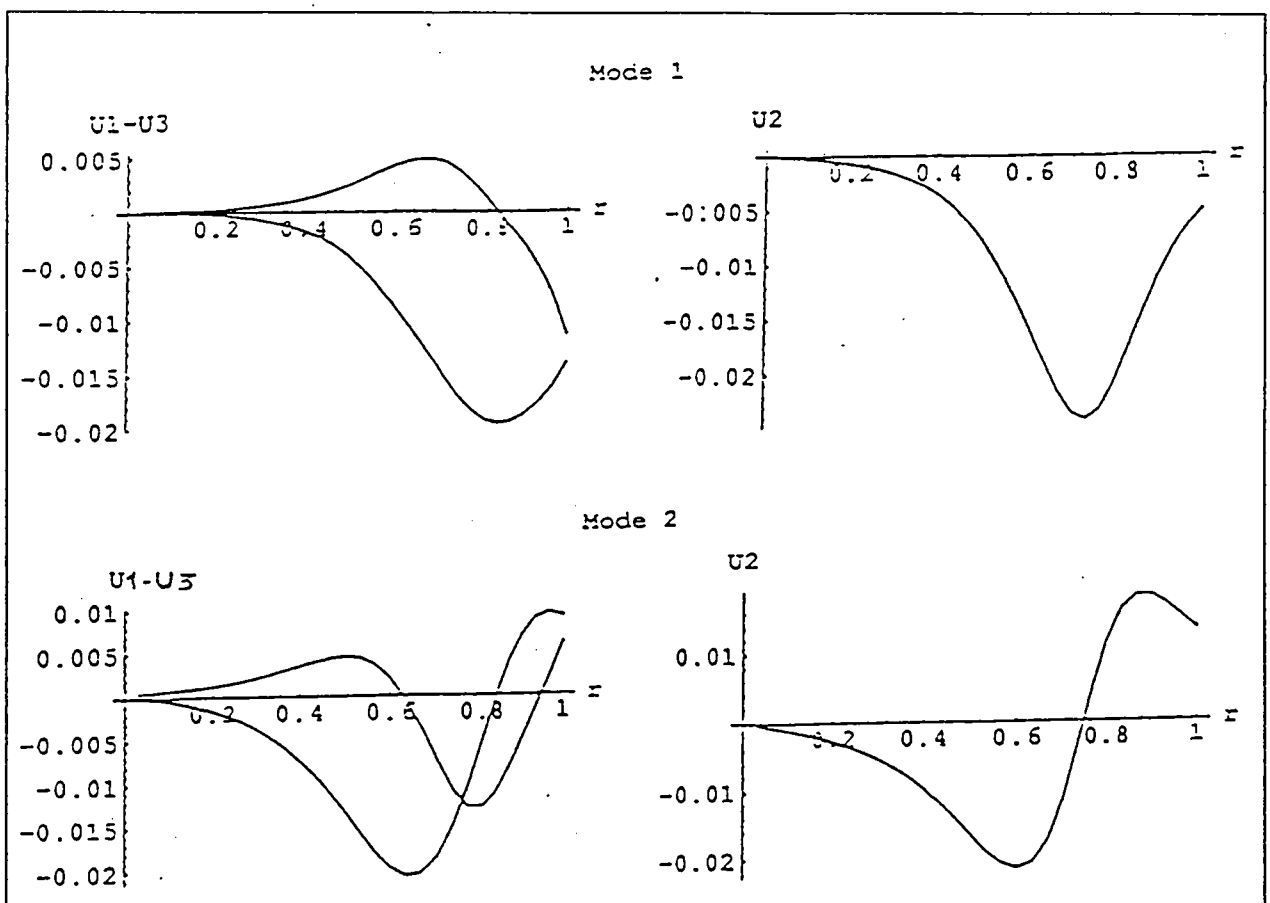


Fig 5.7 : Amplitudes des modes qui apparaissent à $\bar{\beta} = 12$

$\boxed{\bar{\beta} = 20}$

A cette valeur de $\bar{\beta}$, trois modes de compression et trois modes de torsion se propagent dans le milieu considéré. Les vitesses correspondantes sont :

1er mode de compression : $\bar{c} = 0.731$
1er mode de torsion : $\bar{c} = 0.734$
2eme mode de compression : $\bar{c} = 0.809$
2eme mode de torsion : $\bar{c} = 0.858$
3eme mode de compression : $\bar{c} = 0.930$
3eme mode de torsion : $\bar{c} = 0.964$

Les amplitudes du champ de déplacement sont représentées sur les six courbes de la figure 5.8.

Commentaires

• Pour le premier mode de compression, l'énergie est essentiellement localisée dans la direction radiale e_r. Cependant il apparaît que la contribution énergétique suivant la direction axiale x_3 augmente au fur et à mesure que l'ordre du mode augmente.

• Il apparaît clairement, sur toutes les figures, que les déplacements u_1 et u_2 s'annulent à l'origine. La composante u_3 n'est pas forcément nulle, par contre sa dérivée est toujours nulle à l'origine, ce qui est en accord avec la conclusion du théorème 3.1 (cas $n = 0$).

• Il semble, au vu des courbes, qu'à l'interface $r = R$ les composantes u_1 et u_3 sont presque égales, ce qui laisse à penser qu'on a effectivement l'égalité.

• Pour obtenir les déplacements sur l'intervalle $[1, +\infty[$ il faut prolonger ces courbes (de manière continue) par les courbes des fonctions analytiques définies par les formules (A.6) et (A.10) (cf. Annexe A).

Il faut préciser aussi que les fonctions propres discrètes $\bar{u} = (u_1, u_3)$ et u_2 sont normalisées par les conditions :

$$\begin{aligned} < M_1 u_2, u_2 > &= 1 \\ < \bar{M}\bar{u}, \bar{u} > &= 1 \end{aligned}$$

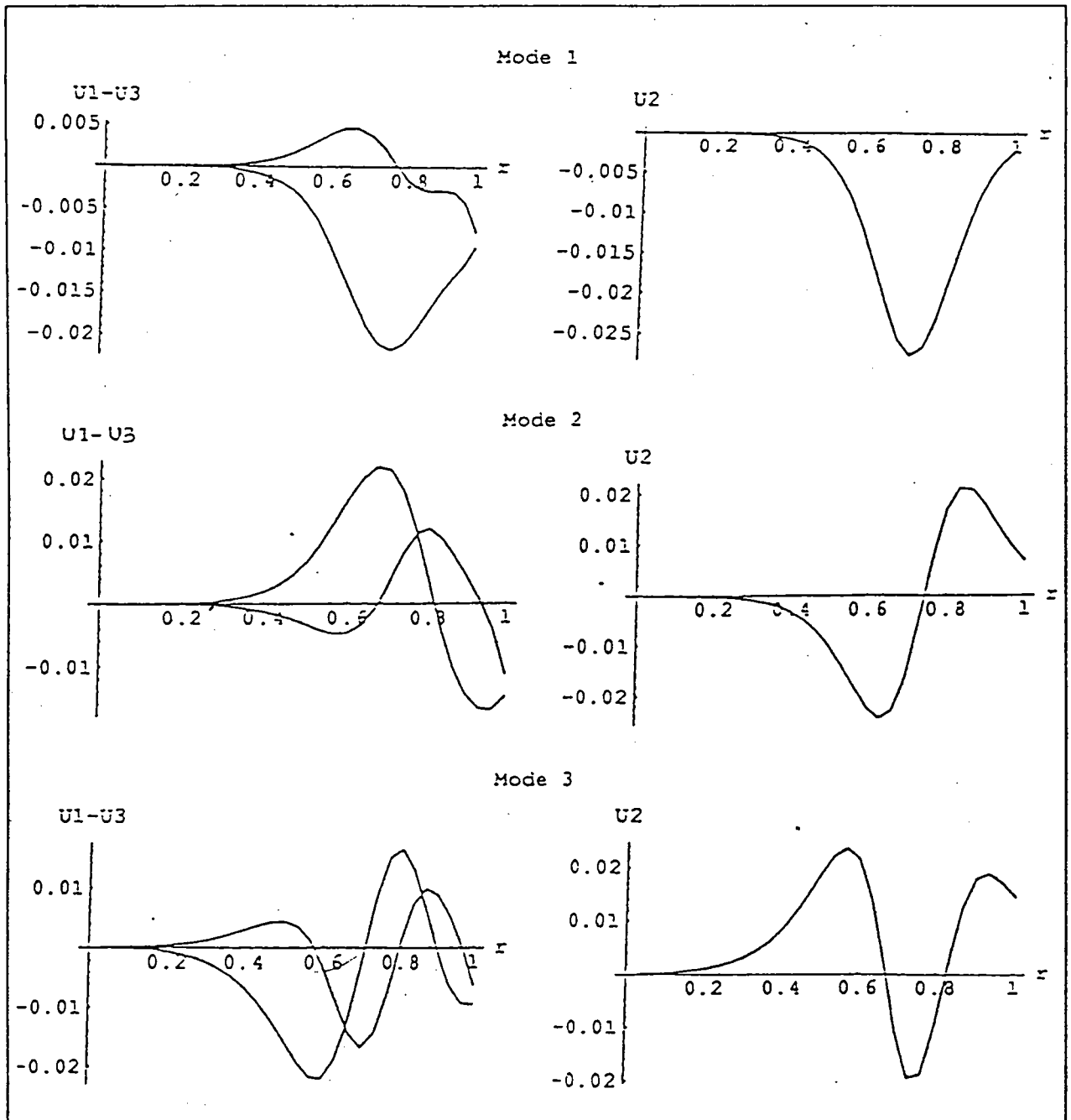


Fig 5.8 : Amplitudes des modes qui apparaissent à $\bar{\beta} = 20$

Comportement des modes à haute fréquence (i.e. $\beta \to \infty$)

La figure 5.9 représente l'amplitude du 1er mode pour $\bar{\beta} = 100$. Les vitesses sont :

$\bar{c} = 0.677$ pour le mode de compression
$\bar{c} = 0.665$ pour le mode de torsion.

Remarquons que ces vitesses s'approchent de la valeur $\frac{v_1}{v_2} = 0.652$ qui est aussi égale à $\frac{1}{v_2} \min_{r \in I} \sqrt{\frac{\mu(r)}{\rho(r)}}$, ce qui rejoint le résultat du corollaire 3.13 de [5].

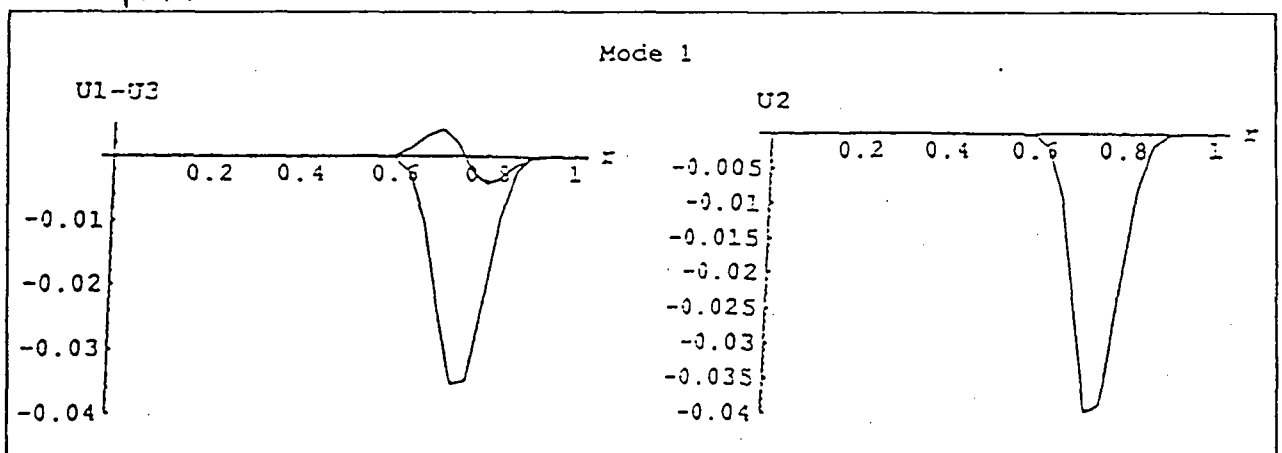


Fig 5.9 : 1er mode pour $\bar{\beta} = 100$

On observe que l'énergie de l'onde est concentrée autour de la position $r = 0.75$ qui correspond au minimum de la fonction $\frac{\mu(r)}{\rho(r)}$ sur [0,1]. De plus, le maximum de l'amplitude u_3 a tendance à devenir nul. Ce comportement illustre bien les propriétés démontrées dans le théorème 3.16 de [5].

5.2 Modes de flexion ($n = 1$)

5.2.1 Profil constant par morceaux

Les résultats suivants concernent le modèle $(\lambda(r), \mu(r), \rho(r)) = (\lambda_1, \mu_1, \rho_1)$ sur I et $(\lambda_2, \mu_2, \rho_2)$ sur I'.

Les courbes de dispersion (figure 5.10) ont les même propriétés que celles des modes axisymétriques. Cependant on constate que le seuil numérique β_1^* est non nul, ce qui est, apparemment, contraire au résultat théorique (cf. [5], théorème 3.2) qui prévoyait $\beta_1^* = 0$. Ceci peut s'expliquer par le fait que la courbe de dispersion $\beta \longrightarrow \dfrac{v(\beta)}{v_s}$ décolle très lentement de la droite $\dfrac{v}{v_s} = 1$ au voisinage de $\beta = 0$. Par analogie avec le travail réalisé dans le cadre des modes guidés par une fissure [9] on peut en fait conjecturer l'existence de deux constantes A et δ positives telles que :

$$1 - \frac{v(\beta)}{v_s} \simeq \frac{A}{\beta^2} \exp(-\frac{\delta}{\beta^2}) \qquad (\beta \to 0)$$

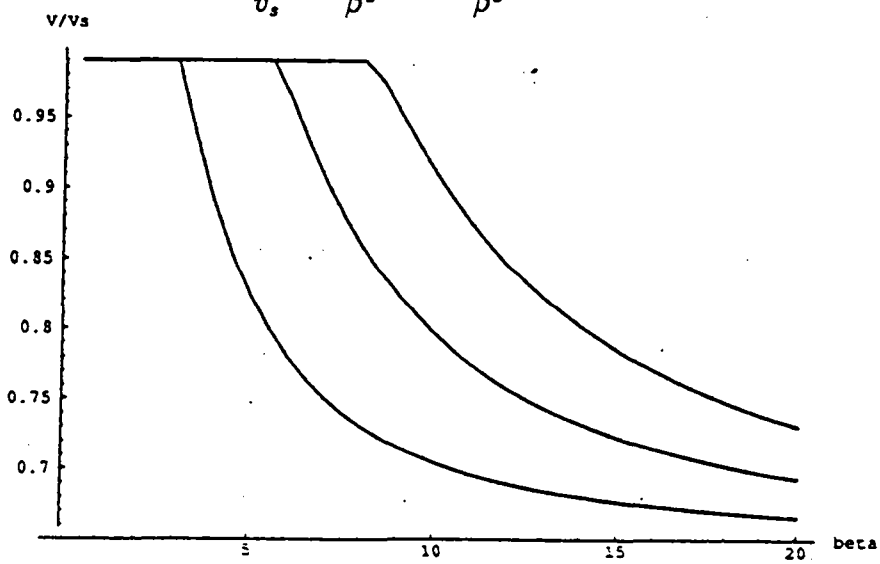
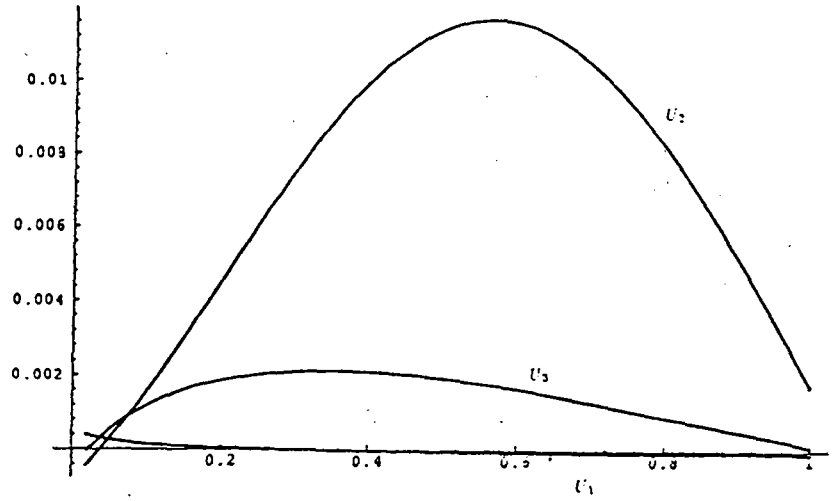


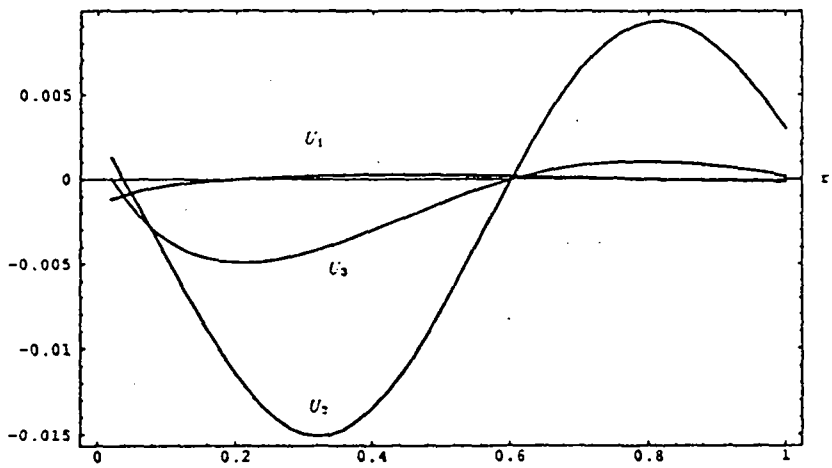
Fig. 5.10 : Courbes de dispersion des 3 premiers modes de flexion

L'examen des courbes des amplitudes (figures 5.11) montre que :

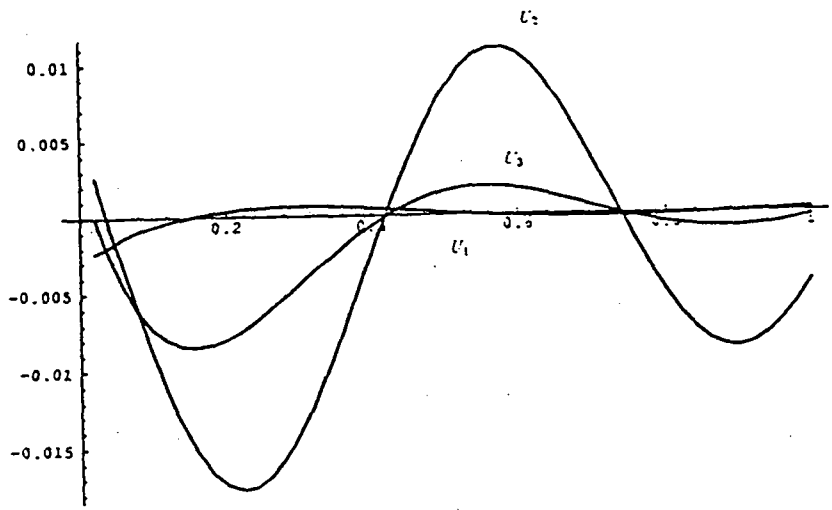
- le déplacement u_1 est négligeable devant u_2 et ceci pour tout β.
- le déplacement u_3 tend à diminuer lorsque β augmente (ou encore lorsque la fréquence ω augmente). Ce qui signifie, qu'à haute fréquence, le mouvement est essentiellement un mouvement de torsion.
- u_2 et u_3 s'annulent au mêmes points.



Mode 1 de vitesse $\bar{c} = 0.690$.



Mode 2 de vitesse $\bar{c} = 0.750$.



Mode 3 de vitesse $\bar{c} = 0.845$.

Fig 5.11 : Amplitudes des modes de flexion qui apparaissent à $\bar{\beta} = 12$.

Test de convergence

La figure 5.12 illustre l'évolution de l'erreur relative en fonction de N (nombre de subdivisions) dans une échelle (log/log). La droite de régression montre que l'erreur suit la loi :

$$|\lambda_h - \lambda_{h_0}| \leq 10^3 \lambda_{h_0} h^3$$

avec $h_0 = \frac{1}{80}$, et $\lambda_{h_0} \simeq 3 \times 10^{-3}$ (considéré comme une bonne approximation de la valeur exacte).

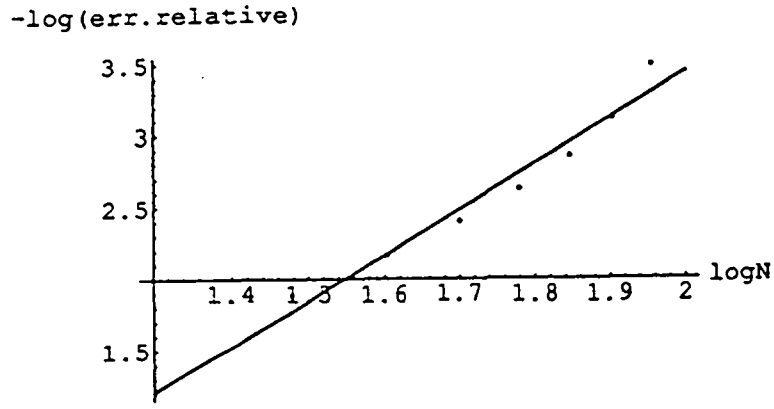


Fig 5.12 : Erreur relative de la première valeur propre pour $\beta = 5$ et $c = 0.80$.

5.2.2 Le cas d'un profil en forme de sinus

Dans ce profil les coefficients (λ, μ, ρ) varient comme dans l'exemple du paragraphe 5.1.2. Les conclusions précédentes restent valables pour ce cas.
La figure 5.13 montre les premières courbes de dispersion.
Les amplitudes sont illustrées dans la figure 5.14.

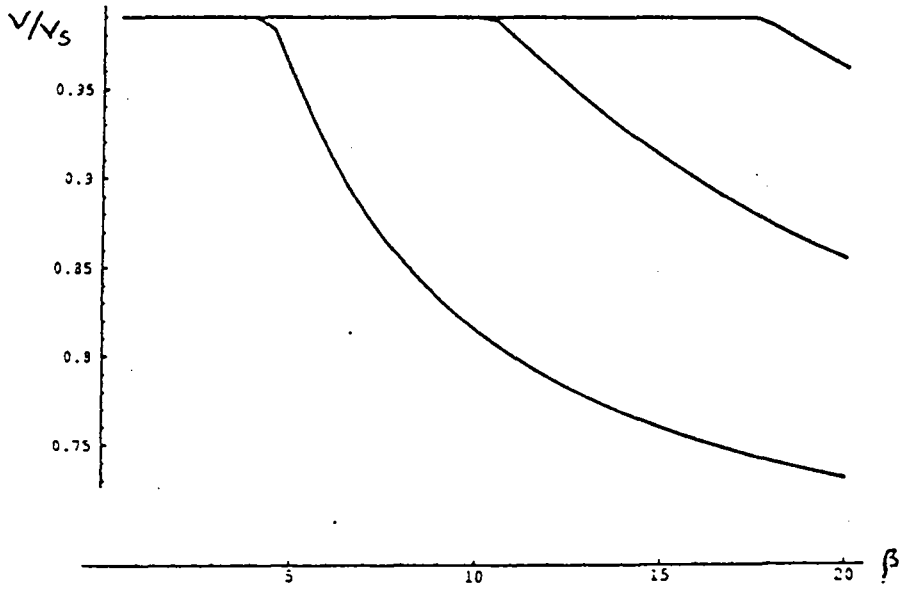
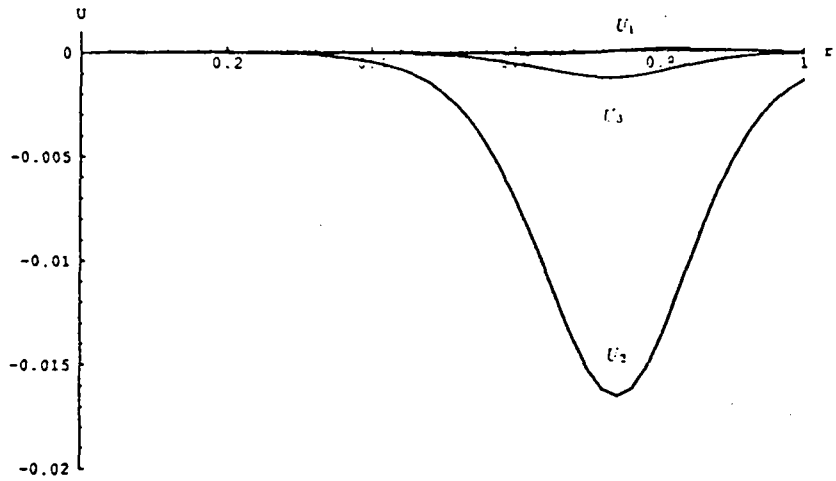
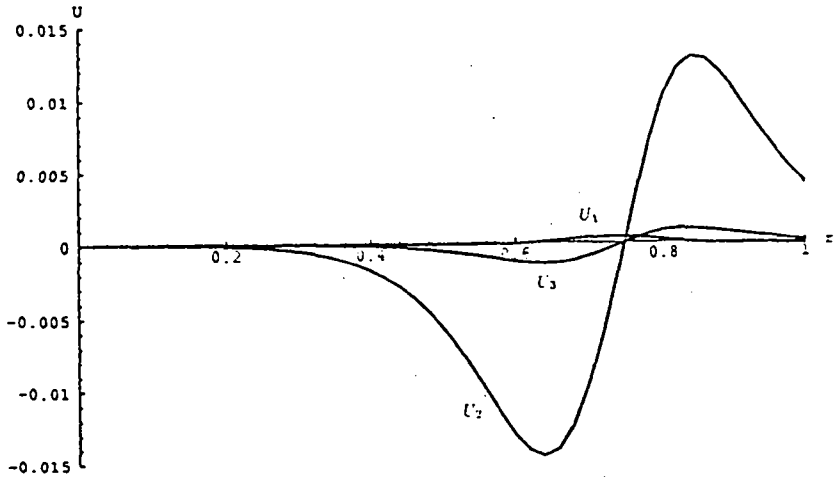


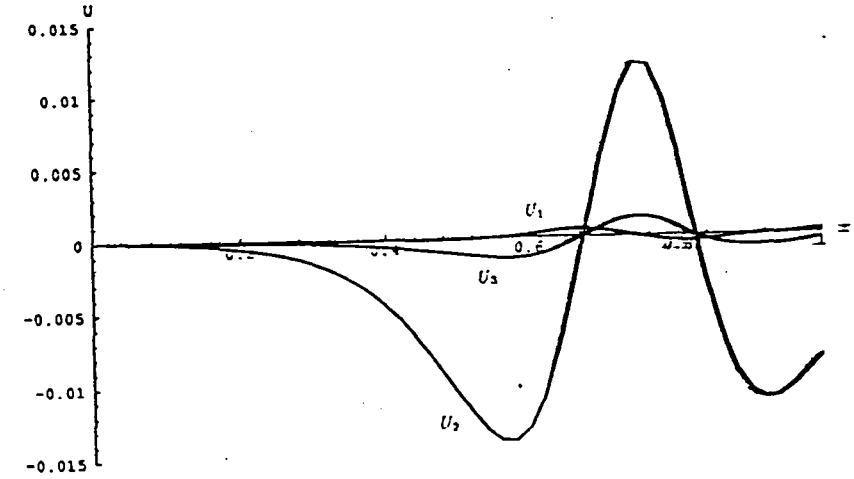
Fig 5.13 : Courbes de dispersion des trois premiers modes



Mode 1 de vitesse $\bar{c} = 0.733$.



Mode 2 de vitesse $\bar{c} = 0.856$.



Mode 3 de vitesse $\bar{c} = 0.962$.

Fig 5.14 : Amplitudes des modes de flexion qui apparaissent à $\bar{\beta} = 20$.

5.2.3 Le cas d'un profil avec deux puits

Nous avons considéré un milieu tel que :

- $(\lambda, \rho) = (\lambda_1, \rho_1), \quad \forall r \in \mathbf{R}^+$
- $\mu(r) = \begin{cases} \mu_1 & \text{si } r \in]0.25, 0.5[\cup]0.75, 1[\\ \mu_2 & \text{ailleurs} \end{cases}$

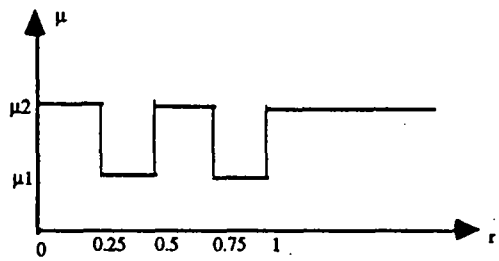


Fig 5.15 : Variations de $\mu(r)$.

La figure 5.16 montre les premières courbes de dispersion. Les amplitudes sont placées (pour certaines valeurs de β) dans la figure 5.17.

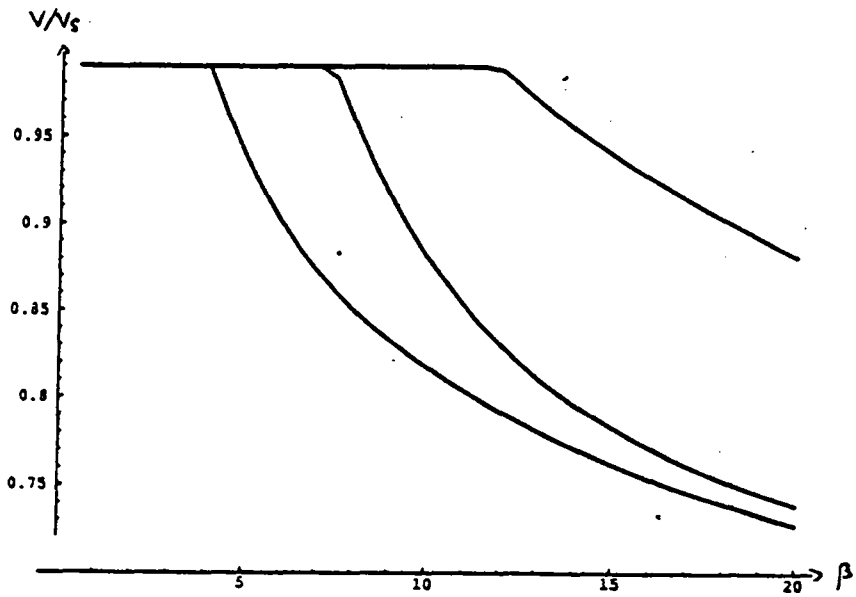
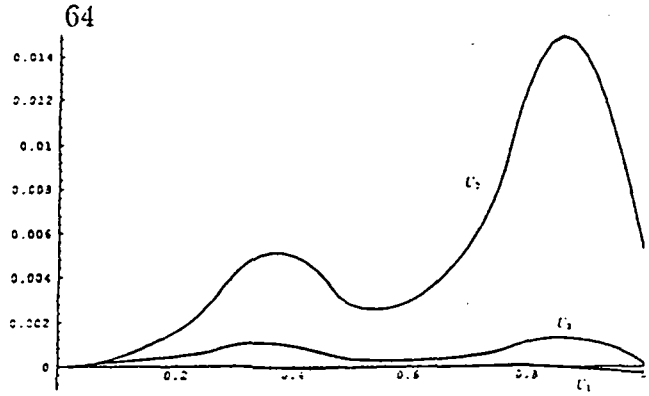


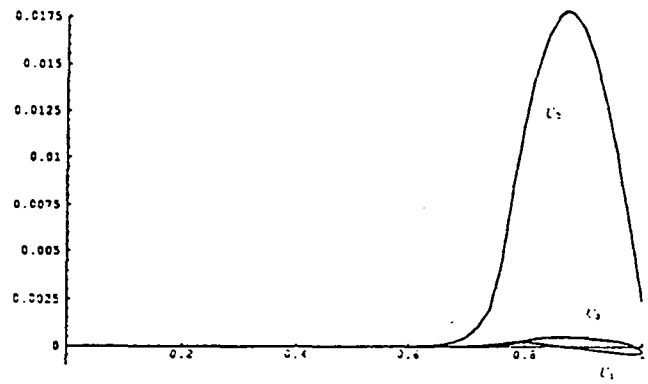
Fig 5.16 : Courbes de dispersion (profil avec deux puits).

L'examen des courbes permet de conclure :

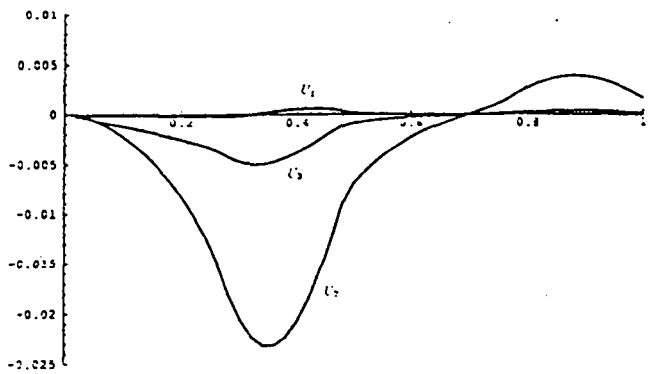
- Si β augmente, les vitesses des modes 1 et mode 2 tendent rapidement vers la même limite.
- Si β est grand (ou à haute fréquence) Les modes d'ordre pair (resp. impair) sont confinés dans la région $r \in]0.25, 0.5[$ (resp. $r \in]0.75, 1[$). De plus le déplacement angulaire u_2 est dominant. Remarquons que ce cas ne rentre pas dans le cadre du théorème 3.15 de [5] où on considère un profil qui possède un seul minimum global.



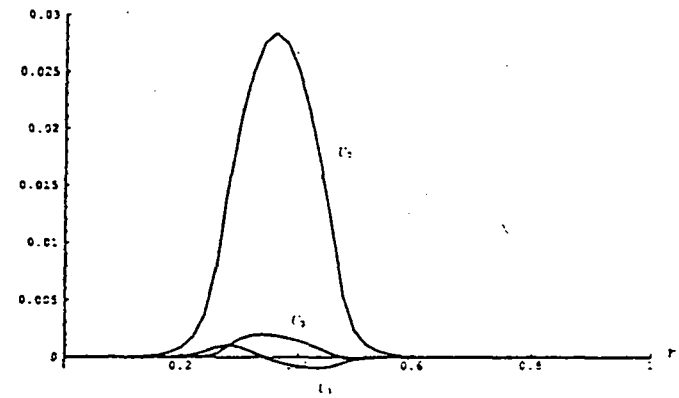
Mode 1 avec $\bar{\beta} = 15$ et $\bar{c} = 0.762$



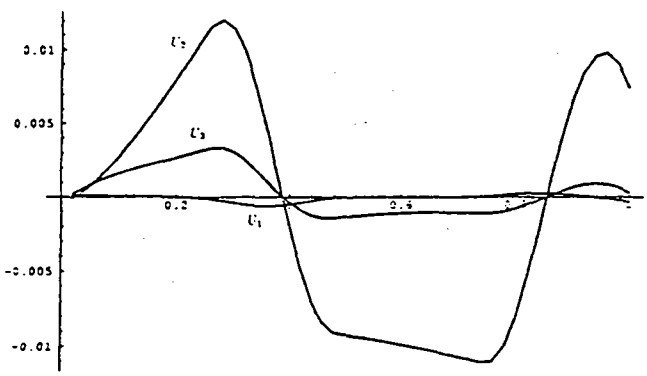
Mode 1 avec $\bar{\beta} = 50$ et $\bar{c} = 0.669$



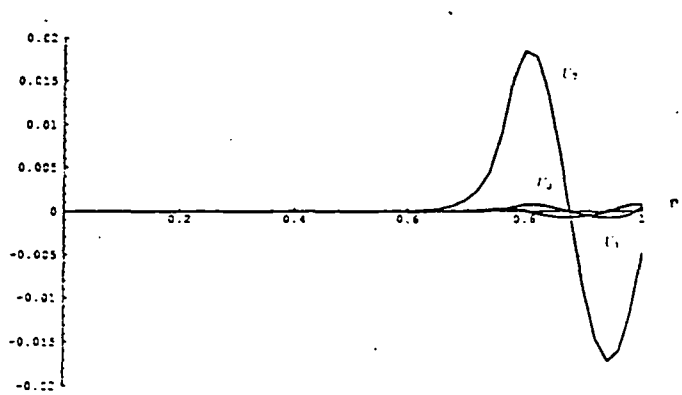
Mode 2 avec $\bar{\beta} = 15$ et $\bar{c} = 0.783$



Mode 2 avec $\bar{\beta} = 50$ et $\bar{c} = 0.672$



Mode 3 avec $\bar{\beta} = 15$ et $\bar{c} = 0.940$



Mode 3 avec $\bar{\beta} = 50$ et $\bar{c} = 0.718$

Fig 5.17 : Amplitudes des 3 premiers modes de flexion qui apparaissent à $\bar{\beta} = 15$ et $\bar{\beta} = 50$.

Annexe A

Relations de dispersion des modes axisymétriques : le cas d'un profil constant par morceaux

Dans cette annexe nous construisons la solution d'un problème modèle qui nous sert de test pour la méthode numérique proposée. Pour cela on considère un milieu formé de deux matériaux homogènes en contact rigide. Ainsi le triplet (λ, μ, ρ) est constant par morceaux :

$$(\lambda, \mu, \rho)(r) = \begin{cases} (\lambda_1, \mu_1, \rho_1) & \text{sur } I, \\ (\lambda_2, \mu_2, \rho_2) & \text{sur } I'. \end{cases} \tag{A.1}$$

Moyennant cette hypothèse, nous établirons l'équation analytique des courbes de dispersion relatives aux modes axisymétriques, ce qui correspond aux solutions des problèmes $P_0^t(\beta)$ et $P_0^c(\beta)$ (cf. [5])

A notre connaissance, ces équations n'existent pas dans la littérature mathématique (ou mécanique).

A.1 Modes de torsion

Un couple $(u, \omega^2) \in V_0 \times \mathbf{R}^+$ est une solution de $P_0^t(\beta)$ si et seulement si $u_1 = u|_I$ et $u_2 = u|_{I'}$ vérifient le problème de transmission :

$$P_0^t(\beta) \qquad \begin{cases} r^2 u_1'' + r u_1' + (k_1^2 r^2 - 1) u_1 = 0 & \text{sur } I \quad (E) \\ r^2 u_2'' + r u_2' - (k_2^2 r^2 + 1) u_2 = 0 & \text{sur } I' \quad (E') \\ u_1(R) = u_2(R); \quad \mu_1 (r u_1' - u_1)|_{r=R} = \mu_2 (r u_2' - u_2)|_{r=R} & (L) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} v_1^2 = \dfrac{\mu_1}{\rho_1}; \quad v_2^2 = \dfrac{\mu_2}{\rho_2} \\ k_1^2 = \dfrac{\omega^2}{v_1^2} - \beta^2; \quad k_2^2 = \beta^2 - \dfrac{\omega^2}{v_2^2} \end{cases} \tag{A.2}$$

La condition (L) traduit la continuité du déplacement et de la contrainte radiale à l'interface $r = R$.

Pour garantir la propagation des modes guidés on suppose $v_1 < v_2$.

La solution générale du système $(E - E')$ s'écrit sous la forme :

$$\text{(A.3)} \qquad \begin{cases} u_1(r) = AJ_1(k_1 r) \\ u_2(r) = BK_1(k_2 r) \end{cases}$$

Le couple (u_1, u_2) vérifie (L) si et seulement si (ω, β) vérifie l'équation de dispersion :

$$(D_t) \quad 2(\mu_1 - \mu_2)J_1(k_1R)K_1(k_2R) + \mu_2 k_2 R J_1(k_1R)K_0(k_2R) + \mu_1 k_1 R J_0(k_1R)K_1(k_2R) = 0$$

L'équation des seuils s'obtient par passage à la limite, lorsque $\omega \to \beta v_s$ (ou $k_2 \to 0$), dans l'équation (D_t).

Avec les notations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = \left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^2 \\ K = \dfrac{\mu_1}{2(\mu_2 - \mu_1)} \\ z = \beta R\sqrt{\alpha - 1} \end{cases}$$

on obtient l'équation des seuils suivante :

$$(S_t) \qquad \frac{J_1(z)}{J_0(z)} = -Kz$$

<u>Application numérique</u>

Nous choisissons, pour milieu (1), le cuivre de caractéristiques :

$$\text{(A.4)} \qquad \begin{cases} \rho_1 = 0.89E4 \ kg/m^3 \\ E_1 = 11.E10 \ N/m^3 & \text{(module de Young)} \\ \nu_1 = 0.36 & \text{(module de poisson)} \end{cases}$$

et, pour milieu (2), l'acier de caractéristiques :

$$\text{(A.5)} \qquad \begin{cases} \rho_2 = 0.78E4 \ kg/m^3 \\ E_2 = 21.E10 \ N/m^3 \\ \nu_2 = 0.26 \end{cases}$$

Le couple (λ, μ) est lié à (E, ν) par la loi ([7]) :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

Avec ces données, les premiers seuils (normalisés) sont :

$$\beta_1^t = 2.555; \quad \beta_2^t = 5.039; \quad \beta_3^t = 7.644$$

<u>Etude asymptotique pour $\beta \to \infty$.</u>

Cherchons un équivalent de $c_k(\beta) = \dfrac{\omega_k(\beta)}{\beta v_2}$ lorsque $\beta \to \infty$.

On sait d'après [5] (corollaire 3.13) que $\lim\limits_{\beta\to\infty} c_k(\beta) = \dfrac{v_1}{v_2}$, donc on peut supposer qu'on a le développement asymptotique :

$$c_k(\beta) \simeq \frac{v_1}{v_2}\Big(1 + \frac{l_1}{\beta} + \frac{l_2}{\beta^2}\Big)$$

Montrons d'abord que $l_1 = 0$. En effet, dans le cas contraire on aurait

$$k_2 \simeq \beta\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha}}; \quad k_1 \simeq \sqrt{\frac{2l_1\beta}{\alpha}}$$

A l'aide des formules asymptotiques ([16]) :

$$\begin{cases} K_n(x) \simeq \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}e^{-x}\Big[1 + O\Big(\dfrac{1}{x}\Big)\Big], \quad n = 1, 2, .. \\ J_0(x) \simeq \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos\Big(x - \dfrac{\pi}{4}\Big)\Big[1 + O\Big(\dfrac{1}{x}\Big)\Big], \\ J_1(x) \simeq \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin\Big(x - \dfrac{\pi}{4}\Big)\Big[1 + O\Big(\dfrac{1}{x}\Big)\Big]. \end{cases}$$

on montre que l'équation (D_t) est équivalente à :

$$k_2 R\mu_2 \sin(k_1 R - \frac{\pi}{4}) + k_1 R\mu_1 \cos(k_1 R - \frac{\pi}{4}) + O\Big(\frac{1}{\beta}\Big) = 0$$

ou encore :

$$\operatorname{tg}\Big(k_1 R - \frac{\pi}{4}\Big) \simeq -\frac{k_1\mu_1}{k_2\mu_2} = O\Big(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\Big)$$

ce qui est impossible car la fonction $\operatorname{tg} x$ n'a pas de limite quand $x \to \infty$.

Comme $l_1 = 0$, $k_1 R$ tend vers une limite $l = \sqrt{2l_2}$ et l'équation (D_t) est équivalente à :

$$J_1(l) + O\Big(\frac{1}{\beta}\Big) = 0$$

d'où $J_1(l) = 0$ et l prend les valeurs de la suite (j_{1k}),$k \in \mathbf{N}^*$, des zéros de $J_1(x)$.

Finalement on a :

$$c_k(\beta) \simeq \frac{v_1}{v_2}\Big(1 + \frac{j_{1k}^2}{2\beta^2}\Big) \quad k = 1, 2, ... \tag{A.6}$$

L'indice k correspond au numéro du mode car, par définition, $c_k(\beta) \leq c_{k+1}(\beta)$.

A.2 Modes de compression.

La solution générale $\bar{u} = (u_1, u_3)$ du système $(P_0^t(\beta))$ (cf. [5], remarque 1.2) se met sous la forme :

$$\bar{u}(r) = \begin{cases} A\phi_1(r) + B\phi_2(r) & \text{sur } I\,; \\ C\psi_1(r) + D\psi_2(r) & \text{sur } I' \end{cases}$$

où

$$\phi_1(r) = \begin{pmatrix} k_p^1 I_1(k_p^1 r) \\ \beta I_0(k_p^1 r) \end{pmatrix} \quad ; \quad \phi_2(r) = \begin{pmatrix} -\beta k_s^1 J_1(k_s^1 r) \\ (k_s^1)^2 J_0(k_s^1 r) \end{pmatrix}$$

$$\psi_1(r) = \begin{pmatrix} k_p^2 K_1(k_p^2 r) \\ -\beta K_0(k_p^2 r) \end{pmatrix} \quad ; \quad \psi_2(r) = \begin{pmatrix} -\beta k_s^2 K_1(k_s^2 r) \\ (k_s^2)^2 K_0(k_s^2 r) \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

avec

$$(v_s^i)^2 = \frac{\mu_i}{\rho_i}; \qquad (v_p^i)^2 = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\rho_i} \quad (i = 1, 2)$$

$$k_s^i = \Big(\beta^2 - \frac{\omega^2}{(v_s^i)^2}\Big)^{\frac{1}{2}}; \qquad k_p^i = \Big(\beta^2 - \frac{\omega^2}{(v_p^i)^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{A.8}$$

A l'interface $r = R$, la solution $\bar{u}$ vérifie les conditions de transmission :

$$\begin{cases} \bar{u}(R-0) = \bar{u}(R+0) \\ \Big(\bar{B}\dfrac{d\bar{u}}{dr} + \bar{B}_2\bar{u}\Big)(R-0) = \Big(\bar{B}\dfrac{d\bar{u}}{dr} + \bar{B}_2\bar{u}\Big)(R+0) \end{cases}$$

Ainsi on obtient un système algébrique par rapport à (A, B, C, D). L'équation de dispersion s'obtient en annulant le déterminant de ce système. On obtient :

$$\det \Delta(\omega, \beta) = 0 \tag{D_c}$$

où $\Delta(\omega, \beta)$ est une matrice d'ordre 4, de coefficients :

$$\text{(A.9)} \quad \begin{cases} \Delta_{11} = k_p^1 I_1(k_p^1 R) \\ \Delta_{21} = \beta I_0(k_p^1 R) \\ \Delta_{31} = R\mu_1[\beta^2 + (k_s^1)^2] I_0(k_p^1 R) - 2\mu_1 k_p^1 I_1(k_p^1 R) \\ \Delta_{41} = 2\mu_1 \beta R k_p^1 I_1(k_p^1 R) \end{cases}$$

$$\text{(A.10)} \quad \begin{cases} \Delta_{12} = -\beta k_s^1 J_1(k_s^1 R) \\ \Delta_{22} = (k_s^1)^2 J_0(k_s^1 R) \\ \Delta_{32} = 2\beta k_s^1[\mu_1 J_1(k_s^1 R) - (\lambda_1 + \mu_1) k_s^1 R J_0(k_s^1 R)] \\ \Delta_{42} = -\mu_1 R k_s^1[(k_s^1)^2 + \beta^2] J_1(k_s^1 R) \end{cases}$$

$$\text{(A.11)} \quad \begin{cases} \Delta_{13} = k_p^2 K_1(k_p^2 R) \\ \Delta_{23} = -\beta K_0(k_p^2 R) \\ \Delta_{33} = -R\mu_2[\beta^2 + (k_s^2)^2] K_0(k_p^2 R) + 2\mu_2 k_p^2 K_1(k_p^2 R) \\ \Delta_{43} = 2\mu_2 \beta R k_p^2 K_1(k_p^2 R) \end{cases}$$

$$\text{(A.12)} \quad \begin{cases} \Delta_{14} = -\beta k_s^2 K_1(k_s^2 R) \\ \Delta_{24} = (k_s^2)^2 K_0(k_s^2 R) \\ \Delta_{34} = 2\mu_2 \beta k_s^2[K_1(k_s^2 R) + k_s^2 R K_0(k_s^2 R)] \\ \Delta_{44} = -\mu_2 R k_s^2[(k_s^2)^2 + \beta^2] K_1(k_s^2 R) \end{cases}$$

Remarque A.1 Les coefficients k_s^i et k_p^i sont liés au couple $(\bar{\beta}, \bar{c})$ par les relations suivantes :

$$\text{(A.13)} \quad \begin{cases} R k_s^2 = \bar{\beta}\sqrt{1 - \bar{c}^2} \\ R k_s^1 = \bar{\beta}\sqrt{\alpha_1 \bar{c}^2 - 1} \\ R k_p^2 = \bar{\beta}\sqrt{1 - \alpha_2 \bar{c}^2} \\ R k_p^1 = \bar{\beta}\sqrt{1 - \alpha_3 \bar{c}^2} \end{cases}$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{\rho_1 \mu_2}{\rho_2 \mu_1}; \quad \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}; \quad \alpha_3 = \frac{\rho_1 \mu_2}{\rho_2(\lambda_1 + 2\mu_1)}$$

L'équation des seuils s'obtient par passage à la limite, lorsque $\bar{c} \to 1$, dans l'équation de dispersion (D_c). D'où le comportement suivant :

$$\text{(A.14)} \qquad \begin{cases} Rk_s^2 \to 0 \\ Rk_s^1 \simeq \bar{\beta}\sqrt{\alpha_1^2 - 1} \equiv b_1 \\ Rk_p^2 \simeq \bar{\beta}\sqrt{1 - \alpha_2^2} \equiv b_2 \\ Rk_p^1 \simeq \bar{\beta}\sqrt{1 - \alpha_3^2} \equiv b_3 \end{cases}$$

et

$$\Delta(\omega, \beta) \simeq S(\beta) \equiv (S_{ij})$$

avec les coefficients suivants :

$$\text{(A.15)} \qquad \begin{cases} S_{11} = b_3 I_1(b_3) \\ S_{21} = \bar{\beta} I_0(b_3) \\ S_{31} = \mu_1(\bar{\beta}^2 + b_1^2) I_0(b_3) - 2\mu_1 b_3 I_1(b_3) \\ S_{41} = 2\mu_1 \bar{\beta} b_3 I_1(b_3) \end{cases}$$

$$\text{(A.16)} \qquad \begin{cases} S_{12} = -\bar{\beta} b_1 J_1(b_1) \\ S_{22} = b_1^2 J_0(b_1) \\ S_{32} = 2\bar{\beta} b_1 [\mu_1 J_1(b_1) - (\lambda_1 + \mu_1) b_1 J_0(b_1)] \\ S_{42} = -\mu_1 b_1 J_1(b_1)(\bar{\beta}^2 + b_1^2) \end{cases}$$

$$\text{(A.17)} \qquad \begin{cases} S_{13} = b_2 K_1(b_2) \\ S_{23} = -\bar{\beta} K_0(b_2) \\ S_{33} = -\mu_2 \bar{\beta}^2 K_0(b_2) - 2\mu_2 b_2 K_1(b_2) \\ S_{43} = 2\mu_2 \bar{\beta} b_2 K_1(b_2) \end{cases}$$

$$\text{(A.18)} \qquad \begin{cases} S_{14} = -\bar{\beta} \\ S_{24} = 0 \\ S_{34} = 2\mu_2 \bar{\beta} \\ S_{44} = -\mu_2 \bar{\beta}^2 \end{cases}$$

L'équation des seuils est alors :

$$(S_c) \qquad \det S(\beta) = 0$$

Avec les données numériques choisies on obtient les premières racines :

$$\beta_1^c = 2.157; \quad \beta_2^c = 4.783; \quad \beta_3^c = 7.462$$

Nous observons une alternance entre les seuils des modes de torsion et les seuils des modes de compression ; i.e :

$$\beta_k^c \leq \beta_k^t \leq \beta_{k+1}^c \,, \quad k = 1, 2, ...$$

Etude asymptotique pour $\beta \to \infty$.

Dans ce paragraphe on vérifie que la fonction $c_k(\beta)$ se comporte à l'infini de la même manière que pour les modes de torsion, i.e :

$$c_k(\beta) \simeq \frac{v_1}{v_2}\Big(1 + \frac{j_{1,k}^2}{2\beta^2}\Big) \quad (\beta \to \infty)$$

En effet, à l'aide d'un raisonnement analogue, on prouve que le terme d'ordre 1 est nul. Par suite, on a les formules :

$$c_k(\beta) \simeq \frac{v_1}{v_2}\Big(1 + \frac{l}{\beta^2}\Big)$$

et

$$\text{(A.19)} \qquad \begin{cases} Rk_s^1 \simeq l \\ Rk_s^2 \simeq \beta\sqrt{1-\gamma_1} \equiv \beta a_1 \\ Rk_p^2 \simeq \beta\sqrt{1-\gamma_2} \equiv \beta a_3 \\ Rk_p^1 \simeq \beta\sqrt{1-\gamma_3} \equiv \beta a_4 \end{cases}$$

avec

$$\gamma_1 = \frac{\mu_1\rho_2}{\mu_2\rho_1}; \quad \gamma_2 = \frac{\mu_1\rho_2}{(\lambda_2 + 2\mu_2)\rho_1}; \quad \gamma_3 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}$$

Il reste à déterminer le coefficient l. En utilisant les formules (A.19) et le comportement asymptotique des fonctions de Bessel à l'infini on obtient un équivalent de l'équation de dispersion (D_t) lorsque $\beta \to \infty$:

$$\text{(A.20)} \qquad \det \Delta_\infty(\beta) = 0$$

Les colonnes de $\Delta_\infty = (\Delta_\infty^{(1)}, \Delta_\infty^{(2)}, \Delta_\infty^{(3)}, \Delta_\infty^{(4)})$ sont données par :

$$\Delta_\infty^{(1)} = \begin{pmatrix} \beta a_1 \\ \beta \\ \mu_1(\beta^2 + l^2 - 2\beta a_4) \\ 2\mu_1\beta^2 a_4 \end{pmatrix} \qquad \Delta_\infty^{(2)} = \begin{pmatrix} -\beta l J_1(l) \\ l^2 J_0(l) \\ 2\beta l[\mu_1 J_1(l) - (\lambda_1 + \mu_1) l J_0(l)] \\ -\mu_1 l(l^2 + \beta^2) J_1(l) \end{pmatrix}$$

$$\Delta_\infty^{(3)} = \begin{pmatrix} \beta a_3 \\ \beta \\ -\mu_2(\beta^2(1+a_1^2)+2\beta a_3) \\ 2\mu_2\beta^2 a_3 \end{pmatrix} \qquad \Delta_\infty^{(4)} = \begin{pmatrix} -\beta^2 a_1 \\ \beta^2 a_1^2 \\ 2\mu_2\beta^2 a_1(1+\beta a_1) \\ -\mu_2\beta^3 a_1(1+a_1^2) \end{pmatrix}$$

En développant $\det \Delta_\infty(\beta)$ suivant la 2eme colonne on est capable de trouver un entier $p \in \mathbf{N}^*$ et une constante $c \neq 0$ indépendante de l tels que :

$$(\beta)^{-p} \det \Delta_\infty(\beta) = clJ_1(l) + O\Big(\frac{1}{\beta}\Big)$$

ce qui entraîne, avec (A.20), $J_1(l) = 0$. Par suite, l appartient à la suite (j_{1k}), k=1,2,... □

Remerciemments
Je tiens à remercier Yves DERMENJIAN et Patrick JOLY pour leur soutien durant la réalisation de ce document.

Bibliographie

[1] I. BABUSKA and J. OSBORN. Finite element-galerkin approximation of the eigenvalues and eigenvectors of selfadjoint problems. *Math. Comp.*, 52 :274–279, 1989.

[2] A.S. BONNET. Analyse mathématique de la propagation des modes guidés dans les fibres optiques. Technical Report 229, E.N.S.T.A, 1988.

[3] A.D. BURDEN. Propagation of elastic surface waves along cylindrical cavities of general cross section. *J. Wave. Motion*, pages 153–168, 1985.

[4] F. CHATELIN. *Valeurs propres de matrices.* Masson, 1988.

[5] L. CHORFI. Etude mathématique des modes guidés dans un milieu élastique à symétrie de révolution. Technical report, I.N.R.I.A, . (à paraitre).

[6] L. CHORFI. *Etude mathématique et numérique des modes guidés dans un milieu élastique à symétrie de révolution.* Thèse, Université de Provence, 1992.

[7] G. DUVAUT. *Mécanique des milieux continus.* Masson, 1990.

[8] A.C ERINGEN and E.S SUHUBI. *Elastodynamics*, volume I et II. Academic Press, 1974.

[9] P. JOLY et J. TLILI. Approche par équations intégrales d'un problème d'ondes de surface élastiques. Technical Report No 1523, I.N.R.I.A, 1991.

[10] P.A. RAVIART et J.M. THOMAS. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Masson, 1988.

[11] P. LASCAUX et R. THEODOR. *Analyse numérique appliquée à l'art de l'ingénieur*, volume 2. Masson, 1986.

[12] P. JOLY. Nouveau résultat d'existence d'ondes guidées en milieu élastique hétérogène. *C.R.Acad. Sci. Paris*, 309(I) :709–796, 1989.

[13] T. KATO. *Perturbation theory for linear operators.* Springer-Verlag, 1966.

[14] P.E. LAGASSE. Higher order finite element analysis of topographic guides supporting elastic surface waves. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 53 :1116–1122, 1973.

[15] M. LENOIR and A. TOUNSI. The localized finite element method and its application to the two-dimensional sea-keeping problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25 :729–752, 1988.

[16] I. STEGUN M. ABRAMOWITZ. *Handbook of mathematical functions.* Dover Publications, 1968.

[17] B.N. PARLETT. The software scene in the extraction of eigenvalues from sparse matrice. *SIAM J. SCI. STAT. COMPUT.*, 5(3), 1984.

[18] I.M. MASON P.E. LAGASSE and E.A. ASH. Acoustic surface waveguides – analysis and assessment. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 21 :225–236, 1973.

[19] M. SCHECHTER. *Operator methods in quantum mechanics.* North-Holland, 1981.

[20] J. TLILI. *Calcul d'ondes de surfaces élastiques guidées par une fissure.* Thèse, Université Paris VI, 1991.

[21] J.H WILKINSON. *The algebraic eigenvalue problem.* Oxford University Press, 1965.

Unité de Recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

Unité de Recherche INRIA Lorraine Technopôle de Nancy-Brabois - Campus Scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 VILLERS LES NANCY Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rennes IRISA, Campus Universitaire de Beaulieu 35042 RENNES Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex (France)
Unité de Recherche INRIA Sophia Antipolis 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)

EDITEUR
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

RR.2152