



**HAL**  
open science

## Systèmes de réécritures orthogonaux non effacants et linéaires droite : application au problème de Zantema

Elias Tahhan Bittar

► **To cite this version:**

Elias Tahhan Bittar. Systèmes de réécritures orthogonaux non effacants et linéaires droite : application au problème de Zantema. [Rapport de recherche] RR-2202, INRIA. 1994. inria-00074468

**HAL Id: inria-00074468**

**<https://inria.hal.science/inria-00074468v1>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Systemes de réécritures orthogonaux  
non effaçants et linéaires droite  
application au problème de Zantema*

Elias TAHHAN BITTAR

N° 2202

Mars 1994

PROGRAMME 2

Calcul symbolique,  
programmation  
et génie logiciel

*R*apport  
*de recherche*

1994

...the ... of ...  
...the ... of ...  
...the ... of ...

...

...

...

...

...

# Systèmes de Réécritures Orthogonaux non Effaçants et Linéaires Droite Application au Problème de Zantema

Elias Tahhan Bittar \*

Laboratoire de Mathématiques Discrètes et d'Informatique. Université Claude-Bernard, Lyon-I.  
43 Bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex. France.  
tahhan@lan1.univ-lyon1.fr

**Résumé** Nous étudions les systèmes de réécriture orthogonaux, non effaçants et linéaires droite. On montre que si un terme clos est normalisable alors il est fortement normalisable et que toutes ses normalisations ont la même longueur. On définit ensuite la *linéarité pour des redex internes* et la *sortie d'un redex interne*. On montre que si telles sorties ont une taille bornée alors la linéarité pour des redex internes est équivalente à la linéarité. Ces résultats permettent de donner une preuve inductive et élémentaire la linéarité du système de Zantema. On montre, ensuite, par une technique de *dichotomie par marquage en avant*, la *conjecture de Zantema* à savoir que le système de Zantema a un facteur de linéarité 2.

**Mots Clé :** Systèmes de réécritures de mots, Systèmes de réécritures orthogonaux, Complexité de systèmes de réécritures.

**Abstract** We study non erasing, right linear, orthogonal term rewrite systems. We show that a ground term is normalisable if and only if it is strongly normalisable and that all normalisations have the same length. We then define *linearity for an innermost redex* and *output of an innermost redex*. We show that if such outputs have a bounded size then linearity for innermost redexes is equivalent to linearity. This results allow us to give an inductive and elementary proof of the linearity of *Zantema's System*. We proof *Zantema's Conjecture*, for his system, by a technique of *dichotomy by forward marking*.

**Keywords:** String rewriting systems, orthogonal rewriting systems, complexity of orthogonal rewriting systems.

## Table des matières

<b>1 Introduction</b> . . . . .	2
<b>2 Systèmes de Réécritures Orthogonaux , SRTO</b> . . . . .	3
2.1 Algèbres de Termes . . . . .	3
2.2 Systèmes de Réécritures . . . . .	5
Systèmes de Réécritures Linéaires Gauche . . . . .	5
Systèmes de Réécritures Orthogonaux . . . . .	5
<b>3 SRTO Non Effaçants de Multiplicité Un</b> . . . . .	6
3.1 Indépendance . . . . .	6
3.2 Linéarité pour des Redex Internes et Linéarité . . . . .	7
<b>4 Redex Internes de <math>\mathcal{Z}</math></b> . . . . .	8
4.1 Symétrie de $\mathcal{Z}$ . . . . .	8
4.2 Zéros irréductibles à droite . . . . .	9

\* Ce travail de recherche a été financé par l'Université des Andes et le CONICIT au Venezuela

4.3 Uns irréductibles à gauche . . . . .	9
4.4 Marqueurs et preuves inductives . . . . .	10
4.5 Forme des redex internes . . . . .	10
4.6 Normalisation interne . . . . .	10
4.7 Linéarité pour des redex internes . . . . .	13
<b>5 Sorties et linéarité de <math>\mathcal{Z}</math></b> . . . . .	13
<b>6 Conjecture de Zantema</b> . . . . .	15
<b>7 Lemmes de Dichotomies</b> . . . . .	16
<b>8 Preuve de la Conjecture de Zantema</b> . . . . .	17
<b>9 Conclusion</b> . . . . .	23

## 1 Introduction

Considérons des mots dans  $\{0, 1\}^*$ . Le système de réécriture de *Zantema*, noté  $\mathcal{Z}$ , est défini par la règle :

$$0011 \longrightarrow 111000$$

Rappelons que, par définition,  $\mathcal{Z}$  est invariant par contexte et par substitution :

$$\forall a, b, u, v \in \{0, 1\}^* \quad a \longrightarrow b \quad \Rightarrow \quad u \cdot a \cdot v \longrightarrow u \cdot b \cdot v$$

Notons que  $\mathcal{Z}$  ne peut être prolongée par un ordre de simplification, s'il pouvait l'être la prolongation, notée  $\longrightarrow_p$ , satisfierait la *propriété du sous-terme*, c'est à dire :

$$\forall f \in \{0, 1\} \quad f(x) \longrightarrow_p x$$

donc :

$$\forall a, u, v \in \{0, 1\}^* \quad u \cdot a \cdot v \longrightarrow_p u \cdot v$$

Ce qui impliquerait que l'ordre de réduction de  $\longrightarrow_p$  contiendrait l'ordre de Higman sur  $\{0, 1\}^*$ , or ce n'est pas le cas :

$$\begin{aligned} (0011)0111111 &\longrightarrow 11100(0011)1111 \\ &\longrightarrow 111001110(0011)11 \\ &\longrightarrow 1110011101110(0011) \\ &\longrightarrow 1110011101110111000 \end{aligned}$$

Le premier terme est plus petit que le dernier dans l'ordre de Higman  $\{0, 1\}^*$ . On ne peut donc trouver des ordres *l.p.o.* ou *r.p.o.* qui prolongent l'ordre de réduction de  $\mathcal{Z}$ .

Plusieurs preuves de la terminaison de  $\mathcal{Z}$  ont déjà été proposées :

- Hans Zantema a remarqué l'existence de configurations irréductibles à gauche et proposé, par voie électronique, une tentative de preuve. H. Zantema a aussi conjecturé que cette terminaison est linéaire, plus fortement encore, il a conjecturé qu'il existe une constante,  $c \in \mathbf{N}$ , tel que pour tout mot de longueur  $n$  la normalisation de ce mot s'effectue au plus en  $2 \cdot n + c$  étapes.
- Dans la lignée de Zantema, Alfons Geser [4] a donné une preuve grâce à la terminaison de deux systèmes de réécritures intermédiaires en utilisant la méthode des transformations d'ordre de Bellegarde et Lescanne [1].
- D'un autre côté, Nachum Dershowitz et Charles Hoot [2] ont prouvé, par une méthode de mauvaise suite minimale, que la terminaison des systèmes de réécritures orthogonaux linéaires droite non effaçants est équivalente à la terminaison de la clôture plus externe en avant; cette dernière propriété est facilement prouvable pour  $\mathcal{Z}$ . La détection de configurations irréductibles joue aussi un rôle dans cette preuve.

- Michael J. O'Donnell [6], a prouvé que, pour des systèmes de réécritures orthogonaux, la terminaison est équivalente à la normalisation forte par réduction des redex internes. Nous avons aussi pu estimer [8, 9], pour les systèmes de réécritures orthogonaux, des bornes de la longueur des dérivations d'un terme clos en fonction des bornes de redex obtenus à partir de  $t$  par normalisation interne, le travail que nous développons ici s'inscrit dans cette lignée<sup>2</sup>.

Remarquons que  $\mathcal{Z}$  est un système de réécriture orthogonal, non effaçant et linéaires droite (ou de multiplicité un). On étudie d'abord des propriétés de tels systèmes :

- On montre que si un terme clos est normalisable alors il est fortement normalisable et que toutes ses normalisations ont la même longueur.
- Puis on définit la notion de linéarité pour des redex internes et la notion de sortie d'un redex interne. On montre ensuite que si telles sorties<sup>3</sup> ont une taille bornée alors la linéarité pour des redex internes est équivalente à la linéarité.

Mettant à profit des observations de Zantema lors du *First Workshop on Termination*<sup>4</sup> tenu à l'Université de *St. Andrews*, nous identifions la forme des redex internes pour le système  $\mathcal{Z}$ . Une fois cette identification faite on donne une preuve inductive et élémentaire de la normalisation interne, et donc de terminaison puisque  $\mathcal{Z}$  est orthogonal, et de la linéarité pour des redex internes. Nous identifions ensuite les sorties possibles; leurs tailles étant bornées on en conclut la linéarité de  $\mathcal{Z}$ .

Ensuite on s'attelle à prouver la conjecture de Zantema en sa version forte. On montre, par une technique de *dichotomie par marquage en avant*, que  $\mathcal{Z}$  est linéaire de facteur 2.

## 2 Systèmes de Réécritures Orthogonaux , SRTO

Les définitions et notations que nous utilisons proviennent, pour la plupart d'entre eux, de [3, 5, 7].

### 2.1 Algèbres de Termes

Une **Signature**  $\mathcal{F}$  est un alphabet noté aussi  $\mathcal{F}$  tel qu'un nombre entier naturel dit une **arité** est associé à chaque lettre. On note aussi  $\mathcal{F} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ , où  $\mathcal{F}_n$  est un ensemble de lettres d'arité  $n$ . Les éléments de  $\mathcal{F}$  d'arité nulle,  $\mathcal{F}_0$ , sont dits des **constantes**. Soit  $\mathcal{F}$  une signature et soit  $\mathcal{V}$  un ensemble dénombrables de symboles de variables. L'**algèbre de termes**  $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  sur  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{V}$  est le plus petit ensemble contenant  $\mathcal{V}$  et les constantes tel que  $u = f(t_0, \dots, t_m)$  est dans  $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  chaque fois que  $f$  est une lettre d'arité  $m + 1$  et chaque  $t_i$  est lui même un terme de  $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ , chaque  $t_i$  est dit **sous-terme immédiat** de  $u$ . On peut donc définir  $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  par :

1.  $\mathcal{F}_0 \subseteq T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ ,
2.  $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ ,
3.  $f \in \mathcal{F}_{m+1}, \forall i \leq m \quad t_i \in T(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \Rightarrow f(t_0, \dots, t_m) \in T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ .

Un terme sans variables est dit **clos**. L'**algèbre de termes clos** est notée  $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ .

L'ensemble des suites finies d'entiers naturels est noté  $\mathbf{N}^*$ . Remarquons que la suite vide, notée  $\Lambda$ , est un élément de  $\mathbf{N}^*$ . Les éléments de  $\mathbf{N}^*$  sont aussi appelés **mots** de  $\mathbf{N}^*$ . La concaténation de deux mots de  $\mathbf{N}^*$ ,  $p$  et  $q$ , notée  $p \cdot q$ , est définie par  $\Lambda \cdot p = p = p \cdot \Lambda$  et  $\langle n_0, \dots, n_k \rangle \cdot \langle m_0, \dots, m_l \rangle := \langle n_0, \dots, n_k, m_0, \dots, m_l \rangle$ . Soit  $p \in \mathbf{N}^*$ , et  $A \subseteq \mathbf{N}^*$ , la **concaténation** de  $p$  et de  $A$  est définie par  $p \cdot A := \{p \cdot q \mid q \in A\}$ . L'ordre préfixe sur

<sup>2</sup> Une première version de ce travail a circulé, par voie électronique, depuis le début de juin 93.

<sup>3</sup> Cette définition se recoupe avec celle de partie active de Dershowitz-Hoot.

<sup>4</sup> Alfons Gesser a aussi mis à profit ces remarques pour donner sa preuve de terminaison de  $\mathcal{Z}$ .

les mots de  $\mathbf{N}^*$ , noté  $\leq$ , est défini par  $p \leq q \iff (\exists r \in \mathbf{N}^* \quad q = p \cdot r)$ . Deux mots,  $p$  et  $q$ , de  $\mathbf{N}^*$  sont **parallèles** s'ils sont incomparables pour l'ordre préfixe, on note  $p \parallel q$ . Un ensemble  $\Pi \subset \mathbf{N}^*$ , est dit **ensemble de mots parallèles** si les mots de  $\Pi$  sont deux à deux parallèles.

Un **arbre structuré**  $A$  est un sous-ensemble fini de  $\mathbf{N}^*$  défini par :

1.  $A \subset \mathbf{N}^*$ ,  $A < \infty$ ,
2.  $q \in A$ ,  $p \leq q \Rightarrow p \in A$ ,
3.  $\forall k \in \mathbf{N}$ ,  $p \cdot \langle k \rangle \in A \Rightarrow \forall j < k$ ,  $p \cdot \langle j \rangle \in A$ .

Les éléments d'un arbre sont dits **nœuds** de cet arbre. Un nœud maximal de  $A$ , pour l'ordre préfixe, est dit une **feuille** de  $A$ ; le nœud  $\Lambda$ , (minimal de  $A$ , pour l'ordre préfixe), est dit la **racine** de  $A$ .

A un terme  $t$ , dans  $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ , on peut associer un arbre structuré étiqueté, dit **arbre des positions** de  $t$ , noté  $\mathcal{P}os(t)$ ; chaque nœud,  $p \in \mathcal{P}os(t)$ , est étiqueté par un symbole d'arité égale au nombre des successeurs de  $p$  dans l'ordre préfixe. L'arbre des positions est défini par :

1.  $c \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow \mathcal{P}os(c) := \Lambda$ ,
2.  $x \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{P}os(x) := \Lambda$ ,
3.  $\mathcal{P}os(f(t_0, \dots, t_m)) := \{\Lambda\} \cup (\cup_{k=0}^m \langle k \rangle \cdot \mathcal{P}os(t_k))$ .

L'ensemble des positions de  $\mathcal{P}os(t)$  étiquetées par des variables est noté  $\mathcal{V}\mathcal{P}os(t)$ .

Le **sous-terme** de  $t$  à la position  $p$ , noté  $t|_p$  est défini par :

1.  $t|_\Lambda := t$
2.  $f(t_0, \dots, t_m)|_{\langle k \rangle \cdot u} := t_k|_u$

Par exemple si  $d$  et  $g$  sont deux lettres et  $u$  est un terme alors  $d(x, g(u))|_{\langle 1, 0 \rangle} = u$ .

Soit  $f$  une lettre ou une variable, Si  $t|_p = f(t_0, \dots, t_m)$  ou  $t|_p = f$  on dit que  $f$  **occure** à la position  $p$  de  $t$ , ou bien que  $p$  est une **occurrence** de  $f$  dans  $t$ . On note  $\mathcal{O}_t(f)$  l'ensemble des occurrences de  $f$  dans  $t$ . On dit que  $f$  **occure** dans  $t$  si  $\mathcal{O}_t(f) \neq \emptyset$ . Une variable qui occure dans  $t$  est dite **variable** de  $t$ . On note  $Var(t)$  l'ensemble des variables de  $t$ .

Nous adoptons donc la terminologie suivante, un mot  $p \in \mathbf{N}^*$  peut désigner :

1. Un nœud d'un arbre structuré.
2. Une position d'un terme.
3. Une occurrence, dans un terme, d'une lettre ou d'une variable.

Le **remplacement** de  $t|_p$  par  $s$  dans  $t$ , noté  $t[s]_p$ , est défini par :

1.  $(t[s]_p)|_p := s$ ,
2.  $\forall f \in \mathcal{F} \cup \mathcal{V}, \forall q \not\leq p \quad q \in \mathcal{O}_t(f) \iff q \in \mathcal{O}_{t[s]_p}(f)$ .

Soit  $\Pi \subseteq \mathcal{P}os(t)$  un ensemble de positions parallèles de  $t$ , soit  $S_\Pi = \{s_p\}_{p \in \Pi}$  une famille de termes indexés par  $\Pi$ , le **remplacement parallèle** de  $\{t|_p\}_{p \in \Pi}$  par  $\{s_p\}_{p \in \Pi}$  dans  $t$  consiste à remplacer successivement chaque  $t|_p$  par  $s_p$ . On note  $t[S_\Pi]_\Pi$ . Notons que le remplacement à des positions parallèles est commutatif, i.e si  $p \parallel \bar{p}$  alors  $(t[s_p]_p)[s_{\bar{p}}]_{\bar{p}} = (t[s_{\bar{p}}]_{\bar{p}})[s_p]_p$ ; donc la définition de  $t[S_\Pi]_\Pi$  ne dépend pas de l'ordre choisi des remplacements. Si on remplace dans  $t$  chaque sous-terme  $t|_p$  par le même terme  $s$ , on note ce remplacement  $t[s]_\Pi$ .

Soit  $x$  une variable, soit  $s$  un terme, la **substitution de la variable  $x$  par le terme  $s$  dans le terme  $t$** , notée  $t[x \leftarrow s]$ , est définie par :

$$t[x \leftarrow s] := t[s]_{\mathcal{O}_t(x)}$$

Les substitutions succesives, dans un terme  $t$ , d'un ensemble de variables  $X$  par un ensemble de termes  $\{s_x\}_{x \in X}$  est notée  $t[\{x \leftarrow s_x\}_{x \in X}]$

Une application de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  est dite une **substitution**. Soit  $\sigma$  une substitution, l'**application de la substitution  $\sigma$  au terme  $t$** , notée  $t\sigma$  est définie par :

$$t\sigma = t\{x \leftarrow \sigma(x)\}_{x \in \text{Var}(t)}$$

On distingue une variable dite **trou**, notée  $\Omega$ . Un **contexte** est un terme de  $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \{\Omega\})$ . Le terme  $t[\Omega]_p$  est appelé **contexte de la position  $p$  dans le terme  $t$** , on le note  $t|_p$ . Notons que  $(t|_p)[t|_p]_p = t$ . De même si  $\Pi$  est un ensemble de positions parallèles, le **contexte de  $\Pi$  dans  $t$** , noté  $t|\Pi$  est défini par  $t|\Pi = t[\Omega]_{\{p \in \Pi\}}$ .

## 2.2 Systèmes de Réécritures

**Systèmes de Réécritures Linéaires Gauche** Une **règle de réécriture linéaire gauche**  $\rho$  est la donnée d'une paire de contextes  $(l, r)$ , tel que  $l \neq \Omega$ , et d'une application  $f_\rho$  de  $\mathcal{O}_r(\Omega)$  dans  $\mathcal{O}_l(\Omega)$ . On note  $\rho : (l \rightarrow r, f_\rho)$  cette donnée. Soit  $\mathcal{O}_r(\Omega) = \{q_j\}_{j \in J}$  et  $\mathcal{O}_l(\Omega) = \{p_i\}_{i \in I}$ , l'application  $f_\rho$  est univoquement définie par une application que l'on note aussi  $f : J \rightarrow I$ . Soit  $t$  un terme clos tel que  $t = u[l[u_i]_{\{p_i\}}]_p$  et  $\rho : (l \rightarrow r, f_\rho)$  une règle de réécriture. Alors la **réécriture de  $t$  au nœud  $p$  selon la règle  $\rho$**  est le terme clos défini par  $\rho(t, p) = u[r[u_{f(j)}]_{\{q_j\}}]_p$ . On note  $t \xrightarrow{p} \rho(t, p)$ . On a donc :

$$t = u[l[u_i]_{\{p_i\}}]_p \xrightarrow{p} u[r[u_{f(j)}]_{\{q_j\}}]_p = \rho(t, p)$$

Dans ce cas là on dit que  $l[u_i]_{\{p_i\}}$  est un **redex contenu dans  $t$** .

Remarquons que cette définition coïncide avec la définition classique à savoir, une règle de réécriture linéaire gauche est la donnée d'une paire,  $(l, r)$ , de termes de  $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  tel que toute variable de  $r$  est une variable de  $l$  et toute variable de  $l$  occure exactement une seule fois dans  $l$ . En effet soit  $f_{(l,r)}$  l'application de  $\mathcal{VPos}(r)$  dans  $\mathcal{VPos}(l)$  qui a chaque position d'une variable de  $r$  associe la position de cette même variable dans  $l$ . Soit aussi  $\rho_{(l,r)} := (l[\Omega]_{\mathcal{VPos}(l)} \rightarrow r[\Omega]_{\mathcal{VPos}(r)}, f_{(l,r)})$ . La réécriture de  $t$  selon la règle  $(l, r)$  à la position  $p$  est définie par :

$$t = u[l[\{x \leftarrow u_x\}_{x \in \text{Var}(l)}]]_p \xrightarrow{(l,r)} u[r[\{x \leftarrow u_x\}_{x \in \text{Var}(l)}]]_p$$

On peut aisement vérifier que  $u[r[\{x \leftarrow u_x\}_{x \in \text{Var}(l)}]]_p = \rho_{(l,r)}(t, p)$

Un **système de réécritures linéaire gauche**  $\Sigma(\mathcal{G}(\mathcal{F}))$  est un ensemble de règles de réécritures linéaires gauche .

Soit  $\rho : (l \rightarrow r, f_\rho)$  une règle de réécriture, le contexte  $l$  est dit **contexte de gauche** de  $\rho$ , le contexte  $r$  est dit **contexte de droite** de  $\rho$ .

**Systèmes de Réécritures Orthogonaux** Soient deux contextes  $l_1 \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \{\Omega\})$  et  $l_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \{\Omega\})$ , soit  $p$  une position de  $l_1$  et  $\Pi$  un ensemble de positions parallèles de  $l_2$ . On dit que **les contextes  $l_1$  et  $l_2$  se superposent en  $(p, \Pi)$**  si :

$$l_1 = l_1|_p [l_2|\Pi]_p$$

Un système de réécriture linéaire gauche,  $\Sigma(\mathcal{G}(\mathcal{F}))$ , est **orthogonal**, SRTO, si les contextes de gauche des règles de  $\Sigma(\mathcal{G}(\mathcal{F}))$  sont deux à deux non superposables.

Un SRTO est dit **non effaçant de multiplicité un** ou **non effaçant et linéaire droite** si pour toute règle de réécriture,  $\rho : (l \rightarrow r, f_\rho)$ , l'application  $f_\rho$  est une bijection de  $\mathcal{O}_r(\Omega)$  dans  $\mathcal{O}_l(\Omega)$ . (Avec la présentation usuelle, pour toute règle de réécriture  $\alpha \rightarrow \beta$ , toute variable de  $\alpha$  a une et une seule occurrence dans  $\beta$ ).



### 3 SRTO Non Effaçants de Multiplicité Un

#### 3.1 Indépendance

**Proposition 3.1** Soit  $\mathcal{R}$  un R.T.S. orthogonal, non effaçant et de multiplicité un. Alors pour tout terme  $t$  les longueurs des dérivations qui le normalisent sont toutes égales.

**Preuve**

Dans la suite de la preuve  $p_i, q_i$  et  $r_i$  désignent des positions. La réduction d'un redex de  $t$  de position  $q$  est notée par  $t \xrightarrow{\{p\}} t'$ . L'égalité entre terme est aussi notée  $t \xrightarrow{\emptyset} t'$ .

Soient  $p$  et  $q$  deux positions tel que  $p \neq q$ , puisque  $\mathcal{R}$  est non effaçant et de multiplicité un, il existe une position  $p_q$  et une autre  $q_p$  tel que :

$$\begin{array}{ccc} t_0 & \xrightarrow{\{p\}} & t_1 \\ \{q\} \downarrow & & \downarrow \{q_p\} \\ s_0 & \xrightarrow{\{p_q\}} & s_1 \end{array}$$

On a aussi :

$$\begin{array}{ccc} t_0 & \xrightarrow{\{p\}} & t_1 \\ \emptyset \downarrow & & \downarrow \emptyset \\ s_0 & \xrightarrow{\{p\}} & s_1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} t_0 & \xrightarrow{\{p\}} & t_1 \\ \{p\} \downarrow & & \downarrow \emptyset \\ s_0 & \xrightarrow{\emptyset} & s_1 \end{array}$$

Soit,  $\sigma = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$ , une suite de réécritures qui normalisent  $t_0$ . Les considérations antérieures nous assurent qu'il existe  $i$  et  $q_{i-1} = p_i$  tel que :

$$\begin{array}{cccccccccccc} t_0 & \xrightarrow{\{p_1\}} & t_1 & \dots & t_{i-2} & \xrightarrow{\{p_{i-1}\}} & t_{i-1} & \xrightarrow{\{p_i\}} & t_i & \xrightarrow{\{p_{i+1}\}} & t_{i+1} & \dots & \downarrow (t_0) \\ \{q_0\} \downarrow & & \{q_1\} \downarrow & \dots & \{q_{i-2}\} \downarrow & & \{q_{i-1}\} \downarrow = \{p_i\} & & \downarrow \emptyset & & \downarrow \emptyset & \dots & \downarrow \emptyset \\ s_0 & \xrightarrow{\{r_1\}} & s_1 & \dots & s_{i-2} & \xrightarrow{\{r_{i-1}\}} & s_{i-1} & \xrightarrow{\emptyset} & s_i & \xrightarrow{\{p_{i+1}\}} & s_{i+1} & \dots & \downarrow (t_0) \end{array}$$

Soit  $q_0(\sigma) = \langle r_1, \dots, r_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n \rangle$ , la suite de réécritures de  $s_0$ , alors :

$$\begin{array}{ccc} t_0 & \xrightarrow{\sigma} & \downarrow (t_0) \\ \{q_0\} \downarrow & & \downarrow \emptyset \\ s_0 & \xrightarrow{q_0(\sigma)} & \downarrow (t_0) \end{array}$$

et

$$long(\sigma) = long(\langle q_0 \rangle \cdot [q_0(\sigma)])$$

Soit donc  $\rho = \langle q_0, \dots, q_m \rangle$  une suite qui normalise aussi  $t_0$ . En itérant le raisonnement développé ci-dessus nous avons :

$$\begin{array}{ccc} t_0 & \xrightarrow{\sigma} & \downarrow (t_0) \\ \{q_0\} \downarrow & & \downarrow \emptyset \\ u_1 & \xrightarrow{q_0(\sigma)} & \downarrow (t_0) \\ \{q_1\} \downarrow & & \downarrow \emptyset \\ u_2 & \xrightarrow{q_1(q_0(\sigma))} & \downarrow (t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \{q_m\} \downarrow & & \downarrow \emptyset \\ \downarrow (t_0) & \xrightarrow{q_m \dots (q_1(q_0(\sigma)))} & \downarrow (t_0) \\ & = \emptyset & \end{array}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\text{long}(\sigma) &= \text{long}(\langle q_0 \rangle \cdot [q_0(\sigma)]) \\
&= \text{long}(\langle q_0 \rangle \cdot \langle q_1 \rangle \cdot [q_1(q_0(\sigma))]) \\
&\vdots \\
&= \text{long}(\langle q_0 \rangle \cdots \langle q_m \rangle \cdot [q_m(\cdots q_0(\sigma) \cdots)]) \\
&= \text{long}(\langle q_0, \dots, q_m \rangle) \\
&= \text{long}(\delta)
\end{aligned}$$

□

### 3.2 Linéarité pour des Redex Internes et Linéarité

Dans cette sous-section on définit la linéarité pour des redex internes, les sorties et on montre que si la taille de sorties est borné alors la linéarité pour des redex internes implique la linéarité.

**Definition 3.1 (Linéarité pour des Redex Internes)** Soit  $\mathcal{R}$  un R.T.S. orthogonal, non effaçant et de multiplicité un.

1. Un terme  $t$  est dit un **redex interne**, (pour  $\mathcal{R}$ ), si  $t$  contient un redex et aucun de ces sous-termes immédiats ne contient des redex. On note  $\mathcal{RI}$  l'ensemble des redex internes.
2. Un système de réécriture est dit **Linéaire pour les redex internes** si la complexité de réduction des redex internes est linéaires. i.e.:

$$\exists b \in \mathbf{N}, \forall t \in \mathcal{RI}, \lambda(t) \leq b \cdot \text{long}(t)$$

**Definition 3.2 (Sorties)** Soit  $t = u_g \cdot v \cdot u_d$  un mot<sup>5</sup>.

1. Le sous-mot  $v$  de  $t$  est dit **élémentairement irréductible dans  $t$**  si toute réécriture de  $t$  est ou bien réécriture de  $u_g$  ou bien réécriture de  $u_d$ .
2. Le sous-mot  $v$  de  $t$  est dit **irréductible dans  $t$**  si  $v$  est élémentairement irréductible dans tout mot dérivé de  $t$ .
3. Le sous-mot  $v$  de  $t$  est dit **irréductible à gauche (respectivement à droite) dans  $t$**  si  $v$  est irréductible dans  $u_g \cdot v$  (respectivement dans  $v \cdot u_d$ ).
4. Le sous-mot  $v$  de  $t$  est dit **fortement irréductible à gauche (respectivement à droite) dans  $t$**  si pour tout mot  $\bar{u}$ ,  $v$  est irréductible dans  $\bar{u} \cdot u_g \cdot v$  (respectivement dans  $v \cdot u_d \cdot \bar{u}$ ).
5. Un mot  $w_t$ , est dit **sortie de  $t$  (après sa normalisation)**, si  $\downarrow(t) = w_t \cdot \text{||||}$ , où  $\text{||||}$  est un suffixe fortement irréductible à gauche (maximal) de  $\downarrow(t)$ . L'ensemble de toutes les sorties possibles est noté  $SR$ .

**Remarque 3.1** 1. Cette définition se recoupe avec celle de partie active de Dershowitz-Hoot. De fait Les sorties d'un redex interne est partie active de tout mot qui contient ce redex interne une fois celui-ci normalisé.

2. Nous utiliserons souvent le fait que cette sortie est une entrée pour la suite de la normalisation d'un terme dont  $t$  est un suffixe, i.e. :

$$\text{Si } s = v \cdot t \text{ alors } \lambda(s) = \lambda(t) + \lambda(v \cdot w_t) .$$

<sup>5</sup> Nous donnons la définition de sorties pour des systèmes de réécriture de mots, la définition pour les STR est analogue.

**Définition 3.3 (SRT à Sorties de Bornées)** Un SRT est dit à sorties bornées s'il existe un entier qui borne la taille de toutes les sorties possibles.

**Théorème 3.1** Un SRTO non effaçant<sup>6</sup>, de multiplicité un, à sorties bornées, et linéaire pour les redex internes est linéaire.

**Preuve** Soit  $a \in \mathbf{N}$  le facteur de linéarité des redex internes. Soit  $b \in \mathbf{N}$  la borne des sorties.

Si  $t = u_k \cdots u_0$  est un mot<sup>7</sup> tel que, pour chaque  $i \leq k$ , le mot  $u_i \cdot w_{u_{i-1} \cdots u_0}$  est un redex interne. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \sum_{i=0}^{i=k} \lambda(u_i \cdot w_{u_{i-1} \cdots u_0}) \\ &= \sum_{i=0}^{i=k} a \cdot \text{long}(u_i \cdot w_{u_{i-1} \cdots u_0}) \\ &= a \cdot \text{long}(u_0) + \sum_{i=1}^{i=k} a \cdot (\text{long}(u_i) + b) \\ &= a \cdot (\text{long}(t) + k \cdot b) \\ &\leq a \cdot (1 + b) \cdot \text{long}(t) \end{aligned}$$

□

**Remarque 3.2** Soit,  $\mathcal{R}$ , un SRTO non effaçant, de multiplicité un. A partir de la preuve du théorème 3.1, on peut établir que :

$$\begin{aligned} ((\forall v \in \mathcal{RI}, \lambda(v) \leq a \cdot \text{long}(v)) \wedge (\forall w \in \mathcal{SR}, \forall u \cdot w \in \mathcal{RI}, \lambda(u \cdot w) \leq a \cdot \text{long}(u))) \\ \Rightarrow \forall t, \lambda(t) \leq a \cdot \text{long}(t) . \end{aligned}$$

## 4 Redex Internes de $\mathcal{Z}$

Dans cette section nous étudions la symétrie de  $\mathcal{Z}$ . Nous montrons aussi que les redex internes de  $\mathcal{Z}$  sont de la forme :  $(00) \cdot 1^{2k_1} \cdot 0 \cdot 1^{2k_2} \cdots 0 \cdot 1^{2k_m}$ , et la linéarité de  $\mathcal{Z}$  pour ces redex internes.

### 4.1 Symétrie de $\mathcal{Z}$

**Définition 4.1** Soit  $t$  un mot de  $\{0, 1\}^*$ , le symétrique de  $t$ , noté  $\bar{t}$ , est défini inductivement par :

- $\bar{A} = A$ ,
- $\overline{(0 \cdot v)} = \bar{v} \cdot 1$  et
- $\overline{(1 \cdot v)} = \bar{v} \cdot 0$ .

**Lemme 4.1**

$$\forall t \quad \lambda(t) = \lambda(\bar{t}).$$

<sup>6</sup> Le théorème reste vrai si on omet cette condition, voir [10].

<sup>7</sup> Nous donnons la preuve pour des systèmes de réécriture de mots, la preuve pour les STR est analogue.

**Preuve** Ce lemme découle facilement du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 u \cdot (0011) \cdot v & \longrightarrow & u \cdot (111000) \cdot v \\
 \text{sym} \downarrow & & \downarrow \text{sym} \\
 \bar{v}(0011)\bar{u} & \longrightarrow & \bar{v}(111000)\bar{u}
 \end{array}$$

□

## 4.2 Zéros irréductibles à droite

Soient  $k, k', n$  des entiers naturels non nuls et  $t$  un mot tel que :

$$\begin{aligned}
 t &= w \cdot 1^k \cdot 0^{2n+1} \cdot 1^{k'} \cdot w' \\
 &= w \cdot 1^k \cdot [0] \cdot 0^{2n} \cdot 1^{k'} \cdot w'
 \end{aligned}$$

alors  $[0]$  est **irréductible à droite** puisque, pour tout terme  $t'$  dérivé de  $[0] \cdot 0^{2n} \cdot 1^{k'} \cdot w'$ , aucun redex de  $t'$  ne contient  $[0]$ .

Par contre des réductions dans  $w \cdot 1^k \cdot [0]$  peuvent conduire à un terme dérivé de  $t$  dans lequel  $[0]$  puisse être réduit. Exemple :

$$\begin{aligned}
 0011[0](0011) &\longrightarrow (0011)[0]111000 \\
 &\longrightarrow 11100(0[0]11)1000 \\
 &\longrightarrow 111001110001000
 \end{aligned}$$

Mais si  $k > 1$  et si  $t = w \cdot 0^k \cdot w'$  avec  $0^k \cdot w'$  normal, alors  $0^k \cdot w'$  demeure irréductible dans tout mot dérivé de  $t$ .

## 4.3 Uns irréductibles à gauche

Soient  $k, k', n$  des entiers naturels non nuls et  $t$  un mot tel que :

$$\begin{aligned}
 t &= w \cdot 0^k \cdot 1^{2n+1} \cdot 0^{k'} \cdot w' \\
 &= w \cdot 0^k \cdot 1^{2n} \cdot [1] \cdot 0^{k'} \cdot w'
 \end{aligned}$$

alors  $[1]$  est **irréductible à gauche** puisque, pour tout mot  $t'$  dérivé de  $w \cdot 0^k \cdot 1^{2n} \cdot [1]$ , aucun redex de  $t'$  ne contient  $[1]$ .

Par contre des réductions de  $[1] \cdot 0^{k'} \cdot w'$  peuvent conduire à un mot dérivé de  $t$  dans lequel  $[1]$  puisse être réduit. Exemple :

$$\begin{aligned}
 0011[1](0011) &\longrightarrow (0011)[1]111000 \\
 &\longrightarrow 1110(00[1]1)11000 \\
 &\longrightarrow 111011100011000
 \end{aligned}$$

Donc si  $[1] \cdot 0^{k'} \cdot w'$  est normal alors  $[1]$  demeure irréductible dans tout mot dérivé de  $t$ .

#### 4.4 Marqueurs et preuves inductives

Soient  $k, k', n, m$  des entiers naturels non nuls et  $t$  un mot tel que :

$$\begin{aligned} t &= w \cdot 0^k \cdot 1^{2n+1} \cdot 0^{2m+1} \cdot 1^{k'} \cdot w' \\ &= w \cdot 0^k \cdot 1^{2n} \cdot [1][0] \cdot 0^{2m} \cdot 1^{k'} \cdot w' \end{aligned}$$

L'irréductibilité à gauche de  $[1]$  et à droite de  $[0]$  font que  $[1][0]$  partitionne  $t$  en deux mots indépendants par rapport à la réduction. On dira que  $[1][0]$  est un **marqueur**. On notera ce marqueur  $[10]$ .

La détection de marqueurs est très utile pour obtenir des preuves inductives de terminaison. Le schéma de preuve consistera à obtenir, à partir d'un mot  $t$ , un mot dérivé  $t'$  qui contienne un marqueur partitionnant  $t'$  en deux mots "plus simples". Il s'agit à dire dont on sait déjà prouver la terminaison.

#### 4.5 Forme des redex internes

Nous allons identifier la forme des mots avec un seul redex dont il faut prouver la normalisation interne.

Soit  $t = 0011w$  avec  $w$  mot normal. Si  $w = u \cdot 0^k \cdot u'$  avec  $k > 1$  alors le sous-mot  $0^k \cdot u'$  est irréductible, comme on l'a vu dans la section sur les zéros irréductibles à droite. Si  $t$  est de la forme:

$$t = (00) \cdot (11)^{k_0} \cdot 0 \cdot 1^{k_1} \dots 0 \cdot 1^{k_n} \cdot 0^k \cdot u'$$

avec  $k > 1$ , alors toute dérivation de  $t$  est une dérivation de:

$$(00) \cdot (11)^{k_0} \cdot 0 \cdot 1^{k_1} \dots 0 \cdot 1^{k_n}$$

Si pour tout  $i < m$ ,  $k_i$  est paire et  $k_m$  est impaire, alors dans:

$$(00) \cdot (11)^{k_0} \cdot 0 \cdot 1^{2k'_1} \dots 0 \cdot 1^{2k'_m} \cdot 1 \cdot 0 \cdot 1^{k_{m+1}} \dots 0 \cdot 1^{k_n},$$

le sous-mot  $1 \cdot 0 \cdot 1^{k_{m+1}} \dots 0 \cdot 1^{k_n}$  est irréductible, comme on l'a vu dans la section sur les uns irréductibles à gauche.

Ces deux dernières remarques nous permettent de conclure que toute dérivation d'un mot avec un seul redex, de la forme  $(00) \cdot 11w$ , est une dérivation d'un sous-mot préfixe de la forme:

$$(00) \cdot 1^{2k'_1} \cdot 0 \cdot 1^{2k'_2} \dots 0 \cdot 1^{2k'_m} \quad (\diamond)$$

Il est donc clair que pour prouver *IN*, il suffit de prouver la normalisation interne des mots de la forme  $\diamond$ .

#### 4.6 Normalisation interne

Dans cette sous-section nous donnons une preuve par induction de la normalisation interne des mots de la forme  $\diamond$ .

**Notation 4.1** Dans la suite  $\|$  denote la concatenation d'un mot irréductible,  $\lambda(t)$  dénote la longueur de dérivation (interne) qui normalise  $t$ ,  $\text{long}(t)$  désigne la longueur du mot  $t$ .

**Lemme 4.2** Soit  $k \geq 0$  et  $t_k$  un mot de la forme:

$$t_k = (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdot \underbrace{11100}_2 \cdot \dots \cdot \underbrace{11100}_k \cdot \overbrace{11111011} \|$$

Alors :

$$\lambda(t_k) = 5k + 5$$

**Preuve**

$$\begin{aligned}
t_k &= (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_{k-1} \cdot \underbrace{111(00 \cdot 11)}_k 1111011 || \\
&\rightarrow (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_{k-1} \cdot 111111 \cdot 0(0011)11011 || \\
&\rightarrow (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_{k-1} \cdot 111111 \cdot 01110(0011)011 || \\
&\rightarrow (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_{k-1} \cdot 111111 \cdot 0111011100(0011) || \\
&\rightarrow (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_{k-1} \cdot 111111 \cdot 01110111(0011)1000 || \\
&\rightarrow (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_{k-1} \cdot 111111 \cdot 01110111110001000 || \\
&= (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_{k-1} \cdot \overbrace{11111011[10]} \cdot 111110001000 ||
\end{aligned}$$

Puisque [10] est un marqueur et que le mot à sa droite est normale on a :

$$\lambda(t_0) = 5 \quad \text{et} \quad \forall k, \quad \lambda(t_{k+1}) = 5 + \lambda(t_k)$$

□

**Fait 4.1** Soit  $k \geq 0$  et  $t_k$  un mot de la forme :

$$u_{k+2} = (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_k \cdots \underbrace{11100}_{k+1} \cdot \underbrace{11100}_{k+2} \cdot \widehat{11} ||$$

Alors :

$$\lambda(u_{k+2}) = 5k + 9$$

**Preuve**

$$\begin{aligned}
u_{k+2} &= (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_k \underbrace{11100}_{k+1} \cdot \underbrace{111(00 \cdot 11)}_{k+2} || \\
&\rightarrow (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_k \underbrace{111(00 \cdot 11)}_{k+1} 1111000 || \\
&\rightarrow (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_k 1111110(0011)11000 || \\
&\rightarrow (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_k 11111101110(0011)000 || \\
&\rightarrow (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_k 111111011[10]111000000 ||
\end{aligned}$$

Le terme à droite du marqueur [10] est normal, et par le lemme 4.2 le terme à gauche de [10] se normalise après  $5(k+1)$  pas. Donc :  $\lambda(u_k) = 5k + 9$ . □

**Fait 4.2**  $\lambda \left( (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdot \widehat{11} || \right) = 4.$

**Lemme 4.3** Soit  $k \geq 0$  et  $v_k$  un mot de la forme :  $v_k = (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_k \cdot \widehat{11} \parallel$  Alors :

$$\lambda(v_k) = 5(k+1)$$

**Preuve** Il suffit de joindre les résultats des deux derniers faits. □.

**Proposition 4.1**  $Z$  vérifie la terminaison interne

**Preuve** Pour prouver la normalisation interne, notée *N.I.* il suffit de prouver que chaque mot contenant un seul redex est normalisable. Or d'après la section sur les marqueurs l'étude de la normalisation interne de mots avec un seul redex se réduit au cas défini par l'équation 4.5 :

$$(00) \cdot 1^{2k_1} \cdot 0 \cdot 1^{2k_2} \cdots 0 \cdot 1^{2k_m} \parallel (\diamond)$$

Nous allons prouver la *N.I.* par induction lexicographique sur les paires  $(m, k_1)$  des termes de la forme  $(\diamond)$ . On notera cette paire  $(m_t, k_t)$ .

**Pas initial.** Le  $m = 1$  est trivial.

**Pas inductif** Si  $m > 1$  On suppose que :

$$\forall t \in (\diamond), (m_t, k_t) <_{lex} (m, k) \Rightarrow t \text{ satisfait } N.I.$$

Soit alors un mot  $t$  tel que  $(m_t, k_t) = (m, k)$  avec  $t$  de la forme :

$$k_{j+1} > 1 \text{ et } t = (00) \cdot \underbrace{110}_1 \cdots \underbrace{110}_j \cdot \overbrace{(11)^{k_{j+1}+1}0} \cdots \overbrace{(11)^{k_{m-1}+1}0} \parallel 11 \parallel$$

Nous allons considérer deux cas :

Si  $j = 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} t &= (00) \cdot \overbrace{(11)^{k_1}0} \cdots \overbrace{(11)^{k_{m-1}+1}0} \parallel 11 \parallel \\ &\rightarrow 11[10]00 \overbrace{(11)^{k_1-1}0} \cdots \overbrace{(11)^{k_{m-1}+1}0} \parallel 11 \parallel \end{aligned}$$

Le mot à la droite du marqueur [10] a pour paire  $(m, k_1 - 1)$ , or  $(m, k_1 - 1) <_{lex} (m, k)$ , donc par hypothèse il est *I.N.* . Donc  $t$  est *I.N.*

Si  $j > 0$ . Alors :

$$\begin{aligned} t &= (00) \cdot \underbrace{110}_1 \cdots \underbrace{110}_j \cdot \overbrace{(11)^{k_{j+1}+1}0} \cdots \overbrace{(11)^{k_{m-1}+1}0} \parallel 11 \parallel \\ &\xrightarrow{j+1} \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_j \cdot 11 [10]00 \overbrace{(11)^{k_{j+1}-1}0} \cdots \overbrace{(11)^{k_{m-1}+1}0} \parallel 11 \parallel \end{aligned}$$

où  $\xrightarrow{j+1}$  désigne  $j+1$  applications de réductions internes. Le mot à gauche du marqueur:  $\underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_j \cdot \widehat{11}$  est *I.N.* par le lemme 4.3. Le mot à droite du marqueur :

$00 \overbrace{(11)^{k_{j+1}-1}0} \cdots \overbrace{(11)^{k_{m-1}+1}0} \parallel 11 \parallel$  est *I.N.* puisque  $(m-j, k_{j+1} - 1) <_{lex} (m, k)$ . Donc  $t$  est *I.N.*

□.

#### 4.7 Linéarité pour des redex internes

Dans cette sous-section nous donnons, à partir de la preuve de normalisation interne, une preuve de la linéarité pour des redex internes.

**Proposition 4.2** *Tout terme  $t$  de la forme  $(00) \cdot 1^{2k_1} \cdot 0 \cdot 1^{2k_2} \dots 0 \cdot 1^{2k_m} \parallel (\diamond)$  satisfait :*

$$\lambda(t) < 2 \cdot \text{long}(t) - 6$$

**Preuve** Nous allons prouver la proposition par induction lexicographique sur les paires  $(m, k_1)$  des termes de la forme  $(\diamond)$ . On notera cette paire  $(m_t, k_t)$ .

**Cas de base** Si  $m = 1$   $\lambda((00)(11)^k) = k - < 2 \cdot (2(k+1)) - 6$ .

**Pas inductif** On suppose que:

$$\forall t \in (\diamond), (m_t, k_t) <_{lex} (m, k) \Rightarrow \lambda(t) < 2 \cdot \text{long}(t) - 6$$

Soit alors un mot  $t$  tel que  $(m_t, k_t) = (m, k)$  avec  $t$  de la forme:

$$k_{j+1} > 1 \quad \text{et} \quad t = (00) \cdot \underbrace{110}_1 \dots \underbrace{110}_j \cdot \overbrace{(11)^{k_{j+1}-1} 0} \dots \overbrace{(11)^{k_m-1} 0} 11 \parallel$$

Nous allons considérer deux cas:

**Si  $j = 0$ .** Alors d'après la preuve de normalisation interne on a:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= 1 + \lambda(00 \overbrace{(11)^{k_1-1} 0} \dots \overbrace{(11)^{k_m-1} 0} 11 \parallel) \\ &< 1 + 2(l(t) - 2h) - 6 \quad (H.I.) \\ &= 2l(t) - 9 \end{aligned}$$

**Si  $j > 0$ .** Alors d'après la preuve de normalisation interne on a:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= (j+1) + \lambda(\underbrace{11100}_1 \dots \underbrace{11100}_j \cdot \overbrace{11}) + \\ &\quad \lambda(00 \overbrace{(11)^{k_{j+1}-1} 0} \dots \overbrace{(11)^{k_m-1} 0} 11 \parallel) \\ &< (j+1) + [5(j-1)] + [2(l(t) - 3j - 1) - 6] \\ &= 2l(t) - 12 \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus découle du lemme 4.3 et de l'hypothèse inductive. □

## 5 Sorties et linéarité de $\mathcal{Z}$

Nous donnons dans le tableau 1 les différentes sorties possibles pour les mots de la forme  $(00) \cdot 1^{2k'_1} \cdot 0 \cdot 1^{2k'_2} \dots 0 \cdot 1^{2k'_m}$ . La preuve de tel tableau est faite dans le lemme 5.2.

**Notation 5.1** *Nous noterons :*

$$S_k = \underbrace{11}_1 \cdot 0 \cdot \underbrace{11}_2 \dots 0 \cdot \underbrace{11}_k \quad \text{et} \quad T_k = \underbrace{111}_1 \cdot 0 \cdot \underbrace{111}_2 \dots 0 \cdot \underbrace{111}_k$$

**Lemme 5.1**

$$\forall t \in (\diamond) \quad t = 0011011 \cdot u \Rightarrow \downarrow(t) \in \{111111 \parallel \parallel \parallel, 111111011 \parallel \parallel \parallel\}$$



**Table1.** Tableau de sorties

$k_1$	$k_2$	$k_3$	Sorties	Lemme - Cas
1	0		111	5.2-1
	1	0	$(11)^3$	5.1-1
	1	$> 0$	$(11)^3 011$	5.1-2
	$> 1$		$(11)^3$	5.1-3
2	0		111011	5.2-3
	1	0	$1110(11)^3$	5.2-4
	1	$> 0$	$1110(11)^3 011$	5.2-5
	$> 1$		$1110(11)^3$	5.2-6
$> 2$			111011	5.2-7

**Preuve** Nous considérons trois cas :

1. Si  $t = 0011011||$  :

$$\begin{aligned}
 t &= (0011)011|| \\
 &\rightarrow 11100(0011)|| \\
 &\rightarrow 111(0011)1000|| \\
 &\rightarrow 111111[0001000]|| \\
 &\rightarrow 111111||||
 \end{aligned}$$

2. Si  $t = 00110110(11)^{k_3}0 \dots$  avec  $k_3 > 0$  :

$$\begin{aligned}
 t &= (0011)0110(11)^{k_3}0 \dots \\
 &\rightarrow 11100(0011)0(11)^{k_3}0 \dots \\
 &\rightarrow 111(0011)10000(11)^{k_3}0 \dots \\
 &\rightarrow 111111000100(0011)(11)^{k_3-1}0 \dots \\
 &\rightarrow 1111110001(0011)1000(11)^{k_3-1}0 \dots \\
 &\rightarrow 1111110(0011)110001000(11)^{k_3-1}0 \dots \\
 &\rightarrow 111111011[10]00110001000(11)^{k_3-1}0 \dots \\
 &\rightarrow^* 111111011||||
 \end{aligned}$$

Car si  $v = [10] \cdot \downarrow (00110001000(11)^{k_3-1}0 \dots)$  alors pour tout mot  $w$ , le mot  $v$  est irréductible dans le mot  $w \cdot 11111011 \cdot v$ .

3. Si  $t = 00110(11)^{k_2}0 \dots$  avec  $k_2 > 1$  :

$$\begin{aligned}
 t &= (0011)0(11)^{k_2}0 \dots \\
 &\rightarrow 11100(0011)(11)^{k_2-1}0 \dots \\
 &\rightarrow 111(0011)1000(11)^{k_2-1}0 \dots \\
 &\rightarrow 111111[0001000(11)^{k_2-1}0 \dots \\
 &\rightarrow 111111||||
 \end{aligned}$$

Car si  $v = [0] \cdot \downarrow (00[10]00(11)^{k_2-1}0 \dots)$  alors pour tout mot  $w$ , le mot  $v$  est irréductible dans le mot  $w \cdot 111111 \cdot v$ .

□

**Lemme 5.2** Soit  $t = (00) \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \cdot (11)^{k_2} \dots 0 \cdot (11)^{k_j} ||||$ . Alors le tableau de sorties 1 est satisfait.

**Preuve** Nous allons prouver les cas :

1. Si  $k_1 = 1$  et  $k_2 = 0$ . Il est clair  $\downarrow(t) = 111|||$ .
2. [Si  $k_1 = 1$  et  $k_2 > 0$ ] Voir le lemme 5.1
3. Si  $k_1 = 2$  et  $k_2 = 0$ , alors :

$$\downarrow((00) \cdot (11)^2 |||) = 1110111000||| = 111 \cdot 0 \cdot 11|||$$

4. Si  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$  et  $k_3 = 0$ , alors, d'après le cas 1 du lemme 5.1, on a :

$$\begin{aligned} 00 \cdot (11)^2 \cdot 0 \cdot (11) ||| &\longrightarrow 1110(0011011) ||| \\ &\xrightarrow{*} 1110111111 ||| \end{aligned}$$

5. Si  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 1$  et  $k_3 > 0$ , alors, d'après le cas 2 du lemme 5.1, on a :

$$\begin{aligned} 00 \cdot (11)^2 \cdot 0 \cdot (11) \cdot 0 \cdot 11 \cdot u &\longrightarrow 1110(0011011 \cdot 0 \cdot 11) \cdot u \\ &\xrightarrow{*} 1110111111011 ||| \end{aligned}$$

6. Si  $k_1 = 2$  et  $k_2 > 0$ , alors la sortie est  $1110(11)^3$ , puisque :

$$\begin{aligned} 00 \cdot (11)^2 \cdot 0 \cdot (11)^{k_2} \cdot u &\longrightarrow 1110(0011)0(11)^{k_2} \cdot u \\ &\longrightarrow 11101110000(11)^{k_2} \cdot u \\ &\longrightarrow 111011100111000(11)^{k_2-1} \cdot u \\ &\longrightarrow 11101111110001000(11)^{k_2-1} \cdot u \\ &\longrightarrow 1110111111000[10]00(11)^{k_2-1} \cdot u \end{aligned}$$

7. Si  $k_1 > 2$ , alors la sortie est  $111011$ , puisque :

$$\downarrow((00) \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \dots) = T_{k_1} ||| = 111 \cdot 0 \cdot 11[10111 \dots]$$

□

**Corollaire 5.1** *Le système  $Z$  est linéaire.*

**Preuve** Le lemme des sorties, 5.2, montre que la taille des sorties est bornée. Donc la linéarité est satisfaite par le théorème 3.1, puisque, par la proposition 4.2, la linéarité interne est satisfaite. □

## 6 Conjecture de Zantema

Dans cette section on exhibe une suite de mots,  $s_n$ , tel que  $\forall n, \lambda(s_n) < 2 \cdot \text{long}(s_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(s_n)}{\text{long}(s_n)} = 2$ . Donc la conjecture forte de Zantema est le meilleur raffinement possible de la linéarité de  $\mathcal{Z}$ .

**Proposition 6.1** *Pour tout terme  $s_k = 00 \cdot \underbrace{11}_1 \cdot 0 \cdot \underbrace{11}_2 \cdot \dots \cdot 0 \cdot \underbrace{11}_k |||$  Nous avons:*

$$\lambda(s_k) < 2 \cdot \text{long}(s_k) - 6$$

**Preuve** Si  $k \leq 2$  il est facile de voir que l'équation 6.1 est satisfaite.

Nous allons prouver la proposition pour  $k > 2$ . Nous rappelons la notation et le resultat du fait 4.1; à savoir que  $\lambda(u_{k+2}) = 5k + 9$  où :

$$u_{k+2} = (00) \cdot \underbrace{11100}_1 \cdots \underbrace{11100}_k \cdots \underbrace{11100}_{k+1} \cdot \underbrace{11100}_{k+2} \cdot \widehat{11} \parallel .$$

En effet :

$$\begin{aligned} s_k &= 00 \cdot \underbrace{11}_1 \cdot 0 \cdot \underbrace{11}_2 \cdots 0 \cdot \underbrace{11}_k \parallel \\ &\xrightarrow{k} \underbrace{111}_1 \cdot 00 \cdot \underbrace{111}_2 \cdots 00 \cdot \underbrace{111}_k \cdot 000 \parallel \\ &= 111]u_{k-2}[100 \parallel \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda(s_k) = k + \lambda(u_{k-2}) = 6k - 11 < 2 \cdot \text{long}(s_k) - 6$$

□

**Proposition 6.2** Il existe une suite de mots  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t_n)}{l(t_n)} = 2$$

**Preuve** Soit la suite de mots :

$$s_n = (00) \underbrace{110}_1 \cdots \underbrace{110}_n \widehat{11}$$

On a vu dans la preuve de la proposition 6.1 que, pour  $n > 2$ ,  $\lambda(s_n) = 6n - 11$  Donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(s_n)}{l(s_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6n - 11)}{(3n + 4)} = 2$$

□

**Remarque** Les propositions 6.1 et 6.2 prouvent que le facteur 2 est optimal.

**Remarque 6.1** On ne peut prouver la conjecture forte de Zantema par linéarité des redex internes, et par la remarque 3.2. Puisque, pour la sortie  $1110(11)^3 \cdot 011$ , nous avons :

$$2 \cdot \text{long}(001) < 8 = \lambda(\underbrace{(001) \cdot 1110(11)^3 \cdot 011}_{\text{redex}}) < 3 \cdot \text{long}(001)$$

Par contre, on peut prouver par cette technique que le facteur de linéarité de  $\mathcal{Z}$  est inférieure ou égale à 3.

## 7 Lemmes de Dichotomies

Puisque, d'après la remarque 6.1, on ne peut prouver la conjecture forte de Zantema par la linéarité pour des redex internes, nous allons utiliser des techniques de *dichotomisation par marquage en avant*. Nous donnons dans cette section deux lemmes de dichotomies.

**Lemme 7.1 (Grande Dichotomie)** Soient  $v$  et  $w$  deux mots quelconques. Soit  $k_j > 1$  et le mot  $t = v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \dots (11)^{k_j} \cdot w$ , tel que  $(h, j) \neq (1, 1)$  ou bien  $v$  est le mot vide, alors :

$$\begin{aligned} & \lambda(v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \dots (11)^{k_j} \cdot w) \\ &= \lambda(v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \dots (11)^{k_{j-1}011}) + \lambda(00 \cdot (11)^{k_j-1} \cdot w) \\ &= \lambda(v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \dots (11)^{k_{j-1}011}) + (k_j - 1) + \lambda(000 \cdot w) \end{aligned}$$

**Preuve** Nous utilisons la mots  $T_k$  tel que définis dans la section 5 Alors :

$$\begin{aligned} & v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \cdot (11)^{k_2} \dots (11)^{k_j} \cdot w \\ & \xrightarrow{k_1} v \cdot (00)^{h-1} T_{k_1} \cdot 0000 \cdot (11)^{k_2} \dots (11)^{k_j} \cdot w \\ & \xrightarrow{k_2+\dots+k_{j-1}} v \cdot (00)^{h-1} T_{k_1} \cdot 00 \cdot T_{k_2} \dots 00 \cdot T_{k_{j-1}} \cdot 0000 \cdot (11)^{k_j} \cdot w \\ & \longrightarrow v \cdot (00)^{h-1} T_{k_1} \cdot 00 \cdot T_{k_2} \dots 00 \cdot T_{k_{j-1}} \cdot 0011[10]00 \cdot (11)^{k_j-1} \cdot w \end{aligned}$$

Si  $(h, j) \neq (1, 1)$  ou bien  $v$  est le mot vide, alors [10] est un marqueur, donc :

$$\begin{aligned} & \lambda(v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \dots (11)^{k_j} \cdot w) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{j-1} k_i + \lambda(v \cdot (00)^{h-1} T_{k_1} \cdot 00 \cdot T_{k_2} \dots 00 \cdot T_{k_{j-1}} \cdot 0011) + \lambda(00 \cdot (11)^{k_j-1} \cdot w) \\ &= \lambda(v \cdot (00)^h \cdot (11)^{k_1} \cdot 0 \dots (11)^{k_{j-1}011}) + \lambda(00 \cdot (11)^{k_j-1} \cdot w) \end{aligned}$$

□

**Lemme 7.2 (Petite Dichotomie)** Soit  $k > 2$  et soit le mot  $S_k$  tel que défini dans la section 5, alors :

$$\lambda((00)^h \cdot S_k \cdot v) = \lambda((00)^h \cdot S_k) + \lambda(000 \cdot v).$$

**Preuve** On a bien :

$$\begin{aligned} (00)^h \cdot S_k \cdot v & \xrightarrow{k} (00)^{h-1} \cdot T_k \cdot 000 \cdot v \\ &= (00)^{h-1} \cdot \underbrace{111}_1 \cdot 0 \cdot \underbrace{11[1 \cdot 0]}_2 \cdot \underbrace{111}_3 \dots \underbrace{111}_k \cdot 000 \cdot v \end{aligned}$$

Puisque le mot  $\underbrace{111}_3 \dots \underbrace{111}_k$  est irréductible dans le mot  $\underbrace{111}_3 \dots \underbrace{111}_k \cdot 000 \cdot v$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda((00)^h \cdot S_k \cdot v) &= k + \lambda((00)^{h-1} \cdot 111011) + \lambda(000 \cdot v) \\ &= \lambda((00)^h \cdot S_k) + \lambda(000 \cdot v). \end{aligned}$$

□

## 8 Preuve de la Conjecture de Zantema

On montre dans cette section que :

$$\forall t, \quad \lambda(t) < 2 \cdot \text{long}(t) - 6.$$

**Proposition 8.1** Tout mot  $t$ , vérifie :

$$(\sqrt{t}', \text{long}(t') < \text{long}(t) \Rightarrow \lambda(t') < 2 \cdot \text{long}(t') - 6) \Rightarrow (\lambda(t) < 2 \cdot \text{long}(t) - 6)$$

**Preuve** Par induction sur la longueur de  $t$ .

1. Si le mot  $t$  est de longueur 0, il vérifie trivialement  $I$ .
2. Si  $t = |||t'$  avec  $t \neq t'$ , alors :

$$\lambda(t) = \lambda(t') \stackrel{H.I.}{<} 2 \cdot \text{long}(t') - 6 < 2 \cdot \text{long}(t) - 6.$$

3. Si  $t \neq |||t'$  avec  $t \neq t'$  alors  $\bar{t} \neq \bar{t}' |||$  avec  $\bar{t} \neq \bar{t}'$ , or, d'après ( $\diamond$ ) :

$$\bar{t} = v \cdot 00(11)^{k_1}0(11)^{k_2} \dots 0(11)^{k_m} |||,$$

donc

$$\bar{t} = v \cdot 00(11)^{k_1}0(11)^{k_2} \dots 0(11)^{k_m}, \quad \text{et} \quad t = (00)^{k_m}1 \dots (00)^{k_1}11 \cdot \bar{v}.$$

- (a) Si  $\bar{t}$  vérifie les conditions du lemme, 7.1, de grande dichotomie, à savoir :  
**Ou bien**  $\exists i > 1 \ k_i > 1$ ,  
**Ou bien**  $\forall i > 1 \ k_i = 1, \ k_1 > 1$ , et  $(v = v' \cdot 00, \text{ ou } v = \emptyset)$ ,  
alors par le lemme, 7.1, de grande dichotomie :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda(\bar{t}) \\ &= \lambda(v \cdot 00(11)^{k_1}0(11)^{k_2} \dots 0(11)^{k_m}) \\ &= \lambda(v \cdot 00(11)^{k_1}0(11)^{k_2} \dots (11)^{k_{i-1}}011) + \lambda(00(11)^{k_{i-1}} \dots 0(11)^{k_m}) \\ &\stackrel{H.I.}{<} 2 \cdot \text{long}(t) - 12 + 2 \times 2 \\ &= 2 \cdot \text{long}(t) - 8 \end{aligned}$$

- (b) Si  $\bar{t}$  ne vérifie pas les conditions du lemme, 7.1, de grande dichotomie :

i. Ou bien  $\forall i, \ k_i = 1$ , donc  $t = 001 \dots 0010011 \cdot \bar{v}$ , voir lemme 8.2.

ii. Ou bien  $\forall i > 1 \ k_i = 1, \ k_1 \geq 2, \ v \neq \emptyset$  et  $\bar{v} \neq 11 \cdot \bar{v}'$ , donc :

**Ou bien**  $k_1 > 1$  et  $t = 001 \dots 001(00)^{k_1}11 \cdot 0 \cdot u$

**Ou bien**  $k_1 > 1$  et  $t = 001 \dots 001(00)^{k_1}11 \cdot 10 \cdot u$ .

La preuve pour ces deux cas découle de celle des deux cas suivants :

- Si  $k_1 > 1$  et  $t = 001 \dots 001(00)^{k_1}11(00)^k \cdot 1 \cdot u'$ , voir lemme 8.3.

- Si  $k_1 > 1$  et  $t = 001 \dots 001(00)^{k_1}110(00)^k \cdot 1 \cdot u'$ , voir lemme 8.4

□

### Corollaire 8.1

$$\forall t, \quad \lambda(t) < 2 \cdot \text{long}(t) - 6.$$

**Preuve** Induction sur la longueur des mots.

□

### Lemme 8.1

$$\forall v \quad \lambda((00)^3 \cdot v) \leq 1 + \lambda((00)^2 \cdot v).$$

**Preuve**

- Si  $(00)^3$  est irréductible dans  $(00)^3 \cdot v$  alors:

$$\lambda((00)^3 \cdot v) = \lambda(v) = \lambda((00)^2 \cdot v).$$

- Sinon :

$$\begin{aligned}
 (00)^3 \cdot v &\xrightarrow{n} (00)^3 11 \cdot t' \\
 &\rightarrow (00)^2 \cdot 111000 \cdot t' \\
 &\rightarrow (00) \cdot 111000 \cdot 1000 \cdot t' \\
 &\rightarrow [111000 \cdot 10]00 \cdot 1000 \cdot t'
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\lambda((00)^3 \cdot v) = n + 3 + \lambda(00100 \cdot t')$$

De même :

$$\lambda((00)^2 \cdot v) = n + 2 + \lambda(00100 \cdot t')$$

□

**Lemme 8.2** Si  $t = \underbrace{001 \dots 001}_m \cdot 0011 \cdot \bar{v}$  alors  $t$  vérifie I.

**Preuve**

Si  $m = 0$ , donc  $t = 0011 \cdot \bar{v} \rightarrow 111000 \cdot \bar{v}$ , d'où :

$$\begin{aligned}
 \lambda(t) &= 1 + \lambda(000 \cdot \bar{v}) \\
 &\stackrel{H.I.}{<} 1 + 2 \cdot \text{long}(000 \cdot \bar{v}) - 6 \\
 &< 2 \cdot \text{long}(t) - 6
 \end{aligned}$$

Si  $m = 1$ ,  $\lambda(t) = \lambda(\bar{t}) = \lambda(v \cdot 0011011)$ , or :

$$\begin{aligned}
 v \cdot 0011011 &\rightarrow v \cdot 111(00)^2 \cdot 11 \\
 &\rightarrow v \cdot 11100111000 \\
 &\rightarrow v \cdot (11)^3 \cdot 0001000
 \end{aligned}$$

donc par le lemme 8.1 et par hypothèse d'induction on a :

$$\begin{aligned}
 \lambda(t) &= 3 + \lambda(v \cdot (11)^3) \\
 &= 4 + \lambda(v \cdot (11)^2) \\
 &\stackrel{H.I.}{<} 4 + 2 \cdot \text{long}(v) + 8 - 6 \\
 &= 2 \cdot \text{long}(v) + 6 \\
 &= 2 \cdot \text{long}(t) - 8
 \end{aligned}$$

Si  $m > 1$ ,  $\lambda(t) = \lambda(\bar{t}) = \lambda(v \cdot 0011011011 \cdot 0 \cdot S_k)$ , donc par le lemme, 7.2, de petite dichotomie :

$$\begin{aligned}
 \lambda(t) &= \lambda(v \cdot 0011011011 \cdot 0 \cdot S_k) \\
 &= \lambda(v \cdot 00 \cdot S_3 \cdot 0 \cdot S_k) \\
 &= \lambda(v \cdot 00 \cdot S_3) + \lambda(000 \cdot 0 \cdot S_k) \\
 &\stackrel{H.I.}{=} 2 \cdot \text{long}(v \cdot 00 \cdot S_3) - 6 + 2 \cdot \text{long}(0 \cdot S_k) \\
 &= 2 \cdot \text{long}(t) - 6
 \end{aligned}$$

□

**Lemme 8.3** Si  $k_1 > 1$  et  $t = 001 \dots 001(00)^{k_1} 11 \underbrace{(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_u$ , alors  $t$  vérifie I.

**Preuve** Puisque  $t \longrightarrow 001 \cdots 001(00)^{k_1-1}11[10]00(00)^k \cdot 1 \cdot u'$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= 1 + \lambda(001 \cdots 001(00)^{k_1-1}11) + \lambda(00(00)^k \cdot 1 \cdot u') \\ &\stackrel{H.I.}{<} 1 + (2 \cdot \text{long}(001 \cdots 001(00)^{k_1-1}11) - 6) + (2 \cdot \text{long}(00(00)^k \cdot 1 \cdot u') - 6) \\ &= 1 + (2 \cdot \text{long}(001 \cdots 001(00)^{k_1}11) - 4 - 6) + 2 \cdot \text{long}(u) + 4 - 6 \\ &= 1 + 2 \cdot \text{long}(t) - 12 \end{aligned}$$

□

**Lemme 8.4** Si  $k_1 > 1$  et  $t = 001 \cdots 001(00)^{k_1}11 \underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_u$ , alors  $t$  vérifie I.

**Preuve** Nous distinguons trois cas pour prouver ce lemme :

1. Si  $k_1 > 2$  voir le lemme 8.5.
2. Si  $k_1 = 2$  et  $t = (00)^2 \cdot 110(00)^k \cdot 1 \cdot u'$ , voir le lemme 8.6.
3. Si  $k_1 = 2$ ,  $m > 0$  et  $t = \underbrace{001 \cdots 001}_m(00)^{k_1}11 \underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_u$ , voir le lemme 8.8.

□

**Lemme 8.5** Si  $k_1 > 2$  et  $t = 001 \cdots 001(00)^{k_1}11 \underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_u$ , alors  $t$  vérifie I.

**Preuve** Si  $k_1 > 2$  et Puisque :

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow 001 \cdots 001(00)^{k_1-1}111(00)^{k+2} \cdot 1 \cdot u' \\ t &\longrightarrow 001 \cdots 001(00)^{k_1-2}11[10]001(00)^{k+2} \cdot 1 \cdot u' \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= 2 + \lambda(001 \cdots 001(00)^{k_1-2}11) + \lambda(001(00)^{k+2} \cdot 1 \cdot u') \\ &\stackrel{H.I.}{<} 2 + (2 \cdot \text{long}(001 \cdots 001(00)^{k_1-2}11) - 6) + (2 \cdot \text{long}(001(00)^{k+2} \cdot 1 \cdot u') - 6) \\ &= 2 + (2 \cdot \text{long}(001 \cdots 001(00)^{k_1}11) - 8 - 6) + (2 \cdot \text{long}(u) + 12 - 6) \\ &= 2 \cdot \text{long}(t) - 6 \end{aligned}$$

□

**Lemme 8.6** Si  $t = (00)^2 \cdot 110(00)^k \cdot 1 \cdot u'$ , alors  $t$  vérifie I.

**Preuve** Puisque  $\lambda(t) = \lambda((00)^2 \cdot 110 \cdot w_{(00)^k \cdot 1 \cdot u'}) + \lambda((00)^k \cdot 1 \cdot u')$ , et comme  $(00)^k \cdot 1 \cdot u'$  vérifie l'hypothèse inductive il suffit de prouver que :

$$\lambda((00)^2 \cdot 110 \cdot w_{(00)^k \cdot 1 \cdot u'}) < \lambda((00)^2 \cdot 110) = 14. \quad (1)$$

où  $w_{(00)^k \cdot 1 \cdot u'}$  est la sortie de  $(00)^k \cdot 1 \cdot u'$ .

Deux cas se présentent :

**Si**  $w_{(00)^k \cdot 1 \cdot u'} = (00)^k \cdot u''$ , c'est à dire  $(00)^k$  est irréductible dans  $(00)^k \cdot 1 \cdot u'$ , alors  $w_{(00)^k \cdot 1 \cdot u'}$  est irréductible dans  $(00)^2 \cdot 110 \cdot w_{(00)^k \cdot 1 \cdot u'}$ ; donc :

$$\lambda((00)^2 \cdot 110 \cdot w_{(00)^k \cdot 1 \cdot u'}) = \lambda((00)^2 \cdot 111111) = 4.$$

**Si non** par monotonie de la réécriture par rapport à l'ordre préfixe il suffit de prouver l'inégalité 1 pour les sorties maximales, pour cet ordre, données dans le tableau des sorties. Ces sorties maximales sont  $1110(11)^3 \cdot 011111$  et  $(11)^3 \cdot 011111$ .

Si  $w_{(00)^k \cdot 1 \cdot u'} = 1110(11)^3 \cdot 011|||$ , alors  $\lambda((00)^2 \cdot 110 \cdot 1110(11)^3 \cdot 011) = 6$ ; car  $(00)^2 \cdot 110 \cdot 11[10](11)^3 \cdot 011 = (00)^2 \cdot 110 \cdot 11|||$  et :

$$\begin{aligned} (00)^2 \cdot 110 \cdot 11 &\longrightarrow 00111(00)^2 \cdot 11 \longrightarrow 1110001(00)^2 \cdot 11 \\ &\xrightarrow{2} [1110]001111[0001000] \xrightarrow{2} \downarrow ((00)^2 \cdot 110 \cdot 11) \end{aligned}$$

Si et  $w_{(00)^k \cdot 1 \cdot u'} = (11)^3 \cdot 011$ , alors :

$$\begin{aligned} (00)^2 \cdot 110(11)^3 \cdot 011 &\xrightarrow{2} 1110001(00)^2 \cdot (11)^3 \cdot 011 \\ &\longrightarrow 1110001(00)11[10]00 \cdot (11)^2 \cdot 011 \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \lambda((00)^2 \cdot 110(11)^3 \cdot 011) &= 3 + \lambda(1110001(00)11) + \lambda(00 \cdot (11)^2 \cdot 011) \\ &= 3 + 3 + 4 = 10 \end{aligned}$$

□

**Lemme 8.7**  $\forall m > 0 \quad \lambda \left( \underbrace{001 \dots 001}_m \cdot 111011 \right) = 6m - 2.$

**Preuve** Montrons d'abord que :

$$\lambda \left( (00)^3 \cdot 1(00)^2 \cdot 11 \underbrace{011}_1 \dots \underbrace{011}_n \right) = 6(n+1).$$

En effet :

$$\begin{aligned} (00)^3 \cdot 1(00)^2 \cdot 11 \underbrace{011}_1 \dots \underbrace{011}_n &\xrightarrow{2} (00)^3 \cdot 11110001000 \cdot \underbrace{011}_1 \dots \underbrace{011}_n \\ &\longrightarrow (00)^2 \cdot 11[10]00110001000 \cdot \underbrace{011}_1 \dots \underbrace{011}_n \\ &\longrightarrow (00)^2 \cdot 11[10]1110000001000 \cdot \underbrace{011}_1 \dots \underbrace{011}_n \\ &\xrightarrow{2} 1110111000[10]1110000001000 \cdot \underbrace{011}_1 \dots \underbrace{011}_n \\ &= |||(00)^3 \cdot 1(00)^2 \cdot 11 \underbrace{011}_1 \dots \underbrace{011}_{n-1} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \lambda \left( \underbrace{001 \dots 001}_m \cdot 111011 \right) &= \lambda \left( 001(00)^2 \cdot 11 \underbrace{011}_1 \dots \underbrace{011}_{m-1} \right) \\ &\stackrel{*}{=} 4 + \lambda \left( (00)^3 \cdot 1(00)^2 \cdot 11 \underbrace{011}_1 \dots \underbrace{011}_{m-2} \right) \\ &= 4 + 6(n-1) \end{aligned}$$



L'égalité surindexée de  $\star$  découle de :

$$\begin{aligned}
001(00)^2 \cdot 11 \underbrace{011}_1 \cdots \underbrace{011}_{m-1} &\xrightarrow{2} 00(11)^2 0001000 \underbrace{011}_1 \cdots \underbrace{011}_{m-1} \\
&\xrightarrow{2} 11101110000001000 \underbrace{011}_1 \cdots \underbrace{011}_{m-1} \\
&= (00)^3 \cdot 1(00)^2 \cdot 11 \underbrace{011}_1 \cdots \underbrace{011}_{m-2}
\end{aligned}$$

□

**Lemme 8.8** Si  $m > 0$  et  $t = \underbrace{001}_m \cdots \underbrace{001}_1 (00)^2 \cdot 11 \underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_u$ , alors  $t$  vérifie I.

**Preuve** Soit  $w_{(00)^2 \cdot 110(00)^k \cdot 1 \cdot u'}$  la sortie de  $(00)^2 \cdot 11 \underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_u$ , alors les trois conditions suivantes sont satisfaites :

– Par définition des sorties :

$$\lambda(t) = \lambda \left( \underbrace{001}_m \cdots \underbrace{001}_1 w_{(00)^2 \cdot 110(00)^k \cdot 1 \cdot u'} \right) + \lambda \left( (00)^2 \cdot 11 \underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_u \right),$$

– D'après le lemme 8.9,  $w_{(00)^2 \cdot 110(00)^k \cdot 1 \cdot u'} \in \{111, 111011\}$ .

– Le mot  $(00)^2 \cdot 11 \underbrace{0(00)^k \cdot 1 \cdot u'}_u$  vérifie l'hypothèse inductive.

Grâce à ces trois conditions, il suffit de prouver que :

$$\lambda \left( \underbrace{001}_m \cdots \underbrace{001}_1 \cdot 111011 \right) < 2 \cdot \text{long} \left( \underbrace{001}_m \cdots \underbrace{001}_1 \right) = 6m. \quad (2)$$

Or, d'après le lemme 8.7,  $\lambda \left( \underbrace{001}_m \cdots \underbrace{001}_1 \cdot 111011 \right) = 6m - 2$ , donc l'équation 2 est satisfaite. □

**Lemme 8.9**  $w_{(00)^2 \cdot 110(00)^k \cdot 1 \cdot u'} \in \{111, 111011\}$ .

**Preuve** Nous considérons trois cas :

1. Si  $k_1 = 1$  et  $k_2 = 0$ , alors la sortie est 111, puisque :

$$\downarrow ((00)^2 \cdot (11) \parallel \parallel) = 111 \cdot 000 \cdot 1000 \parallel \parallel$$

2. Si  $k_1 = 1$  et  $k_2 > 0$ , alors la sortie est 111011, puisque :

$$\begin{aligned}
(00)^2 \cdot 11 \cdot 0 \cdot 11 \cdot u &\xrightarrow{2} 111 \cdot 000 \cdot 1 \cdot 00(0011) \cdot u \\
&\rightarrow 111 \cdot 000 \cdot 1 \cdot (0011)1 \cdot 000 \cdot u \\
&\rightarrow 111 \cdot 0(0011)110001 \cdot 000 \cdot u \\
&\rightarrow 111 \cdot 011[10]00110001 \cdot 000 \cdot u
\end{aligned}$$

3. Si  $k_1 > 1$ , alors :

$$\begin{aligned}
t &= (00)^2 \cdot (11)^{k_1} \dots (11)^{k_j} \cdot w \\
&= (00) \cdot (0011) \cdot (11)^{k_1-1} \dots (11)^{k_j} \cdot w \\
&\rightarrow (00) \cdot 111000 \cdot (11)^{k_1-1} \dots (11)^{k_j} \cdot w \\
&= (0011)1000 \cdot (11)^{k_1-1} \dots (11)^{k_j} \cdot w \\
&= 111000[10]00 \cdot (11)^{k_1-1} \dots (11)^{k_j} \cdot w \\
&\xrightarrow{*} 111000||| \\
&= 111|||
\end{aligned}$$

□

## 9 Conclusion

La détermination de la complexité de la normalisation des redex internes et des sorties de ces redex internes est un outil adéquat pour l'étude des complexité des systèmes de réécritures orthogonaux. Dans [8, 9, 10] nous avons obtenus aussi des résultats dans ce domaine.

## Remerciements

Je remercie Ursula Martin et Jean Pierre Lescanne pour leur organisation du *First Workshop on Termination* tenu à l'Université de St. Andrews en Ecosse. Je remercie également Hans Zantema, Maria Ferreira, Nachum Dershowitz, Alfons Geser et Adam Cichon pour les échanges qui ont permis ce travail.

## Références

1. F. Bellegarde and P. Lescanne. *Transformation Ordering*. In: 2nd TAPSOFT, pages 69–80. Lect. Notes in Comp. Science **249**, Springer, Berlin, (1987).
2. N. Dershowitz and C. Hoot. *Topics in termination*. In: Proc. 3rd Int. Conf. Rewriting Techniques and Applications, pages 109–120. Lect. Notes in Comp. Science **690**, Springer, Berlin, (1993).
3. N. Dershowitz and J.P. Jouannaud. *Rewrite Systems*. In: Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B, pages 243–320, Elsevier, Amsterdam, (1990).
4. A. Geser *A Solution to Zantema's Problem*. Technical Report, MIP-9314, Univ. Passau (December 1993).
5. G. Huet and J.-J. Lévy. *Computations In Orthogonal Rewrites Systems I*. In: J. Lassez and G. Plotkin, editors, Computational Logic: Essays in Honour of Alan Robinson, chapter 11, pages 395–414. MIT Press, Cambridge, Massachussets. (1992).
6. M.J. O'Donnell. *Computing in Systems Described by Equations*. Lect. Notes in Comp. Science, **58**, Springer, Berlin, (1977).
7. J. W. Klop *Term Rewriting Systems*. In: S. Abramsky, D. Gabbay, and T. Maibaum, editors, Handbook of Logic in Computer Science, volume 2, chapter 1, pages 2–117. Clarendon Press, Oxford, (1992).
8. E. Tahhan *Calcul, dérivations, réécritures et normalisation*. Mémoire de D.E.A. Université Claude-Bernard. Lyon-1.(1990)
9. E. Tahhan. *Bornes Supérieures de Terminaison de Systèmes de Réécritures Strictement Orthogonaux*. Prépublication 17, LLAIC1 Université d'Auvergne. (1993).
10. E. Tahhan. Thèse en préparation.



---

Unité de Recherche INRIA Lorraine  
Technopôle de Nancy-Brabois - Campus Scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 VILLERS LES NANCY Cedex (France)

Unité de Recherche INRIA Rennes IRISA, Campus Universitaire de Beaulieu 35042 RENNES Cedex (France)  
Unité de Recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 GRENOBLE Cedex (France)  
Unité de Recherche INRIA Rocquencourt Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
Unité de Recherche INRIA Sophia Antipolis 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex (France)

---

EDITEUR  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399



★ R R . 2 2 8 2 ★