HAL
open science

Une Formulation mixte de plaques ou l'effort tranchant est approché dans son espace naturel

Dominique Chapelle

To cite this version:

Dominique Chapelle. Une Formulation mixte de plaques ou l'effort tranchant est approché dans son espace naturel. [Rapport de recherche] RR-2248, INRIA. 1993. inria-00074423

HAL Id: inria-00074423

https://inria.hal.science/inria-00074423v1

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Une formulation mixte de plaques où l'effort tranchant est approché dans son espace naturel

Dominique CHAPELLE

N° 2248
Novembre 1993

PROGRAMME 6

Rapport de recherche

Une formulation mixte de plaques où l'effort tranchant est approché dans son espace naturel

Dominique Chapelle*

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
UMR 113 LCPC/CNRS - 2, allée Kepler
77420 Champs/Marne (France)

Novembre 1993

Résumé

On définit une formulation mixte, équivalente au modèle de Kirchhoff-Love, dans laquelle les variables duales appartiennent à un espace fonctionnel non standard. On commence par passer en revue les propriétés de cet espace pour montrer que le problème est bien posé, puis on présente une méthode d'éléments finis de bas degré pour laquelle on établit l'estimation d'erreur. Ces résultats sont ensuite étendus au modèle de Mindlin-Reissner et la même discrétisation donne lieu à une estimation d'erreur indépendante de l'épaisseur.

Abstract

Considering the Kirchhoff-Love plate model, we define an equivalent mixed formulation whose dual variables are taken in a non-standard functional space. We first check that this space meets all the appropriate conditions to ensure that the mixed problem is well-posed. This enables us to introduce a low-order finite element method for which we establish an error estimate. We then proceed to transpose our method to tackle the Mindlin-Reissner model and we derive thickness-independent error bounds.

1 Introduction

Une des formulations du modèle de plaque de Kirchhoff-Love (noté K-L dans la suite) s'exprime de la façon suivante : on cherche $u \in H_0^2(\omega)$ tel que

$$a(\nabla u, \nabla v) = < f, v > \qquad \forall v \in H_0^2(\omega) \tag{1}$$

où u représente le déplacement transverse et f l'effort appliqué (mis à l'échelle). La forme bilinéaire a est définie par

$$a(\theta, \eta) = \int_\omega [(1-\nu)\,\epsilon(\theta) : \epsilon(\eta) + \nu \,\mathrm{div}\theta\, \mathrm{div}\eta]$$

où ν est le coefficient de Poisson du matériau, et ϵ représente l'opérateur des déformations linéarisées usuel. Dans cette étude on considèrera le cas où la plaque est encastrée sur toute la frontière $\partial\omega$, ce qui justifie les conditions aux limites implicitement imposées par le choix $u \in H_0^2(\omega)$.

*Ce travail a été réalisé au cours d'une thèse dirigée par M. Bernadou (INRIA-Rocquencourt)

Il est bien connu que (1) est un problème bien posé. Cette formulation comporte néanmoins un inconvénient sérieux : pour en réaliser une approximation conforme, on doit employer des éléments finis C^1 qui s'avèrent en général peu commodes en pratique. Une méthode classique pour pallier cet inconvénient consiste à employer une variable intermédiaire $\boldsymbol{\theta}$ qui satisfait

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\nabla} u \tag{2}$$

On traite alors (2) comme une contrainte que l'on impose par le biais d'un multiplicateur de Lagrange. On se ramène ainsi à une formulation de type mixte qui s'écrit formellement

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) + < \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\nabla} u > = < f, v > & \forall (\boldsymbol{\eta}, v) \\ < \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\nabla} u > = 0 & \forall \boldsymbol{\delta} \end{cases} \tag{3}$$

On cherchera alors $(\boldsymbol{\theta}, u)$ dans $[H_0^1(\omega)]^2 \times H_0^1(\omega)$ *a priori*, ce qui permet d'utiliser des fonctions d'approximation C^0 seulement. En revanche, dès que la contrainte (2) est imposée, on aura bien *a posteriori* $u \in H_0^2(\omega)$. Tout le problème consiste alors à définir un espace fonctionnel Γ approprié pour les multiplicateurs de Lagrange, de façon à donner un sens aux crochets de dualité formels de (3) et à imposer effectivement la contrainte (2) à travers la deuxième équation du système (3).

Pour définir l'espace Γ, la plupart des méthodes proposées à ce jour—au moins pour celles étayées par des considérations théoriques—tirent parti d'un outil de décomposition attribué à Helmholtz en écrivant le multiplicateur $\boldsymbol{\gamma}$ sous la forme

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\nabla} \phi + (\boldsymbol{\nabla} \psi)^{\perp} \qquad \phi \in H_0^1(\omega),\ \psi \in L^2(\omega)$$

où par définition $(\eta_1, \eta_2)^{\perp} = (-\eta_2, \eta_1)$. C'est alors ϕ et ψ qui sont approximés au lieu de $\boldsymbol{\gamma}$. L'inconvénient majeur de ces méthodes apparait lorsqu'elles sont appliquées aux formulations de type Mindlin-Reissner (M-R) où la contrainte (2) est traitée par pénalisation et non imposée exactement comme pour K-L. En effet, ces formulations permettent—au stade de l'approximation—l'élimination des variables duales au niveau de chaque élément de façon à se ramener à une matrice de rigidité classique, ce à condition que les variables duales soient approximées par des fonctions indépendantes d'un élément à un autre (et donc discontinues). Or si on veut approximer ϕ dans $H_0^1(\omega)$, on doit employer des fonctions continues. Il faut alors, au lieu des classiques méthodes d'inversion de matrice-bande, employer des algorithmes spéciaux qui sont bien plus gourmands en temps de calcul.

Dans cette étude au contraire, le parti pris est de travailler directement avec l'espace naturel des multiplicateurs de Lagrange, déterminé "par inspection" à partir de (3). Dans un premier temps (section 2), on vérifie que cet espace et la méthode mixte associée possèdent les propriétés requises pour l'application des théorèmes généraux. La section 3 rappelle brièvement quelques résultats de régularité. En section 4, on décrit ensuite une approximation de bas degré en établissant les estimations d'erreur. La section 5 étend les résultats obtenus à la formulation M-R. Enfin la section 6 rassemble quelques remarques de conclusion.

2 Formulation mixte naturelle

On considère la formulation mixte suivante

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) + b[(\boldsymbol{\eta}, v), \boldsymbol{\gamma}] = < f, v > & \forall (\boldsymbol{\eta}, v) \in V \\ b[(\boldsymbol{\theta}, u), \boldsymbol{\delta}] = 0 & \forall \boldsymbol{\delta} \in \Gamma \end{cases} \tag{4}$$

où $V = [H_0^1(\omega)]^3$ et $\Gamma = \{\boldsymbol{\delta} \in [H^{-1}(\omega)]^2; \mathrm{div}\boldsymbol{\delta} \in H^{-1}(\omega)\}$. La forme bilinéaire mixte b est définie par

$$b[(\boldsymbol{\eta}, v), \boldsymbol{\delta}] = < \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\eta} >_{[H^{-1}]^2 \times [H_0^1]^2} + < \mathrm{div}\boldsymbol{\delta}, v >_{H^{-1} \times H_0^1}$$

et on suppose que le second membre a la forme particulière suivante

$$< f, v >= \int_\omega f v \qquad f \in L^2(\omega)$$

On va maintenant vérifier que (4) est un problème mixte bien posé.

Proposition 2.1 *L'espace Γ muni de sa norme naturelle*

$$||\delta||_\Gamma = ||\delta||_{-1} + ||div\delta||_{-1}$$

est un Banach.

Preuve : Il suffit de vérifier que Γ est complet. Soit donc (δ_n) une suite de Cauchy dans Γ. Comme $H^{-1}(\omega)$ est complet, on en déduit que les suites (δ_n) et $(\text{div}\delta_n)$ sont toutes deux convergentes, de limites respectives δ et β. Montrons donc que $\beta = \text{div}\delta$. $\forall w \in \mathcal{D}(\omega)$, on a

$$< \delta_n, w > \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < \delta, w >$$
$$< \text{div}\delta_n, w > \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} < \beta, w >$$

or par ailleurs $< \text{div}\delta_n, w >= - < \delta_n, \nabla w > \to - < \delta, \nabla w >=< \text{div}\delta, w >$
d'où par densité $\beta = \text{div}\delta$. $\square$

Vérifions à présent que les deux conditions fondamentales des méthodes mixtes sont satisfaites. On définit classiquement l'opérateur linéaire $B : V \to \Gamma'$ par

$$< B[(\eta, v)], \delta >_{\Gamma' \times \Gamma} = b[(\eta, v), \delta]$$

On a alors en premier lieu la

Proposition 2.2 *a est coercive sur Ker(B).*

Preuve : i) $\text{Ker}(B) = \{(\eta, v) \in V; \eta = \nabla v\}$
En effet, prenons $(\eta, v) \in \text{Ker}(B)$. Par définition, $\forall \delta \in \Gamma$, $b[(\eta, v), \delta] = 0$. En particulier $\forall \delta \in H^1(\omega)$

$$\begin{aligned} & b[(\eta, v), \delta] = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & < \delta, \eta > + < \text{div}\delta, v >= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (\delta, \eta) + (\text{div}\delta, v) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (\delta, \eta - \nabla v) = 0 \end{aligned}$$

et donc comme H^1 est dense dans L^2, $\eta - \nabla v = 0$ dans L^2.
Réciproquement, soit $(\eta, v) \in [H_0^1(\omega)]^3$ tel que $\eta = \nabla v$, on voit que $v \in H_0^2(\omega)$. Alors $\forall \delta \in \Gamma$,

$$b[(\eta, v), \delta] =< \delta, \nabla v > + < \text{div}\delta, v >= 0$$

en raisonnant par densité de $\mathcal{D}(\omega)$ dans $H_0^2(\omega)$.
ii) Ellipticité sur $\text{Ker}(B)$
On a déjà, par l'inégalité de Korn,

$$\forall \eta \in [H_0^1(\omega)]^2 \qquad a(\eta, \eta) \geq c||\eta||_1^2$$

Soit maintenant $(\boldsymbol{\eta}, v) \in \mathrm{Ker}(B)$ $(\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\nabla} v)$

$$a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \geq c\|\boldsymbol{\eta}\|_1^2 \geq c'\|\boldsymbol{\eta}\|_0^2 = c'\|\boldsymbol{\nabla} v\|_0^2$$

d'où par l'inégalité de Poincaré : $a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \geq c\|v\|_1^2$ et par conséquent

$$\forall (\boldsymbol{\eta}, v) \in \mathrm{Ker}(B) \qquad a(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}) \geq c\|(\boldsymbol{\eta}, v)\|_V^2$$

□

Remarque : Notons au passage que la formulation mixte impose effectivement la condition (2). □

La deuxième propriété annoncée est la propriété d'image fermée (ou "inf-sup continue"). Une manière de l'énoncer est la suivante :

Proposition 2.3 *B^T est d'image fermée dans V'.*

Preuve : Cette propriété est équivalente à l'existence d'un $k > 0$ tel que

$$\sup_{(\boldsymbol{\eta}, v) \in V} \frac{b[(\boldsymbol{\eta}, v), \boldsymbol{\delta}]}{\|(\boldsymbol{\eta}, v)\|_V} \geq k\|\boldsymbol{\delta}\|_\Gamma \tag{5}$$

qui elle-même découle immédiatement des définitions de b et de la norme de Γ. □

On va finalement montrer que Γ possède une structure Hilbertienne. En effet, même si on ne souhaite pas particulièrement travailler avec une norme hilbertienne sur Γ, la théorie des méthodes mixtes utilise certaines propriétés de ces espaces (en particulier la réflexivité).

Proposition 2.4 *Γ est isomorphe au dual de l'espace $[H_0^1(\omega)]^3/Ker(B)$.*

Remarque : $[H_0^1(\omega)]^3$ est un Hilbert dont $\mathrm{Ker}(B)$ constitue un sous-espace fermé. Donc $[H_0^1(\omega)]^3/\mathrm{Ker}(B)$ muni de sa norme canonique est encore un Hilbert et son dual aussi. □

Preuve : On définit l'opérateur $\dot{B}^T$.

$$\begin{aligned} &\dot{B}^T : \Gamma \longrightarrow \{[H_0^1(\omega)]^3/\mathrm{Ker}(B)\}' \\ &< \dot{B}^T(\boldsymbol{\delta}), \dot{\widehat{(\boldsymbol{\eta}, v)}} >= b[(\boldsymbol{\eta}, v), \boldsymbol{\delta}] \qquad \forall \boldsymbol{\delta} \in \Gamma,\ \forall (\boldsymbol{\eta}, v) \in \dot{V} \end{aligned}$$

où $\dot{\widehat{(\boldsymbol{\eta}, v)}}$ désigne la classe d'équivalence de l'élément $(\boldsymbol{\eta}, v)$. Il est clair que $\dot{B}^T$ définit une application linéaire (à comparer à B^T). On va prouver que $\dot{B}^T$ est un isomorphisme. On note $\dot{V} = [H_0^1(\omega)]^3/\mathrm{Ker}(B)$. Alors

$$\|\dot{B}^T(\boldsymbol{\delta})\|_{\dot{V}'} = \sup_{\dot{\widehat{(\boldsymbol{\eta}, v)}} \in \dot{V}} \frac{< \dot{B}^T(\boldsymbol{\delta}), \dot{\widehat{(\boldsymbol{\eta}, v)}} >}{\|\dot{\widehat{(\boldsymbol{\eta}, v)}}\|_{\dot{V}}} = \sup_{(\boldsymbol{\eta}, v) \in V} \frac{< \dot{B}^T(\boldsymbol{\delta}), \dot{\widehat{(\boldsymbol{\eta}, v)}} >}{\|(\boldsymbol{\eta}, v)\|_V} = \sup_{(\boldsymbol{\eta}, v) \in V} \frac{b[(\boldsymbol{\eta}, v), \boldsymbol{\delta}]}{\|(\boldsymbol{\eta}, v)\|_V}$$

D'où, par la bicontinuité de b et la condition inf-sup (5)

$$k\|\boldsymbol{\delta}\|_\Gamma \leq \|\dot{B}^T(\boldsymbol{\delta})\|_{\dot{V}'} \leq \|b\|\,\|\boldsymbol{\delta}\|_\Gamma$$

et par conséquent $\dot{B}^T$ est continu, injectif et d'image fermé. Reste donc à montrer que cette image est dense dans $\dot{V}'$. Supposons qu'elle ne le soit pas, d'après le théorème de Hahn-Banach ($\dot{V}$ étant réflexif), il existerait $\overset{\cdot}{\widehat{(\eta_0, v_0)}} \in \dot{V}$, $\overset{\cdot}{\widehat{(\eta_0, v_0)}} \neq 0$ tel que

$$0 =< \dot{B}^T(\delta), \overset{\cdot}{\widehat{(\eta_0, v_0)}} >= b[(\eta_0, v_0), \delta] \qquad \forall \delta \in \Gamma$$

Mais alors cela signifierait que $(\eta_0, v_0) \in \mathrm{Ker}(B)$ soit $\overset{\cdot}{\widehat{(\eta_0, v_0)}} = 0$. C'est absurde. □

Toutes les conditions ont désormais été vérifiées pour que (4) soit un problème bien posé. On peut donc énoncer le résultat final de cette section.

Proposition 2.5 *Le sytème (4) possède une solution unique* $[(\theta, u), \gamma] \in V \times \Gamma$. *De plus cette solution satisfait l'estimation a priori suivante*

$$\|(\theta, u)\|_V + \|\gamma\|_\Gamma \leq c\|f\|_{-1} \tag{6}$$

Par ailleurs (θ, u) *vérifie l'équation de contrainte (2) et* u *lui-même n'est autre que la solution du problème (1).*

Preuve : L'existence, l'unicité et l'estimation a priori sont classiques (voir par exemple [1]). Le fait que (θ, u) satisfait (2) a déjà été mentionné plus haut. Quant à (1), on l'obtient immédiatement en choisissant dans la première ligne de (4) des fonctions d'essai (η, v) qui satisfont elles-mêmes la contrainte (2). □

3 Résultats de régularité

Pour établir les estimations d'erreur d'une approximation du problème (4) dans la prochaine section, on aura besoin pour la solution $[(\theta, u), \gamma]$ d'une régularité plus grande que celle des espaces V et Γ. Cette régularité supérieure proviendra de l'hypothèse déjà mentionnée $f \in L^2(\omega)$, combinée à des conditions à préciser sur l'ouvert ω.

Tout d'abord, en prenant $v \in \mathcal{D}(\omega)$ dans l'équation (1) et en intégrant par parties, on voit que u est la solution du classique

$$\Delta^2 u = f$$

Par conséquent, dès que la frontière $\partial\omega$ est C^3 ou bien que ω est convexe (voir par exemple [2]), on a $u \in H^3(\omega) \bigcap H_0^2(\omega)$ et

$$\|u\|_3 \leq c\|f\|_0$$

On a ensuite $\theta = \nabla u$, d'où immédiatement $\theta \in [H^2(\omega) \bigcap H_0^1(\omega)]^2$ et

$$\|\theta\|_2 \leq c\|f\|_0$$

En faisant $v = 0$ dans la premiře ligne de (4) et en intégrant par partie, on exprime $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ en fonction de $\theta = (\theta_1, \theta_2)$

$$\begin{cases} \gamma_1 = \partial_{11}\theta_1 + \nu\partial_{12}\theta_2 + \frac{1-\nu}{2}(\partial_{22}\theta_1 + \partial_{12}\theta_2) \\ \gamma_2 = \partial_{22}\theta_2 + \nu\partial_{12}\theta_1 + \frac{1-\nu}{2}(\partial_{12}\theta_1 + \partial_{11}\theta_2) \end{cases} \tag{7}$$

donc $\gamma \in [L^2(\omega)]^2$ et

$$\|\gamma\|_0 \leq c\|f\|_0$$

Enfin, en prenant $\eta = 0$ dans (4) on obtient :

$$\mathrm{div}\gamma = f \tag{8}$$

et ainsi on voit que $\mathrm{div}\gamma$ est lui aussi dans $L^2(\omega)$ avec la majoration triviale

$$\|\mathrm{div}\gamma\|_0 \leq \|f\|_0$$

On résume ces résultats dans la

Proposition 3.1 *On suppose que ω est convexe ou que $\partial\omega$ est $\mathcal{C}^3$, et toujours que $f \in L^2(\omega)$. Alors la solution $[(\theta, u), \gamma]$ de (4) vérifie:*

$$\|u\|_3 + \|\theta\|_2 + \|\gamma\|_0 + \|div\gamma\|_0 \leq c\|f\|_0$$

□

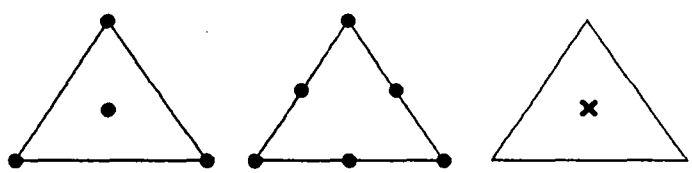
4 Une approximation de bas degré

Dans toute la suite on supposera ω polygonal convexe. On considère une famille de triangulations régulières et on définit le problème approché

$$\begin{cases} a(\theta_h, \eta_h) + b[(\eta_h, v_h), \gamma_h] = \int_\omega f v_h & \forall(\eta_h, v_h) \in V_h = \Theta_h \times W_h \\ b[(\theta_h, u_h), \delta_h] = 0 & \forall \delta_h \in \Gamma_h \end{cases} \tag{9}$$

et on s'intéresse aux espaces d'approximation suivants (avec les notations usuelles)

$$\Theta_h = (\mathcal{L}_1^1 + B_3)^2 \cap [H_0^1(\omega)]^2 \qquad W_h = \mathcal{L}_2^1 \cap H_0^1(\omega) \qquad \Gamma_h = \mathcal{L}_0^0$$



Θ_h $\qquad$ W_h $\qquad$ Γ_h

Remarque : Si $\delta \in L^2(\omega)$—comme c'est le cas en particulier pour les éléments de Γ_h—on note que

$$b[(\eta, v), \delta] = <\delta, \eta> + <\mathrm{div}\delta, v> = \int_\omega \delta \cdot (\eta - \nabla v) \qquad \forall(\eta, v) \in V$$

□

Pour démontrer que (9) approxime (4) correctement, il faut s'assurer que les conditions discrètes d'inf-sup et d'ellipticité sont satisfaites pour le choix des espaces discrétisés effectué ici.

4.1 Condition inf-sup discrète

Proposition 4.1 *La forme bilinéaire b satisfait la condition inf-sup discrète pour les espaces V_h et Γ_h définis ci-dessus, c'est à dire qu'il existe un réel k indépendant de h tel que*

$$\inf_{\delta_h \in \Gamma_h} \sup_{(\eta_h, v_h) \in V_h} \frac{b[(\eta_h, v_h), \delta_h]}{\|(\eta_h, v_h)\|_V \|\delta_h\|_\Gamma} \geq k > 0 \tag{10}$$

Preuve : Pour démontrer cette propriété, on va utiliser le lemme de Fortin [1, Proposition II-2.8] et pour cela construire un opérateur Π_h appliquant V dans V_h tel que

$$b[\Pi_h(\eta, v), \delta_h] = b[(\eta, v), \delta_h] \qquad \forall(\eta, v) \in V,\ \forall\delta_h \in \Gamma_h \tag{11}$$

$$||\Pi_h(\eta, v)||_V \leq c||(\eta, v)||_V \qquad \forall(\eta, v) \in V \tag{12}$$

où c est indépendante de h. En fait, Π_h sera construit indépendamment pour η et v et donc on fera librement usage de la notation (abusive) $\Pi_h(\eta, v) = (\Pi_h\eta, \Pi_h v)$

i) Construction pour η

On commence par définir Π_1 comme l'opérateur de Clément qui applique $H_0^1(\omega)$ dans $\mathcal{L}_1^1 \cap H_0^1(\omega)$. Sur chaque triangle T du maillage, cet opérateur satisfait [3]

$$||\eta - \Pi_1\eta||_{0,T} + h_T|\eta - \Pi_1\eta|_{1,T} \leq \sum_{\partial T' \cap \partial T \neq \emptyset} h_{T'}|\eta|_{1,T'} \tag{13}$$

Puis on construit un deuxième opérateur Π_2 de $H_0^1(\omega)$ dans B_3 (juxtaposition de fonctions-bulles nulles sur tous les côtés des triangles du maillage) en ajustant chaque bulle de sorte que

$$\int_T (\eta - \Pi_2\eta) = 0 \qquad \forall T \tag{14}$$

On a alors, par un raisonnement classique de passage au triangle de référence,

$$||\eta - \Pi_2\eta||_{1,T} \leq c[h_T^{-1}||\eta||_{0,T} + |\eta|_{1,T}] \tag{15}$$

On peut finalement poser

$$\Pi_h\eta = \Pi_1\eta + \Pi_2(\eta - \Pi_1\eta) \tag{16}$$

En combinant (13) et (15), on voit facilement que

$$||\eta - \Pi_h\eta||_1 \leq c|\eta|_1$$

Par ailleurs, (14) entraine

$$\int_\omega \delta_h \cdot (\eta - \Pi_h\eta) = \sum_T \delta_h \int_T (\eta - \Pi_h\eta) = 0$$

et donc les conditions (11) et (12) sont bien vérifiées en ce qui concerne η.

ii) Construction pour v

On emploie à nouveau l'opérateur de Clément pour définir Π_3

$$||v - \Pi_3 v||_{0,T} + h_T|v - \Pi_3 v|_{1,T} \leq \sum_{\partial T' \cap \partial T \neq \emptyset} h_{T'}|v|_{1,T'} \tag{17}$$

Puis on construit $\Pi_4 : H_0^1(\omega) \to \mathcal{L}_2^1 \cap H_0^1(\omega)$ en imposant $\Pi_4 v = 0$ à tous les sommets des triangles et en ajustant les valeurs nodales intermédiaires de sorte que, sur chaque côté c de la triangulation, on ait

$$\int_c (v - \Pi_4 v)ds = 0 \tag{18}$$

Le passage au triangle de référence fournit une majoration comparable à (15)

$$||v - \Pi_4 v||_{1,T} \leq c[h_T^{-1}||v||_{0,T} + |v|_{1,T}] \tag{19}$$

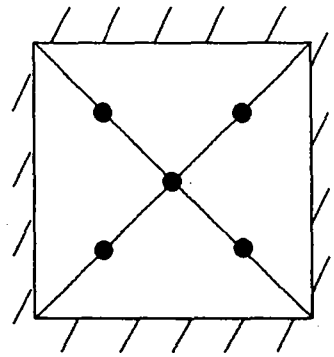


Figure 1 : Exemple d'un maillage à 4 triangles

On définit alors

$$\Pi_h v = \Pi_3 v + \Pi_4(v - \Pi_3 v) \tag{20}$$

et en remarquant que (18) implique pour tout T

$$\int_T \nabla(v - \Pi_4 v) = \int_{\partial T} (v - \Pi_4 v) n ds = 0$$

(à comparer à (14)), on conclut comme au i). □

4.2 Condition d'ellipticité discrète

Définissant l'opérateur $B_h : V_h \to \Gamma'_h$ par

$$< B_h[(\eta_h, v_h)], \delta_h >_{\Gamma'_h \times \Gamma_h} = b[(\eta_h, v_h), \delta_h]$$

on souhaiterait montrer que a est uniformément coercive sur $\mathrm{Ker}(B_h)$. Commençons donc par caractériser $\mathrm{Ker}(B_h)$.

$$(\eta_h, v_h) \in \mathrm{Ker}(B_h) \Leftrightarrow \forall \delta_h \in \Gamma_h,\ b[(\eta_h, v_h), \delta_h] = 0 \Leftrightarrow \forall T \int_T (\eta_h - \nabla v_h) = 0$$

On voit alors assez facilement que la condition d'ellipticité discrète ne peut en général être vérifiée! Considérons par exemple le maillage à 4 triangles de la figure 1. On choisit (η_h, v_h) en imposant $\eta_h = 0$ partout. On peut alors facilement exhiber un champ admissible v_h non identiquement nul tel que $\forall T\ \int_T \nabla v_h = \int_{\partial T} v_h n ds = 0$. Il suffit en effet de choisir $v_h = 1$ au centre du maillage et d'ajuster les valeurs intermédiaires de façon que, sur chaque segment c joignant le centre à un des côtés du carré, on ait $\int_c v_h ds = 0$ (voir figure 2). Mais alors on a $a(\eta_h, \eta_h) = 0$ avec $(\eta_h, v_h) \in \mathrm{Ker}(B_h)$ et pourtant $(\eta_h, v_h) \neq 0$.

Heureusement, il est assez facile de contourner cette difficulté. Il suffit pour cela de considérer le nouveau problème mixte

$$\begin{cases} a'[(\theta, u), (\eta, v)] + b[(\eta, v), \gamma] = (f, v) & \forall (\eta, v) \in V \\ b[(\theta, u), \delta] = 0 & \forall \delta \in \Gamma \end{cases} \tag{21}$$

avec

$$a'[(\theta, u), (\eta, v)] = a(\theta, \eta) + \beta \int_\omega (\theta - \nabla u) \cdot (\eta - \nabla v)$$

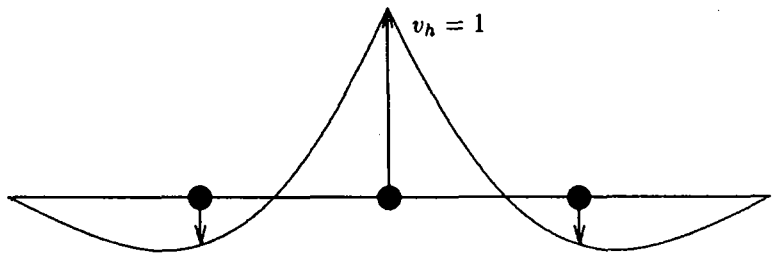


Figure 2 : Valeur de v_h le long d'une diagonale

où β est une constante strictement positive. Dans cette formulation, a' est maintenant une forme coercive *sur tout l'espace* V, donc le problème d'ellipticité discrète ne se pose plus. Par ailleurs (21) est parfaitement équivalent à (4) car la deuxième ligne de chacun des deux systèmes impose $\theta - \nabla u = 0$. Enfin la forme bilinéaire b reste inchangée donc la condition inf-sup discrète reste vérifiée.

On considère alors l'approximation de (21), et non directement de (4)

$$\begin{cases} a'[(\theta_h, u_h), (\eta_h, v_h)] + b[(\eta_h, v_h), \gamma_h] = (f, v_h) & \forall (\eta_h, v_h) \in V_h \\ b[(\theta_h, u), \delta_h] = 0 & \forall \delta_h \in \Gamma_h \end{cases} \tag{22}$$

On est maintenant assuré que (22) vérifie les hypothèses de convergence des méthodes mixtes. [1, Theorem II-2.1] permet alors d'énoncer la

Proposition 4.2 *Le problème (22) admet une solution unique* $[(\theta_h, u_h), \gamma_h]$. *Cette solution constitue une approximation quasi-optimale de* $[(\theta, u), \gamma]$, *solution de (4), au sens où*

$$\|\theta - \theta_h\|_1 + \|u - u_h\|_1 + \|\gamma - \gamma_h\|_\Gamma \leq c\,[\inf_{\eta_h \in \Theta_h} \|\theta - \eta_h\|_1 + \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_1 + \inf_{\delta_h \in \Gamma_h} \|\gamma - \delta_h\|_\Gamma] \tag{23}$$

□

4.3 Estimations d'erreur

En ce qui concerne θ et u, les erreurs d'interpolations sont classiques. Comme $(\mathcal{L}_1^1)^2 \cap [H_0^1(\omega)]^2 \subset \Theta_h$ et $\mathcal{L}_2^1 \cap H_0^1(\omega) \subset W_h$, on a immédiatement

$$\inf_{\eta_h \in \Theta_h} \|\theta - \eta_h\|_1 \leq ch\|\theta\|_2 \leq ch\|f\|_0 \tag{24}$$

$$\inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_1 \leq ch^2\|u\|_3 \leq ch^2\|f\|_0 \tag{25}$$

Pour γ, les choses sont un peu moins directes. La difficulté consiste à approximer *à la fois* γ et divγ dans $H^{-1}(\omega)$. L'erreur d'interpolation est fournie par la proposition suivante.

Proposition 4.3 *Soit* γ *un élément de* $\Gamma \cap H(div;\omega)$, *alors*

$$\inf_{\delta_h \in \Gamma_h} \|\gamma - \delta_h\|_\Gamma \leq ch\|\gamma\|_{H(div)} \tag{26}$$

Preuve : On est contraint à ce stade d'utiliser le théorème de décomposition de Helmholtz (démontré par exemple dans [4])

$$\gamma \in \Gamma \Longrightarrow \exists \phi \in H_0^1(\omega),\ \exists \psi \in L^2(\omega) \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \nabla\phi + (\nabla\psi)^\perp \\ \|\phi\|_1 + \|\psi\|_0 \leq c\|\gamma\|_\Gamma \end{array} \right.$$

En fait ici $\mathrm{div}\gamma \in L^2(\omega) \Rightarrow \Delta\phi = \mathrm{div}\gamma \in L^2(\omega)$ donc ϕ est solution du problème de Dirichlet avec second membre dans L^2. Comme par hypothèse ω est polygonal convexe, $\phi \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega)$ et

$$\|\phi\|_2 \leq c\|\mathrm{div}\gamma\|_0$$

Puis $\gamma \in [L^2(\omega)]^2 \Rightarrow \nabla\psi = (\nabla\phi - \gamma)^\perp \in [L^2(\omega)]^2$, donc $\psi \in H^1(\omega)$ et ainsi

$$\|\psi\|_1 \leq c\|\gamma\|_{H(div)}$$

Par conséquent, on peut appliquer les résultats classiques d'interpolation à ϕ et ψ.

$$\exists \phi_h \in \mathcal{L}_1^1 \cap H_0^1(\omega), \qquad \|\phi - \phi_h\|_1 \leq ch\|\phi\|_2 \leq ch\|\gamma\|_{H(div)}$$

$$\exists \psi_h \in \mathcal{L}_1^1, \qquad \|\psi - \psi_h\|_0 \leq ch\|\psi\|_1 \leq ch\|\gamma\|_{H(div)}$$

(on obtient ψ_h par l'opérateur de Clément). On peut alors poser

$$\gamma_h = \nabla\phi_h + (\nabla\psi_h)^\perp$$

et on a bien $\gamma_h \in \Gamma_h = (\mathcal{L}_0^0)^2$. Reste à estimer

$$\|\gamma - \gamma_h\|_\Gamma = \sup_{\eta \in H_0^1(\omega)} \frac{\int_\omega (\gamma - \gamma_h)\cdot\eta}{\|\eta\|_1} + \sup_{v \in H_0^1(\omega)} \frac{< \mathrm{div}(\gamma - \gamma_h), v >}{\|v\|_1}$$

Etudions chaque terme individuellement :

$$\begin{aligned} \sup_{\eta \in H_0^1(\omega)} \frac{\int_\omega (\gamma - \gamma_h)\cdot\eta}{\|\eta\|_1} &\leq \sup_{\eta \in H_0^1(\omega)} \frac{\int_\omega \nabla(\phi - \phi_h)\cdot\eta}{\|\eta\|_1} + \sup_{\eta \in H_0^1(\omega)} \frac{\int_\omega [\nabla(\psi - \psi_h)]^\perp\cdot\eta}{\|\eta\|_1} \\ &\leq \sup_{\eta \in H_0^1(\omega)} \frac{\|\nabla(\phi - \phi_h)\|_0\|\eta\|_0}{\|\eta\|_1} + \sup_{\eta \in H_0^1(\omega)} \frac{\int_\omega (\psi - \psi_h)\mathrm{div}\eta}{\|\eta\|_1} \\ &\leq c|\phi - \phi_h|_1 + c'\|\psi - \psi_h\|_0 \\ &\leq ch\|\gamma\|_{H(div)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sup_{v \in H_0^1(\omega)} \frac{< \mathrm{div}(\gamma - \gamma_h), v >}{\|v\|_1} &= \sup_{v \in H_0^1(\omega)} \frac{< \mathrm{div}\nabla(\phi - \phi_h), v >}{\|v\|_1} \\ &= \sup_{v \in H_0^1(\omega)} \frac{\int_\omega \nabla(\phi - \phi_h)\cdot\nabla v}{\|v\|_1} \\ &\leq c|\phi - \phi_h|_1 \\ &\leq ch\|\gamma\|_{H(div)} \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

La proposition suivante fait la synthèse des résultats d'interpolation obtenus.

Proposition 4.4 *La solution $[(\theta_h, u_h), \gamma_h]$ du problème (22) satisfait l'estimation d'erreur :*

$$\|\theta - \theta_h\|_1 + \|u - u_h\|_1 + \|\gamma - \gamma_h\|_\Gamma \leq ch\|f\|_0 \tag{27}$$

□

5 Extension au modèle de Mindlin-Reissner

Dans ce type de formulation, le problème en déplacements s'écrit sous la forme

$$a(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\eta}) + \frac{1}{e^2}(\boldsymbol{\theta}_e - \boldsymbol{\nabla} u_e, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\nabla} v) = (f, v) \qquad \forall (\boldsymbol{\eta}, v) \in V \tag{28}$$

où a est la même forme bilinéaire que précédemment, alors que e est maintenant une constante proportionnelle à l'épaisseur de la plaque. On peut faire le lien entre les deux formulations en observant que (28) constitue une version modifiée de (1) dans laquelle la contrainte (2) est appliquée par pénalisation. Pour une épaisseur donnée, on voit que (28) est un problème bien posé puisque reposant sur une forme bilinéaire symétrique définie positive. Par contre, lorsqu'on fait tendre l'épaisseur vers 0, on observe une déterioration des méthodes d'éléments finis classiques appliquées ce problème : c'est le verrouillage numérique. Pour pallier cette difficulté, on va définir une formulation de type mixte équivalente à (28).

Commençons par transformer (28) pour obtenir, comme plus haut, une forme bilinéaire coercive sur tout l'espace V. Supposons que l'on s'intéresse aux épaisseurs correspondant à $e \in]0,1]$. On choisit alors une fois pour toutes une constante $\beta \in]0,1[$ et on pose à nouveau

$$a'[(\boldsymbol{\theta}, u), (\boldsymbol{\eta}, v)] = a(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}) + \beta(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\nabla} v)$$

a' ainsi définie est clairement coercive sur tout V et (28) est équivalent à

$$a'[(\boldsymbol{\theta}_e, u_e), (\boldsymbol{\eta}, v)] + \frac{1}{\tilde{e}^2}(\boldsymbol{\theta}_e - \boldsymbol{\nabla} u_e, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\nabla} v) = (f, v) \qquad \forall (\boldsymbol{\eta}, v) \in V \tag{29}$$

où l'on a posé $\tilde{e} = \sqrt{\frac{e^2}{1-\beta e^2}}$, ce qui implique $\tilde{e} > 0$ et $\tilde{e} = O(e)$.

En posant

$$\boldsymbol{\gamma}'_e = \frac{1}{\tilde{e}^2}(\boldsymbol{\theta}_e - \boldsymbol{\nabla} u_e) \tag{30}$$

on obtient une formulation mixte strictement équivalente au problème primal (28) sous la forme suivante

$$\begin{cases} a'[(\boldsymbol{\theta}_e, u_e), (\boldsymbol{\eta}, v)] + b[(\boldsymbol{\eta}, v), \boldsymbol{\gamma}'_e] = (f, v) & \forall (\boldsymbol{\eta}, v) \in V \\ b[(\boldsymbol{\theta}_e, u_e), \boldsymbol{\delta}] - \tilde{e}^2(\boldsymbol{\gamma}'_e, \boldsymbol{\delta}) = 0 & \forall \boldsymbol{\delta} \in [L^2(\omega)]^2 \end{cases} \tag{31}$$

où la forme b est la même que celle utilisée dans la section précédente, même si elle n'est appliquée ici qu'à des variables $(\boldsymbol{\gamma}'_e, \boldsymbol{\delta})$ prises dans $[L^2(\omega)]^2$ et non Γ tout entier.

On considère alors une approximation conforme de ce problème

$$\begin{cases} a'[(\boldsymbol{\theta}_{eh}, u_{eh}), (\boldsymbol{\eta}_h, v_h)] + b[(\boldsymbol{\eta}_h, v_h), \boldsymbol{\gamma}'_{eh}] = (f, v_h) & \forall (\boldsymbol{\eta}_h, v_h) \in V_h \\ b[(\boldsymbol{\theta}_{eh}, u_{eh}), \boldsymbol{\delta}_h] - \tilde{e}^2(\boldsymbol{\gamma}'_{eh}, \boldsymbol{\delta}_h) = 0 & \forall \boldsymbol{\delta}_h \in \Gamma_h \end{cases} \tag{32}$$

dans laquelle les espaces de discrétisation employés sont les mêmes que dans la section 2 (notons que $\Gamma_h \subset L^2(\omega)$). Comme a' est coercive et que b satisfait la condition inf-sup (10), on a le résultat suivant [1, Proposition II-2.12] :

Proposition 5.1 *Le problème (32) possède une solution unique* $[(\boldsymbol{\theta}_{eh}, u_{eh}), \boldsymbol{\gamma}'_{eh}]$ *qui constitue une approximation de la solution de (31)* $[(\boldsymbol{\theta}_e, u_e), \boldsymbol{\gamma}'_e]$, *avec :*

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\theta}_e - \boldsymbol{\theta}_{eh}\|_1 + \|u_e - u_{eh}\|_1 + \|\boldsymbol{\gamma}'_e - \boldsymbol{\gamma}'_{eh}\|_\Gamma + \tilde{e}\|\boldsymbol{\gamma}'_e - \boldsymbol{\gamma}'_{eh}\|_0 \leq \\ &\quad c\,\{\inf_{\boldsymbol{\eta}_h \in \Theta_h} \|\boldsymbol{\theta}_e - \boldsymbol{\eta}_h\|_1 + \inf_{v_h \in W_h} \|u_e - v_h\|_1 + \inf_{\boldsymbol{\delta}_h \in \Gamma_h} [\|\boldsymbol{\gamma}'_e - \boldsymbol{\delta}_h\|_\Gamma + \tilde{e}\|\boldsymbol{\gamma}'_e - \boldsymbol{\delta}_h\|_0]\} \end{aligned} \tag{33}$$

où la constante c est indépendante à la fois de h et de e. □

Remarque : i) Lorsque $e \to 0$, l'estimation dans L^2 ci-dessus "explose". Par contre, l'estimation dans Γ reste stable.
ii) Comme par la définition de $\tilde{e}$ on a $1 < \frac{\tilde{e}}{e} < c$, il est clair qu'on a aussi

$$\begin{aligned} &\|\theta_e - \theta_{eh}\|_1 + \|u_e - u_{eh}\|_1 + \|\gamma_e - \gamma_{eh}\|_\Gamma + e\|\gamma'_e - \gamma'_{eh}\|_0 \leq \\ &\quad c\,\{\inf_{\eta_h \in \Theta_h} \|\theta_e - \eta_h\|_1 + \inf_{v_h \in W_h} \|u_e - v_h\|_1 + \inf_{\delta_h \in \Gamma_h} [\|\gamma'_e - \delta_h\|_\Gamma + e\|\gamma'_e - \delta_h\|_0]\} \end{aligned} \tag{34}$$

□

Pour quantifier l'estimation d'erreur (33) (ou (34)) , on utilise un résultat de régularité dû à Brezzi-Fortin. Posons $\gamma_e = \frac{1}{e^2}(\theta_e - \nabla u_e) = (\frac{e}{\tilde{e}})^2 \gamma'_e$. En fait, γ_e correspond au "véritable" effort tranchant, car $[(\theta_e, u_e), \gamma_e]$ est la solution de

$$\begin{cases} a(\theta_e, \eta) + b[(\eta, v), \gamma_e] = (f, v) & \forall (\eta, v) \in V \\ b[(\theta_e, u_e), \delta] - e^2(\gamma_e, \delta) = 0 & \forall \delta \in [L^2(\omega)]^2 \end{cases} \tag{35}$$

Alors, d'après [4],

$$\|\theta_e\|_2 + \|u_e\|_2 + e\|\gamma_e\|_1 \leq c\|f\|_0 \tag{36}$$

où la constante c ne dépend pas de e. Par ailleurs, la première équation de (35) implique que les identités (7) et (8) sont toujours vérifiées (en remplaçant θ par θ_e et γ par γ_e). Par suite,

$$\|\gamma_e\|_{H(div)} \leq c\|f\|_0$$

A présent, en se rappelant que γ'_e est directement proportionnel à γ_e, par un coefficient qui reste borné quand l'épaisseur varie, on en déduit que γ'_e satisfait les mêmes majorations de régularité que γ_e, et l'on rassemble ces résultats dans la proposition suivante.

Proposition 5.2 *La solution $[(\theta_e, u_e), \gamma'_e]$ de (31) satisfait*

$$\|\theta_e\|_2 + \|u_e\|_2 + \|\gamma'_e\|_{H(div)} + e\|\gamma'_e\|_1 \leq c\|f\|_0 \tag{37}$$

□

On est maintenant en mesure de majorer les erreurs d'interpolation figurant dans (34).

Proposition 5.3 *Il existe une constante c indépendante de h et de e telle que*

$$\|\theta_e - \theta_{eh}\|_1 + \|u_e - u_{eh}\|_1 + \|\gamma'_e - \gamma'_{eh}\|_\Gamma + e\|\gamma'_e - \gamma'_{eh}\|_0 \leq ch\|f\|_0 \tag{38}$$

Preuve : Pour θ_e et u_e on utilise les résultats classiques d'interpolation

$$\inf_{\eta_h \in \Theta_h} \|\theta_e - \eta_h\|_1 \leq ch\|\theta_e\|_2 \leq ch\|f\|_0 \tag{39}$$

$$\inf_{v_h \in W_h} \|u_e - v_h\|_1 \leq ch\|u_e\|_2 \leq ch\|f\|_0 \tag{40}$$

En ce qui concerne γ'_e, l'estimation est encore plus délicate qu'à la proposition (4.3) puisqu'il faut, avec le même interpolé, majorer en plus l'estimation dans L^2. On applique à nouveau la décomposition de Helmholtz

$$\exists \phi_e \in H^2(\omega) \cap H_0^1(\omega),\ \exists \psi_e \in H^1(\omega) \begin{cases} \gamma'_e = \nabla \phi_e + (\nabla \psi_e)^\perp \\ \|\phi_e\|_2 + \|\psi_e\|_1 \leq c\|\gamma'_e\|_{H(div)} \leq c'\|f\|_0 \end{cases}$$

mais on a cette fois l'information supplémentaire tirée de (37) : $e\|\gamma'_e\|_1 \leq c\|f\|_0$. On en déduit

$$|\psi_e|_2 = |\gamma'_e - \nabla \phi_e|_1 \leq \|\gamma'_e\|_1 + \|\phi_e\|_2 \leq \frac{c}{e}\|f\|_0$$

On utilise pour ϕ_e l'interpolant standard

$$\exists \phi_h \in \mathcal{L}_1^1 \cap H_0^1(\omega), \qquad \|\phi_e - \phi_h\|_1 \leq ch\|\phi_e\|_2 \leq ch\|\gamma_e'\|_{H(div)} \leq ch\|f\|_0$$

Puisque $\psi_e \in H^2$, le recours à l'opérateur de Clément ne s'impose plus et la théorie classique fournit

$$\exists \psi_h \in \mathcal{L}_1^1, \qquad \|\psi_e - \psi_h\|_m \leq ch^{s-m}|\psi_e|_s \qquad s = 1,2 \quad m = 0,1$$

Finalement, en posant

$$\gamma_h = \nabla\phi_h + (\nabla\psi_h)^\perp$$

on montre exactement comme à la proposition (4.3) que

$$\|\gamma_e' - \gamma_h\|_\Gamma \leq ch\|f\|_0$$

Enfin

$$\begin{aligned} e\|\gamma_e' - \gamma_h\|_0 &\leq e\,[|\phi_e - \phi_h|_1 + |\psi_e - \psi_h|_1] \\ &\leq e\,[ch\|f\|_0 + c'\frac{h}{e}\|f\|_0] \\ &\leq ch\|f\|_0 \qquad \square \end{aligned}$$

On pourrait reprocher à cette méthode le fait qu'elle ne fournisse pas directement une approximation de l'effort tranchant γ_e. En effet, du fait de la modification effectuée pour assurer la coercivité de la forme a', c'est γ_e' qui est approximé. Il est néanmoins très facile d'opérer la conversion a posteriori car $\gamma_e = \frac{1}{1-\beta e^2}\gamma_e'$. Les deux champs sont proportionnels, par un coefficient d'autant plus proche de 1 que e est petit.

Par ailleurs, il est intéressant de noter que la formulation (32) est équivalente à une sous-intégration numérique partielle de la formulation primale (28). En éliminant γ_{eh}' par la deuxième équation de (32), on obtient en effet

$$a'[(\theta_{eh}, u_{eh}), (\eta_h, v_h)] + \frac{1}{\tilde{e}^2}(P_h(\theta_{eh} - \nabla u_{eh}), P_h(\eta_h - \nabla v_h)) = (f, v_h) \qquad \forall(\eta_h, v_h) \in V_h$$

où P_h est la L^2-projection sur $\mathcal{L}_0^0$, dont on peut donc calculer l'effet indépendamment sur chacun des éléments. Dans notre cas, on a $\eta_h \in (\mathcal{L}_1^1 + B_3)$ et $\nabla v_h \in \mathcal{L}_1^0$ et donc $P_h(\eta_h - \nabla v_h)$ peut être calculé par une simple sous-intégration numérique à un seul point de Gauss, sauf pour les degrés de liberté correspondant aux bulles pour lesquels un coefficient multiplicateur doit être appliqué.

6 Remarques de conclusion

Il est tout d'abord intéressant de comparer la méthode d'éléments finis présentée dans cette étude avec d'autres méthodes mixtes de plaque.

1. Eléments de type D.K.T.
   Ces méthodes sont assez simples de mise en oeuvre mais ne s'appliquent directement qu'au modèle de Kirchhoff-Love [5]. La méthode présentée ici est également valable pour le modèle de Mindlin-Reissner (où l'épaisseur intervient) et fournit des estimations d'erreur indépendantes de l'épaisseur.

2. Discrétisation des composantes de la décomposition de Helmholtz
   Cette famille de méthodes permet l'approximation des formulations M-R comme K-L (voir par exemple [4, 6]). Cependant elles nécessitent des variables mixtes continues et il est donc impossible dans le cas M-R de se ramener à une discrétisation équivalente en déplacements purs. On doit donc pour les mettre en oeuvre employer un solveur spécifique.

3. Eléments MITC
   Ces éléments, analysés en détail dans [7, 8], sont certainement ceux dont l'élément présenté se rapproche le plus en termes de variété et de simplicité d'application. La similarité ne s'étend pas aux aspects de l'analyse mathématique, considérablement plus simple ici. A noter que notre élément est plus simple que le MITC7 qui est le plus petit élément de la famille pour lequel la stabilité soit établie. Par ailleurs, l'opération de projection par P_h, élémentaire dans notre cas, s'avère plus complexe pour les MITC.

4. L'élément "Arnold-Falk" [9]
   Cet élément, très simple, s'applique également au modèle M-R et permet aussi l'élimination des variables duales. Néanmoins il utilise des déplacements transverses non-conformes et l'estimation d'erreur pour les déplacements n'est donc pas donnée pour la norme H^1 mais une norme discrète.

De façon plus générale, l'élément présenté ici est vraisemblablemement celui pour lesquels les techniques de mise au point d'une méthode mixte stable sont les plus aisément généralisables aux autres problèmes dans lesquels le verrouillage numérique intervient. Notre méthode ne repose pas, en effet, sur le principe de décomposition de Helmholtz. Celui-ci n'est pas utilisé avant le stade de la quantification des erreurs d'interpolation. Il serait d'ailleurs intéressant de savoir si l'on peut trouver un moyen de s'en passer complètement.

Remerciements

L'auteur tient particulièrement à exprimer sa reconnaissance à V. Girault dont les conseils ont été précieux pour la réalisation de ce travail.

Nota

Un tout récent travail de D.N. Arnold et F. Brezzi [10] est parvenu à la connaissance de l'auteur après rédaction du présent article. Arnold et Brezzi y analysent la même méthode mixte dans un cadre théorique néanmoins significativement différent. Par ailleurs, leur étude ne comporte pas l'analyse détaillée présentée ici de l'erreur d'interpolation dans l'espace du multiplicateur de Lagrange.

Bibliographie

[1] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* Springer-Verlag, 1991.

[2] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Non-Smooth Domains.* Pitman, 1985.

[3] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *R.A.I.R.O*, R-2:77–84, 1975.

[4] F. Brezzi and M. Fortin. Numerical approximation of Mindlin-Reissner plates. *Mathematics of Computation*, 47(175):151–158, 1986.

[5] J.L. Batoz, K.J. Bathe, and L.W. Ho. A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(2):1771–1812, 1980.

[6] P. Destuynder and T. Nevers. A new finite element scheme for bending plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 68:127–139, 1988.

[7] F. Brezzi, K.J. Bathe, and M. Fortin. Mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:1787–1801, 1989.

[8] F. Brezzi, M. Fortin, and R. Stenberg. Error analysis of mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1(2), 1991.

[9] D.N. Arnold and R.S. Falk. A uniformly accurate finite element method for the Reissner-Mindlin plate. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 26(6):1276–1290, 1989.

[10] D.N. Arnold and F. Brezzi. Some new elements for the Reissner-Mindlin plate model. In J.L. Lions and C. Baiocchi, editors, *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications*, pages 287–292. Masson, 1993.

Les rapports de recherche de l'INRIA
sont disponibles en format postscript sous
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

si vous n'avez pas d'accès ftp
la forme papier peut être commandée par mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(n'oubliez pas de mentionner votre adresse postale).

par courrier :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

INRIA research reports
are available in postscript format
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

if you haven't access by ftp
we recommend ordering them by e-mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(don't forget to mention your postal address).

by mail :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine - Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes - IRISA, Campus universitaire de Beaulieu 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble Cedex 1 (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis - 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

RR_2248