HAL
open science

Géométrie Aléatoire et Architecture de Réseaux de Communications

François Baccelli, Maurice Klein, Marc Lebourges, Sergueï Zuyev

To cite this version:

François Baccelli, Maurice Klein, Marc Lebourges, Sergueï Zuyev. Géométrie Aléatoire et Architecture de Réseaux de Communications. RR-2542, INRIA. 1995. inria-00074136

HAL Id: inria-00074136

https://inria.hal.science/inria-00074136

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Géométrie Aléatoire et Architecture de Réseaux de Communications

François BACCELLI, Maurice KLEIN, Marc LEBOURGES et Sergueï ZUYEV

N° 2542

Mai 1995

PROGRAMME 1

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

Géométrie Aléatoire et Architecture de Réseaux de Communications

François BACCELLI*, Maurice KLEIN**, Marc LEBOURGES*** et Sergueï ZUYEV****

Programme 1 — Architectures parallèles, bases de données, réseaux et systèmes distribués
Projet Mistral

Rapport de recherche n° 2542 — Mai 1995 — 48 pages

Résumé : Cet article***** propose une nouvelle approche pour l'étude d'architectures de réseaux de télécommunications, fondée sur des méthodes de géométrie aléatoire. Nous résumons d'abord l'état de l'art et la problématique de la planification stratégique ainsi que ses implications pour l'analyse économique avant de donner les grandes lignes et les avantages escomptés de la méthode que nous proposons. Les modèles probabilistes, fondés sur des constructions géométriques associées à des processus ponctuels aléatoires, sont ensuite introduits; nous montrons comment diverses classes de problèmes d'évaluation de performances ou d'optimisation de réseaux se ramènent au calcul d'espérances de fonctionnelles des processus ponctuels sous-jacents. Plusieurs résultats analytiques sont obtenus pour le modèle poissonien homogène. Les modèles plus complexes sont analysables par simulation ou par changement d'espace. Un résumé des principales propriétés mathématiques des processus ponctuels et des pavages du plan utilisés dans l'article est proposé en annexe. Les modèles introduits dans cet article semblent génériques et devraient trouver à s'appliquer dans d'autres problèmes de réseaux de collecte, de transport et de distribution.

Mots-clé : Modélisation aléatoire, modélisation macroscopique, réseaux cellulaires, diagramme de Voronoï, triangulation de Delaunay, diagramme de puissance, modèle hiérarchique, modèle maillé, communications mobiles, trafic téléphonique, processus ponctuels, processus de Poisson, analyse de perturbations, gradient stochastique.

(Abstract: pto)

*. INRIA, Sophia-Antipolis, France
**. France TELECOM, CNET, Issy Les Moulineaux
***. France TELECOM, Direction du Plan et de la Stratégie, Paris
****. INRIA, Sophia-Antipolis, France
*****. Travaux de recherche effectués dans le cadre des conventions de recherche CNET-INRIA 93 5 B et CTI 94 1B 104

Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis
2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex (France)
Téléphone : (33) 93 65 77 77 – Télécopie : (33) 93 65 77 65

Stochastic Geometry and Communication Network Architecture

Abstract: This paper proposes a new approach for communication networks planification; this approach is based on stochastic geometry. We first summarize the state of the art in this domain, together with its economic implications, before sketching the main expectations of the proposed method. The main probabilistic tools are point processes and stochastic geometry. We show how several performance evaluation and optimization problems within this framework can actually be posed and solved by computing the mathematical expectation of certain functionals of these point processes. We both analyze models based on Poisson point processes, for which analytical formulae can sometimes be obtained, and more complex models, which can be analyzed via simulation, or change of space methods. The stochastic models introduced in this paper are of general interest in that they should allow one to address other transportation and distribution problems.

Key-words: Stochastic modeling, macroscopic modeling, cellular network, Voronoi diagram, Delaunay diagrams, power diagram, hierachical model, mobile communications, telephone network, point process, perturbation analysis, stochastic gradients.

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Situation du problème **4**
2.1 Méthode de planification stratégique . . . 4
2.2 Modélisation de réseau pour l'analyse économique . . . 5
2.3 Modélisation probabiliste macroscopique . . . 6
2.4 Modélisation poissonienne . . . 6
2.5 Rôle du modèle homogène . . . 7
2.6 Modélisation non-poissonienne ou hétérogène . . . 7

3 Modélisation aléatoire poissonienne **8**
3.1 Modèle de base des réseaux d'accès . . . 8
3.2 Le modèle triangulé . . . 11
3.3 Le modèle hiérarchique . . . 11
3.4 Autres modèles d'architecture . . . 11
3.5 Modélisation des demandes de communications dans le réseau . . . 14
3.6 Établissement d'une communication . . . 17
3.7 Contraintes de ressources . . . 17
3.8 Systèmes de mobiles . . . 17
3.9 Exemple d'école de problème d'optimisation . . . 20

4 Résultats analytiques **21**
4.1 Modèle de base de réseaux d'accès . . . 21
4.2 Trafic dans le modèle hiérarchique . . . 23
4.3 Raccordements multiples . . . 26
4.4 Modèles de communications mobiles . . . 27

5 Au delà de la modélisation analytique **32**
5.1 Simulation et gradients . . . 33
5.2 Changement d'espace . . . 36

6 Vérification des modèles **38**

7 Conclusion **39**

A Annexe **43**
A.1 Processus ponctuels . . . 43
A.2 Pavages de l'espace . . . 45

Table des figures

1 Modèle de base avec un seul niveau de commutateurs . . . 10
2 Modèle d'un réseau maillé dont les connexions sont portées par les arêtes de la triangulation de Delaunay . . . 12
3 Modèle hiérarchique avec 3 niveaux de commutateurs . . . 13
4 Les zones de raccordement des commutateurs dans le cas d'une modélisation par le diagramme de puissance . . . 15
5 Liaison auxiliaires dans le modèle hiérarchique . . . 16
6 L'établissement d'une communication dans le modèle hiérarchique . . . 18
7 La fonction Q et ses bornes . . . 40
8 La structure géométrique de la cellule et de la fleur de Voronoï . . . 41

9 Effet de l'ajout d'un point uniforme dans la fleur de Voronoï – algorithme RPA positif 42

1 Introduction

Cet article propose une nouvelle approche pour l'étude d'architectures de réseaux de télécommunications, fondée sur des méthodes de géométrie aléatoire. Nous résumons d'abord l'état de l'art de la planification stratégique et de l'analyse économique de ces réseaux (§ 2), avant de donner les grandes lignes et les avantages escomptés de la méthode que nous proposons. Les modèles probabilistes, fondés sur des constructions géométriques associées à des processus ponctuels aléatoires, sont ensuite introduits (§ 3); nous montrons comment diverses classes de problèmes d'évaluation de performances ou d'optimisation de réseaux se ramènent au calcul d'espérances de fonctionnelles des processus ponctuels sous-jacents. Les principaux résultats analytiques associés au modèle poissonien homogène sont donnés dans le § 4. Les modèles plus complexes sont analysables par simulation ou par changement d'espace (§ 5). Un résumé des principales propriétés mathématiques des processus ponctuels et des pavages du plan utilisés dans l'article est proposé en annexe.

Les modèles introduits dans cet article semblent génériques et devraient trouver à s'appliquer dans d'autres problèmes de réseaux de collecte, de transport et de distribution.

2 Situation du problème

La modélisation de réseau présentée dans cet article devrait trouver à s'appliquer dans deux domaines de recherches principaux: les méthodes de planification stratégique et la modélisation économique des réseaux de télécommunications. Nous allons d'abord introduire les questions qui se posent actuellement dans ces domaines et que l'approche proposée peut contribuer à résoudre.

2.1 Méthode de planification stratégique

Les méthodes de planification de réseaux nécessitent une description détaillée du réseau étudié ainsi que de la demande en trafic ou en accès, aux années-cibles. Cette description du futur est le résultat d'une extrapolation mathématique de l'existant selon deux ou trois scénarios d'évolution. En face de cette demande, on cherche à choisir entre quelques architectures potentielles, dont on estime les coûts et les performances prévisionnels au moyen de calculs détaillés sur le réseau. Ces calculs demandent le plus souvent le développement de programmes d'optimisation. Ceci donne des réseaux configurés dans le détail à l'horizon visé, et permet l'estimation des indicateurs discriminants. Cette comparaison aboutit au choix d'une architecture pour laquelle on analyse la transition de l'existant à la cible.

Ainsi décrite, cette méthodologie n'est pas complète dans la mesure où elle doit s'accompagner de règles pour, en amont, élaborer une liste d'architectures-cible à tester et, en aval, déterminer le caractère significatif ou non des différences constatées. A l'heure actuelle, ces règles sont élaborées empiriquement par les experts, dont le rôle consiste à restreindre et à simplifier le champ de l'analyse. Cette approche manipule un nombre de paramètres considérable (l'ensemble des données décrivant le réseau, sa demande, son trafic) qui ne sont pas tous pertinents vis-à-vis de l'objectif d'étude : le choix d'une architecture. Seules certaines caractéristiques statistiques sont significatives, mais la méthode utilisée ne permet pas de les identifier. Certes, des considérations qualitatives globales permettent à l'expert d'avoir une idée a priori sur les caractères du réseau qui favorisent tel ou tel choix, mais il s'agit d'une approche empirique et incertaine.

L'ignorance des facteurs discriminants interdit également de maîtriser le domaine de validité des choix suggérés : on ignore jusqu'à quel point les conclusions d'une étude peuvent être réutilisées, sur d'autres réseaux, pour d'autres scénarios de croissance ou d'autres hypothèses de coût et de performances. Ce point est d'autant plus important que les études stratégiques sont justement nécessaires lorsqu'il y a rupture dans l'évolution du réseau, que ce soit en termes technique, commercial ou réglementaire. La sensibilité des choix aux hypothèses d'étude recouvre donc des enjeux essentiels dans le contexte actuel des télécommunications.

2.2 Modélisation de réseau pour l'analyse économique

L'analyse économique des réseaux de télécommunications s'appuie principalement sur l'exploitation de statistiques globales sur le réseau et sur la demande. Elle n'a jusqu'à présent pas su intégrer de façon satisfaisante les caractéristiques spatiales des réseaux. La seule analyse des quantités d'appels ou de bits transportés est réductrice puisqu'elle ne prend en compte ni la capacité du réseau à connecter des interlocuteurs distants, ni les coûts associés à cette fonction. Un réseau ne répond pas non plus de manière séparée à des demandes d'interconnexion, puisque la structure du réseau permet justement un partage des ressources quand les spécificités spatiales le permettent.

Les applications de la recherche opérationnelle aux problèmes de réseaux permettent de traiter cette question de façon adaptée lorsque l'on connaît le détail des caractéristiques géographiques des besoins en accès ou en trafic exprimés par les clients du réseau. Mais on ne sait pas traduire cette connaissance en des termes agrégés, susceptibles par exemple de mettre en évidence à un niveau macroscopique la fonction de coût de production du réseau [9]:

- ces modèles ne dégagent pas les caractéristiques discriminantes des réseaux à optimiser;
- ils n'intègrent que difficilement les processus d'ingénierie des réseaux.

2.3 Modélisation probabiliste macroscopique

L'élaboration d'une modélisation macroscopique de réseau paraît donc un objectif important, tant dans le domaine des études d'architecture de réseaux que dans celui de la modélisation économique des réseaux.

L'approche macroscopique proposée repose sur une modélisation spatiale utilisant la géométrie aléatoire des réseaux et a pour objectif, en cohérence avec l'analyse précédente:

- de limiter les données descriptives du réseau aux paramètres statistiques structurants pour les choix d'architecture à effectuer, et de maîtriser beaucoup mieux la représentativité, la permanence et la robustesse de ces données,

- de permettre l'expression directe des indicateurs discriminants à partir des paramètres d'entrée, grâce à des formules analytiques. Ces expressions mathématiques devraient conduire à des comparaisons beaucoup plus rapides et plus complètes entre les scénarios techniques étudiés.

On souhaite construire une modélisation de réseau dont le nombre de paramètres est du même ordre que dans les analyses empiriques actuelles, mais pour laquelle la complexité est réduite. Le principe de base consiste en une modélisation stochastique des caractéristiques spatiales du réseau. De la sorte, la description du réseau se trouve réduite aux paramètres des processus stochastiques utilisés et les variables de décision correspondent à des fonctionnelles de ces processus. Les comparaisons entre ces variables sont alors fondées sur des facteurs effectivement discrimants: les paramètres des processus stochastiques; et l'on maîtrise les domaines de validité et d'incertitude sur les résultats obtenus. De plus cette approche fournit un modèle synthétique de la fonction de production des services de télécommunications, qui prend en compte les spécificités spatiales du fonctionnement du réseau.

C'est dans ce cadre qu'il faut lire en particulier les hypothèses de modélisation retenues (§ 3), qui comme dans toute modélisation correspondent à un compromis entre le réalisme et les possibilités de traitement mathématique.

2.4 Modélisation poissonienne

Pour l'essentiel, les résultats analytiques donnés dans le § 4 sont obtenus sous l'hypothèse d'une répartition aléatoire des abonnés et des commutateurs selon des processus de Poisson spatiaux homogènes. Ils concernent principalement les parties accès et trafic des réseaux.

Le point de départ du modèle est une répartition des abonnés dans le plan selon un processus ponctuel de Poisson, qui traduit de manière simple leur répartition irrégulière. Le modèle suppose aussi que les nœuds du réseau des différents niveaux hiérarchiques, sont également répartis aléatoirement dans le plan, et forment des processus de Poisson. Cette hypothèse est plus discutable et demande une justification. En effet, on peut imaginer que le processus d'implantation des nœuds est déterminé par celui de la répartition des abonnés à desservir, dans une optique d'optimisation de l'architecture du réseau. Dans la réalité cependant la place laissée à l'optimisation se trouve réduite par les contraintes multiples

qui pèsent sur le choix des lieux d'implantation des nœuds du réseau, et qui réduisent la maîtrise de l'opérateur sur la localisation de ses sites. Ces contraintes, externes à la démarche d'optimisation, apparaissent comme des facteurs aléatoires sur le plan de l'architecture du réseau, et justifient l'hypothèse d'une répartition aléatoire des nœuds. Les deux processus sont supposés indépendants.

L'analyse du trafic échangé entre abonnés a été traitée dans le cadre d'une organisation hiérarchique du réseau. Nous avons pu calculer les trafics échangés entre des zones de différents niveaux de hiérarchie (voir § 4.2). Cette description du trafic a été choisie parce qu'elle est compatible avec des calculs de dimensionnement du réseau maillé. Ils s'articulent avec les résultats obtenus par ailleurs et selon une approche complémentaire sur la modélisation statistico-analytique des calculs de blocages de bout-en-bout dans un réseau commuté [17].

Les calculs analytiques ont pu être menés à terme dans le cas de processus aléatoires poissoniens homogènes sur le plan, pour les architectures de réseau diverses : réseau arborescent (§ 3.3, 4.2), réseau avec raccordements multiples (§ 4.3), réseau maillé (§ 3.2) et réseau cellulaire applicable aux radios-mobiles (§ 3.8).

2.5 Rôle du modèle homogène

Le modèle homogène améliore l'état de l'art actuel en matière de modélisation spatiale des réseaux d'accès. En effet, les études prospectives existantes (hors l'étude de réseaux réels), dans le domaine des mobiles ou de la boucle locale, se limitent à des découpages spatiaux géométriquement réguliers et homogènes. La modélisation stochastique présentée introduit des termes d'aléas et de dispersion qui sont parmi les caractéristiques essentielles des réseaux réels, même si pour de nombreuses applications la modélisation retenue ne correspond qu'imparfaitement, du point de vue quantitatif, aux phénomènes représentés. En plus de son intérêt direct, elle constitue une base de modélisation à partir de laquelle des paramètres supplémentaires pourront être introduits, afin justement de disposer des degrés de liberté nécessaires pour s'approcher des cas réels observés. C'est en particulier l'idée de la partie consacrée à la transformation d'espace (§ 5.2), dont l'objet est de permettre une réutilisation dans le cadre d'une modélisation hétérogène des résultats obtenus dans un cadre homogène. Enfin, comme nous le verrons dans le § 4, la modélisation poissonienne fournit souvent la forme des dépendances entre les variables, et elle procure donc des indications utiles aux architectes et aux économistes de réseaux. Ces lois de comportement peuvent se combiner avec des évaluations fournies par ailleurs selon des méthodes plus classiques.

2.6 Modélisation non-poissonienne ou hétérogène

Les résultats obtenus dans le cadre de processus de Poisson homogènes ne sont adaptés que pour des études particulières:

- soit des études sur des zones particulières à l'intérieur desquelles les hypothèses d'homogénéité sont acceptables,

– soit des analyses théoriques pour lesquelles la dispersion liée au caractère aléatoire du modèle est suffisante.

C'est pourquoi l'analyse de processus hétérogènes plus généraux a été entamée selon deux axes :

1. un axe théorique d'analyse des transformations d'espace (§ 5.2) dont l'objet final serait de pouvoir passer analytiquement des processus homogènes aux processus hétérogènes, ou du moins de pouvoir calculer l'influence des grandeurs caractérisant l'hétérogénéité de l'espace sur les variables d'intérêt de la modélisation;

2. un axe plus empirique portant sur les possibilités de calcul des résultats souhaités par simulation informatique. Il s'agit là de simulations de processus dans le plan, un domaine encore peu exploré. Une exploitation optimale des résultats de simulation demande que des dérivées des variables d'intérêt du modèle en fonction des paramètres des processus simulés puissent être estimées de façon fiable et sans temps-calcul prohibitif : c'est l'un des objets de la théorie du calcul des gradients stochastiques présentée dans l'article (voir § 5.1).

3 Modélisation aléatoire poissonienne

Comme nous l'avons indiqué dans la section précédente, les structures spatiales que l'on observe dans les réseaux de communications sont usuellement irrégulières. Par exemple, les cellules d'un réseau de communications mobiles, ou encore les zones de raccordement de concentrateurs d'un réseau téléphonique sur un territoire donné sont fort éloignées des structures hexagonales régulières souvent prises comme modèles de référence pour les analyses et pour le dimensionnement de tels réseaux. Or les fluctuations des ces objets géométriques ont un impact très important sur les caractéristiques utiles pour le dimensionnement des systèmes.

La modélisation aléatoire macroscopique que nous proposons est fondée sur une représentation de l'ensemble des objets d'un réseau de télécommunications (abonnés, commutateurs, liens, mobiles), comme une réalisation d'une famille de processus *aléatoires* ponctuels et géométriques dans le plan, appartenant à des classes paramétriques simples.

Dans cette section, nous nous proposons de décrire les modèles de base et de montrer que les caractéristiques principales du réseau sont alors exprimables comme des fonctionnelles de ces processus ponctuels. Ce n'est que dans les sections suivantes que nous montrerons comment certaines de ces caractéristiques peuvent effectivement être quantifiées au moyen de distributions de probabilité, calculables explicitement.

3.1 Modèle de base des réseaux d'accès

Ce paragraphe est consacré au modèle probabiliste le plus simple, qui est celui d'un réseau téléphonique à un seul niveau hiérarchique.

Les abonnés et les commutateurs sont représentés par leur coordonnées dans le plan $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ sera appelé espace des phases ci-dessous). Leur nombre est fini dans toute partie compacte.

Chaque commutateur dessert les abonnés d'une zone déterminée. Réciproquement, le plan est partitionné en zones, chaque zone étant desservie par un commutateur unique. L'hypothèse retenue est que le raccordement des abonnés se fait sur le commutateur le plus proche.

Le domaine de desserte d'un commutateur x est alors le polygone convexe $\mathcal{C}_x$, dont les bords sont portés par des médiatrices des segments d'extrémités x et x', où x et x' sont les positions de commutateurs voisins. $\mathcal{C}_x$ est la *cellule de Voronoï* de *noyau* x, et l'ensemble de toutes les cellules constitue le *pavage de Voronoï* du plan associé à l'ensemble des concentrateurs (voir Figure 1 et l'Annexe pour la définition du pavage de Voronoï).

Le cadre théorique utilisé pour la modélisation aléatoire est celui des processus ponctuels. On considère deux processus ponctuels de Poisson homogènes et indépendants Π_0 et Π_1 dans le plan. Les définitions et les propriétés des processus ponctuels de Poisson qui nous seront utiles sont résumées en annexe. Chaque réalisation d'un tel processus consiste en un ensemble aléatoire de points, représentant les abonnés (pour le processus Π_0) et les commutateurs (pour le processus Π_1). A chaque commutateur on associe donc sa zone de raccordement, qui est constituée des points du plan qui sont plus proches de ce commutateur que de tout autre commutateur, comme décrit ci-dessus. Tout le plan est donc pavé en zones de raccordement, qui sont maintenant aléatoires et forment un pavage de Voronoï *aléatoire* de $\mathbb{R}^2$, par rapport au processus Π_1 (voir l'Annexe).

Dans la plupart des applications envisagées, les processus Π_0 et Π_1 seront supposés stochastiquement indépendants et de Poisson. Les paramètres de localisation des abonnés et de commutateurs sont donc réduits aux mesures Λ_0 et Λ_1 d'intensité de ces processus. On peut par exemple supposer que Λ_0 et Λ_1 sont proportionnelles, c'est à dire $\Lambda_0 = \alpha\Lambda_1$ pour $\alpha >> 1$, ce qui traduit le souci d'implanter les commutateurs là où ils sont nécessaires.

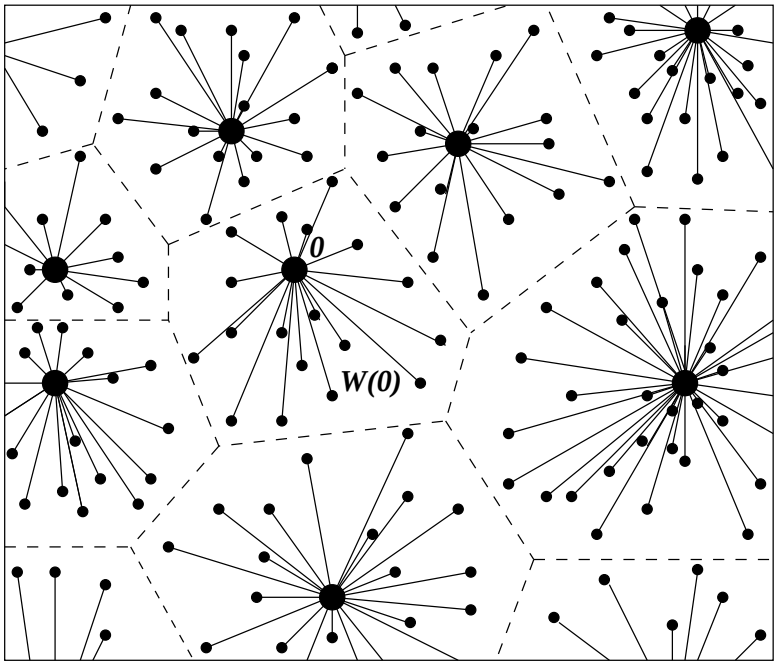
Dans le cas le plus simple, les mesures Λ_0 et Λ_1 sont des multiples de la mesure de Lebesgue dx sur $\mathbb{R}^2$, et les processus Π_0 et Π_1 sont alors homogènes et stationnaires.

Les frontières des cellules de Voronoï forment un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Si les mesures d'intensité Λ_0 et Λ_1 sont diffuses, c'est à dire si la mesure de chaque singleton est zéro, la probabilité qu'il y ait des points du processus Π_0 (supposé indépendant de Π_1) situés sur cette frontière est égale à 0. Ainsi, chaque abonné se trouve presque sûrement dans une unique cellule (ou en d'autres termes rattaché à un unique commutateur). La Figure 1 montre une configuration typique du modèle décrit.

Voici les principales grandeurs d'intérêt dans ce modèle:

- la distribution des caractéristiques géométriques d'une zone de raccordement typique; par exemple sa surface, la longueur de sa frontière, le nombre des commutateurs adjacents etc.;

- la distribution du nombre et de la position des abonnés dans une zone typique;



– les commutateurs

– les abonnées

– les câbles

– les frontières des zones de raccordement

FIG. 1 – *Modèle de base avec un seul niveau de commutateurs (les liaisons entre les commutateurs ne sont pas précisées).*
The basic model with a single hierarchical level of stations (the connections between stations are not specified).

- la distribution de la longueur totale des liaisons entre les abonnés et le commutateur correspondant;
- la distribution des caractéristiques géométriques des liaisons entre les commutateurs.

3.2 Le modèle triangulé

La Figure 2 montre le cas où les commutateurs sont reliés les uns aux autres par l'intermédiaire d'un maillage suivant les arêtes de la triangulation de Delaunay associée au processus ponctuel des commutateurs (voir l'Annexe): on a une arête de ce pavage entre deux commutateurs si et seulement si ces deux commutateurs appartiennent à deux cellules de Voronoï ayant une frontière commune - on dit alors qu'ils sont *adjacents*. Ce modèle peut servir de base pour modéliser les boucles supportant les réseaux d'interconnexion.

3.3 Le modèle hiérarchique

Dans ce modèle il y a N niveaux de commutateurs (aussi appelés stations par la suite). Les commutateurs de niveau i sont donnés comme la réalisation d'un processus de Poisson homogène Π_i. Les processus ponctuels $\Pi_1, \ldots, \Pi_N$ sont supposés indépendants et d'intensités décroissantes: $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_N$. Comme dans le modèle de base précédent, le processus Π_0 donne la position des abonnés (que nous appelons parfois les commutateurs de niveau 0 pour l'unification des notations). On ajoute aussi une condition technique $\sum_i \lambda_i < \infty$, qui garantit que dans chaque région d'aire finie se trouve un nombre fini de stations.

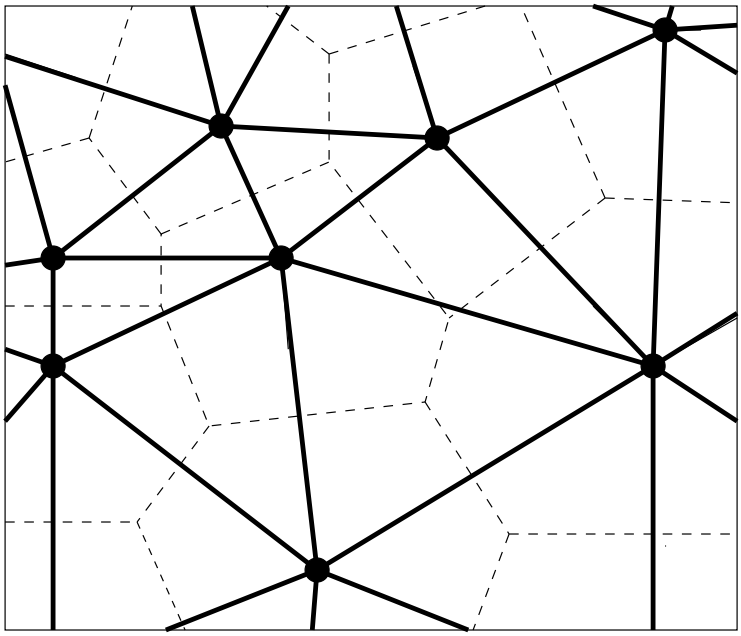
Mis à part ceux du niveau N, les commutateurs de même niveau n'ont pas de lien direct entre eux. Par contre, chaque commutateur de niveau j ($j = 0, \ldots, N-1$) est relié par une liaison directe au commutateur de niveau $j+1$ le plus proche, comme dans le modèle de base. La structure du modèle de base se répète donc en chaque niveau: les zones de raccordement des commutateurs de niveau j forment un pavage de Voronoï par rapport au processus Π_j, et les commutateurs de niveau $j-1$ qui se trouvent dans la zone d'un commutateur $x^{(j)}$ de niveau j sont liés à ce dernier par une liaison directe. Grâce à cette similarité, les grandeurs d'intérêt de ce modèle peuvent être exprimées au moyen de celles du modèle de base.

La Figure 3 donne une configuration typique de ce modèle hiérarchique.

3.4 Autres modèles d'architecture

On peut considérer dans ce cadre plusieurs types de généralisations des modèles décrits ci-dessus.

1. Extension à des processus de Poisson non-homogènes, qui permettent de prendre en compte la distribution non-uniforme de la population sur un territoire.
2. Extension à des processus ponctuels plus généraux que le processus de Poisson, par exemple des processus de Gibbs, qui permettent de modéliser une forme de *répulsion* entre les commutateurs. Ici il faut avoir des raisons importantes pour justifier cette



– les commutateurs

– le réseau de commutateurs

– les frontières des zones de raccordement

FIG. 2 – *Modèle d'un réseau maillé dont les connexions sont portées par les arêtes de la triangulation de Delaunay.*
A network model with the inter-station connections represented by the Delaunay triangulation.

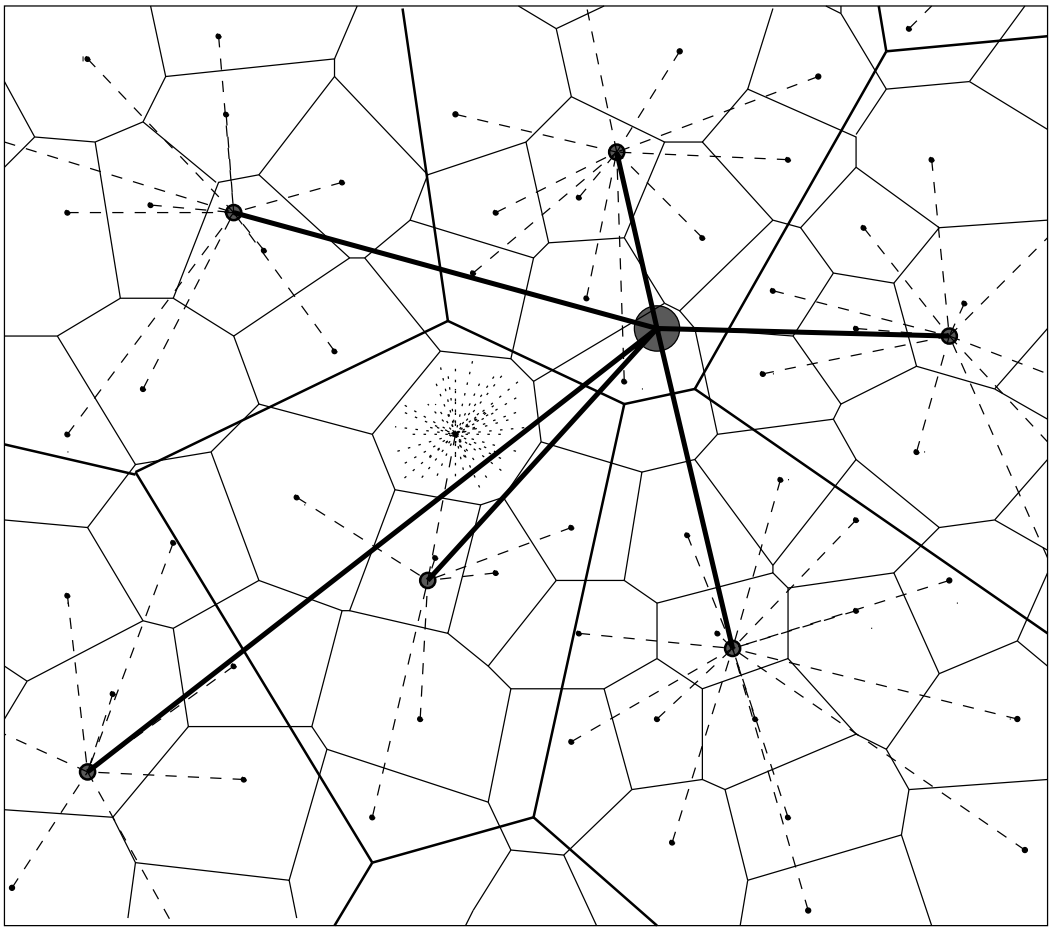


FIG. 3 – *Modèle hiérarchique avec 3 niveaux de commutateurs.*
A hierarchical model with 3 levels of stations.

extension, car les difficultés techniques sont fortement augmentées, notamment dans la perspective de résultats analytiques.

3. Extension à d'autres types de pavages pour modéliser les zones de raccordement des commutateurs. Par exemple, les *diagrammes de puissance* prennent en compte le fait que les commutateurs peuvent avoir des puissances différentes, ce qui peut influencer la taille de leurs zones de raccordement (voir la Figure 4 – la définition de ce type de pavage qui généralise le pavage de Voronoï est donnée en annexe).

4. Extension à d'autres modèles que le modèle hiérarchique. Le modèle strictement hiérarchique est souvent trop restrictif car, en réalité, les commutateurs de même niveau peuvent aussi être connectés par des liens directs.

5. Raccordements multiples (voir la Figure 5). Pour des raisons de fiabilité, les commutateurs peuvent avoir des liaisons auxiliaires directes avec plus d'un commutateur de niveau supérieur, par exemple, avec les deux plus proches commutateurs de niveau supérieur. De manière plus générale, on peut aussi envisager de prendre en compte la possibilité de configurations géométriques de liaisons radicalement différentes (boucles, faisceaux etc.)

3.5 Modélisation des demandes de communications dans le réseau

Le modèle des demandes de communications le plus simple est celui fondé sur le modèle hiérarchique. Il permet par ailleurs de caractériser la demande en trafic pour des architectures de réseaux plus générales.

Fixons une configuration pour chacun des processus

$$\Pi_i = \{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots\}\, i = 0, 1, \ldots, N,$$

et notons $V^{(i)}(x_k^{(i)})$ la cellule de Voronoï d'une station $x_k^{(i)}$ de niveau i, construite par rapport au processus Π_i. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^2$, il existe une seule cellule $V^{(i)}(x)$ (une zone de niveau i) qui contient x. Soit $n^{(i)}(x)$ son noyau, c'est à dire le point de Π_i qui est le plus proche de x.

Dans notre modèle, une station de niveau i demande une station de niveau j (rappelons qu'un abonné est une station de niveau 0) située à la distance r, avec une intensité $f_{ij}(r)$, indépendamment de toutes les autres stations et du nombre de communications en cours. Les conditions

$$2\pi \sum_{j=0}^{N} \int_0^\infty r f_{ij}(r) dr < \infty$$

pour chaque $i = 0, 1, \ldots$ garantissent que le nombres des demandes émises par chaque station pendant un temps fini est presque sûrement fini.

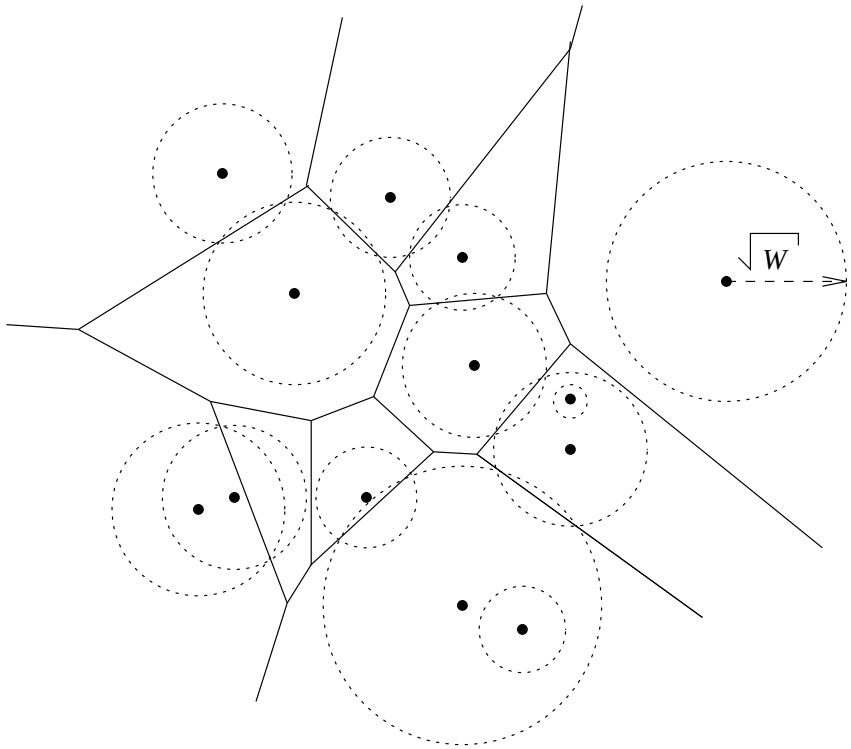


FIG. 4 – *Les zones de raccordement des commutateurs dans le cas d'une modélisation par le diagramme de puissance.*
Station zones in the case of modeling by the power diagram.

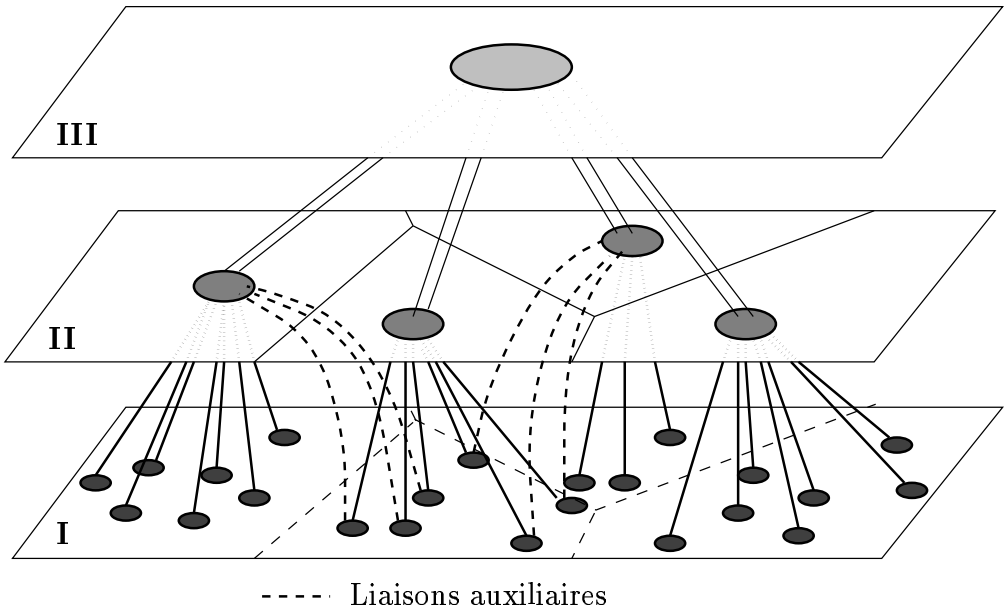


FIG. 5 – *Liaison auxiliaires dans le modèle hiérarchique.*
Auxiliary connections in the hierarchical model.

3.6 Établissement d'une communication

Notre modèle de référence sera la commutation de circuits. Sous réserve de la disponibilité des ressources nécessaires (nous reviendrons sur ce point ultérieurement), une communication émanant d'une station $x^{(i)}$ de niveau i vers une station $x^{(j)}$ de niveau j est établie via un chemin constitué de liaisons directes entre commutateurs défini comme suit:

Soit $h = h(x^{(i)}, x^{(j)})$ le niveau minimal tel que $V^{(h)}(x^{(i)}) = V^{(h)}(x^{(j)})$, ou $h = N$ s'il n'existe pas de i vérifiant cette condition. La communication est établie via une suite de liaisons directes de $x^{(i)}$ à $n^{(i+1)}(x^{(i)})$, puis de $n^{(i+1)}(x^{(i)})$ à $n^{(i+2)}(x^{(i)})$ etc., jusqu'à $n^{(h)}(x^{(i)})$, puis de $n^{(h)}(x^{(i)})$ à $n^{(h)}(x^{(j)})$ (par des liens du dernier niveau N si $h = N$) et enfin de $n^{(h)}(x^{(j)})$ à $n^{(h-1)}(x^{(j)})$ à $\ldots, n^{(h-2)}(x^{(j)})$ etc. jusqu'à la liaison de $n^{(j+1)}(x^{(j)})$ à $x^{(j)}$. (voir la Figure 6).

Dans le cas où $V^{(h)}(x^{(i)}) = V^{(h)}(x^{(j)})$ pour un certain h, alors il existe un seul circuit du type décrit ci-dessus entre $x^{(i)}$ et $x^{(j)}$.

3.7 Contraintes de ressources

On dira qu'une liaison a une contrainte de capacité de K si elle ne peut écouler que K communications simultanées au plus. Si l'on fixe des capacités sur chacune des liaisons (ou sur chacun des types de liaisons) du modèle hiérarchique, la donnée du modèle précédent pour les demandes de communications permet de poser dans ce cadre le problème du calcul des probabilités de perte. Une nouvelle approche fondée sur le principe de conditionnement de Gibbs a été proposée par A. Aboulalaa [1]. Cette approche, alternative à l'approche par la théorie des files d'attente, permet une analyse intégrée aux calculs de géométrie aléatoire développés ici.

3.8 Systèmes de mobiles

Une modélisation d'un systèmes de communications mobiles peut se faire dans ce cadre via l'ajout de:

1. un modèle de système routier;
2. un modèle de trafic des mobiles sur les routes (qui peut conduire à l'adjonction d'une dynamique temporelle h, c'est à dire à l'adjonction d'un flot supplémentaire indexé par le temps – voir l'Annexe);
3. un modèle de station de raccordement pour les mobiles;

Le troisième point s'intègre naturellement dans le cadre précédent: on se donne un processus ponctuel de stations d'émission/réception (l'équivalent des concentrateurs de niveau 1 du modèle de base), par rapport auquel le processus aléatoire des mobiles joue le même rôle que le processus des abonnés fixes.

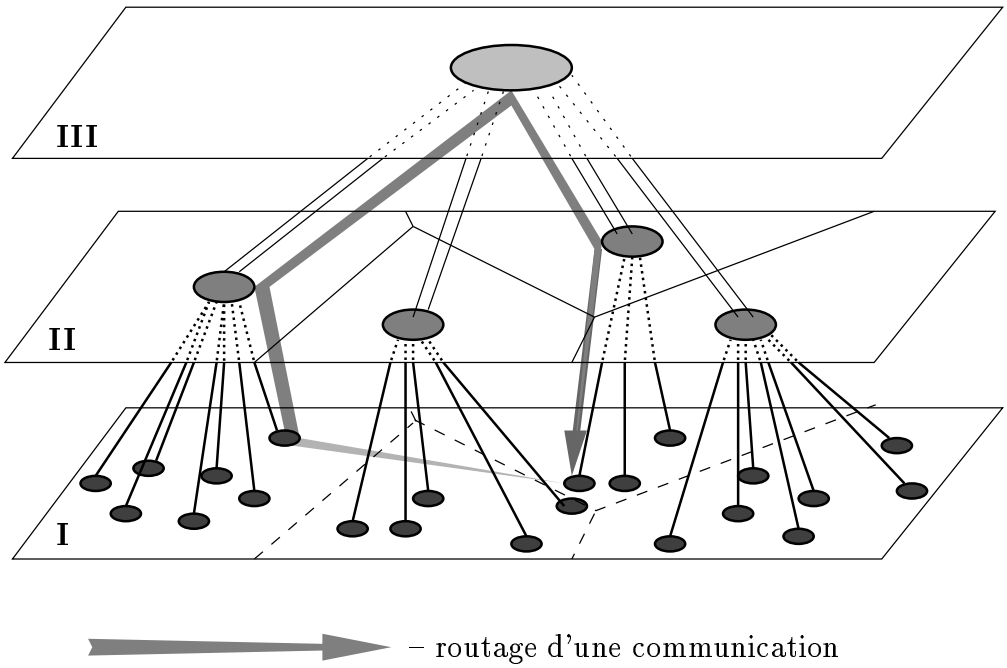


FIG. 6 – *L'établissement d'une communication dans le modèle hiérarchique.*
Routing scheme in the hierarchical model.

Pour les deux premiers points, nous pouvons considérer des processus de Poisson de droites, où chaque droite est caractérisée par les paramètres suivants:

- p est une mesure de distance de la droite à l'origine, positive si la droite est au-dessus de l'origine et négative dans le cas contraire;
- α $(0 \leq \alpha < \pi)$ est l'angle entre la droite et l'axe des abscisses;
- σ est le type de route (autoroute, route à sens unique etc.);
- τ est une description du trafic des mobiles sur la route.

L'espace des phases du processus est donc $\mathbb{R}\times[0,\pi)\times\mathcal{S}\times\mathcal{T}$ où la partie $E = \mathbb{R}\times[0,\pi)\times\mathcal{S}$ représente la position et le type des droites et $\mathcal{T}$ est l'espace des trafics sur les droites (par exemple l'espace des positions des mobiles avec leurs vitesses).

Nous supposons que les trafics sur des routes différentes sont stochastiquement indépendants. Leurs distributions peuvent néanmoins dépendre de la position et du type de la route.

Dans le cas homogène (la distribution du processus est invariante par translation dans le plan), la mesure d'intensité du processus prend la forme:

$$\lambda_r \, dp \, \mathcal{O}(d\alpha) \, Q(\alpha, d\sigma) \, T(\alpha, \sigma, d\tau),$$

où λ_r donne la densité des routes, la mesure de probabilité $\mathcal{O}(d\alpha)$ sur $[0,\pi)$ définit la distribution d'orientation d'une droite typique, $Q(\alpha, d\sigma)$ est la distribution du type σ des routes ayant une inclinaison α, et finalement, $T(\alpha, \sigma, d\tau)$ est la distribution du trafic sur les routes d'inclinaison α et de type σ.

Si la distribution $\mathcal{O}$ d'orientation est uniforme, on obtient un modèle isotrope. Si, par contre, $\mathcal{O}$ a deux atomes: $\{0\}$ et $\{\pi/2\}$ on obtient un modèle de type Manhattan où les masses des atomes montrent les fréquences des routes de chaque direction: horizontale (ou bien Est-Ouest) et verticale (Nord-Sud).

En utilisant la distribution Q, on peut prendre en compte les caractéristiques différentes des routes de directions diverses (à Manhattan les *avenues* sont plus larges que les *rues*).

Le modèle le plus simple pour le trafic de véhicules sur une route, est le processus marqué de Poisson sur la droite. Introduisons, pour chaque droite $D_i = (p_i, \alpha_i, \sigma_i)$ du processus des routes, des coordonnées locales $x^{(i)}$, et considérons un ensemble de processus de Poisson indépendants sur les diverses droites. Le processus τ_i sur une droite D_i fixée a pour espace des phases $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ et pour mesure d'intensité $\lambda_v^{(i)} \, dx^{(j)} \, \mathcal{V}^{(i)}(dv)$. Ici le paramètre $\lambda_v^{(i)}$ est la densité du trafic sur la route et $\mathcal{V}^{(i)}$ est la distribution de la vitesse des véhicules (qui peut être positive ou négative par rapport à la coordonnée locale). Ces deux caractéristiques dépendent, en général, de l'inclinaison et du type de la route D_i. Une réalisation de ce processus a la forme suivante:

$$\tau_i(0) = \sum_j \delta_{(x_j^{(i)}, v_j)}$$

où le premier terme $x_j^{(i)}$ donne la position du véhicule à un instant fixé, par exemple 0, et le deuxième v_j donne sa vitesse (δ_a est une mesure de Dirac en a). Après un temps t, le processus initial se transforme donc en

$$\tau_i(t) = \sum_j \delta_{(x_j^{(i)}+v_j t, v_j)}.$$

Une propriété importante d'un processus de Poisson homogène est que la distribution du processus $\tau_i(t)$ coïncide avec celle de $\tau_i(0)$ (ce résultat est connu sous le nom de Théorème de Barlett, cf. [15, pages 59-60 et 49]).

Dans ce modèle, l'espace $\mathcal{T}$ est un espace de mesures à valeurs entières sur $\mathbb{R}^2$ et $T(\alpha, \sigma, \cdot)$ est la distribution du processus de Poisson de mesure d'intensité $\lambda_v(\alpha, \sigma)\, dx\, \mathcal{V}(\alpha, \sigma)(dv)$ (par définition $\lambda_v(\alpha_i, \sigma_i) = \lambda_v^{(i)}$ et $\mathcal{V}(\alpha, \sigma)(dv) = \mathcal{V}^{(i)}(dv)$).

Dans ce cadre, on cherche à caractériser les grandeurs suivantes:

- le nombre des véhicules dans une cellule typique;
- le nombre de franchissements de frontières de cellules par unité de temps (chaque franchissement de frontière avec appel en cours génère un important trafic de contrôle et de mise à jour de bases de données dit trafic de localisation et de *handover*) et de mise à jour de localisation;
- le nombre des véhicules dans le voisinage de la frontière d'une cellule;
- la distribution du temps passé par un véhicule dans une cellule.

3.9 Exemple d'école de problème d'optimisation

Pour conclure cette section sur la modélisations aléatoire, considérons un réseau hiérarchique avec des capacités limitées sur les liens de chaque cellule de niveau 1 vers le concentrateur de niveau 2 auquel elle est rattachée, et donc des pertes. Supposons qu'on cherche à trouver un compromis entre un accroissement du nombre des concentrateurs de niveau 1, ce qui tendra à diminuer la taille des cellules de niveau 1, et donc le nombre des pertes dûes à la limitation de capacité, et une diminution du nombre des concentrateurs de niveau 1, ce qui amènera une réduction des coûts. Montrons comment formaliser cette question dans le cadre mathématique décrit ci-dessus.

Supposons que la capacité des concentrateurs de niveau 1 soit de K lignes en sortie: ceci signifie que tout appel émanant d'un point de Π_0 situé dans la zone de raccordement d'un concentrateur donné est perdu si K communications émanant d'abonnés (de points de Π_0) situés dans la même zone de raccordement sont déjà en cours. Supposons que les abonnés cherchent à établir des communications indépendamment, si bien que le processus des appels est aussi un processus de Poisson $\Pi_{\mathcal{A}}$, d'intensité $\lambda_{\mathcal{A}}$ et de la distribution correspondante $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}$, obtenu par filtrage de Π_0. Ainsi, si on note $\mathcal{C}_0$ la zone de raccordement typique (c'est la cellule de Voronoï du point de Π_1 en 0 sous la mesure de Palm $\mathbf{P}_1^0$ de ce processus ponctuel),

une mesure naturelle de la probabilité de perte est donc $\mathbf{P}'\{\Pi_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}_0) \geq K\}$, où la distribution $\mathbf{P}'$ est le produit direct des mesures $\mathbf{P}_1^0$ et $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}$. Si $F(\lambda_1)$ est le coût d'un réseau où l'intensité des concentrateurs est λ_1, Q un paramètre de qualité de service, le problème d'optimisation évoqué ci-dessus revient à

Minimiser en λ_1 *la fonction* $F(\lambda_1) + \lambda_{\mathcal{A}} Q\, \mathbf{P}'\{\Pi_{\mathcal{A}}(C(0)) \geq K\}$.

Ainsi nous pouvons aussi exprimer le problème d'optimisation considéré comme la minimisation d'une fonctionnelle des processus ponctuels.

On peut évidemment formuler dans des termes similaires divers problèmes d'optimisation comme par exemple celui de l'optimisation de l'intensité des concentrateurs des divers niveaux dans le modèle hiérarchique (voir [27] pour un exemple de ce type).

4 Résultats analytiques

4.1 Modèle de base de réseaux d'accès

Les pavages aléatoires de Voronoï et de Delaunay sont des objets bien étudiés dans la littérature. Les deux premier moments de la distribution de toutes les caractéristiques principales sont connus (pour le résumé de ces résultats voir [25], [19]). Pour le modèle de base, où les zones des raccordement sont modélisées par les cellules de Voronoï on obtient en particulier les moments de l'aire d'une zone typique, du périmètre de sa frontière etc.

Nous allons maintenant étudier le nombre des abonnés $\mathcal{N}$ et la longueur totale $\mathcal{L}$ des liaisons dans une zone typique.

On se place dans le cadre du modèle de base introduit dans la section 3.1. Il est bien connu (cf. Annexe) que la distribution des caractéristiques d'une zone typique coïncide avec celle construite par rapport au point 0 comme s'il y avait une station en ce point. Notons cette zone $C(0)$. Nous montrons maintenant comment on peut calculer les premiers moments des caractéristiques de $C(0)$. Prenons par exemple le nombre des abonnés dans $C(0)$. Il est donné par

$$\mathcal{N} = \sum_{s_i \in \mathrm{supp}\ \Pi_0} \mathbf{1}\{s_i \in C(0)\}.$$

Si on note $\sigma(\Pi_1)$ la σ-algèbre engendrée par le processus Π_1, on obtient

$$\mathbf{E}\mathcal{N} = \mathbf{E}\,\mathbf{E}\{\mathcal{N} \mid \sigma(\Pi_1)\} = \mathbf{E}\,\mathbf{E}\{\sum_{s_i \in \mathrm{supp}\ \Pi_0} \mathbf{1}\{s_i \in C(0)\} \mid \sigma(\Pi_1)\}.$$

Par application du théorème de Campbell (cf. [29, p.99]), nous obtenons l'expression suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\sum_{s_i \in \mathrm{supp}\ \Pi_0} \mathbf{1}\{s_i \in C(0)\} \mid \sigma(\Pi_1)\} &= \lambda_0 \int \mathbf{1}\{x \in C(0)\} dx \\ &= \lambda_0 |C(0)|, \end{aligned}$$

où $|C(0)|$ est l'aire de la cellule de Voronoï $C(0)$ associée à 0. L'espérance de cette dernière est $1/\lambda_1$ (voir [23]). Ainsi, nous obtenons que le nombre moyen des abonnés servis par un commutateur est égal au rapport de la densité des abonnés sur la densité des stations, ce qui n'est pas étonnant. Ce genre de calcul peut être fait pour n'importe quelle caractéristique additive de l'ensemble des abonnés. Par exemple, pour obtenir l'espérance de la longueur de tous les câbles dans la cellule $C(0)$, il suffit de remplacer l'intégrale $\int \mathbf{1}\{x \in C(0)\}dx$ par $\int l(x)\mathbf{1}\{x \in C(0)\}dx$, où $l(x)$ représente la longueur de câble pour le raccordement de l'abonné situé au point x à la station 0. Par définition, le point x appartient à la cellule $C(0)$ s'il n'y pas de point du processus Π_1 plus proche de 0 que x. Donc, si le cercle $B(x)$ de rayon $|x|$ centré en x ne contient pas de points de Π_1. Par conséquent,

$$\mathbf{E}\int l(x)\mathbf{1}\{x \in C(0)\}\,dx = \mathbf{E}\int l(x)\exp[-\lambda_1\pi|x|^2]\,dx \tag{1}$$

où la dernière intégrale se calcule facilement.

Les deuxièmes moments peuvent aussi s'obtenir par des méthodes similaires, mais l'intégration doit prendre en compte des informations plus détaillées sur la géométrie de la cellule, notamment les conditions pour que la cellule contienne deux points différents fixés du plan. Les résultats suivants correspondant à une distance euclidienne, sont obtenus dans l'article [10]:

Théorème 1 *Les deux premiers moments des variables $\mathcal{N}$ and $\mathcal{L}$ sont donnés par les formules:*

$$(i) \quad \mathbf{E}\mathcal{N} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \tag{2}$$

$$\mathbf{E}\mathcal{L} = \frac{\lambda_0}{2\lambda_1^{3/2}} \tag{3}$$

$$(ii) \quad \mathbf{var}\mathcal{N} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} + 0.280\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2} \tag{4}$$

$$\mathbf{var}\,\mathcal{L} = \frac{\lambda_0}{\pi\lambda_1^2} + 0.147\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^3} \tag{5}$$

$$\mathbf{cov}\,(\mathcal{N},\mathcal{L}) = \frac{\lambda_0}{2\lambda_1^{3/2}} + 0.197\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^{5/2}} \tag{6}$$

Le calcul du comportement de la queue de la distribution des variables $\mathcal{N}$ et $\mathcal{L}$ est plus compliqué. Une borne sur la distribution du diamètre de la cellule de Voronoï conduit aux résultats suivants [10]:

Théorème 2

$$(i) \quad \log(1+0,346\frac{\lambda_1}{\lambda_0}) \le \liminf_{x\to\infty} \frac{-\log \mathbf{P}\{\mathcal{N} > x\}}{x}$$

$$\leq \limsup_{x\to\infty} \frac{-\log \mathbf{P}\{\mathcal{N} > x\}}{x} \leq \log(1 + 4\frac{\lambda_1}{\lambda_0})$$

$$(ii) \quad C_1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{-\log \mathbf{P}\{l > x\}}{x^{2/3}} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{-\log \mathbf{P}\{l > x\}}{x^{2/3}} \leq C_2,$$

$$C_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0^{2/3}}(1 - \kappa + O_1(\kappa^2));$$

$$C_2 = 1,058\frac{\lambda_1}{\lambda_0^{2/3}}(1 - 0,589\sqrt{\kappa} + 0,434\kappa - 0,257\kappa\sqrt{\kappa} + O_2(\kappa^2)),$$

où $|O_1(\kappa^2)| \leq 1,934\kappa^2$ *et* $|O_2(\kappa^2)| \leq 0,248\kappa^2$ *sous la condition* $\kappa = \lambda_1/\lambda_0 \leq 3,546$.

Ce théorème montre que la queue de la distribution du nombre des abonnés dans une zone typique se comporte comme $\mathbf{P}\{\mathcal{N} > x\} \asymp \exp(-\mathrm{Const}\, x)$ dès que la queue de la distribution de la longueur totale des câbles se comporte comme $\mathbf{P}\{\mathcal{L} > x\} \asymp \exp(-\mathrm{Const}\, x^{2/3})$. L'article [10] contient aussi des résultats plus complets, notamment sur le comportement de la queue de la distribution des fonctionnelles où la distance Euclidienne d'un abonné au commutateur correspondant est remplacée par une fonction polynomiale.

Ces résultats peuvent être utiles pour l'estimation statistique de ces variables parce qu'ils permettent de mieux définir la famille des lois théoriques et leurs paramètres (voir § 7).

4.2 Trafic dans le modèle hiérarchique

Les résultats sur la structure du modèle de base sont aussi utiles pour le modèle hiérarchique. Nous utilisons ici les notations des §3.5 et 3.6. En remplaçant les processus Π_0 et Π_1 par les processus Π_i et Π_{i+1} dans les formules ci-dessus, on peut obtenir les caractéristiques probabilistes du nombre des commutateurs d'un niveau i dans la zone typique d'un commutateur du niveau supérieur $i+1$ et la longueur totale des câbles les reliant.

Cette analogie joue un rôle central pour l'étude des flux dans le modèle hiérarchique. Dans le § 3.6, la hauteur de communication entre les stations $x^{(i)}$ et $x^{(j)}$ est définie comme le niveau minimal h tel qu'il existe une cellule de Voronoï de niveau h qui contient ces deux stations (N s'il n'y a pas de telle cellule). Soit $Q(\rho)$ la probabilité pour que deux points fixés du plan $\mathbb{R}^2$, situés à distance ρ l'un de l'autre, appartiennent à une même cellule de Voronoï construite par rapport à un processus poissonien homogène d'intensité 1. Un argument d'échelle montre que la même probabilité, pour un processus de Poisson d'intensité λ, est donnée par $Q(\sqrt{\lambda}\rho)$. Utilisant l'indépendance entre les processus $\Pi_0, \ldots, \Pi_N$, on obtient que la probabilité qu'une communication entre une station $x^{(i)}$ de niveau i et une station $x^{(j)}$ de niveau j à la distance r, ait la hauteur h, peut être exprimée via cette fonction au moyen

des formules suivantes:

$$H_{ij}(r,h) = \begin{cases} 0, & \text{si } h < i \vee j \text{ ou } h = i = j < N; \\ \exp(-\lambda_{i\vee j}\pi r^2), & \text{si } h = i \vee j < N,\ i \neq j; \\ 1, & \text{si } h = i \vee j = N; \end{cases}$$

$$H_{ij}(r,h) = \begin{cases} (1-\exp(-\lambda_{i\vee j}\pi r^2))\, Q(r\sqrt{\lambda_h}) \prod_{m=i\vee j+1}^{h-1}(1-Q(r\sqrt{\lambda_m})), \\ \qquad\qquad \text{si } h = i \vee j+1, \ldots, N-1,\ i \neq j; \\ (1-\exp(-\lambda_{i\vee j}\pi r^2)) \prod_{m=i\vee j+1}^{N-1}(1-Q(r\sqrt{\lambda_m})), \\ \qquad\qquad \text{si } h = N,\ i \neq j; \end{cases}$$

et

$$H_{ii}(r,h) = \begin{cases} Q(r\sqrt{\lambda_h}) \prod_{m=i+1}^{h-1}(1-Q(r\sqrt{\lambda_m})), & \text{si } h = i+1, \ldots, N-1; \\ \prod_{m=i+1}^{N-1}(1-Q(r\sqrt{\lambda_m})), & \text{si } h = N; \end{cases}$$

où $i \vee j = \max\{i,j\}$.

Ici le terme $1-\exp(-\lambda_{i\vee j}\pi r^2)$ est la probabilité que la station $x^{(\min\{i,j\})}$ du niveau inférieur n'appartienne pas à la zone de la station $x^{(\max\{i,j\})}$ du niveau supérieur (ce qui est toujours vrai si $i = j$) et les autres termes sont la probabilité que la zone commune des stations du plus bas niveau se trouve exactement au niveau h.

Cette distribution permet d'exprimer plusieurs caractéristiques du modèle. Pour le premier moment de ces variables, l'observation principale est le fait que les stations de niveau j qui sont liées à un commutateur de niveau i en 0 (sous la distribution de Palm par rapport au processus Π_i, un tel commutateur existe presque sûrement) forment un processus ponctuel $\Psi^0_{ij}(h)$ (non-Poisson) avec mesure d'intensité $\lambda_j H_{ij}(|x|,h)dx$.

Par exemple, le nombre moyen d'appels de niveau $h \geq i$ émis par une station fixée de niveau i pendant une unité du temps vaut

$$M_i(h) = 2\pi \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \int_0^{+\infty} r f_{ij}(r) H_{ij}(r,h)\, dr.$$

Supposons que le processus des demandes de communication est poissonien et notons $\overline{T}_{ij}(r,h)$ est la durée moyenne d'une communication de hauteur h entre une station $x^{(i)}$ de niveau i et une station $x^{(j)}$ de niveau j située à la distance r de la première. Dans un système sans contraintes de capacités, chaque demande de communication est satisfaite. On peut dans ce cas appliquer le résultat sur les files d'attente de capacité infinie, qui montre que le nombre des communications à un instant donné d'un commutateur $x^{(i)}$ vers un commutateur $x^{(j)}$ situé à la distance r, et relié au premier par un circuit de hauteur h, suit en régime stationnaire, une loi de Poisson de paramètre $f_{ij}(r)\,\overline{T}_{ij}(r,h)$ (cf. [16, page 234]).

Le nombre moyen de communications de niveau h demandées par une station de niveau i est donc donné par

$$2\pi \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \int_0^{+\infty} r f_{ij}(r)\, \overline{T}_{ij}(r,h)\, H_{ij}(r,h)\, dr.$$

Le calcul des deuxièmes moments exige la connaissance de caractéristiques plus détaillées de la topologie du réseau et notamment la mesure moment d'ordre deux du processus $\Psi^0_{ij}(h)$ (voir l'Annexe).

Ces estimations permettent également d'estimer les proportions d'appels empruntant un nombre donné de commutateurs dans le réseau.

La fonction $Q(\rho)$ qui intervient dans ces formules ne se calcule que numériquement. On peut quand même donner des bornes et une asymptote de cette fonction en 0:

Lemme 1

$$(i) \quad Q(\rho) = 2\rho^2 \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{\infty} \alpha \exp(-\rho^2 A(\alpha,\phi))\, d\alpha; \tag{7}$$

$$\begin{aligned}(ii) \quad & L(\rho) = \max\{1 - 4\rho/\pi,\ e^{-\pi\rho^2} - \pi\rho(1 - \mathrm{erf}(\sqrt{\pi}\rho))\} \\ & \leq Q(\rho) \leq e^{-\pi\rho^2} + \frac{\pi\rho}{\sqrt{2}} e^{-\pi\rho^2/2} \mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\rho\right) = U(\rho);\end{aligned} \tag{8}$$

$$(iii) \quad \textit{la fonction } Q \textit{ est convexe et } Q(\rho) = 1 - \frac{4}{\pi}\rho + o(\rho)(\rho \downarrow 0), \tag{9}$$

où $A(\alpha,\phi)) = \alpha \sin\phi + \alpha^2(\pi - \phi)$

$$+(\alpha^2 + 1 - 2\alpha\cos\phi)\left(\pi - \arccos\frac{1 - \alpha\cos\phi}{\sqrt{\alpha^2 + 1 - 2\alpha\cos\phi}}\right)$$

et $\mathrm{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$

Démonstration. Deux points du plan $(0,0)$ et $(0,\rho)$ appartiennent à la même cellule de Voronoï s'il existe un point P du processus dans l'intersection des frontières des deux cercles centrés aux points $(0,0)$ et $(0,\rho)$ respectivement, et si l'intérieur de chacun de ces deux cercles ne contient aucun point du processus. Si $\alpha\rho$ est la distance de l'origine à P, alors la probabilité pour qu'aucun point du processus ne se trouve à l'intérieur de ces cercles s'exprime comme $\exp(-A(\alpha,\phi))$, où ϕ est l'angle en coordonnées polaires de P et $A(\alpha,\phi)$ est l'aire de l'union de ces cercles. D'un côté, cette aire ne dépasse pas la somme des aires des cercles. D'autre part elle est toujours plus grande que l'aire du cercle maximal. Cela donne (i) et les bornes

$$\begin{aligned} & e^{-\pi\rho^2} - \pi\rho(1 - \mathrm{erf}(\sqrt{\pi}\rho)) \leq Q(\rho) \\ & \leq e^{-\pi\rho^2} + \frac{\pi\rho}{\sqrt{2}} e^{-\pi\rho^2/2} \mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\rho\right) = L(\rho). \end{aligned}$$

Pour obtenir la borne inférieure dans (ii) et (iii), considérons un processus ponctuel N sur l'axe des abscisses formé par les points d'intersection avec les arêtes du pavage de Voronoï. Soit $T_1(N)$ le premier point strictement positif du processus N. Comme le pavage est formé à partir d'un processus stationnaire, N est aussi stationnaire. Donc, en appliquant la formule d'inversion de Ryll-Nardzewski et Slivnyak (cf. [6, page 24, Formule (4.2.4b)]) nous trouvons que

$$Q(\rho) = \mathbf{P}\{T_1(N) > \rho\} = \lambda_N \int_\rho^\infty \mathbf{P}_0\{T_1(N) > x\}dx,$$

où λ_N est intensité du processus N qui vaut $4/\pi$ (cf. [18, Formule (7.22)]). Par conséquent, la deuxième dérivée de la fonction $Q(\rho)$ existe et est égale à la densité du premier point $T_1(N)$ sous la distribution de Palm $\mathbf{P}_0$ ou, autrement dit, à la densité de la distribution de la longueur de la corde typique du processus N. Donc la tangente en 0 donne la borne inférieure de la fonction $Q(\rho)$, ce qui prouve (ii) et (iii).

□

Remarque 1 La formule (7) a été obtenue pour la première fois dans [11, Formules (12) et (13)]. La fonction $1 - Q(\rho)$ est aussi connue comme *la fonction de distribution de contact linéaire* (linear contact distribution function) et a été utilisée dans [29, page 180] et [24] pour évaluer numériquement la distribution de la longueur d'une corde typique obtenue par l'intersection de la mosaïque de Voronoï stationnaire avec une droite fixée.

La fonction $Q(\rho)$ ainsi que ses bornes sont données en Figure 7.

4.3 Raccordements multiples

La structure purement hiérarchique reste assez loin de la réalité. Pour des raisons de fiabilité, les stations peuvent être liées à plus d'un commutateur de niveau supérieur. Nous avons donc considéré le modèle où l'on raccorde chaque station de niveau i ($i \geq 1$) non seulement à la station de niveau $i+1$ la plus proche, mais aussi à la deuxième, troisième etc. plus proche (voir la Figure 5).

Soient $\mathcal{N}_k(i)$ et $\mathcal{L}_k(i)$ le nombre et la longueur totale des liens entre une station typique du niveau i et la k-ième station de niveau $i+1$ la plus proche (avec $\mathcal{N}_1(0) = \mathcal{N}$ et $\mathcal{L}_1(0) = \mathcal{L}$). Pour calculer les moyennes de ces variables, il faut remplacer le facteur $\exp[-\lambda_{i+1}\pi|x|^2]$ par

$$(\lambda_{i+1}\pi|x|^2)^{k-1}/(k-1)!\ \exp[-\lambda_{i+1}\pi|x|^2]$$

dans la Formule (1), car maintenant le cercle $B(x)$ contient exactement $k-1$ points du processus Π_{i+1}. Pour la distance euclidienne $l(x) = |x|$, cela donne les moyennes:

$$\mathbf{E}\mathcal{N}_k(i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}};$$

$$\mathbf{E}\mathcal{L}_k(i) = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\pi}\lambda_{i+1}^{3/2}} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(k)} = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}^{3/2}} \frac{(2k-1)!!}{2^k(k-1)!}$$

ce qui correspond bien à (2–3) pour $k = 1$. La dépendance en fonction des intensités est donc identique à celle du cas $k = 1$, à une constante multiplicative près.

Le calcul des covariances, bien que plus compliqué, peut aussi se faire par le schéma décrit dans [10].

4.4 Modèles de communications mobiles

Dans la section 3.8, nous avons proposé un modèle d'un système de communications mobiles où les routes sont représentées par un ensemble poissonien Δ de droites marquées par leur trafics. Nous nous intéressons ici à une caractéristique intégrale τ du trafic, exprimée comme une variable aléatoire réelle non-négative, dont la distribution T dépend du type et de la position de la route considérée.

Soit τ_D une famille de variables aléatoires de distribution T_D, marquée par $D \in E = \mathbb{R} \times [0, \pi) \times \mathcal{S}$ – l'espace des phases du processus Δ des routes. Soit $\phi_D(t)$ la fonction caractéristique de la distribution T_D. Étant donné une réalisation du processus des routes $\Delta = \sum_i \delta_{D_i}$ dans l'espace E, considérons un système de variables aléatoires $\tau_i = \tau(D_i)$ indépendantes, associées à l'ensemble de droites $\{D_i\}$. Ceci n'est qu'une autre présentation du processus introduit dans la section 3.8.

Lemme 2 *Soit $\Sigma = \sum_i \tau_i$ une fonctionnelle additive de l'ensemble poissonien de droites D_i. Sa fonction caractéristique est donnée par*

$$\Phi(t) = \exp\left\{\int_E (\phi_D(t) - 1)\, M(dD)\right\} \tag{10}$$

où $M(dD) = \lambda_r\, dp\, \mathcal{O}(d\alpha)\, Q(\alpha, d\sigma)$ est la mesure d'intensité du processus Δ. En particulier, si les intégrales ci-dessous existent, alors

$$\mathbf{E}\Sigma = \int_E \mathbf{E}^T \tau_D\, M(dD) \text{ et} \tag{11}$$

$$\mathbf{var}\Sigma = \int_E \mathbf{E}^T \tau_D^2\, M(dD). \tag{12}$$

où $\mathbf{E}^T$ est l'espérance par rapport à la distribution T_D.

Démonstration. Utilisant l'indépendance de l'ensemble τ_i, on peut écrire

$$\Phi(t) = \mathbf{E} \prod_{D_i \in \operatorname{supp} \Delta} \phi_{D_i}(t)$$

ce qui est une forme de la fonctionnelle génératrice du processus Δ. On obtient le résultat en appliquant la formule (21) de l'Annexe.

□

Remarque 2 On peut remplacer la fonction caractéristique $\phi_D(t)$ par la transformée de Laplace de la distribution des variables aléatoires τ_i. Dans ce cas la formule (10) donne la transformée de Laplace de la fonctionnelle Σ, si cette dernière existe.

Comme exemple de fonctionnelle additive, considérons le nombre de mobiles qui se trouvent dans la zone d'un commutateur à l'instant donné et le nombre de mobiles traversant sa frontière par unité de temps.

Soit Z un domaine dans le plan $\mathbb{R}^2$. Soit

$$hit(Z) \stackrel{def}{=} \{(p,\alpha) \in \mathbb{R}\times[0,\pi) : \ la\ droite\ (p,\alpha)\ intersecte\ Z\}.$$

Pour $D = (p,\alpha,\sigma)$, avec $(p,\alpha) \in hit(Z)$ définissons τ_D comme le nombre $\mathcal{N}(Z)$ de véhicules en cours de communication, qui se trouvent dans l'intersection de la droite (p,α) avec Z à l'instant considéré, et posons $\tau_D = 0$ si $(p,\alpha) \notin hit(Z)$. Appliquant maintenant le Lemme 2, on obtient la distribution et les moments du nombre de véhicules en cours de communication dans la zone Z, en fonction du modèle de trafic choisi.

Considérons, par exemple, le modèle de trafic décrit dans la section 3.8. Les positions des mobiles sur chaque route D_i forment un processus de Poisson avec mesure d'intensité $\lambda_v^{(i)} dx^{(i)} \mathcal{V}^{(i)}(\bullet)$. Sans perte de généralité, on compte seulement les véhicules en cours de communication à l'instant considéré. Soit $l(p,\alpha)$ la longueur de l'intersection de la droite (p,α) avec Z. Le nombre de véhicules sur cette partie de la droite suit une distribution de Poisson de paramètre $\lambda_v(\alpha,\sigma)l(p,\alpha)$ et en prenant

$$\phi_D(t) = \exp\{\lambda_v(\alpha,\sigma)l(p,\alpha)(e^t - 1)\}$$

dans (10), on obtient la transformée de Laplace de $\mathcal{N}(Z)$.

Dans le cas le plus simple, d'un système isotrope de routes et de trafics dépendant seulement du type de la route, la Formule (10) se transforme en

$$\Phi(t) = \exp\left\{\frac{\lambda_r}{\pi}\int_{\mathcal{S}} Q(d\sigma)\int_{hit(Z)} (\exp\{\lambda_v(\sigma)l(p,\alpha)(e^t-1)\} - 1)\, d\alpha dp\right\} \tag{13}$$

et les moments de la distribution de $\mathcal{N}(Z)$ sont donnés par

$$\mathbf{E}\mathcal{N}(Z) = \lambda_r|Z|\int_{\mathcal{S}} \lambda_v(\sigma)Q(d\sigma) \tag{14}$$

$$\mathbf{var}\mathcal{N}(Z) = \mathbf{E}\mathcal{N}(Z) + \frac{\lambda_r}{\pi}\int_{\mathcal{S}} \lambda_v^2(\sigma)Q(d\sigma)\int_{hit(Z)} l^2(p,\alpha)\, d\alpha dp. \tag{15}$$

Nous avons utilisé ici la propriété élémentaire de géométrie intégrale suivante: $\int_{hit(Z)} l(p,\alpha)\, d\alpha dp$ vaut π fois l'aire $|Z|$ du domaine Z.

Si Z est la cellule typique de Voronoï $\mathcal{C}_0$ d'un processus Π_c de concentrateurs (rappelons que $\mathcal{C}_0$ est la cellule avec le noyau 0), on peut obtenir les moments par rapport à la distribution produit des processus Δ et Π_c.

Soit $\sigma(\Pi_c)$ la σ-algèbre engendrée par le processus Π_c. On a $\mathbf{E}|\mathcal{C}_0| = 1/\lambda_c$ [23]. On obtient de (14) la relation suivante

$$\mathbf{E}\mathcal{N}(\mathcal{C}_0) = \mathbf{E}\,\mathbf{E}[\mathcal{N}(\mathcal{C}_0) \mid \sigma(\Pi_c)] = \frac{\lambda_r}{\lambda_c}\int_{\mathcal{S}} \lambda_v(\sigma)Q(d\sigma).$$

Pour le deuxième moment, la formule

$$\mathbf{var}\mathcal{N}(\mathcal{C}_0) = \mathbf{E}\,\mathbf{var}[\mathcal{N}(\mathcal{C}_0) \mid \sigma(\Pi_c)] + \mathbf{var}\,\mathbf{E}[\mathcal{N}(\mathcal{C}_0) \mid \sigma(\Pi_c)] \tag{16}$$

est utile. Introduisons

$$\overline{\lambda_v} \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{S}} \lambda_v(\sigma)Q(d\sigma) \text{ et } \overline{\lambda_v^2} \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{S}} \lambda_v^2(\sigma)Q(d\sigma).$$

Prenant en compte que $\mathbf{var}|\mathcal{C}_0| = 0,280/\lambda_c^2$ [11], la Formule (15) donne

$$\mathbf{var}\mathcal{N}(\mathcal{C}_0) = 0,280\frac{\lambda_r\overline{\lambda_v}}{\lambda_c^2} + \frac{\lambda_r\overline{\lambda_v}}{\lambda_c} + \frac{\lambda_r\overline{\lambda_v^2}}{\pi}\mathbf{E}\int_{hit(\mathcal{C}_0)} l^2(p,\alpha)\,d\alpha dp$$

Pour calculer la dernière espérance, remarquons qu'à cause de l'invariance par rotation, l'intégrale divisée par π vaut

$$\mathbf{E}\int_{hit(\mathcal{C}_0)} l^2(p,0)\,dp = \mathbf{E}\int_0^\infty dp \int\int \mathbf{1}\{(p,x_1)\in\mathcal{C}_0,\ (p,x_2)\in\mathcal{C}_0\}\,dx_1dx_2$$

Les deux points (p,x_1) et (p,x_2) sur la droite $(p,0)$ appartiennent à la cellule $\mathcal{C}_0$ si l'union de deux disques centrés en ces points et ayant l'origine sur leurs frontières ne contient pas de commutateurs de Π_c. Si $S(x_1,x_2,p)$ est la surface de cette union, on a

$$\frac{1}{\pi}\mathbf{E}\int_{hit(\mathcal{C}_0)} l^2(p,\alpha)\,d\alpha dp = \int_0^\infty dp \int\int \exp\{-\lambda_c S(x_1,x_2,p)\}\,dx_1dx_2.$$

Soit ψ_i l'angle polaire du point (p,x_i) $(i=1,2)$. Dans ces coordonnées

$$S(\psi_1,\psi_2,p) = \frac{p^2 s(\psi_1,\psi_2)}{\cos^2\psi_1\cos^2\psi_2}, \text{ où}$$
$$s(\psi_1,\psi_2) = \sin|\psi_2-\psi_1|\cos\psi_1\cos\psi_2 + (\frac{\pi}{2}-\psi_1)\cos^2\psi_2 + (\frac{\pi}{2}+\psi_2)\cos^2\psi_1.$$

On peut maintenant effectuer l'intégration par rapport à p qui nous amène à l'intégrale

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\lambda_c^{3/2}}\int_0^{\pi/2} d\psi_2 \int_{-\psi_2}^{\psi_2} \frac{\cos\psi_1\cos\psi_2 d\psi_1}{s(\psi_1,\psi_2)^{3/2}}$$

qui ne se calcule que numériquement.

On obtient finalement que

$$\mathbf{var}\mathcal{N}(\mathcal{C}_0) = \frac{\lambda_r\overline{\lambda_v}}{\lambda_c} + 0,672\frac{\lambda_r\overline{\lambda_v^2}}{\lambda_c^{3/2}} + 0,280\frac{\lambda_r\overline{\lambda_v}}{\lambda_c^2}$$

Un autre problème de ce genre est le nombre de franchissements de la frontière d'une zone par les véhicules en cours de communication.

Soit $A(l,\beta)$ un segment de longueur l et d'inclinaison (l'angle entre la droite le contenant et l'axe des abscisses) β $(0 \leq \beta < \pi)$. Prenant pour τ_D, $D = (p,\alpha,\sigma)$ le nombre de véhicules en cours de communication qui franchissent le point d'intersection de la route (p,α) du type σ avec $A(l,\beta)$ pendant une unité de temps (par définition $\tau_D = 0$ si cette intersection est vide), on peut appliquer le Lemme 2 pour obtenir la transformée de Laplace de la distribution du nombre total de franchissements du segment par unité de temps. Si la transformée de Laplace $\phi_D(t)$ de τ_D ne dépend que de α et σ, ainsi que des translations le long de la route, on obtient

Théorème 3 *La transformée de Laplace du nombre total $\mathcal{F}(l,\beta)$ de franchissements du segment $A(l,\beta)$ par unité de temps est donnée par*

$$\Phi(t) = \exp\left\{l\lambda_r \int_{\mathcal{S}}\int_0^\pi (\psi_{(\alpha,\sigma)}(t) - 1)\,\sin|\alpha-\beta|\,\mathcal{O}(d\alpha)Q(d\sigma)\right\} \tag{17}$$

Les deux premiers moments de la distribution de $\mathcal{F}(l,\beta)$ sont donnés par

$$(i) \quad \mathbf{E}\mathcal{F}(l,\beta) = l\lambda_r \int_{\mathcal{S}}\int_0^\pi M_1(\alpha,\sigma)\sin|\alpha-\beta|\,\mathcal{O}(d\alpha)Q(d\sigma); \tag{18}$$

$$(ii) \quad \mathbf{var}\mathcal{F}(l,\beta) = l\lambda_r \int_{\mathcal{S}}\int_0^\pi M_2(\alpha,\sigma)\sin|\alpha-\beta|\,\mathcal{O}(d\alpha)Q(d\sigma), \tag{19}$$

où $M_k((\alpha,\sigma)$ sont les k-ièmes moments ($k = 1,2$) des nombres de franchissements d'un point fixé sur la route d'inclinaison α et de type σ.

Montrons maintenant comment appliquer ces résultats au cas de trafics poissoniens sur des routes isotropes.

Supposons que les positions des véhicules en communication sur une route (p,α,σ) forment un processus de Poisson d'intensité $\lambda_v(\sigma)$, et que leurs vitesses sont distribuées indépendamment avec la loi $\mathcal{V}_\sigma(dv)$. Introduisons les coordonnées locales x sur la route. Les mobiles qui passent par l'origine pendant une unité de temps sont ceux dont les caractéristiques se trouvent dans l'ensemble

$$\{(x,v):\ 0 \leq x \leq -v \text{ ou } -v \leq x \leq 0\}$$

de l'espace des phases du processus de Poisson des mobiles marqués par leurs vitesses. La mesure d'intensité de ce processus prend la valeur

$$\lambda_v(\sigma)\int_0^\infty \mathcal{V}_\sigma(\{|v| \geq x\})dx \stackrel{def}{=} \lambda_v(\sigma)\mathbf{E}_\sigma|V|$$

sur cet ensemble. Par conséquent, le nombre de franchissements de l'origine suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_v(\sigma)\mathbf{E}_\sigma|V|$ – la moyenne de la valeur absolue de la vitesses sur une route de type σ. Au vu de la stationnarité du processus des mobiles, le nombre de franchissements de tout autre point (par exemple le point d'intersection de la route avec le segment $A(l,\beta)$, s'il y en a un) suit la même loi sur $\mathbf{N}$.

Il reste à appliquer le Théorème 3 pour trouver que

$$\mathbf{E}\mathcal{F}(l,\beta) = \frac{2}{\pi} l\lambda_r \overline{\lambda_v|V|} \text{ et}$$
$$\mathbf{var}\mathcal{F}(l,\beta) = \frac{2}{\pi} l\lambda_r (\overline{\lambda_v|V|} + \overline{\lambda_v^2\mathbf{E}_\sigma^2|V|});$$

où

$$\overline{\lambda_v|V|} \stackrel{def}{=} \int \lambda_v(\sigma)\mathbf{E}_\sigma|V|Q(d\sigma)$$

est la vitesse moyenne de tous les véhicules et

$$\overline{\lambda_v^2\mathbf{E}_\sigma^2|V|} \stackrel{def}{=} \int (\lambda_v(\sigma)\mathbf{E}_\sigma|V|)^2 Q(d\sigma).$$

On peut maintenant utiliser la même technique pour généraliser la formule du premier moment au cas de l'intersection avec une courbe de classe $\mathcal{C}_1$ par morceau, aléatoire ou non.

Corollaire 1 *Le nombre moyen de franchissements d'une courbe Γ aléatoire de classe $\mathcal{C}_1$ par morceau est égal à*

$$\mathbf{E}\mathcal{F}(\Gamma) = \frac{2}{\pi}\mathbf{E}|\Gamma|\lambda_r\overline{\lambda_v|V|}$$

où $|\Gamma|$ est la longueur de Γ. En particulier, le nombre moyen de franchissements de la cellule de Voronoï typique par rapport au processus Π_c des commutateurs est donnée par

$$\mathbf{E}\mathcal{F}(\mathcal{C}_0) = \frac{8\lambda_r}{\pi\sqrt{\lambda_c}}\overline{\lambda_v|V|}$$

Malheureusement la variance du nombre de franchissements de la frontière d'une zone n'est pas la somme des variances des nombres de franchissements de ses arêtes, car ces variables ne sont pas indépendantes. On peut quand même donner des bornes de cette variance.

Considérons une route D qui coupe une zone convexe Z et soit a_1 et a_2 les point d'intersection de la route avec la frontière de Z (presque sûrement, il y a deux points d'intersection seulement). Soit μ_i le nombre de franchissements du point a_i par unité de temps ($i = 1, 2$). En prenant pour caractéristique τ_D de la route la somme $\mu_1 + \mu_2$ – le nombre total des franchissements de la frontière de la zone Z le long de la route D par unité de temps, on peut appliquer la formule (12) pour obtenir la deuxième moment.

Remarquons que pour deux nombres non-négatifs, μ_1 et μ_2 on a toujours

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 \leq (\mu_1 + \mu_2)^2 \leq 2(\mu_1^2 + \mu_2^2).$$

Donc le deuxième moment du nombre de franchissements est borné par

$$2M_2(D) \leq \mathbf{E}\tau_D^2 \leq 4M_2(D)$$

où $M_2(D)$ est le nombre de franchissements d'un point fixé sur la route D – la variable intervenant dans la formule (19). Le Théorème 3 nous permet d'obtenir le résultat suivant:

Corollaire 2 *La variance du nombre total de franchissements d'une zone convexe Z est bornée par*

$$2F \leq \mathbf{var}\mathcal{F}(Z) \leq 4F,$$
$$F = \lambda_r \int_{\mathcal{S}} \int_0^{\pi} M_2(\alpha,\sigma) b_Z(\alpha)\, \mathcal{O}(d\alpha) Q(d\sigma);$$

où $b_Z(\alpha)$ est la largeur de la zone Z dans la direction α (par définition, $b_Z(\alpha)$ est la longueur de la projection de Z sur une droite de direction $\pi+\alpha$). En particulier, dans le cas isotrope

$$F = \lambda_r \pi^{-1} P(Z) \overline{M_2},$$

où $\overline{M_2} \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{S}} M_2(\sigma) Q(d\sigma)$ et $P(Z) = \int_0^{\pi} b_Z(\alpha) d\alpha$ est le périmètre de Z.

En appliquant la Formule (16), on trouve aussi

Corollaire 3 *La variance du nombre total de franchissements d'une zone typique $\mathcal{C}_0$ du pavage de Voronoï du processus Π_c des concentrateurs est bornée par*

$$\frac{\lambda_r}{\pi}\left[\frac{0,945\overline{M_1}}{\lambda_c} + \frac{8\overline{M_2}}{\sqrt{\lambda_c}}\right] \leq \mathbf{var}\mathcal{F}(\mathcal{C}_0) \leq \frac{\lambda_r}{\pi}\left[\frac{0,945\overline{M_1}}{\lambda_c} + \frac{16\overline{M_2}}{\sqrt{\lambda_c}}\right],$$

où $\overline{M_k} \stackrel{def}{=} \int_{\mathcal{S}} M_k(\sigma) Q(d\sigma)$, $k = 1,2$ et λ_c est l'intensité du processus des concentrateurs. En particulier, dans le modèle de trafic poissonien

$$\overline{M_1} = \overline{\lambda_v |V|} = \int_{\mathcal{S}} \lambda_v(\sigma) \mathbf{E}_\sigma |V| Q(d\sigma) \text{ et}$$
$$\overline{M_2} = \overline{\lambda_v |V|} + \overline{\lambda_v^2 \mathbf{E}_\sigma^2 |V|} = \int_{\mathcal{S}} \left(\lambda_v(\sigma)\mathbf{E}_\sigma|V| + (\lambda_v(\sigma)\mathbf{E}_\sigma|V|)^2\right) Q(d\sigma).$$

5 Au delà de la modélisation analytique

Dans le cas non-homogène ou non-poissonien (mais aussi dans bien des questions simples du cas poissonien homogène), les méthodes analytiques de la section précédente sont difficiles, voire impossibles à mettre en œuvre. Deux méthodes complémentaires ont été étudiées: la simulation pour les cas où les formules analytiques ne sont pas connues, et les méthodes de changement d'espace pour l'analyse du cas non-homogène. Le rapprochement avec des statistiques sur le réseau réel permet également de tester les méthodes proposées.

5.1 Simulation et gradients

Si les processus ponctuels considérés sont ergodiques, la distribution (dite de Palm) d'un représentant typique d'une classe d'objet (la zone de desserte d'un commutateur typique ou bien les caractéristiques de son fonctionnement) peut aussi être calculée par *simulation*, comme le résultat d'une moyenne sur un grand nombre de commutateurs du système. Dans ce cas, une seule réalisation du processus est suffisante pour déterminer ces distributions. Cela correspond bien à la situation usuelle où l'on a une seule réalisation (le réseau existant) mais qui contient néanmoins toute l'information nécessaire pour obtenir ses statistiques.

Nous nous proposons d'illustrer cette approche par simulation dans le cadre des problèmes d'optimisation du type de celui évoqué dans la section 3.9, qui reste un problème assez complexe, même dans le cas poissonien.

L'idée générale consiste à mettre en œuvre des algorithmes de type "steepest descent" couplés à des algorithmes de simulation fondés sur le théorème ergodique. La méthode de calcul des gradients que nous développons ci-dessous, est celle proposée dans l'article [7]. Ces résultats sont une généralisation de la technique d'analyse de perturbation de processus ponctuels sur $\mathbb{R}$, connue sous le nom de RPA (Rare Perturbation Analysis – voir la monographie [12]).

Considérons une famille de processus de Poisson marqués Π_λ. L'espace des phases de Π_λ est le produit $\mathbb{R}^d \times M$ où $\mathbb{R}^d$ est *l'espace des positions* et M est *l'espace des marques*. La mesure d'intensité prend la forme $\lambda\, dx\, \mu(dm)$, où dx est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ et $\mu(dm)$ est une mesure de probabilité sur M qui peut être aussi interprétée comme la distribution de Palm d'une marque typique. On voit que le processus Π_λ est homogène dans l'espace des positions, avec l'intensité λ.

Soit F une fonctionnelle du processus Π_λ. Nous nous intéressons au comportement de la fonction $\mathbf{E}F(\Pi_\lambda)$, vue comme une fonction du paramètre d'intensité λ. En pratique on estime $\mathbf{E}F(\Pi_\lambda)$ par le théorème ergodique, en moyennant les valeurs de F sur tous les points du processus dans une fenêtre d'observation W. Pour pouvoir appliquer cette approche ergodique, nous supposons que F a un caractère local par rapport à la taille de la fenêtre. Plus précisément, pour chaque réalisation $\Pi_\lambda(\omega)$ du processus, nous supposons qu'il existe une boule $B(\Pi_\lambda(\omega)) \subset \mathbb{R}^d$ centrée en l'origine, de rayon qui dépend généralement de ω, telle qu'un changement de la configuration $\Pi_\lambda(\omega)$ à l'extérieur de la boule $B(\Pi_\lambda(\omega))$ ne change pas la valeur de la fonctionnelle F.

Définissons une famille de translations $\{\theta_x,\ x \in \mathbb{R}^d\}$ dans l'espace des phases par la règle $\theta_x(y,m) \stackrel{def}{=} (y-x,m)$. Si notre processus est ergodique par rapport à la famille $\{\theta_x\}$, un estimateur de la grandeur $\mathbf{E}F(\Pi_\lambda)$ est donné par le théorème ergodique:

$$\frac{1}{\lambda|W|} \sum_{x_i \in W} F(\theta_{x_i}\Pi_\lambda),$$

où $|W|$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble W, et où la somme porte sur tous les $(x_i, m_i) \in \operatorname{supp} \Pi_\lambda$ tels que $x_i \in W$.

Comme nous allons le voir, le théorème ergodique permet d'estimer non seulement $\mathbf{E}F(\Pi_\lambda)$ au point $\lambda = \lambda_0$, mais aussi de connaître les variations de la fonction $\mathbf{E}F(\Pi_\lambda)$ en fonction du paramètre λ au voisinage de λ_0. Pour cela on utilise la formule

$$\frac{d}{d\rho}\mathbf{E}F(\Pi_\lambda) = \mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^d}\int_M [F(\Pi_\lambda + \delta_{(x,m)}) - F(\Pi_\lambda)]\,\mu(dm)\,dx \tag{20}$$

obtenue dans [7] (voir aussi [5], [3] et [20]).

Comme $F(\Pi_\lambda(\omega))$ ne dépend que des points dans $B(\Pi_\lambda(\omega))$, on peut restreindre l'intégration en x à $B(\Pi_\lambda(\omega))$ et réécrire (20) comme

$$\frac{d}{d\rho}\mathbf{E}F(\Pi_\lambda) = \mathbf{E}\int_{B(\Pi_\lambda)}\int_M |B(\Pi_\lambda)|\,[F(\Pi_\lambda + \delta_{(x,m)}) - F(\Pi_\lambda)]\,\mu(dm)\frac{dx}{|B(\Pi_\lambda)|}$$

Remarquons que $\frac{dx}{|B(\Pi_\lambda)|}$ est une mesure de probabilité uniforme sur l'ensemble $B(\Pi_\lambda)$, si bien que la partie droite de la dernière formule correspond à l'espérance:

$$\mathbf{E}'|B(\Pi_\lambda)|\,[F(\Pi_\lambda + \delta_{(U,m)}) - F(\Pi_\lambda)]$$

du nouveau processus $\Pi'_\lambda \stackrel{def}{=} \Pi_\lambda + \delta_{(U,m)}$ obtenu par l'addition à chaque configuration du processus Π_λ d'un point (U,m) uniformément positionné dans la boule $B(\Pi_\lambda)$ et avec une marque indépendante distribuée selon $\mu(dm)$. Dans [7], on montre que ce nouveau processus est aussi ergodique et donc on peut prendre comme un estimateur de la dérivée $\frac{d}{d\rho}\mathbf{E}F(\Pi_\lambda)$ la quantité:

$$\frac{1}{\lambda|W|}\sum_{x_i\in W}|B(\theta_{x_i}\Pi_\lambda)|\,[F(\theta_{x_i}(\Pi_\lambda + \delta_{(U_i,m_i)})) - F(\theta_{x_i}\Pi_\lambda)],$$

où U_i est uniformément distribué dans la boule $B(\theta_{x_i}\Pi_\lambda)$ définie par la configuration translatée.

Pratiquement, l'intégrale dans (20) peut être estimée à partir d'un seul point (U,m) tiré uniformément dans $B(\Pi_\lambda)$, ce qui peut être assez grossier. Pour avoir un estimateur plus fin, on modifie la dernière expression comme suit:

$$\frac{1}{\lambda|W|}\sum_{x_i\in W}|B(\theta_{x_i}\Pi_\lambda)|\,\frac{1}{N_i}\sum_{j=1}^{N_i}[F(\theta_{x_i}(\Pi_\lambda + \delta_{(U_{ij},m_{ij})})) - F(\theta_{x_i}\Pi_\lambda)].$$

Ici les U_{ij} sont des points indépendants uniformément distribués dans la boule $B(\theta_{x_i}\Pi_\lambda)$ et leur nombre N_i peut généralement dépendre de la taille de cette boule.

Les algorithmes décrits ci-dessus appartiennent à la famille des méthodes dites "RPA positive", qui consiste en l'addition d'un point aléatoire à une configuration du processus. On peut facilement obtenir les algorithmes de type "RPA négatif", où on enlève un point pour estimer la dérivée.

Pour cela on réécrit la Formule (20) comme

$$\frac{d}{d\rho}\mathbf{E}F(\Pi_\lambda) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^d}[F(\Pi_\lambda) - F(\Pi_\lambda - \delta_{(x,m)})]\,\Pi_\lambda(dx\times dm)$$

à l'aide de la formule de Mecke (22) qui peut aussi se voir comme une forme du théorème de Slivnyak [28]. Donc un autre type d'estimateur de cette dérivée est donné par:

$$\frac{1}{\lambda^2|W|}\sum_{x_i,x_j\in W}[F(\theta_{x_i}\Pi_\lambda) - F(\theta_{x_i}\Pi_\lambda - \delta_{(x_j,m_j)})].$$

Ici, après avoir translaté la configuration Π_λ de telle façon que son point x_i soit en zéro, on enlève le point (x_j, m_j) et on prend la différence des valeurs de la fonction F avec et sans ce point.

L'avantage de ces méthodes de perturbation est qu'il suffit d'avoir une seule configuration du processus pour estimer la dépendance d'une fonctionnelle par rapport au paramètre d'intensité λ. Par exemple, il est envisageable d'appliquer l'algorithme et les formules sur le réseau réel actuel pour calculer les gradients.

Les formules des dérivées d'ordre supérieur obtenues dans [20] se transforment facilement en estimateurs de ses quantités. Par exemple, la formule

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\lambda^2}\mathbf{E}F(\Pi_\lambda) \quad = \quad & \mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^{2d}}\int_{M^2}[F(\Pi_\lambda + \delta_{(x_1,m_1)} + \delta_{(x_2,m_2)}) \\ & -2F(\Pi_\lambda + \delta_{(x_1,m_1)}) + F(\Pi_\lambda)]\,\mu(dm_1)\mu(dm_2)\,dx_1dx_2\end{aligned}$$

donne l'estimateur suivant pour la deuxième dérivée:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda|W|}\sum_{x_i\in W}|B(\theta_{x_i}\Pi_\lambda)|^2\,[F(\theta_{x_i}(\Pi_\lambda + \delta_{(U_{i1},m_{i1})} + \delta_{(U_{i2},m_{i2})})) \\ -2F(\theta_{x_i}(\Pi_\lambda + \delta_{(U_{i1},m_{i1})})) + F(\theta_{x_i}\Pi_\lambda)],\end{aligned}$$

sous la condition que $B(\Pi_\lambda + \delta_{(x,m)}) \subseteq B(\Pi_\lambda)$ pour chaque (x,m) tel que $x \in B(\Pi_\lambda)$.

Comme illustration des méthodes de type RPA, considérons le problème d'estimation d'une caractéristique géométrique $v(\mathcal{C}_0)$ de la cellule de Voronoï $\mathcal{C}_0$ en 0 construite par rapport au processus Π_c.

Comme fonctionnelle F, on peut prendre par exemple

- $F(\Pi_c) = \exp(itv(\mathcal{C}_0))$, où $t \in \mathbf{R}$;
- $F(\Pi_c) = \exp(-sv(\mathcal{C}_0))$, où $s \in \mathbf{R}_+$; ou bien
- $F(\Pi_c) = \mathbf{1}_{[z,\infty)}(v(\mathcal{C}_0))$ où $z \in \mathbb{R}_+$.

La structure de la cellule $\mathcal{C}_0$ est complètement définie par la figure consistant en l'union des disques D_i, où D_i est le disque dont la frontière est le cercle passant par 0 et par une

paire de points de Π_c telle qu'il n'y a pas de points de Π_c à l'intérieur du disque. Nous appelons cette figure géométrique, qui est montrée en gris clair sur la Figure 8, *la fleur de Voronoï* en 0.

On peut donc prendre pour $B(\Pi_c)$ la plus petite boule centrée en 0 qui contient cette fleur.

L'ajout d'un point U_i uniformément distribué dans la boule minimale $B(\theta_{x_i}\Pi_c)$ contenant la fleur change la géométrie de la cellule, du moins lorsque U_i tombe dans cette fleur. La nouvelle cellule $\mathcal{C}_{x_i}(\Pi_c + \delta_{U_i})$ associée à un point x_i du processus $\Pi_c + \delta_{U_i}$ est montrée en gris foncé sur la Figure 9.

Les algorithmes considérés ci-dessus concernent l'estimation des gradients de fonctionnelles de processus de Poisson, mais on peut étendre la méthode à d'autres types de processus ponctuels pour lesquels la dépendance entre les point n'est pas "trop forte" (voir [7]).

5.2 Changement d'espace

Les processus considérés jusqu'ici sont tous stationnaires homogènes. Est-il possible d'étendre les résultats obtenus pour les processus homogènes à des systèmes non-homogènes, plus proches de la réalité? L'idée de base est d'essayer de représenter un processus non-homogène comme image d'un autre processus stationnaire homogène par changement de son espace des phases.

Rappelons que l'espace des phases $\mathbb{R}^2$ est un groupe topologique additif localement compact où l'on définit le groupe de translations $\{\tau_y\}$ indexé par les éléments $y \in \mathbb{R}^2$, par la règle: $\tau_y x \stackrel{def}{=} x - y$. Ce groupe engendre un groupe de translations dans l'espace des mesures ponctuelles $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ par la formule:

$$\tau_y \sum_i \delta_{x_i} \stackrel{def}{=} \sum_i \delta_{x_i - y}.$$

Un processus ponctuel aléatoire Π d'espace des phases $\mathbb{R}^2$ est stationnaire si la distribution du processus translaté $\tau_y\ \Pi$ reste la même que celle du processus Π pour chaque $y \in \mathbb{R}^2$. Remarquons ici que la stationnarité d'un processus est liée au groupe de translations $\tau_\bullet$ et non à son homogéneité. Donc le problème pratique est le suivant: étant donné un processus Π' avec une mesure d'intensité de la forme $\Lambda'(dx) = h(x)dx$ où la fonction $h(x)$ est par exemple la densité démographique, existe-t-il une bijection $\phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ (ou bien $[0,1]^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ pour un processus fini) telle que $\Pi' = \phi(\Pi)$ pour un processus stationnaire et homogène Π sur $\mathbb{R}^2$ (sur le tore $[0,1)^2$)? Si cette bijection existe, on peut munir l'espace des phases du processus Π' d'une structure de groupe en définissant:

$$x \dot{+} y \stackrel{def}{=} \phi(\phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y)),$$

et le groupe de translations $\tau'_\bullet$ lui correspondant: $\tau'_y(x) = x \dot{-} y \stackrel{def}{=} \phi(\phi^{-1}(x) - \phi^{-1}(y))$. Le processus Π' est alors stationnaire par rapport à ce nouveau groupe $\tau'_\bullet$, et on peut appliquer les méthodes d'analyse des processus stationnaires, comme par exemple, les théorèmes ergodiques etc.

Voici comment répondre à la question posée pour la classe des processus de Poisson non-homogènes. Comme la distribution du processus de Poisson ne dépend que de la mesure d'intensité, le problème se ramène à trouver une fonction ϕ telle que la mesure $\Lambda'(dx)$ est l'image de la mesure de Lebesgue par l'application ϕ. La construction est bien connue en dimension 1, c'est *le changement de temps*, ϕ est le pseudo-inverse de la primitive de la mesure Λ'.

C'est sa généralisation en dimension $d > 1$ que nous appelons *changement d'espace*. Pour simplifier l'exposé on ignore ici les aspects techniques de mesurabilité, continuité etc. et on ne traite que le cas où la densité $h(x)$ existe et définit une probabilité $\Lambda'(dx) = h(x)dx$ sur $\mathbb{R}^2$

Par application du théorème de Fubini on considère:

1. la famille $\overline{\Lambda}_{x_1}(dx_2) \stackrel{def}{=} h(x_1, x_2)\, dx_2 \left[\int h(x_1, x)dx\right]^{-1}$ de probabilités conditionnelles indexées par x_1;
2. la probabilité marginale $\widetilde{\Lambda}(dx_1) \stackrel{def}{=} \left[\int h(x_1, x)dx\right] dx_1$.

Par changement de temps, chacune de ces mesures sur $\mathbb{R}$ est image de la mesure de Lebesgue sur [0,1], soit:

$$\overline{\Lambda}_{x_1} = \overline{F}_{x_1}^{-1}(u) \ (\overline{F}_{x_1} \text{ est primitive de } \overline{\Lambda}_{x_1});$$
$$\widetilde{\Lambda} = \widetilde{F}^{-1}(u) \ (\widetilde{F} \text{ est primitive de } \widetilde{\Lambda}).$$

Soit ψ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans le tore $[0,1)^2$ définie par

$$\psi(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} (\widetilde{F}(x_1), \overline{F}_{x_1}(x_2)).$$

Elle est surjective et son inverse à droite est l'application ϕ définie par

$$\phi(u_1, u_2) \stackrel{def}{=} (\widetilde{F}^{-1}(u_1), \overline{F}^{-1}_{\widetilde{F}^{-1}(u_1)}(u_2)).$$

Par construction ϕ transforme la mesure de Lebesgue sur $[0,1)^2$ en la mesure Λ' sur $\mathbb{R}^2$ et donc elle est bien la transformation que nous cherchions.

Exemple de changement d'espace (vecteur gaussien). Pour r réel strictement positif, soit Δ_r la dilatation sur $\mathbb{R}$ définie par $\Delta_r(x) = rx$, et τ le groupe de translations sur $\mathbb{R}$ défini ci-dessus. On note par F la primitive, qui vaut $\frac{1}{2}$ en zéro, de la fonction de Gauss-Laplace, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2)$.

Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré de $\mathbb{R}^2$ de matrice de covariance, supposée inversible, de la forme:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ \sigma & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

- la variable aléatoire X est normale centrée réduite.
- conditionellement à $\{X = x\}$, la variable aléatoire Y est normale de moyenne σx et de variance $\sqrt{1-\sigma^2}$.

La primitive de la loi conditionnelle de la variable aléatoire Y est donc la fonction $F \circ \Delta_{1/\sqrt{1-\sigma^2}} \circ \tau_{\sigma x}$ de réciproque $\tau_{-\sigma x} \circ \Delta_{\sqrt{1-\sigma^2}} \circ F^{-1}$. L'application ϕ définie ci-dessus est donnée par:

$$\phi(u_1, u_2) = (F^{-1}(u_1), \tau_{-\sigma F^{-1}(u_1)} \circ \Delta_{\sqrt{1-\sigma^2}} \circ F^{-1}(u_2)).$$

Pour transporter la structure de groupe du tore à deux dimensions, la fonction F^{-1} est prolongée en zéro par la valeur $-\infty$; cette opération ne modifie par les lois de probabilité concernées, celles-ci étant absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

L'application ϕ s'écrit $f \circ (F^{-1} \times F^{-1})$ pour la fonction f linéaire qui est définie par $f(u_1, u_2) = (u_1, \tau_{-\sigma u_1} \circ \Delta_{\sqrt{1-\sigma^2}}(u_2))$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma & \sqrt{1-\sigma^2} \end{pmatrix}$$

L'image de la mesure de Lebesgue sur le tore $[0,1)^2$ par l'application $F^{-1} \times F^{-1}$ est la loi produit de deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites dont la loi donne par image par f celle du vecteur (X, Y).

6 Vérification des modèles

Une recherche de lois statistiques dans le réseau réel a été effectuée sur plusieurs variables: nombre d'abonnés par commutateurs, longueurs moyennes des lignes, trafics échangés entre commutateurs. Le but de cette analyse est de tester la modélisation et de voir dans quel sens modifier les hypothèses des modèles.

Les comparaisons statistiques avec les données réelles ont été effectuées. La première a donné des résultats satisfaisants. Une analyse statistique du nombre d'abonnés raccordés par commutateur dans le réseaux d'Ile de France sur les années 90 à 95 a permis d'établir que sur ces années-là, la répartition du nombre d'abonnés par commutateur était bien approchée par une loi Gamma dont l'écart-type restait sensiblement égal d'une année à l'autre à la moitié de la moyenne.

Une analyse sur l'ensemble des commutateurs de Classe 3 du réseau français, faite en 1993, donnait une réponse analogue. Or le modèle théorique présenté plus haut donne une loi proche de la loi Gamma et dont l'écart-type est égal à 0.53 la moyenne.

Une étude sur les longueurs moyennes des lignes d'abonnés n'est pas parvenue à des résultats aussi satisfaisants. Bien que l'application directe du modèle au niveau national fournisse un ordre de grandeur raisonnable, l'analyse par région montre qu'un modèle fondé sur une architecture en étoile simple n'est pas suffisant. Une analyse reprenant les résultats

théoriques du modèle pour une architecture de lignes plus proche de la réalité est actuellement à l'étude. Par ailleurs la comparaison entre résultats théoriques et statistiques réels est encourageante dans le domaine de la transmission locale et interurbaine.

L'analyse statistique a aussi fourni des résultats complémentaires notamment sur le trafic, lesquels pourront être réintégrés et comparés aux modèles théoriques. Le trafic moyen par abonné et par commutateur, considéré comme une variable aléatoire, a un écart-type de l'ordre de la moyenne, et est bien encadré entre une loi lognormale et une loi Gamma, la loi lognormale étant la plus proche. On peut penser que les deux variables aléatoires: trafic moyen par abonné et nombre d'abonnés, l'un et l'autre par commutateur, sont bien indépendantes (leur coefficient de corrélation vaut 0.19). Si maintenant on s'intéresse aux flux sortant d'un commutateur, si l'on inclut le trafic interne, l'écart-type vaut 3 fois la moyenne et 2 fois la moyenne sans trafic interne. La distribution est encadrée entre des lois lognormale et Gamma.

Le rapprochement avec le réseau réel se fera également dans les travaux à venir par l'approche inverse : des données informatisées décrivant de façon détaillée l'architecture des conduits et des câbles de réseau de distribution réels sur plusieurs zones, permettent de lancer une recherche des lois modélisant les processus ponctuels des abonnés et des nœuds du réseau.

Enfin les résultats théoriques obtenus sur le calcul de gradient et présentés au § 5.1 sont utilisables sur la réalisation particulière du processus ponctuel que constitue le réseau réel. Ils permettent d'envisager la mesure dans le réseau réel, de quantités telles que le gradient d'une fonction à optimiser (coût global de réseau, performances) en fonction d'une variable comme la densité des nœuds de réseau.

7 Conclusion

Nous avons montré par divers exemples comment l'approche proposée est une alternative à l'approche usuelle, qui, comme nous l'avons expliqué dans la section 2, est fondée sur des modèles déterministes avec un grand nombre de paramètres.

Ce passage de modèles déterministes à grand nombre de paramètres à des modèles stochastiques avec un petit nombre de paramètres structuraux permet, dans des cas simplifiés, de modéliser différentes fonctions de production applicables aux réseaux de télécommunications. Il permet aussi d'envisager de nouvelles méthodes de dimensionnement prédictif.

Nous avons en particulier abouti à des descriptions de base et à des résultats analytiques sous des hypothèses d'homogénéité pour la plupart des organisations-types de réseau : arborescent, à raccordement multiple, hiérarchique, maillé, cellulaire. Il reste à établir des résultats du même ordre pour les types d'architecture qui n'ont pas encore été analysés: les boucles, les bus, et les raccordements multiples par zones.

De plus les pistes pour traiter le même ensemble de cas de figure mais pour des processus hétérogènes ont été dégagées, à la fois dans le cadre des recherches sur les transformations d'espace et par voie de simulation.

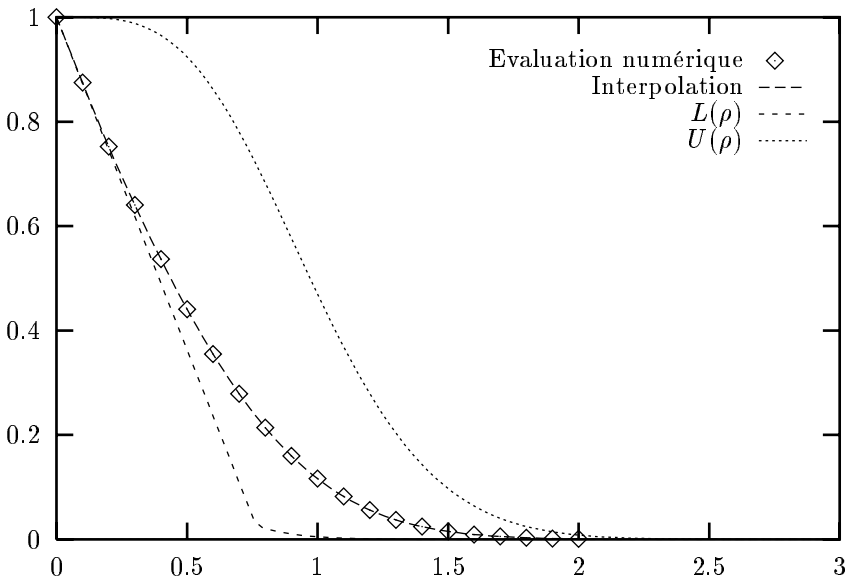


FIG. 7 – *La fonction Q et ses bornes. Function Q and its bounds.*

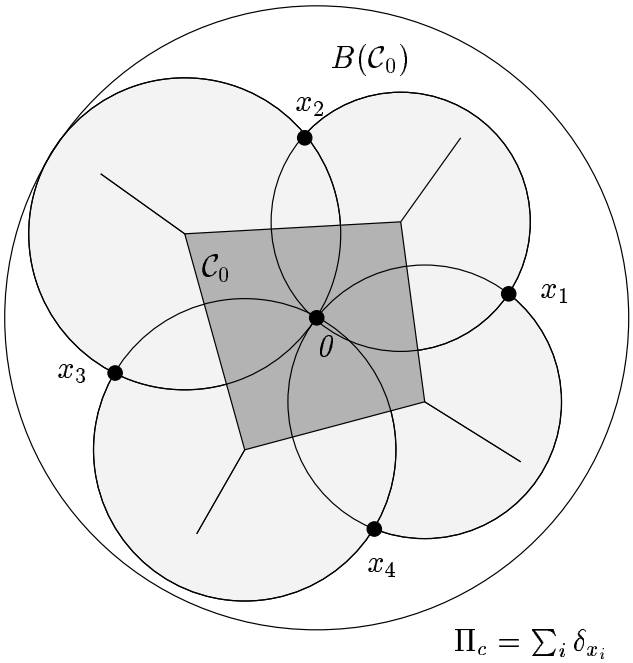


FIG. 8 – *La structure géométrique de la cellule et de la fleur de Voronoï.*
Geometrical structure of the Voronoi flower.

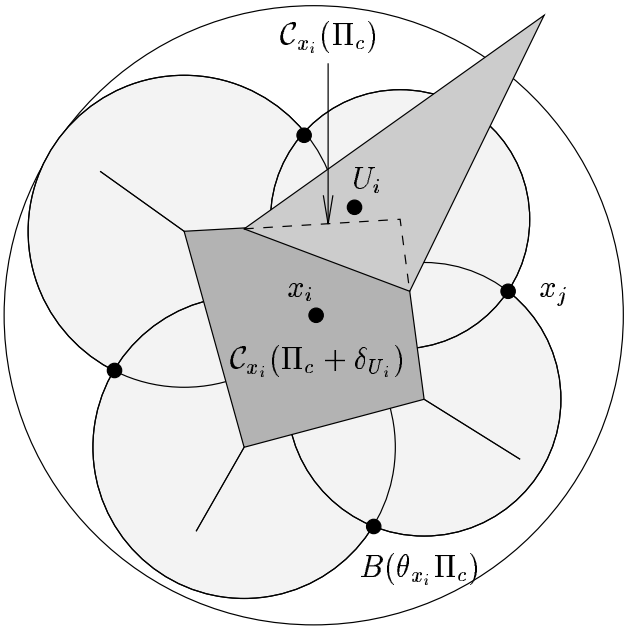


FIG. 9 – *Effet de l'ajout d'un point uniforme U_i dans la fleur de Voronoï associée à x_i – algorithme RPA positif.*
The effect of adding a uniform point U_i into the Voronoi flower – positive RPA algorithm.

A Annexe

A.1 Processus ponctuels

Une *mesure ponctuelle* ϕ sur l'espace mesurable $[X, \mathfrak{X}]$ qu'on appelle *l'espace des phases* de ϕ, est une mesure qui prend des valeurs entières sur chaque ensemble mesurable $B \in \mathfrak{X}$. Une théorie complète existe quand X est un espace Polonais. Dans ce cas la mesure ponctuelle admet une représentation comme $\sum \delta_{x_i}$ où $\delta_x(B) = \mathbf{1}_B(x)$ est une mesure de Dirac, et où les $x_i \in X$ (les points du *support* de la mesure) ne sont pas nécessairement disjoints.

Soit $[\mathcal{N}, \Xi]$ l'espace des mesures ponctuelles sur $\mathfrak{X}$, où la σ-algèbre Ξ est engendrée par l'ensemble des mesures $\{\phi \in \mathcal{N} : \phi(B) = k\}$, $B \in \mathfrak{X}$, $k = 0, 1, \ldots$. Un *processus ponctuel* est une application mesurable Φ d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dans $[\mathcal{N}, \Xi]$. Souvent on prend l'espace $[\mathcal{N}, \Xi]$ lui même comme espace $[\Omega, \mathcal{F}]$, et l'application identité comme Φ avec $\mathbf{P}$ donnant *la distribution* du processus aléatoire. C'est *l'espace canonique* du processus Φ. La *mesure d'intensité* du processus Φ est la mesure prenant la valeur $\mathbf{E}\Phi(B)$ sur un ensemble $B \in \mathfrak{X}$. La *mesure moment d'ordre* k est le prolongement à X^k de la mesure $\mathbf{E}[\Phi(B_1) \ldots \Phi(B_k)]$, définie sur ensemble des rectangles $B_1 \times \ldots \times B_k \subseteq X^k$.

Un processus Φ est *simple* si $\mathbf{P}\{\Phi(\{x\}) > 1\} = 0$ pour chaque $x \in X$.

La distribution d'un processus est uniquement caractérisée par sa *fonctionnelle génératrice* définie comme

$$\Psi[f] = \mathbf{E} \exp\left[\int_X \log f(x)\Phi(dx)\right] = \mathbf{E} \prod_{x_i \in \operatorname{supp} \Phi} f(x_i)$$

pour toute fonction positive $f : X \mapsto \mathbb{R}_+$ qui vaut 1 en dehors d'une certaine boule.

Le *processus ponctuels de Poisson* est le processus Π ayant pour fonctionnelle génératrice

$$\Psi[f] = \exp\left[\int_X (f(x) - 1)\Lambda(dx)\right] \tag{21}$$

Ce processus représente un ensemble de points distribués dans l'espace X de façon indépendante, avec la densité $\Lambda(dx)$. Il peut aussi être caractérisé par les propriétés suivantes:

- $\Pi(B)$ suit la distribution de Poisson de paramètre $\Lambda(B)$;
- les variables $\Pi(B_1), \ldots, \Pi(B_k)$ sont indépendantes pour des ensembles $B_1, \ldots, B_k$ disjoints.

Ces propriétés sont les clés à la simulation de tel processus. Pour générer une réalisation du processus dans une partie W de mesure $\Lambda(W)$ finie, il suffit d'engendrer le nombre N de points comme une variable poissonnienne de paramètre $\Lambda(W)$, puis de positionner N points dans W indépendamment, chaque point ayant la densité de probabilité $\Lambda(dx)\mathbf{1}_W(x)/\Lambda(W)$.

Une autre caractérisation du processus de Poisson est la suivante (dûe à J. Mecke [22]):

$$\mathbf{E} \int_X f(x, \Pi)\, \Pi(dx) = \mathbf{E} \int_X f(x, \Pi + \delta_x)\, \Lambda(dx) \tag{22}$$

pour chaque fonction non-négative mesurable $f : X \times \mathcal{N} \mapsto \mathbf{R}_+$.

Soit $[G, +, \mathfrak{G}]$ un groupe topologique qui agit sur l'espace des phases X. Cela veut dire que pour chaque $g \in G$, il existe une transformation $\tau_g : X \mapsto X$ telle que

- $\tau_g \circ \tau_h = \tau_{g+h}$ pour tous $g, h \in G$, et τ_0 est l'application identique;
- l'application $(g, x) \to \tau_g x$ de $G \times X$ à X est $\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{X}$-mesurable.

Une famille $\{\tau_\bullet\}$ s'appelle *un flot* sur X. Elle engendre un flot sur $\mathcal{N}$ via la formule:

$$\tau_g \phi(B) \stackrel{def}{=} \phi(\tau_g B).$$

Souvent l'espace X est un groupe topologique lui-même. Dans ce cas, que nous considérons ci-dessous, $\tau_x y \stackrel{def}{=} y + x$ et $\tau_x \sum_i \delta_{x_i} = \sum_i \delta_{x_i - x}$.

Un processus Φ est dit *stationnaire* par rapport au flot $\{\tau_\bullet\}$, s'il existe un flot $\{\theta_\bullet\}$ sur l'espace de probabilité Ω tel que

1. il est *compatible* avec le flot $\{\tau_\bullet\}$: $\Phi(\theta_g \omega) = \tau_g \Phi(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $g \in G$;
2. il préserve la probabilité: $\mathbf{P}(\theta_g Y) = \mathbf{P}(Y)$ pour tout $Y \in \mathcal{F}$ et $g \in G$.

La mesure d'intensité $\Lambda(dx)$ d'un processus stationnaire est proportionnelle à la mesure de Haar du groupe topologique X, quand elle est de Radon.

Soit $\mathcal{I}$ la σ-algébre des ensembles θ-invariants de $\mathcal{F}$. Par définition, le processus est *ergodique* si $\mathcal{I}$ est triviale.

Il existe sur Ω une unique mesure σ-finie dite mesure de *Palm* définie comme suit:

$$\mathbf{P}_0(Y) = \frac{1}{\Lambda(W)} \mathbf{E} \int_W \mathbf{1}_Y(\theta_x \omega) \Phi(\omega, dx)$$

pour chaque $Y \in \mathcal{F}$; cette définition ne dépend pas du choix de l'ensemble $W \in \mathfrak{X}$. La distribution de Palm peut être interprétée comme la distribution conditionnelle "sachant qu'il y a un point du processus Φ en 0".

Le *théorème ergodique* dit que pour un processus stationnaire simple et pour chaque fonction non-négative telle que $\mathbf{E} f(\Phi) < \infty$, on a

$$\frac{1}{\Lambda(A_n)} \int_{A_n} f(\tau_x \Phi) \, \Lambda(dx) \to \mathbf{E}[f(\Phi) \mid \mathcal{I}] \tag{23}$$

$$\frac{1}{\Phi(A_n)} \sum_{x_i \in \operatorname{supp} \Phi \cap A_n} f(\tau_{x_i} \Phi) \to \mathbf{E}_0[f(\Phi) \mid \mathcal{I}] \tag{24}$$

pour une suite croissante d'ensembles $A_n \uparrow X$. Dans le cas $X = \mathbf{R}^d$ on peut prendre comme A_n une boule de rayon n ou un hypercube de côté de longueur n, centré en 0.

La Formule (24) du théorème ergodique donne une autre interprétation de la distribution de Palm d'un processus ergodique simple: c'est la distribution du processus vue d'un point

"uniformément choisi" parmi les points du processus. Ce point peut être vu comme *un représentant typique* des points du processus.

Le Théorème de Slivnyak [28] dit que la distribution de Palm Π du processus de Poisson coïncide avec la distribution du processus $\Pi+\delta_0$ où l'on ajoute un point 0 à chaque réalisation du processus Π.

Pour plus de détails, voir [8], [13], [26], [14] et [15].

A.2 Pavages de l'espace

Soit $\{x_i\}$ un ensemble dénombrable de points dans un espace métrique $[X, \rho]$. La *cellule de Voronoï* d'un point x_j est l'ensemble

$$\mathcal{C}(x_j) \stackrel{def}{=} \cap_i \{x \in X : \ \rho(x, x_j) \leq \rho(x, x_i)\}$$

des points de l'espace qui sont plus proches de x_j que de tous les autres points x_i. Le point x_j s'appelle le *noyau* de la cellule. Par définition, $x \in \mathcal{C}(x_j)$ s'il n'y a pas de points x_i à l'intérieur de la boule de rayon $\rho(x, x_j)$ centrée en x. L'union de toutes les cellules forme *un pavage* de l'espace. Si $X = \mathbb{R}^d$ et ρ est la distance euclidienne, ce pavage est le pavage de Voronoï par rapport à l'ensemble $\{x_i\}$.

Les points $\{x_i\}$ sont *généraux* si

1. ils sont tous disjoints;
2. aucun $k+1$-uplet de points n'appartient à un espace affine de dimension k ($k = 1, \ldots, d-1$);
3. aucun $k+2$-uplet de points n'appartient à une sphère k-dimensionnelle ($k = 1, \ldots, d-1$).

Nous supposons cette condition valide dans la suite.

Les cellules du pavage de Voronoï sont des polytopes convexes. Les sommets d'une cellule de Voronoï $\mathcal{C}(x_j)$ sont les centres d'hyper-sphères passant par le noyau x_j et par exactement d autres points de l'ensemble $\{x_i\}$, et telles qu'il n'y a aucun autre point à l'intérieur.

L'union de ces sphères est la *fleur de Voronoï* ou encore la *région fondamentale* associée à la cellule $\mathcal{C}(x_j)$. Ce sont les points de la fleur qui définissent la structure géométrique de la cellule (voir la Figure 8). Les cellules $\mathcal{C}(x_i)$ et $\mathcal{C}(x_j)$ sont dites *adjacents* ou *voisines* si elles partagent une hyperface – une partie de l'hyper-plan médiateur du segment d'extrémités x_i et x_j.

La *triangulation de Delaunay* est un agrégat de simplexes ayant pour sommets des points de l'ensemble $\{x_i\}$ tels que leur circonsphère n'a pas de point $\{x_i\}$ à l'intérieur. Elle est *duale* du pavage de Voronoï dans le sens suivant: il y a une arête de la triangulation entre x_i et x_j si et seulement si les cellules de Voronoï $\mathcal{C}(x_i)$ et $\mathcal{C}(x_j)$ sont adjacentes (voir la Figure 2).

Les *diagrammes de puissance* sont des généralisations du pavage de Voronoï. Ici les points structurants $\{x_i\}$ sont munis de nombres positifs w_i – *les poids* et la fonction $\rho(x, x_j)$ de la

distance entre un point x et un nœud x_j est remplacée par *la fonction de puissance*:

$$pow\,(x,(x_j,w_j)) \stackrel{def}{=} |x-x_j|^2 - w_j.$$

Les bords des cellules sont aussi des parties d'un sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$, mais ici, il n'est pas nécessairement vrai que chaque noyau génère une cellule (voir la Figure 4). Si les puissances de tous les points sont égales, le modèle se réduit au pavage de Voronoï.

Les pavages considérés dans cet article sont construits par rapport à un ensemble des points aléatoires. Ainsi donc les pavages eux-mêmes deviennent des éléments aléatoires dans l'espace des ensembles fermés de $\mathbb{R}^d$.

Les résultats sur la distribution des caractéristiques géométriques de ces objets peuvent se trouver dans [25], [19], [18], [4], [30], [29], [2], [21].

Références

[1] A. Aboulalaa. Sur un théorème de limite conditionnelle. application auz systèmes de capacités finies. Technical Report 2389, INRIA, Sophia-Antipolis, France, 1994.

[2] R. V. Ambartzumian. *Factorization Calculus and Geometric Probability.* Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge Univ. Press, 1990.

[3] B. Błaszczyszyn, T. Rolski, and V. Schmidt. Light-traffic approximations in queues and related stochastic models. *Adv. in Appl. Probab.*, 1995.

[4] F. Aurenhammer. Voronoi diagrams - a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys*, 23(3):345–405, 1991.

[5] F. Baccelli and P. Brémaud. Virtual customers in sensitivity and light traffic analysis via Campbell's formula for point processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 25:221–234, 1993.

[6] F. Baccelli and P. Brémaud. *Elements of queueing theory.* Number 26 in Applications of mathematics. Springer-Verlag, 1994.

[7] F. Baccelli, M. Klein, and S. Zuyev. Perturbation analysis of functionals of random measures. *Adv. in Appl. Probab.*, 1995.

[8] D. J. Daley and D. Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes.* Springer, New York, 1988.

[9] N. Curien et M. Gensollen. *Economie de Télécommunications. Ouverture et réglementation.* Economica-ENSPTT, Paris, 1992.

[10] S. Foss and S. Zuyev. On a certain Voronoi aggregative process related to a bivariate Poisson process. *Adv. in Appl. Probab.*, 1995.

[11] E. N. Gilbert. Random subdivisions of space into crystals. *Ann. Math. Statist.*, 33:958–972, 1962.

[12] Yu. Ho and Xi. Cao. *Perturbation analysis of discrete event dynamic systems.* Kluwer Acad. Publ., Boston, 1991.

[13] O. Kallenberg. *Random measures.* Akademie-Verlag and Academic Press, 1983.

[14] J. Kerstan, K. Matthes, and J. Mecke. *Infinitely divisible point processes.* Nauka, 1982. (In Russian).

[15] J. F. C. Kingman. *Poisson Processes.* Oxford Studies in Probability. Oxford Univ. Press, 1993.

[16] L. Kleinrock. *Queueing systems. Volume I: Theory.* Wiley, 1975.

[17] M. Lebourges, P. Olivier, and D. Petit. Modèle statistico analytique des blocages dans un réseau téléphonique. *soumis aux Annales des télécommunications*, 1995.

[18] J. Møller. Random tesselations in R^d. *Adv. in Appl. Probab.*, 21:37–73, 1989.

[19] J. Møller. *Lectures on random Voronoi tesselations*, volume 87 of *Lect. Notes in Statist.* Springer-Verlag, 1994.

[20] J. Møller and S. Zuyev. Gamma-type results and other related properties of Poisson processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 1995.

[21] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry.* Wiley, New York, 1975.

[22] J. Mecke. Stationäre zufällige Masse auf localcompakten Abelischen Gruppen. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete*, 9:36–58, 1967.

[23] J. L. Meijering. Interface area, edge length and number of vertices in crystal aggregates with random nucleation. *Philips Res. Rep.*, 8:270–290, 1953.

[24] L. Muche and D. Stoyan. Contact and chord length distributions of the Poisson Voronoi tesselation. *J. Appl. Probab.*, 29:467–471, 1992.

[25] A. Okabe, B. Boots, and K. Sugihara. *Spatial tesselations.* Wiley series in probability and mathematical statistics. Wiley, 1992.

[26] J. Hoffmann-Jørgensen, T. M. Liggett, and J. Neveu. *Ecole d'eté de probabilité de Saint-Flour VI-1976*, volume 598 of *Lect. Notes in Math.* Springer-Verlag, 1976.

[27] G. Sallai. Optimal network structure with randomly distributed nodes. In *12th International Teletraffic Congress*, page 2.1B.4, Torino, June 1988.

[28] I. M. Slivnyak. Some properties of stationary flows of homogeneous random events. *Teoriya Veroyatn. i Primenen.*, 7:347–352, 1962. (In Russian). English translation: *Theory Probab. Appl.,* 7:336-341.

[29] D. Stoyan, W. S. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic Geometry and its Applications.* Wiley series in probability and mathematical statistics. Wiley, Chichester, 1987.

[30] S. Zuyev. Poisson power tesselations. Technical Report 2303, INRIA, Sophia-Antipolis, France, July 1994.

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399