HAL
open science

Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur

Rachid Deriche, Olivier Faugeras

To cite this version:

Rachid Deriche, Olivier Faugeras. Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur. RR-2697, INRIA. 1995. inria-00073993

HAL Id: inria-00073993

https://inria.hal.science/inria-00073993v1

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Les EDP en Traitement des Images et Vision par Ordinateur

Rachid Deriche et Olivier Faugeras

N° 2697

Novembre 1995

PROGRAMME 4

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

Les EDP en Traitement des Images et Vision par Ordinateur

Rachid Deriche et Olivier Faugeras

Programme 4 — Robotique, image et vision
Projet ROBOTVIS

Rapport de recherche n° 2697 — Novembre 1995 — 60 pages

Résumé : On assiste depuis quelques temps à un regain d'intérêt pour un certain nombre de problèmes liés au domaine du traitement des images et ceci pour plusieurs raisons dont principalement une demande accrue au niveau des applications pour des algorithmes efficaces et performants d'amélioration, de restauration, d'analyse multiéchelle,... et l'émergence d'une méthodologie nouvelle pour résoudre ces problèmes, méthodologie qui permet de les traiter à partir d'une base mathématique solide, celle des équations aux dérivées partielles, en abrégé EDP. Cet outil, dont l'introduction en traitement des images date de quelques années seulement permet de traiter aisément de nombreux problèmes dont certains sont exprimés sous forme variationnelle, d'aborder relativement sereinement des problèmes non-linéaires, d'obtenir dans de nombreux cas des résultats d'existence et d'unicité de solution, voire des schémas de résolution numérique très efficaces. De par leur intérêt, certaines des idées développées dans ce cadre ont commencé aussi à être appliquées à un certain nombre de problèmes dans le domaine de la vision par ordinateur comme la caractérisation de primitives images, la stéréoscopie, l'analyse du mouvement, etc.

Ce rapport est un inventaire non exhaustif de l'état de la recherche dans ce domaine en pleine expansion où les techniques les plus récentes de la théorie des EDP se mesurent aux problèmes parmi les plus difficiles du traitement des images et de la vision artificielle.

Mots-clé : Équations aux Dérivées Partielles, Amélioration et Restauration des Images, Formulation Variationnelle, Régularisation, Espace Multiéchelle, Filtres de Choc, Traitement des Images, Vision par Ordinateur

(Abstract: pto)

Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis
2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex (France)
Téléphone : (33) 93 65 77 77 – Télécopie : (33) 93 65 77 65

PDE's in Image Processing and Computer Vision

Abstract:

For some time now we have been witnessing an increased interest in a number of problems based within the domain of image processing. This is for a number of reasons, of which the first is for an increased demand of efficient algorithms and better performance, within image enhancement, restoration, multi-scale analysis ... The second reason is the emergence of a new methodology within the algorithmic framework of Partial Differential Equations (PDE) for the resolution of such problems. This PDE based methodology, whose introduction within image processing has occurred only recently, allows to handle efficiently a number of non linear problems (existence and uniqueness of solution, efficient numerical schemes for the implementation part..)

Some of the ideas developped within the context of image processing have also started to be applied to a certain number of problems in the domain of computer vision, such as in low-level vision, stereovision, motion analysis, shape from shading, etc.

This report is a non-exhaustive review of the state-of-the-art research within this domain. It shows how the most recent techniques of the theory of PDE's succeed in solving some of the most difficult problems in image processing and computer vision.

Key-words: Partial Differential Equations, Image enhancement, Image Restoration, Variational Formulation, Regularization, Scale-Space, Shock Filtering, Image Processing, Computer Vision

1 Introduction

On assiste depuis quelques temps à un regain d'intérêt pour un certain nombre de problèmes liés au domaine du traitement des images. Ce regain d'intérêt s'accompagne d'un renouveau de la problématique et se trouve concrétisé par l'émergence d'un nombre croissant de conférences internationales de qualité et à fort taux de participation dans ce domaine. À ce titre, on peut citer comme exemples la 1ère conférence IEEE dans le domaine du traitement numérique des images qui vient d'avoir lieu du 13 au 16 Novembre 1994 à Austin au Texas avec près de 1000 participants, la récente conférence sur les méthodes mathématiques appliquées au traitement de problèmes issus de l'industrie à Lunteren au Pays-Bas du 15 au 20 Octobre 1994, la conférence organisée du 17 au 18 novembre 1994 à Londres par le laboratoire des sciences médico-légales (*Forensic Science*) de la police métropolitaine de Londres (MPFSL) sur les applications aux domaines judiciaire et policière de méthodes issues du traitement des images. D'autres conférences ou ateliers de travail sont aussi annoncés comme le symposium SPIE du 9 au 14 Juillet 1995 à San-Diego, L'édition *Images, Ondelettes et EDP*, troisième conférence spécialisée de la série des conférences internationales sur l'analyse et l'optimisation des systèmes organisée par l'INRIA (26-28 Juin 1996), le prochain atelier de travail sur les méthodes mathématiques en Vision par Ordinateur (WMMCV'95), organisé par l'université du Minnesota (11-15 Septembre 1995), la prochaine conférence ICIP qui aura lieu du 23-26 Octobre 1995 à Washington, D.C....

Ce surcroît d'intérêt peut s'expliquer par la conjonction de plusieurs raisons parmi lesquelles on peut noter les trois suivantes :

- De par la quantité d'informations qu'elles traitent, les approches développées dans le domaine du traitement numérique des images ont toujours été très consommatrices de temps de calcul. C'est la raison pour laquelle le traitement des images est étroitement lié aux moyens technologiques disponibles. Grâce à la puissance de plus en plus grande de ceux-ci (citons par exemple le cas des stations de travail), le facteur *temps de calcul* a été sensiblement réduit, pour ne pas dire éliminé pour une certaine classe de problèmes où le parallélisme a été aussi introduit, et n'est plus une raison pour écarter a priori les approches à base de traitement d'images.

- La seconde raison nous semble liée aux champs des applications potentielles où l'image est utilisée comme support d'information. La vidéo est de nos jours un outil de plus en plus répandu et alors que l'obtention, le stockage et la transmission des images constituaient un vrai problème il y a encore une quinzaine d'année, ceci n'est actuellement et clairement plus le cas. Les champs d'applications nouveaux ont ainsi été dégagés dans des domaines aussi variés que la robotique mobile, l'imagerie satellitaire, l'imagerie médicale, la réalité virtuelle, la surveillance de sites à risques ou autres....

- Enfin la troisième raison, peut être la plus importante, est liée au fait que l'on assiste de plus en plus dans un certain nombre de domaines et en particulier dans ceux du traitement des images et de la vision par ordinateur à un effort accru de formalisation mathématique. Ce souci de formalisation se traduit par l'importance de plus en plus grande accordée aux mathématiques et à la physique dans ces deux domaines. A titre d'exemple, on peut noter l'attention de plus en plus grande portée par un grand nombre de scientifiques aux problèmes de modélisation physique, géométrique, et statistique du contenu des images, le recours à des techniques d'optimisation puissantes, le développement d'approches variationnelles, l'apparition de méthodes non-linéaires pour la résolution de problèmes traités jusque là par des approches linéaires, l'utilisation intensive du calcul formel, Le recours de plus en plus fréquent à des outils de géométrie différentielle, projective, et algébrique, ainsi qu'à la théorie des invariants algébriques, différentiels et semi différentiels dans les thèmes de la reconnaissance des formes et la mise en correspondance ...

Toutes ces remarques sont autant de caractéristiques indéniables qui illustrent l'évolution qui est en train de s'opérer dans la manière d'aborder et de résoudre une certaine classe de problèmes très importants dans les domaines du traitement des images et de celui de la vision par ordinateur. En étudiant les articles les plus récents qui illustrent cette nouvelle tendance, il s'avère qu'une grande partie de ces techniques nécessite l'utilisation d'équations aux dérivées partielles (EDP). Si les scientifiques numériciens de la discipline de la mécanique des fluides, qui en font largement usage, connaissent déjà la puissance de

tels outils, il faut dire toutefois que ce n'est que très récemment que l'emploi des EDP en traitement d'image et en vision par ordinateur s'est concrétisé.

Les approches à base d'EDP ont, en effet, pour intérêt qu'elles permettent d'obtenir dans de nombreux cas des résultats d'existence et d'unicité pour la solution recherchée, et qu'elles peuvent se mettre en oeuvre à l'aide de puissants schémas numériques très étudiés à ce jour dans le domaine de la mécanique des fluides.

Cette nouvelle classe de méthodes a permis aussi la formalisation d'un cadre unificateur à un ensemble de problèmes traités au préalable de manières indépendantes. Les performances atteintes, et aussi et surtout la qualité des résultats obtenus par la plupart des méthodes développées suivant ces schémas incitent un nombre de plus en plus important de scientifiques des domaines de l'image, de la vision et de la mécanique des fluides à s'intéresser à ces problèmes.

Ce rapport constitue un état de l'art sur l'utilisation des EDP dans les domaines du traitement des images et celui de la vision par ordinateur, ainsi qu'une introduction à la compréhension et à l'utilisation de ces outils dans cette classe de problèmes. En particulier, les domaines d'applications liés à l'amélioration, la restauration, l'analyse multi-échelle, l'évolution de courbes planes, les contours déformables, l'estimation du flot optique et la stéréovision seront particulièrement considérés. Un paragraphe sera aussi consacré au problème de la segmentation d'images en zones homogènes car la philosophie développée pour traiter ce problème est très proche de celle de la section 3 où on abordera l'axiomatisation de l'analyse multi-échelle.

2 Amélioration et Restauration des Images

2.1 Problèmes

Les problèmes issus de l'amélioration et de la restauration des images sont des problèmes largement traités dans la littérature scientifique, et ce depuis l'apparition de la discipline du traitement numérique des images, née durant les années 60, après le développement de moyens informatiques suffisants. L'amélioration et la restauration d'images furent ainsi les premiers problèmes à recueillir une grande attention. Une généralisation au cas des images de techniques bien connues pour le traitement des signaux temporels donne alors de

premiers résultats spectaculaires, y compris pour le public non initié. L'amélioration d'images cherche en effet à rendre l'image plus significative à l'observateur humain, qui est le seul juge final de l'efficacité d'un tel traitement. La restauration, quant à elle, cherche à corriger les distorsions introduites lors des étapes précédentes de l'acquisition ou de la transmission. Un modèle de formation de l'image observée incluant le bruit est généralement supposé et des critères à minimiser sont établis afin de retrouver au mieux l'image originale.[1] Par la suite, d'autres problèmes généralement placés en aval dans la chaîne de traitement ont été abordés. Il ne s'agit plus alors d'obtenir une *meilleure* image, mais d'extraire de l'image fournie les informations utiles à un traitement postérieur. L'extraction des primitives s'est alors vue accorder une grande attention. Comme les contours des objets observés forment souvent les premières informations nécessaires, de nombreux algorithmes de détections de contours ont été proposés [82], [35]. Utilisant ces paramètres extraits des images, des algorithmes de segmentation, de classification, de stéréovision permettent alors d'avoir une analyse détaillée de la scène perçue [63], [15], [43].

2.2 Restauration à base de régularisation et formulation variationnelle

Les approches traditionnelles développées en restauration d'images bruitées incluent souvent des opérations de lissage effectuées dans le domaine spatial ou spectral. La forme de l'opérateur de lissage est généralement déterminée en fonction des critères à minimiser et des connaissances a priori que l'on peut avoir sur le problème à résoudre.

Les premières approches développées dans le cadre de la restauration ont été ainsi des approches basées sur des critères d'optimalité aux moindres carrés (filtrage de Wiener [13]) avec l'application de méthodes algébriques pour la recherche de solutions. Des méthodes de minimisation de critères quadratiques linéaires avec contraintes ont été aussi proposés [64], et on peut aussi citer les méthodes dites du MAP (du maximum a posteriori) [50] ainsi que les méthodes non-linéaires du type de celles proposées dans [1].

1. On peut regretter toutefois que cette différence d'interprétation ne semble pas avoir été prise en compte dans un certain nombre d'articles récents qui parlent indifféremment d'amélioration ou de restauration.

Toutefois, les limites de ces approches furent très rapidement atteintes à cause des effets d'oscillations observés sur les résultats, et de la dégradation des résultats observés près des discontinuités.

Du fait que le problème peut être mal posé, des techniques déterministes ou stochastiques ont alors été proposées et développées afin de le régulariser. Ceci a eu pour conséquence l'apparition de nouvelles approches formulant le problème de la restauration d'images bruitées comme un problème de régularisation.

Soit P la transformation linéaire permettant le passage d'une image originale u à l'image bruitée v par un modèle du type :

$$v = Pu + n \tag{1}$$

où n est un bruit généralement considéré comme Gaussien de moyenne nulle et d'une certaine variance σ^2. Le problème de retrouver u à partir de v est alors formulé comme celui de retrouver u qui minimise l'énergie $E(u)$ suivante :

$$E(u) = E_1(u) + \lambda E_2(u) \tag{2}$$

où $E_1(u)$ est un terme de fidélité aux données et $E_2(u)$, un terme de régularisation qui dépend généralement du gradient de u (noté dans la suite par $\mid \nabla u \mid$) ou de la matrice des dérivées d'ordre supérieur de u.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E_1(u) & = & \| v - Pu \|^2 \\ E_2(u) & = & \Phi(u) \end{array} \right. \tag{3}$$

Dans le cas où la fonction de potentiel $\Phi(.) = \Phi(\mid \nabla u \mid) = \mid \nabla u \mid^2$ est quadratique , on se retrouve avec la régularisation bien connue dite de *Tikhonov*. Cette régularisation pénalise toutefois les discontinuités. Le lissage des discontinuités ainsi que l'apparition d'oscillations, connus sous le nom de phénomène de Gibbs, ont rapidement limité l'efficacité de ces approches et suscité ces dernières années un grand intérêt pour le développement de nouvelles méthodes, principalement non-linéaires, afin d'assurer au mieux la prise en compte des discontinuités et de limiter ces phénomènes d'oscillations. Un modèle de régularisation avec prise en compte des discontinuités est immédiatement apparu comme une voie intéressante à exploiter et le problème du choix de la fonction potentiel à utiliser afin d'assurer au mieux une préservation des discontinuités

s'est donc trouvé rapidement posé. Deux classes d'approches ont été à ce jour principalement développées : la première s'intéresse directement à la forme de la fonction potentielle à utiliser alors que la seconde a plutôt favorisé le concept de processus de ligne pour marquer et préserver les discontinuités [57, 16]. Pour une bonne revue des différentes classes de méthodes de régularisation, on peut se référer à la thèse de P. Charbonnier [29], effectuée au laboratoire I3S à Sophia-Antipolis sous la direction de Michel Barlaud, où il est montré en particulier qu'il est possible d'effectuer une régularisation avec prise en compte de discontinuités en utilisant des fonctionnelles convexes. La fonction d'énergie est minimisée par des méthodes d'algèbre linéaire évitant ainsi la lourdeur des approches stochastiques.

Les parties suivantes de ce paragraphe seront consacrées à la présentation d'un certain nombre d'approches combinant les EDP et les idées de diffusion isotrope, anisotrope et de filtres de chocs; on présentera ensuite une approche variationnelle pour le problème de la restauration des images bruitées qui unifie dans un même formalisme mathématique un grand nombre de ces approches.

2.3 EDP et Diffusion isotrope

Une approche classique développée dans le domaine de la restauration des images utilise une opération de convolution linéaire (lissage) afin de réduire l'effet du bruit, considéré comme étant un signal haute fréquence.

$$u(x,y,t) = \int_{\Omega} G(x-\xi, y-\eta, t) u_0(\xi,\eta) d\Omega, \quad (x,y) \in \Omega \tag{4}$$

où on note par $u_0(x,y)$, la fonction de R^2 dans R définie sur le rectangle $\Omega = (0,a) \times (0,b)$. Les valeurs de la fonction u_0 représentent par exemple les intensités en niveau de gris de l'image originale bruitée, $u(x,y,t)$ représente l'image restaurée, et t un paramètre qui contrôle l'importance du lissage de l'opérateur $G(x,y,t)$.

Un exemple d'opérateur souvent utilisé de par ses performances, ses propriétés de séparabilité et d'isotropie est l'opérateur Gaussien G donné par :

$$G(x,y,t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{4t}} \tag{5}$$

Koenderink [75] a remarqué le premier qu'une opération de convolution d'une image par un opérateur Gaussien d'une certaine variance (ici $\sigma^2 = 2t$) peut être réécrite sous la forme d'un processus de diffusion de l'intensité image autour des pixels voisins durant un temps t en relation directe avec la variance spatiale σ^2. Cette équation de diffusion,connue sous le nom d'équation de la chaleur, peut se mettre sous la forme de l'EDP parabolique linéaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) & = & u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t) \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{array} \right. \tag{6}$$

On peut noter que cette équation de diffusion peut être réécrite sous la forme *divergence* suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) & = & \mathrm{d}iv(\nabla(u(x,y,t))) \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{array} \right. \tag{7}$$

Concernant la mise en oeuvre de ce processus de diffusion, la plus simple est certainement l'utilisation directe de l'équation de convolutioggn (4), mais on peut noter que ce processus de diffusion peut aussi se mettre en oeuvre dans le domaine spectral [48], [49], ou à l'aide de schémas numériques mettant en oeuvre de manière récursive l'équation de diffusion (6) comme l'indique Alvarez dans [7]. On peut noter aussi qu'une mise en oeuvre récursive de l'opération de convolution avec les opérateurs Gaussiens et ses dérivées a été décrite au préalable dans [37] et [38], et que l'emploi du filtrage récursif à des fins de mise en oeuvre de convolutions efficaces en temps de calcul avec des opérateurs de lissage, d'estimation du gradient et des dérivées d'ordres supérieurs, est décrit dans [36], [35].

L'EDP parabolique linéaire (7) permet une diffusion isotrope . Cette diffusion s'opère ainsi de manière identique dans toutes les directions et ne possède aucune direction privilégiée. Pour des tâches de restauration d'images bruitées, ceci présente clairement des inconvénients. En effet, dans des régions d'intensité homogène, ce processus permettra de réduire effectivement l'effet du bruit mais dans des régions présentant des discontinuités au niveau de l'intensité en niveau de gris, celles-ci seront aussi lissées et le contraste visuel de ces parties sera sensiblement réduit, diminuant en conséquence l'intérêt qualitatif et visuel d'un tel processus. Pour traiter ce problème, des idées de *diffusion anisotrope*

ont été proposées. Le principe ainsi que les travaux réalisés dans ce cadre font l'objet du paragraphe qui suit.

2.4 EDP et Diffusion anisotrope

La première idée pour résoudre les problèmes issus d'une diffusion isotrope a été proposée par Perona et Malik dans [96], [95]. Elle consiste à effectuer une diffusion conditionnelle i.e. forte diffusion dans les zones à faible gradients et faible diffusion dans les zones à fort gradient, ou des discontinuités potentiellement "intéressantes" peuvent se trouver. Ce mode de diffusion a été formalisé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) & = & \mathrm{div}(c(\mid \nabla u(x,y,t) \mid)\nabla u(x,y,t)) \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{array} \right. \tag{8}$$

où div et ∇ indiquent les opérateurs de divergence et de gradient par rapport aux variables spatiales respectivement et où la fonction $c(.)$ est une fonction décroissante, par exemple :

$$c(\mid \nabla u \mid) = e^{-(|\nabla u|/k)^2} \tag{9}$$

ou encore :

$$c(\mid \nabla u \mid) = \frac{1}{1 + (\mid \nabla u \mid /k)^2} \tag{10}$$

qui présente la même approximation au premier ordre que la précédente. Les relations (8) peuvent se réécrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial u}{\partial t} & = & c\Delta u + \nabla u.\nabla c \quad = \quad c\Delta u + \frac{c'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u^T \mathbf{H} \nabla u \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{array} \right. \tag{11}$$

où $\mathbf{H}$ est le Hessien de $u(.,.)$.

On peut remarquer ainsi que si $c(.)$ est une fonction constante, cette équation se réduit alors au processus de diffusion isotrope décrit dans le paragraphe précédent.

Il a été prouvé toutefois que cette méthode possède plusieurs inconvénients dont le premier est son inefficacité dans les zones où le bruit présente de grosses discontinuités. Le second inconvénient est d'ordre théorique pour les fonctions $c(.)$ précédentes car on peut montrer qu'il n'existe pas de solution à l'équation (8). En effet, pour obtenir en même temps l'existence et l'unicité d'une solution pour une telle EDP, il a été montré que la fonction $c(\mid \nabla u \mid)$ doit respecter la condition que $\mid \nabla u \mid c(\mid \nabla u \mid)$ soit non décroissante [26] . Si cette condition n'est pas vérifiée, on peut observer une solution instable se former, impliquant la génération de résultats qui peuvent être très différents si de petits changements affectent l'image originale. Plus précisément, on peut démontrer que cette méthode agit comme une équation de la chaleur inverse près de très fortes discontinuités ($\mid \nabla u \mid > k$ pour l'équation (10) et $\mid \nabla u \mid > k/\sqrt{(2)}$ pour l'équation (9)) , ce qui rend le processus instable même si l'image initiale est assez lisse [86]. Pour une bonne analyse numérique des problèmes issus de la mise en oeuvre de la méthode de Perona et Malik, on peut se référer à [96] et [85].

Une solution pour résoudre le problème de l'instabilité est de travailler avec une version régularisée de l'équation impliquant le gradient $c(\mid \nabla G_\sigma * u \mid)$ en lieu et place de $c(\mid \nabla u \mid)$ [26]. Cette solution rend le problème bien posé et les résultats stables. Ceci a été indépendamment proposée dans [26] et [86]. Toutefois, on peut noter que cette nouvelle EDP possède aussi quelques inconvénients. En plus du fait qu'il est difficile de lui trouver une interprétation géométrique (présence d'un terme hybride combinant le gradient et son estimé dans la *divergence*), la stabilité de ce modèle n'est généralement pas garantie quand le paramètre t tend vers 0.

Une amélioration de cette idée de diffusion anisotrope qui prend en compte ces remarques a été ainsi proposée par Alvarez, Lions et Morel dans [6] qui ont étudié une classe d'EDP paraboliques non linéaires qui généralise l'idée de diffusion anisotrope initialement proposée par Perona et Malik dans [95], [96] et amélioré dans [26] et [86].

Le schéma proposé est un schéma issu de l'équation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & g(\mid \nabla G_\sigma * u \mid) \mid \nabla u \mid \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{array} \right. \tag{12}$$

où $u_0(x,y)$ constitue l'image initiale à traiter, $u(x,y,t)$ est l'image lissée à l'échelle référencée par le paramètre t et $g(\mid \nabla u \mid)$ une fonction non croissante de la variable $\mid \nabla u \mid$ qui tend vers 0 quand la variable $\mid \nabla u \mid$ tends vers l'infini. En remarquant que le terme $\mid \nabla u \mid \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$ correspond à la dérivée seconde de u dans la direction orthogonale au gradient ∇u, l'équation (12) peut s'interpréter comme un lissage anisotrope conditionnel mais seulement le long des courbes de niveaux de l'image $u(x,y,t)$. Le terme impliquant la fonction $g(\mid \nabla u \mid)$ permet de contrôler la vitesse de diffusion. Dans des zones où le gradient est faible, ce terme est grand et permet une diffusion anisotrope le long de la direction orthogonale au gradient alors que dans les zones où le gradient est fort, la pondération est faible et annule la diffusion d'où le nom de lissage sélectif donné par les auteurs à ce schéma. On peut remarquer que si $g(\mid \nabla u \mid) = 1/(\mid \nabla u \mid)$, ce modèle tend vers une version simplifiée $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})$ quand σ tend vers 0, qui peut être interprétée comme un cas particulier de l'approche de Perona et Malik [96].

Afin d'éviter de diffuser de manière anisotrope dans les régions où il n'y a que du bruit, Alvarez propose une version plus fine de cette méthode qui permet en plus de prouver la validité du modèle mathématique par l'existence et l'unicité de la solution.

Le modèle proposée est alors le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & g(\mid \nabla G_\sigma * u \mid)((1 - h(\mid \nabla u \mid))\Delta u + h(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{array} \right. \tag{13}$$

où $h(\mid \nabla u \mid)$ est une fonction lisse non décroissante telle que $h(\mid \nabla u \mid) = 0$ si $\mid \nabla u \mid \leq e$, $h(\mid \nabla u \mid) = 1$ si $\mid \nabla u \mid \geq 2e$. Le paramètre e n'est pas véritablement un paramètre supplémentaire, mais dépend plutôt directement du paramètre de contraste qui intervient dans la fonction $g(.)$. Comme $g(\mid \nabla u \mid)$ est petit pour les grandes valeurs de $\mid \nabla u \mid$, e est simplement la borne supérieure de l'intervalle où u est autorisée à diffuser librement.

Reprenant les travaux de Malik et Perona, Nordstróm [87] a introduit un nouveau terme dans l'équation (8) qui force la solution $u(x,y,t)$ à rester proche de l'image initiale $u_0(x,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,t) - \mathrm{div}(c(\mid \nabla u(x,y,t) \mid)\nabla u(x,y,t)) & = & u_0 - u \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{cases} \tag{14}$$

La mise en oeuvre d'un tel schéma est décrite dans [87].

À titre de complément dans cette classe de schémas de diffusion, on peut citer aussi le schéma aux EDP proposé par Nitzberg et Shiota dans [86], particulièrement bien adapté à la restauration des angles et autres jonctions multiples. L'idée principale est d'utiliser en chaque point de l'image des filtres directionnels en se laissant guider par l'information locale de l'orientation du gradient. Des résultats expérimentaux très intéressants illustrent la capacité de cette approche.

La diffusion anisotrope a aussi été appliquée à l'étude du mode d'évolution dans un espace échelle de points anguleux ou jonctions multiples. Dans cette classe de problèmes, on peut citer en premier lieu les travaux de Fiddelaers *etal* [47] qui ont étudié des schémas d'évolution de courbes à base d'EDP permettant de développer des discontinuités au niveau de la courbure. L'idée est de représenter la courbe initiale à l'aide de l'angle $\theta = \theta(s)$ que fait la tangente avec une direction constante, fonction de l'abcisse curviligne s , et d'appliquer ensuite le schéma d'évolution modifié de Nordstróm [87] présenté précédemment afin de développer des discontinuités. Les résultats montrés semblent assez prometteurs dans le cadre d'une application de détection de points à forte courbure. Plus récemment, Alvarez [8], s'est aussi intéressé à ce type de problème dans le cas d'une évolution multi-échelle qui respecterait l'invariance affine, donnée par l'équation (39). Un résultat remarquable de cette étude est celui concernant la vitesse d'évolution des points anguleux dans un tel schéma d'évolution. Un algorithme numérique de mise en oeuvre du schéma d'évolution respectant l'invariance affine (39) y est clairement décrit. Il est utilisé afin de faire évoluer des points anguleux et valider expérimentalement les résultats théoriques concernant la vitesse d'évolution et la caractérisation des angles dans un tel schéma. Ces travaux sont à relier à ceux développés précédemment dans le cas d'une diffusion isotrope par Deriche et Giraudon dans [39].

Une application industrielle du filtrage anisotrope par EDP est décrite par Weickert dans [119]. Un filtre de diffusion est présenté et appliqué pour le

traitement de défauts et le contrôle de qualité. D'autres applications du filtrage anisotrope concernent le traitement des images provenant du milieu médical [59, 33]. On peut aussi noter que des schémas numériques à base d'opérations morphologiques ont été aussi développés afin de mettre en oeuvre certains des schémas anisotropes mentionnés ici. On peut se référer pour cela aux récents travaux de Catté et Dibos dans [27].

2.5 EDP et Filtres de Choc

Dans ce paragraphe, on présente d'autres approches développées dans le cadre du problème de la restauration d'images, et qui font appel à un schéma aux EDP plus directement inspiré des travaux menés dans le domaine de la mécanique des fluides, et dont la solution $u(x, y, t)$, qui a comme condition initiale l'image à restaurer $u_0(x, y)$, développe des discontinuités assimilées à des chocs.

L'utilisation de concepts et de techniques développés dans le cadre des solutions d'EDP hyperboliques non-linéaires pour des problèmes de traitement des images a été proposée par L.Rudin [103], qui a été le premier à introduire dans ce domaine la notion de filtre de choc. Ces filtres sont des opérateurs dont l'application permet le développement dans le signal restauré de phénomènes analogues aux ondes de choc connues en mécanique des fluides [104], [88].

Le premier modèle,1D, que Rudin a considéré est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial u}{\partial t} + F(u_{xx}(x,t)) \mid u_x(x,t) \mid & = & 0 \\ u(x,0) & = & u_0(x) \end{array} \right. \tag{15}$$

où $F(s)$ est une fonction de la variable s telle que $sF(s) \geq 0$. Un schéma monotone explicite préservant la variation totale, la taille et la position des extréma locaux a été mis en oeuvre afin d'implémenter cette approche qui développe des lignes de choc correspondant aux discontinuités dans $u(x, t)$.

La généralisation au cas 2D a été effectuée de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial u}{\partial t} + \mid \nabla u \mid F(\mathcal{L}(u)) & = & 0 \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{array} \right. \tag{16}$$

où F satisfait les mêmes conditions que dans le cas 1D et $\mathcal{L}(u)$ désigne un opérateur elliptique non-linéaire du second ordre, permettant l'extraction des contours, par exemple :

$$\mathcal{L}(u) = \nabla u^T \mathbf{H} \nabla u \tag{17}$$

où $\mathbf{H}$ est le Hessien de $u(.,.)$. Afin de pouvoir développer dans la solution des zones d'intensité linéaire par morceaux, et non plus seulement des zones d'intensité constante par morceaux, ce schéma a été ensuite généralisé dans [89] comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = & -(\theta\sqrt{1+\mid \nabla u \mid^2} + (1-\theta) \mid \nabla u \mid) F(\mathcal{L}(u)) \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{cases} \tag{18}$$

où θ est le paramètre qui permet de prendre en compte le type de modèle (constant ou linéaire par morceaux) que la solution doit développer. F et $\mathcal{L}$ étant la fonction et l'opérateur précédemment définis.

Dans la lignée de ces travaux, Alvarez [7] a aussi défini une nouvelle classe de filtres pour l'élimination du bruit et l'amélioration des contours à l'aide de filtres de chocs et de processus de diffusion anisotrope. Des EDP non linéaires sont proposées pour la résolution de tels problèmes. Ainsi, constatant que le schéma de Rudin en 1-D n'est pas performant en présence de bruit, à cause de chocs qui ne sont dûs qu'au bruit et qui se produisent dans les positions du passage par zéro de la dérivée seconde de u, Alvarez a repris le schéma 1-D de Rudin et proposé la modification suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + F(G_\sigma * u_{xx}, G_\sigma * u_x) \mid u_x \mid & = & 0 \\ u(x,0) & = & u_0(x) \end{cases} \tag{19}$$

où $G_\sigma(.)$ est un opérateur de lissage dépendant du paramètre σ (par exemple une Gaussienne) et où $F(.,.)$ est une fonction qui satisfait la condition $pqF(p,q) \geq 0$. Par exemple la fonction :

$F(p,q) = sign(p)sign(q)$ où $sign(s) = 1$ si $s > 0$, $sign(s) = -1$ si $s < 0$ et $sign(s) = 0$ si $s = 0$

Cette équation développe des chocs dans les passages par zéro du signal lissé et prend ainsi mieux en compte le bruit. Un schéma numérique récursif

très efficace en temps de calcul est proposé pour la mise en oeuvre de cette EDP et pour la partie filtrage par une Gaussienne.

Une généralisation au cas 2-D est proposée dans [7] qui inclut les idées de filtre de choc présentées pour le cas 1-D et l'idée de filtrage anisotrope présentée dans [6]. L'EDP parabolique-hyperbolique suivante est alors proposée :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial u}{\partial t} & = & C\mathcal{L}(u) - u_\xi F(G_\sigma * u_{\xi\xi}, G_\sigma * u_\xi) \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{array} \right. \tag{20}$$

où $\xi = \xi(x,y)$ est la direction du gradient ∇u ,$F(.,.)$ une fonction qui vérifie les conditions énumérées plus haut dans le texte, C une constante strictement positive, et $\mathcal{L}(u)$ un opérateur de lissage directionnel, par exemple $u_{\eta\eta}$, où $\eta = \eta(x,y)$ est la direction orthogonale au gradient ∇u. Cette EDP diffuse l'image initiale et élimine le bruit dans la direction parallèle aux contours, développe des chocs et améliore le contraste dans la direction orthogonale aux contours. La mise en oeuvre est réalisée à l'aide de schémas récursifs stables, très performants au niveau de la complexité calculatoire.

A titre de compléments, d'autres travaux sur l'application des EDP aux domaines de l'amélioration et de la restauration des images peuvent être consultés dans [2], [108], [106], [105], [68]

2.6 Une approche variationnelle unificatrice

Nous présentons ici une approche variationnelle qui unifie dans un même formalisme un certain nombre d'approches présentées dans les paragraphes précédents. Cette approche s'inspire de celles développées dans [106, 89, 121, 17, 29, 30]. Les travaux de l'équipe de Michel Barlaud au laboratoire d'I3S de l'université de Nice Sophia-Antipolis [17]) étendent au cas continu les travaux initiés dans la thèse de P. Charbonnier [29], effectuée au sein de la même équipe au laboratoire d'I3S. Les travaux plus récents de Gilles Aubert dans [14] constituent une référence complémentaire relative aux problèmes d'existence et d'unicité de la solution pour ce type de problème. L'intérêt de cette approche réside principalement dans sa propriété d'unifier dans un même formalisme les approches de Perona-Malik, Alvarez, Rudin présentées préalablement et de rendre plus claire les conditions requises pour l'obtention de schémas stables,

convergents et qui résolvent les problèmes de restauration sans dégrader les discontinuités.

On note par u, la fonction de R^2 dans R définie sur le rectangle $\Omega = (0,a)\times(0,b)$. Les valeurs de la fonction u représentent par exemple les intensités en niveau de gris de l'image u.

Soit P, l'opérateur linéaire permettant le passage de l'image originale u à l'image bruitée v par un modèle linéaire du type :

$$v = Pu + \nu \tag{21}$$

où ν est un bruit généralement considéré comme Gaussien de moyenne nulle et d'une certaine variance σ^2. Un exemple d'opérateur P est donné par l'opérateur de convolution :

$$Pu(x,y) = \int_\Omega p(x-\xi, y-\eta)u(\xi,\eta)d\Omega \quad (x,y)\ \epsilon\ \Omega \tag{22}$$

Le problème de retrouver u à partir de v est alors formulé comme celui de retrouver u tel que l'énergie $E(u)$ suivante soit minimum par rapport à u :

$$E(u) = \frac{1}{2} \parallel v - Pu \parallel^2 + \lambda \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)d\Omega \tag{23}$$

où le premier terme de $E(u)$ est un terme d'attache aux données et le second terme lié à la contrainte de régularisation. On s'intéresse aux conditions que doit remplir la fonction $\Phi(s)$ de la variable s qui représente la norme du gradient, afin que la minimisation de cette fonctionnelle puisse se faire avec un processus stable et convergent tout en préservant les discontinuités éventuellement présentes dans la solution $u(x,y)$.

Les conditions nécessaires sur les minima de l'énergie $E(u)$ sont données par les équations d'Euler-Lagrange associées à la fonctionnelle (23). Ces équations s'écrivent formellement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} P^*(v - Pu) + \lambda div(\Phi'(\mid \nabla u \mid)\dfrac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}) = 0, \quad (x,y)\ \epsilon\ \Omega \\ \frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u.n = \ 0, (x,y)\ \epsilon\ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{24}$$

où div représente l'opérateur de divergence, P^* représente l'opérateur adjoint de P, Φ' représente la dérivée de $\Phi(s)$ par rapport au paramètre s, $\partial\Omega$

représente la frontière du domaine Ω, et n représente le vecteur unitaire normal à la frontière de Ω. Les conditions aux limites choisies correspondent au cas de la réflection du signal image sur ses frontières.

Il est alors intéressant de noter que cette expression peut être développée et réécrite sous la forme suivante :

$$P^*(v - Pu) + \lambda(\Phi''(\mid \nabla u \mid)u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid}u_{\eta\eta}) = 0 \tag{25}$$

où $\Phi'(s)$ et $\Phi''(s)$ représentent les dérivées premières et seconde de $\Phi(s)$ par rapport à la variable s, et où $u_{\xi\xi}$ représente la dérivée seconde directionnelle de $u(x,y)$ dans la direction du gradient $\xi = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ et $u_{\eta\eta}$ représente la dérivée seconde directionnelle de $u(x,y)$ dans la direction η orthogonale au gradient ∇u.

La réécriture de l'équation (24) sous la forme (25) permet d'interpréter aisément la fonction de régularisation comme étant un processus de diffusion anisotrope opérant dans 2 directions orthogonales : les directions de la tangente et de la normale à l'isophote $u(x,y) = C$ données par $u_{\eta\eta}$ et par $u_{\xi\xi}$ respectivement. L'anisotropie provient des pondérations différentes ($\Phi''(\mid \nabla u \mid)$ et $\frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}$) accordées aux processus de diffusion dans ces 2 directions.

Le cas particulier où la fonction $\Phi(\mid \nabla u \mid)$ est telle que les 2 coefficients de pondération sont égaux, correspond à une fonction $\Phi(\mid \nabla u \mid)$ quadratique. Dans ce cas, la régularisation est effectuée à l'aide d'un processus de diffusion isotrope et la partie correspondant à la régularisation est résolue à l'aide de l'EDP parabolique correspondant à la résolution de l'équation de la chaleur, en faisant tendre le paramètre t vers ∞ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} \tag{26}$$

Dans le cas où la fonction $\Phi(\mid \nabla u \mid)$ est telle que les 2 coefficients de pondérations sont positifs ou nuls, le processus de résolution donné par l'EDP parabolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi''(\mid \nabla u \mid)u_{\xi\xi} + \frac{\Phi'(\mid \nabla u \mid)}{\mid \nabla u \mid}u_{\eta\eta} \tag{27}$$

peut être interprété comme une opération de lissage dans les deux directions tangentielle et orthogonale mais avec des pondérations différentes selon ces deux directions. Par contre, si les coefficients sont négatifs, le processus possède alors un effet identique à celui que produirait une équation de la chaleur inverse i.e de restaurer mais de manière instable les signaux flous. Afin d'étudier les conditions de convergence et de stabilité de cette EDP parabolique, il faut noter que l'équation d'évolution peut être interprétée comme un processus de descente de gradient opérant sur la surface énergétique donnée par $E(u)$. La forme de cette énergie et les conditions initiales du processus d'évolution vont alors jouer un rôle prépondérant dans la résolution et l'obtention de la solution optimale. En effet, si la surface ne possède qu'un seul minimum, le processus de minimisation est alors stable et devrait converger quelle que soit la condition initiale vers le minimum global. Par contre, si la surface énergétique présente plusieurs minima locaux, il faudrait alors que les conditions initiales soient suffisamment proches du minimum global pour que la solution trouvée corresponde à la solution optimale cherchée. Le problème est ainsi mal posé au sens où des conditions initiales différentes peuvent donner lieu à des solutions très différentes. Ceci n'est naturellement pas souhaitable, et on est ainsi amené à se poser la question suivante : Quelles sont les conditions que doit respecter la surface énergétique pour qu'une telle instabilité ne se produise pas? La réponse est fournie par la convexité du terme énergétique $E(u)$, qui est garantie par la convexité de la fonction $\Phi(\mid \nabla u \mid)$. Celle-ci est garantie par des conditions de positivité sur les deux coefficients de pondération :

$$\Phi''(\mid \nabla u \mid) \geq 0 \quad et \quad \Phi'(\mid \nabla u \mid) \geq 0 \tag{28}$$

On peut remarquer que la condition $\Phi''(\mid \nabla u \mid) > 0$ correspond au cas où la fonction $\mid \nabla u \mid \frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}$ est strictement croissante. Cette condition correspond précisément à celle énumérée plus haut dans les paragraphes concernant les travaux de Perona et Malik et à la condition imposée sur la fonction de pondération $c(\mid \nabla u \mid)$ (ici égale à $\frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}$) afin que le processus soit stable i.e $\mid \nabla u \mid c(\mid \nabla u \mid)$ strictement croissante. La condition $\Phi''(\mid \nabla u \mid) > 0$ n'est toutefois que nécessaire dans notre cas qui est 2D et il ne faut pas oublier de lui adjoindre la seconde condition $\Phi'(\mid \nabla u \mid) \geq 0$ afin d'obtenir la condition suffisante de stabilité.

A ce stade, on n'a examiné que les conditions imposées sur la fonction $\Phi(|\nabla u|)$ afin que le processus soit stable. Comment choisir toutefois la fonction $\Phi(|\nabla u|)$ parmi la classe des fonction qui vont vérifier les conditions imposées ? Dans un cadre applicatif lié au problème de la restauration de signaux dégradés par du bruit avec préservation des éventuelles discontinuités (i.e: les zones à fort gradient), il serait alors nécessaire d'imposer une contrainte sur les coefficients de pondération afin que l'opération de lissage ne s'effectue que le long des isophotes et non pas dans la direction orthogonale à celles-ci, ce qui aurait pour effet de dégrader les discontinuités franches et de les rendre plus floues. Ceci implique une condition de diffusion anisotrope le long des tangentes aux isophotes seulement et correspond ainsi au cas où seul le coefficient tangentiel est non nul (i.e $\frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}$). Cette condition est, par exemple, celle remplie par la fonction $\Phi(|\nabla u|)$ telle que celle préconisée par L. Rudin i.e la fonction potentielle $\Phi(|\nabla u|) = |\nabla u|$. Dans un tel cas, on n'aura effectivement qu'un lissage anisotrope le long de la tangente aux contours et non dans la direction perpendiculaire, et le processus de restauration va ainsi préserver les contours au cours des itérations. Toutefois un tel schéma présente un inconvénient clair : il ne permet qu'une opération de lissage directionnelle et ceci même dans les régions homogènes bruitées i.e sans fort gradient, alors qu'il est clair que dans de telles régions, il serait plutôt souhaitable de lisser dans toutes les directions, i.e de manière isotrope afin de réduire l'effet du bruit.

Ainsi, afin de préserver les discontinuités et opérer de manière isotrope dans les zones à faible gradient, tout en garantissant la stabilité et la convergence, il faudrait donc imposer les conditions suivantes sur la fonction $\Phi(|\nabla u|)$ quand $|\nabla u|$ tend vers 0 :

$$\lim_{|\nabla u|\to 0} \frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} = \lim_{|\nabla u|\to 0} \Phi''(|\nabla u|) = \Phi''(0) > 0 \qquad (29)$$

Dans les zones à fort gradient, la condition de lissage anisotrope le long des directions tangentielles aux isophotes, s'énonce comme :

$$\lim_{|\nabla u|\to \infty} \Phi''(|\nabla u|) = 0 \quad et \quad \lim_{|\nabla u|\to \infty} \frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} = Cste > 0 \qquad (30)$$

Malheureusement, ces 2 conditions ne peuvent être respectées simultanément par aucune fonction $\Phi(|\nabla u|)$. Les conditions suivantes peuvent par

contre être imposées afin de faire décroître le poids de la diffusion dans la direction du gradient plus rapidement que celui associé à la diffusion le long des isophotes :

$$\lim_{|\nabla u|\to\infty} \Phi''(\mid \nabla u \mid) = 0 \quad \lim_{|\nabla u|\to\infty} \frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} = 0 \quad et \quad \lim_{|\nabla u|\to\infty} \frac{\Phi''(|\nabla u|)}{\frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}} = 0 \tag{31}$$

Les conditions (29) et (31) sont ainsi des conditions suffisantes pour restaurer les signaux dégradés tout en préservant les possibles discontinuités.

Comme un certain nombre de fonctions ont déjà été proposées dans la littérature afin de prendre en compte le problème des discontinuités, le tableau suivant permet de passer en revue un certain nombre d'entres elles :

Auteur	$\Phi(s)$	$\Phi'(s)/s$	$\Phi''(s)$
Perona-Malik [95]	$\frac{-k^2}{2}(e^{-(s/k)^2} - 1)$	$e^{-(s/k)^2}$	$(1 - 2(\frac{s}{k})^2)e^{-(\frac{s}{k})^2}$
Perona-Malik [95]	$\frac{k^2}{2}log(1 + (s/k)^2)$	$\frac{1}{1+(\frac{s}{k})^2}$	$\frac{k^2(k^2-s^2)}{(k^2+s^2)^2}$
Geman et Reynolds [58]	$\frac{(s/k)^2}{1+(s/k)^2}$	$\frac{2k^2}{(k^2+s^2)^2}$	$-\frac{2k^2\left(-k^2+3s^2\right)}{(k^2+s^2)^3}$
Alvarez [6]	...	$g(s)$	$(1 - h(s))g(s)$
Tikhonov	$s^2/2$	1	1
Green [60]	$logcosh(s/k)$	$\frac{tanh(s/k)}{ks}$	$k^{-2}\left(\cosh(\frac{s}{k})\right)^{-2}$
Rudin [106]	s	$\frac{1}{s}$	0
Aubert [30]	$\sqrt{1 + (s/k)^2} - 1$	$\frac{1}{\sqrt{\frac{k^2+s^2}{k^2}}}k^{-2}$	$\frac{\lvert k\rvert}{(k^2+s^2)^{3/2}}$

Il est facile de vérifier que les 3 premières fonctions du tableau sont non convexes alors que les 3 dernières fonctions le sont. Les conditions de stabilité pour les 3 premières fonctions sont données par :

$s^2 \leq \frac{k^2}{2}$ pour la première fonction de Perona-Malik, $s^2 \leq k^2$ pour la seconde fonction de Perona-Malik et $s^2 \leq \frac{k^2}{2}$ pour la fonction de Geman et Reynolds.

La quatrième fonction vérifie bien les conditions de stabilité car Alvarez a choisi les fonctions $g(s)$ et $h(s)$ telles que

$$h(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \geq 2e \\ 0 & \text{si } s \leq e \end{cases}$$

$$g(s) = \begin{cases} 1 & s \to 0 \\ 0 & s \to \infty \end{cases}$$

Nous avons présenté ici une approche variationnelle qui unifie dans un même formalisme un certain nombre d'approches présentées dans les paragraphes précédents. Cette approche traite le problème du choix de la fonction régularisante du point de vue de la stabilité des systèmes de résolution et du point de vue de la restauration de signaux bruités sans détérioration des discontinuités. Nous avons commencé à mettre en oeuvre ces idées et une plate-forme logicielle intégrant une bonne partie des approches présentées ici est en cours de réalisation actuellement au sein du projet *Robotvis* [34]. Elle devrait nous permettre de comparer ces méthodes sur une base expérimentale. Les performances et les comportements au niveau de la stabilité seront aussi étudiés et tous ces points feront l'objet d'un autre rapport complémentaire à celui-ci.

3 Analyse multi-échelle et EDP

Une analyse multi-échelle d'une image $u_0(x, y)$ consiste en la génération d'une séquence d'images $u(x, y, t)$, où chaque image de la séquence apparaît comme une version lissée, à l'échelle référencée par le paramètre t de l'image initiale $u_0(x, y)$. Une axiomatisation d'une telle analyse multi-échelle a été proposée récemment par l'équipe du Ceremade autour de Luis Alvarez, P.L. Lions, J.M. Morel et de leurs collaborateurs [3], [78], [5], [4] [117], [52] en parallèle à des travaux menés par d'autres équipes sur le même sujet (voir le paragraphe (5)).

Dans cette axiomatisation, l'analyse multi-échelle est définie comme l'application d'un ensemble d'opérateurs $T_t(.)$ qui, appliqués à une image initiale $u_0(x, y)$ conduisent à un continuum d'images $u(x, y, t) = T_t(u_0(., .))$. Le problème du choix de l'opérateur $T_t(.)$ a été traité par la formulation d'un certain nombre d'axiomes que doit respecter cette analyse jusqu'à obtenir l'unicité de cet opérateur.

Parmi l'ensemble des axiomes considérés, on y trouve principalement les suivants :

- **Axiome de la structure pyramidale:**

L'image à une échelle $t+h$ avec $t, h > 0$ peut être obtenue à partir de la version à l'échelle précédente t, sans passer par l'image initiale. Cet axiome, connue aussi sous le nom d'axiome de causalité, s'énonce alors formellement par :

Étant donné $t, h \geq 0$, il existe un opérateur de transition noté $T_{t,t+h}$ tel que pour toute image u, on ait la relation suivante :

$T_{t+h}(u) = T_{t,t+h} \circ T_t(u)$ avec $T_0 = Id$ et $T_{t,t}(u) = u$

- **Axiome de comparaison locale:**

  L'analyse ne doit pas introduire dans les images lissées des détails qui n'y étaient pas aux échelles précédentes. Ceci se traduit par la préservation locale de la valeur relative des niveaux de gris, et l'énoncé de l'axiome suivant :

  Si $u(x,y) \geq v(x,y)$ pour un point (x,y) dans un voisinage d'un autre point (x_0, y_0) alors on doit avoir $\forall t \geq 0$ et h assez petit $T_{t,t+h}(u(x_0,y_0)) \geq T_{t,t+h}(v(x_0,y_0))$.

- **Axiome de régularité:**

  Si u est une forme quadratique au voisinage d'un point $\mathbf{m_0}$ de coordonnées (x_0, y_0), i.e $u(x,y) = a + \mathbf{p}^t(\mathbf{m} - \mathbf{m_0}) + \frac{1}{2}(\mathbf{m} - \mathbf{m_0})^t\mathbf{A}(\mathbf{m} - \mathbf{m_0})$, si $\| \mathbf{m} - \mathbf{m_0} \| < \epsilon$, alors quand h tend vers 0, la valeur de $T_{t,t+h}(u(x_0,y_0))$ ne doit dépendre que des valeurs de a,$\mathbf{p}$ et $\mathbf{A}$. Cet axiome s'exprime formellement par :

  Soit $u(x,y) = a + \mathbf{p}^t(\mathbf{m} - \mathbf{m_0}) + \frac{1}{2}(\mathbf{m} - \mathbf{m_0})^t\mathbf{A}(\mathbf{m} - \mathbf{m_0})$ une forme quadratique de R^2, il existe une fonction $F(\mathbf{A}, \mathbf{p}, a, x, y, t)$ continue par rapport à $\mathbf{A}$, non décroissante et telle que $\frac{(T_{t,t+h}(u)-u)(x_0,y_0)}{h} \rightarrow F(\mathbf{A}, \mathbf{p}, a, x_0, y_0, t)$ quand $h \rightarrow 0$.

- **Invariance morphologique:**

  L'analyse doit commuter avec toute redistribution croissante $g(.)$ des niveaux de gris. Ceci traduit le fait que seule la notion d'isophote est importante lors de cette analyse, d'où sa référence à la morphologie mathématique. Soit une fonction croissante g: $R \rightarrow R$, alors $\forall u$, on doit avoir:

$T_{t,t+h}(g \circ u) = g \circ T_{t,t+h}(u)$

Cette invariance morphologique est dite *forte* si cet axiome est respecté pour toute fonction $g(.)$, croissante ou décroissante.

- **Invariance euclidienne ou affine:** L'analyse doit être invariante pour toute transformation $F_{\mathbf{A},\mathbf{b}}$: $R^2 \rightarrow R^2$, définie par $F_{\mathbf{A},\mathbf{b}}(\mathbf{m}) = \mathbf{Am} + \mathbf{b}$, où $m \in R^2$, $\mathbf{A}$ est une matrice $\mathbf{A} \in R^2 \times R^2$ non singulière et $\mathbf{b} \in R^2$:

  $T_{t,t+h}(u) \circ F_{\mathbf{A},\mathbf{b}} = T_{t,t+h}(u \circ F_{\mathbf{A},\mathbf{b}})$

  Dans le cas simple où $\mathbf{A}$ est une matrice orthonormale, l'invariance est euclidienne, alors que dans le cas d'une matrice $\mathbf{A}$ plus générale, l'invariance est affine. Il est à noter toutefois que pour ce dernier type d'invariance, un changement d'échelle devra aussi être effectué

  $T_{t',t'+h'}(u) \circ F_{\mathbf{A},\mathbf{b}} = T_{t,t+h}(u \circ F_{\mathbf{A},\mathbf{b}})$

- **Linéarité:**

  L'opérateur est linéaire par rapport à ses arguments

  $T_{t,t+h}(au + bv) = aT_{t,t+h}(u) + bT_{t,t+h}(v)$

Cette axiomatisation de l'analyse multi-échelle ainsi que sa formalisation à l'aide d'EDP, comme on va le voir par la suite, a permis d'unifier un grand nombre de théories précédemment proposées dans la littérature liée aux domaines du traitement des images et de la vision par ordinateur. Parmi les résultats les plus remarquables, on peut noter les théorèmes suivants dont on peut trouver les démonstrations dans [5], [10], [9]:

Théorème 1: *Si une analyse multi-échelle $T_t(u)$ satisfait les axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale et de régularité, alors la solution $u(x,y,t) = T_t(u)(x,y)$ est une solution de viscosité de l'EDP suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & F(\mathbf{H}(u), \nabla u, u, x, y, t) \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{cases} \tag{32}$$

où $\mathbf{H}(u)$ et ∇u désignent respectivement le Hessien et le gradient de u et où $F(\mathbf{H}(u), \nabla u, u, x, y, t)$ est la fonction définie dans le principe de régularité. D'autre part, si $u(x,y,t)$ est une solution de viscosité de l'équation (32) alors

l'analyse multi-échelle $T_t(u)(x,y)$ définie par $T_t(u)(x,y) = u(x,y,t)$ satisfait les 3 axiomes de structure pyramidale,de comparaison locale et de régularité.

Ce théorème est fondamental dans l'axiomatisation de l'analyse multi-échelle et permet de montrer le lien profond qui existe entre l'analyse multi-échelle et les EDP. Selon les axiomes considérés, d'autres théorèmes peuvent être établis permettant de relier un certain nombre de travaux développés de manière indépendante par différents auteurs :

Théorème 2: *Si une analyse multi-échelle satisfait aux axiomes de linéarité, d'invariance euclidienne, de structure pyramidale et de comparaison locale, alors la solution $u(x,y,t) = T_t(u)(x,y)$ est une solution de l'EDP suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \Delta u(x,y,t) \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{cases} \tag{33}$$

Cette équation, plus connue sous le nom d'équation de la chaleur, correspond au cas ou la fonction F définie dans l'axiome de régularité est égale à la trace du Hessien $\mathbf{H}(u)$. La solution de cette EDP s'obtient par la convolution de l'image initiale $u_0(x,y)$ avec l'opérateur Gaussien, et correspond au modèle étudié par Marr et Hildreth [82] et utilisé ensuite par Witkin [120], [65], dans son introduction à l'analyse multi-échelle. Ce modèle a été aussi étudié par Koenderink [75] qui remarqua le lien entre l'équation de la chaleur et l'opération de convolution avec une Gaussienne.

Si on considère d'autres axiomes, d'autres théorèmes peuvent être établis parmi lesquels le suivant qui permet de faire un lien très intéressant parmi un ensemble de travaux :

Théorème 3: *Si une analyse multi-échelle satisfait aux axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale, de régularité et d'invariances euclidienne et morphologique alors la solution $u(x,y,t) = T_t(u)(x,y)$ est une solution de viscosité de l'EDP suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \mid \nabla u \mid G(div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}), t) \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{cases} \tag{34}$$

où $div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) = \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{(u_x^2+u_y^2)^{3/2}}$ *désigne la courbure en chaque point* (x, y, t) *de la ligne de niveau définie par* $u(x, y, t) = C$ *et où la fonction* $G(s, t)$ *est une fonction non décroissante par rapport à la variable réelle* s.

Le cas particulier où la fonction G est constante et égale à +1 ou -1 correspond aux opérations élémentaires de morphologie mathématique que sont la dilatation et l'érosion avec une boule comme élément structurant. Ces opérations élémentaires correspondent en effet aux EDP $\frac{\partial u}{\partial t} = \pm \mid \nabla u \mid$.

Un autre cas particulier intéressant pour la fonction G est celui où $G(s, t) = s.t$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & t \mid \nabla u \mid \operatorname{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}) \\ u(x, y, 0) & = & u_0(x, y) \end{cases} \tag{35}$$

Cette équation correspond à une diffusion anisotrope dans la direction des lignes de niveaux de l'image et est identique à celle proposée par Osher et Sethian [90] dans leur reformulation d'un problème d'évolution de courbes étudié en détails par Gage et Hamilton [53, 54, 55]. Elle est aussi très proche de l'équation (8) proposée par Perona et Malik, et de l'équation de restauration proposée par Rudin, Osher et Fatemi dans [106]. Du fait de la relation suivante :

$$\mid \nabla u \mid \operatorname{div} \frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid} = \frac{u_{xx} u_y^2 - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy} u_x^2}{u_x^2 + u_y^2} \tag{36}$$

l'équation (35) peut se mettre sous la forme simplifiée :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \frac{t(u_{xx} u_y^2 - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy} u_x^2)}{u_x^2 + u_y^2} \\ u(x, y, 0) & = & u_0(x, y) \end{cases} \tag{37}$$

C'est généralement sous cette forme que l'analyse multi-échelle de l'image est effectivement mise en oeuvre pour certaines applications (contours déformables,évolution de courbes..). À ce titre d'exemple, la figure 1 extraite de [34] illustre les résultats obtenus pour différentes itérations de l'équation (35) dans le cas d'une image originale correspondant à une ellipse. On peut noter en particulier l'effet bien connu que toutes les courbes de niveaux de l'image originale finissent par être un cercle.

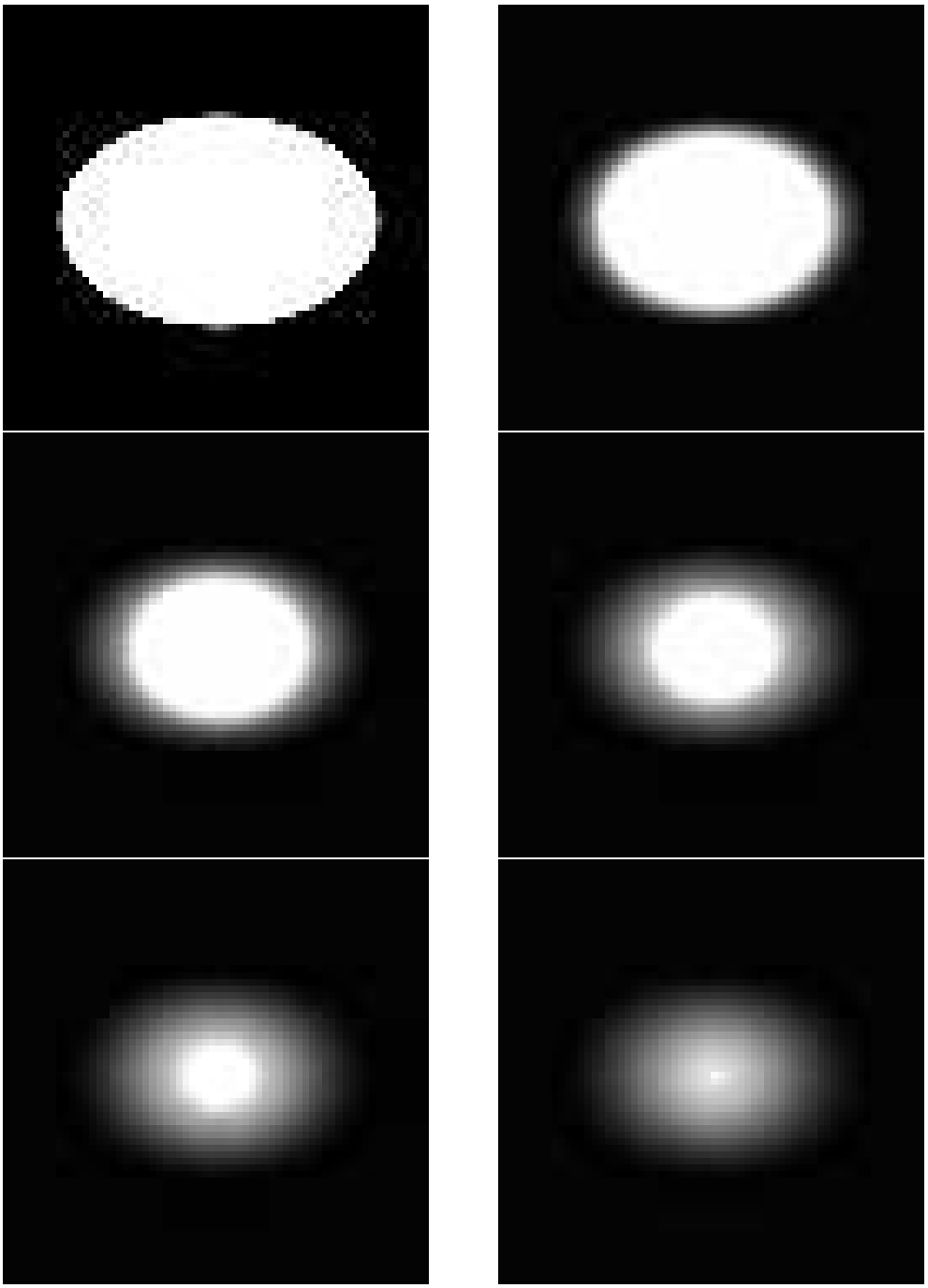


FIG. 1 – *Évolution du schéma à invariance euclidienne (EMSS) pour une ellipse : Le nombre d'itération augmente de gauche à droite et de haut en bas*

Si on remplace l'axiome d'invariance euclidienne dans le théorème précédent par l'axiome d'invariance affine, on obtient alors le théorème fondamental suivant [5]:

Théorème 4: *Il n'y a qu'une seule analyse multi-échelle* $u(x,y,t) = T_t(u)(x,y)$ *qui satisfait aux axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale, de régularité et d'invariances affine et morphologique. Cette analyse est effectuée par l'EDP suivante :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \mid \nabla u \mid (t.div(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}))^{1/3} \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{cases} \tag{38}$$

Cette équation est utilisée pour faire évoluer de manière invariante affine les courbes de niveaux dans les images. Une comparaison de cette équation avec celle qui inclut l'invariance euclidienne (37), permet de constater que le terme de courbure correspond maintenant à la composante de la courbure affine et non euclidienne le long de la normale euclidienne. Ceci se traduit par l'élimination du dénominateur présent dans (37), car (38) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & t^{1/3}(u_{xx}u_y^2 - 2u_xu_yu_{xy} + u_{yy}u_x^2)^{1/3} \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{cases} \tag{39}$$

Du fait de la disparition du terme au dénominateur, cette forme est plus à même de rendre le processus d'évolution des courbes de niveaux stable. Ceci a été effectivement prouvé par les résultats expérimentaux menés par [85]. Des exemples de cette axiomatisation pour le cas 3D peuvent se trouver dans la référence [10].

A titre d'exemple, la figure 2, extraite de [34] illustre les résultats obtenus à différentes itérations de l'équation (38) dans le cas d'une image originale correspondant à une ellipse. On peut noter en particulier que l'ellipse disparaît mais que sa forme reste bien elliptique du fait de la propriété d'invariance affine.

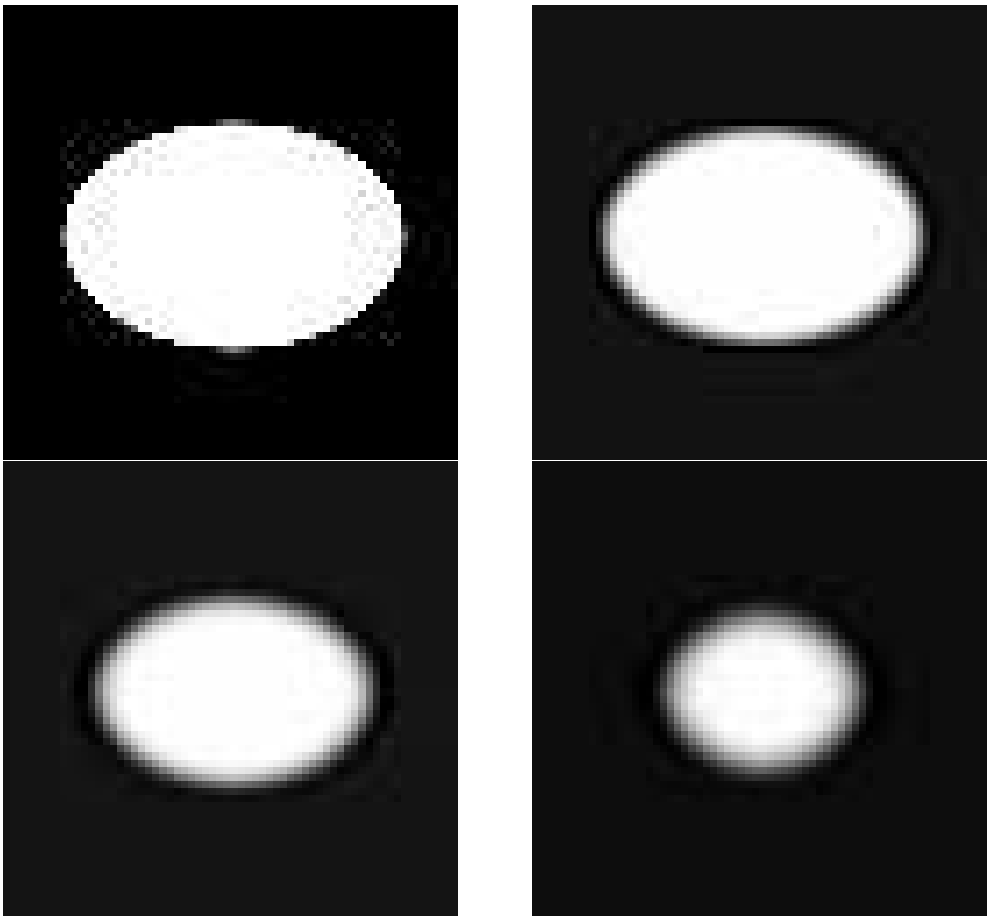


FIG. 2 – *Évolution du schéma à invariance affine (AMSS) pour une ellipse : Le nombre d'itération augmente de gauche à droite et de haut en bas*

4 Segmentation d'images

Nous abordons dans ce paragraphe le problème de la segmentation d'images en zones homogènes car la philosophie développée pour traiter ce problème est très proche de celle de la section (3) où on a abordé l'axiomatisation de l'analyse multi-échelle.

Le problème de la segmentation d'images en zones homogènes d'intensité, de couleur, de texture, de mouvement, de disparité, etc... est aussi vieux que l'apparition du traitement d'images [101] et a été traité principalement par des méthodes assez heuristiques. Bien que la solution "moderne" de ce problème relève de la théorie des variations et non de celle des EDP, nous l'incluons néanmoins dans ce rapport car la philosophie est très proche de celle de la section 3. C'est sans doute Pavlidis qui, le premier, a posé le problème de la segmentation d'images comme un problème d'approximation fonctionnelle [92, 93, 94] dont il réalisa la difficulté et pour lequel il proposa des solutions sous-optimales mais relativement efficaces telles que la croissance (déjà proposé par Brice et Fenema [18]) et la division de régions. Par la suite, d'autres auteurs ont proposé des théories alternatives telles que la théorie stochastique de Geman et Geman [57], les modèles variationnels de Mumford et Shah [84] et l'étude théorique de l'école Italienne autour d'Ambrosio [12]. On peut considérer que le point d'aboutissement de toutes ces théories est la théorie de la segmentation multi-échelle de Koepfler, Lopez, Morel, Solimini [76, 83].

Étant donnée une image $u_0(x, y)$ et une carte initiale de bords de régions K_0, on cherche à définir une séquence $(K(t))$ de segmentations multi-échelle, et une séquence d'images filtrées $u(x, y, t)$ dont $K(t)$ est l'ensemble des bords. On note $T_t K_0 = K(t)$ et on impose les axiomes suivants:

Causalité :

$$K(t') \subset K(t) \text{ si } t < t' \text{ et } T_{t,h} T_h = T_t \text{ avec } T_0 = Id \text{ et } t > h \tag{40}$$

Invariance euclidienne :

$$T_{t,t+h} R = R T_{t,t+h} \tag{41}$$

pour toute isométrie R.

Invariance par changement d'échelle :
Si Z_λ désigne le zoom de facteur λ, alors

$$T_t Z_\lambda = Z_\lambda T_{\lambda^{1/2} t} \tag{42}$$

Bande dessinée :
L'image $u(x, y, t)$ est localement constante et égale à la moyenne de $u_0(x, y)$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash K(t)$.

L'algorithme qui résulte de cette axiomatisation est de type croissance de régions, le critère de fusion de régions étant celui de Mumford et Shah : la fusion doit faire décroître l'énergie suivante :

$$E(u(t), K(t)) = \int_{\mathbb{R}^2 \backslash K(t)} (u(t, \mathbf{x}) - u_0(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} + t\, longueur(K(t)) \tag{43}$$

Le gros avantage, par rapport aux algorithmes précédents qui utilisaient un grand nombre de paramètres de seuils cachés, est que celui-ci n'en utilise en principe qu'un seul, l'échelle, fournit des résultats au moins aussi bons que les meilleurs d'entre eux et est bien fondé mathématiquement ce qui permet d'étudier quantitativement ses performances. A titre de complément à cette présentation, on peut citer la référence [28] où A. Chambolle discute des liens entre l'approche variationnelle de Mumford et Shah et des approches numériques proposées pour la résoudre.

5 Les EDP en Vision par Ordinateur

On donne dans ce paragraphe quelques exemples concernant l'utilisation des EDP à des fins d'applications dans le cadre de problèmes traités principalement en vision par ordinateur. Ces exemples concernent l'application de la théorie de l'évolution des courbes planes, les contours déformables, l'estimation du flot optique à partir de séquences d'images, l'estimation d'une carte de profondeur dense par stéréoscopie, ainsi que le *shape from shading*.

5.1 Évolution de courbes planes

La théorie de l'évolution des courbes planes a été considérée dans un grand nombre de domaines tels que la géométrie différentielle, l'analyse numérique, la vision par ordinateur et plus récemment dans le domaine du traitement des images.

En parallèle avec l'application des EDP aux images, et jusqu'à très récemment indépendamment, s'est développée une théorie de la déformation des courbes simples planes sous l'effet d'une équation de la chaleur intrinsèque. Nous donnons rapidement les résultats principaux de ces études et indiquons le lien avec les sections précédentes.

Soit $\mathbf{C}(p,t) : \mathcal{S}^1 \times R^{+*} \to R^2$ une famille de courbes fermées suffisamment différentiables plongées dans le plan euclidien, affine ou projectif (auquel cas il faut remplacer R^2 par le plan projectif $\mathcal{P}^2$). p est un paramètre le long de la courbe à l'instant t, ou à l'échelle t. On suppose que cette famille de courbes satisfait à l'EDP suivante

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{C}_{\sigma\sigma} \tag{44}$$

où σ est l'abscisse curviligne euclidienne, affine ou projective. On suppose de plus qu'on part d'une courbe donnée $\mathbf{C}_0(p)$ et qu'on a donc la condition initiale suivante

$$\mathbf{C}(p,0) = \mathbf{C}_0(p)$$

Dans le cas euclidien, on voit que l'évolution revient à se déplacer le long de la normale avec une vitesse égale à la courbure. Cette équation a été étudiée en détails par Gage et Hamilton [53, 54, 55] qui ont montré qu'une courbe quelconque évoluant selon l'équation (44) devenait convexe au bout d'un temps fini et disparaissait ensuite en un temps fini sous la forme d'un point circulaire.

Il est facile de montrer que si l'on considère la courbe initiale comme une isophote d'une image $u(x,y)$, alors son évolution selon (44) est la même que celle produite par (35). D'autres références que celles qui ont mentionnées peuvent aussi être consultées comme celles concernant les travaux de Kimia et de ses collègues [71, 70, 69].

L'équation (44) a aussi été étudiée dans le cas affine par Sapiro et Tannenbaum [113, 112, 116, 115, 109]. L'abscisse curviligne qui intervient dans (44) est alors l'abscisse curviligne affine et ces auteurs ont montré un résultat similaire à celui de Gage et Hamilton à savoir qu'une courbe quelconque soumise à

cette équation d'évolution devient convexe en un temps fini puis disparaît en un temps fini sous la forme d'un point elliptique. Cette équation d'évolution affine ainsi que son adaptation au cas ou la courbe initiale est polygonale ou représentée à base de B-Spline, a été aussi étudiée par Sapiro et Bruckstein qui présentent les 3 cas dans la référence [107].

D'une manière analogue au cas euclidien, on peut montrer que les isophotes d'une image $u(x, y)$ évoluant selon l'équation (39) évoluent individuellement selon l'équation (44).

Les équations d'évolution euclidienne et affine de courbes planes ont été appliquées avec succès par Sapiro et Tannenbaum [110] au problème du lissage de courbes bruitées avec préservation du périmètre ou de la surface de la courbe initiale. Ceci permet en particulier d'apporter une solution très élégante au problème dit du *Shrinking* tout en préservant les propriétés d'invariance euclidienne et affine suivant l'équation mise en oeuvre.

L'espace d'échelle affine engendré par l'équation (44) a été utilisé par Faugeras et Keriven [45] pour calculer la courbure affine de courbes images dans un contexte de reconnaissance de formes planes. De manière un peu plus précise, on peut montrer [114, 111] que la courbure *euclidienne* κ d'une courbe évoluant selon l'équation (44) dans le cas affine satisfait l'équation:

$$\kappa_t = -\kappa\mu \tag{45}$$

où μ est la courbure affine.

Cette équation est intéressante dans la mesure où elle permet de calculer la courbure affine en fonction de la courbure euclidienne et de sa dérivée première par rapport au temps, donc en fonction de dérivées d'ordre trois par rapport à la courbe initiale alors que la formule qui relie la courbure euclidienne et la courbure affine fait intervenir des dérivées d'ordre deux de la première donc des dérivées d'ordre quatre par rapport à la courbe initiale :

$$\mu = -\kappa^{4/3} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \kappa^{-2/3}}{\partial v^2} \tag{46}$$

Ceci permet en pratique de gagner un ordre de dérivation, ce qui est très précieux, à condition de pouvoir calculer avec une précision suffisante l'évolution affine de la courbe. Cette précision a été obtenue à l'aide de la technique proposée par Osher et Sethian [91] basée sur la théorie de Hamilton-Jacobi [56]. Les

courbes $\mathbf{C}(p,t)$ sont représentées comme les passages par zéro d'une famille de surfaces $\Phi : \mathbf{R^2} \times [\mathbf{0}, \tau) \to \mathbf{R}$ qui évolue selon une loi qui dépend de l'espace d'échelle dans lequel on travaille. Un exemple d'évolution affine d'une courbe plane obtenu par cette méthode apparaît en figure 3. Le calcul de la courbure

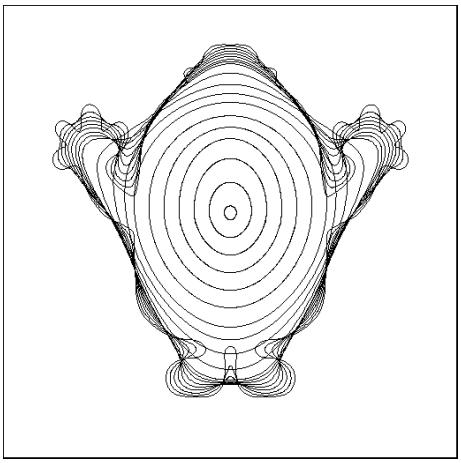


FIG. 3 – *Différentes étapes de l'évolution affine d'une courbe plane*

affine s'effectue à l'aide de l'équation (45) plutôt que de l'équation (46). Nous montrons sur la figure 4 que le gain est significatif : cette figure montre sur la gauche une vue d'une ellipse dont la courbure affine est constante, et sur la droite trois courbes représentant la courbure affine en fonction de l'abscisse curviligne affine le long de la courbe. L'une des courbes est la courbure théorique, constante, l'autre est la courbure obtenue en effectuant le calcul à partir de l'équation (46) c'est-à-dire en dérivant deux fois la courbure euclidienne et est assez erratique, la troisième enfin est la courbure affine obtenue à partir de l'équation (45) c'est-à-dire en dérivant la courbure euclidienne une fois par rapport au temps.

Plus récemment encore Faugeras et Keriven [42, 46] ont montré que l'équation (44) avait un sens dans le cas où σ est l'abscisse curviligne projective et a donné dans ce cas les équations d'évolution de cette abscisse curviligne ainsi que celle de la courbure projective. La généralisation au cas projectif impose de considérer le repère de Frenet associé à une courbe régulière du plan projectif [21, 22, 44]. Sans entrer dans les détails, disons que le repère de Frenet projectif

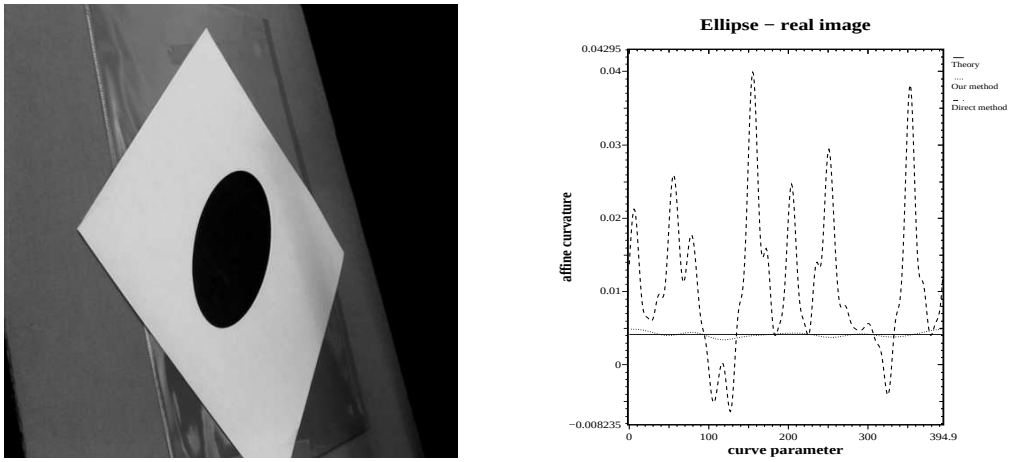


FIG. 4 – *Une image d'une ellipse (à gauche), sa courbure affine théorique, calculée par (46) et par (45) (à droite).*

fait intervenir un représentant particulier du point de la courbe projective que nous noterons $\mathbf{A}$. Il est à noter que ce vecteur est de dimension 3 pour une courbe plane. On est alors conduit à généraliser l'équation (44) et à l'écrire sous la forme :

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{A}_{\sigma\sigma}$$

où σ est l'abscisse curvligne le long de la courbe. Plus généralement, on peut étudier des équations de la forme :

$$\mathbf{B}_t = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}_\sigma + \gamma\mathbf{A}_{\sigma\sigma}$$

où les fonctions α, β, γ sont des fonctions des invariants projectifs de la courbe, par exemple l'abscisse curviligne et la courbure. Il serait intéressant et utile de comparer ce travail à celui de Dibos [41] qui a étendu l'analyse multi-échelle affine invariante décrite dans [11] au cas projectif.

On retrouve alors un certain nombre de propriétés agréables des cas euclidiens et affines comme par exemple le fait que si l'on part d'une courbe à courbure constante (un cercle ou une droite dans le cas euclidien, une conique dans le cas affine), celle-ci le demeure au cours de l'évolution. Dans le cas pro-

jectif, les courbes à courbure constante sont de trois types (à une homographie près) :

1. La parabole généralisée : $y = x^m, m \notin \{2, \frac{1}{2}, -1\}$
2. La spirale logarithmique: $\rho = e^{m\theta}, m \neq 0$
3. L'exponentielle: $y = e^x$

Nous montrons sur la figure 5 l'évolution de ces trois courbes selon l'équation

$$\mathbf{A}_t = 4\kappa\mathbf{A} + 3\mathbf{A}_{\sigma\sigma} \tag{47}$$

où κ est la courbure projective.

5.2 EDP et Contours Déformables

Dans le cadre de l'application des EDP aux contours déformables, Caselles *et al* [23, 24, 25] et Malladi *et al* [80, 81, 79], ont utilisé récemment les idées d'évolution de courbes planes à des fins de solution très élégante aux problèmes de l'initialisation et de l'évolution des modèles déformables introduit par Kass et Witkin [66, 67, 118, 31, 32, 51]. Nous présentons ci-dessous certaines des idées, parmi les plus importantes, développées par Caselles, Kimmel et Sapiro dans les travaux décrits dans [23, 24, 25].

Soit une courbe plane $\mathbf{C}(\mathbf{p}, \mathbf{t})$, appelée à évoluer dans le temps au sein d'une image $I(x.y)$ afin d'épouser à la convergence les frontières des différents objets pouvant s'y trouver. On modélise la courbe comme un front d'onde qui se propage perpendiculairement à lui-même, avec une vitesse proportionnelle à sa courbure κ et aussi à une information radiométrique, représentée par un terme $g(I)$, lié à la norme du gradient dans l'image $I(x, y)$, où se trouvent les courbes à extraire.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} & = & g(I)(\nu + \kappa)\vec{N} \\ u(x, y, 0) & = & u_0(x, y) \end{cases} \tag{48}$$

où $\vec{N}$ représente le vecteur normal intérieur à la courbe $\mathbf{C}(\mathbf{p}, \mathbf{t})$, ν est une constante réelle positive agissant comme un paramètre de vitesse, $g(I) =$

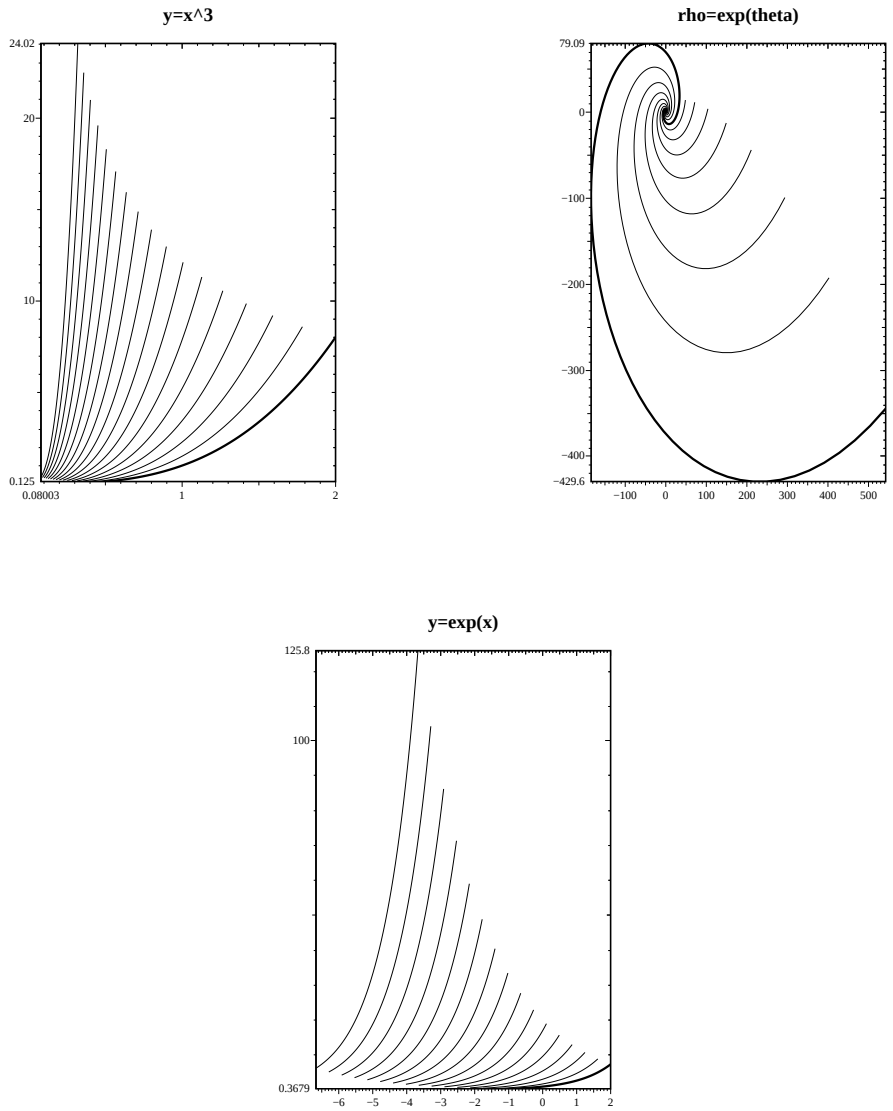


FIG. 5 – *Évolution des trois types de courbes à courbure projective constante selon l'équation (47).*

$\frac{1}{1+|\nabla \hat{I}|^p}$,$\hat{I}$ représente l'image I, d'où les contours doivent être extrait, régularisée par un opérateur Gaussien par exemple et $p = 1$ ou 2.

On fait alors correspondre à cette courbe $\mathbf{C(p,t)}$ une réprésentation implicite donnée par une courbe de niveaux dans une image $u(x,y)$ quelquonque, par exemple une courbe de niveau $u(x,y) = 0$ au sein d'une image de distance. Du fait que le vecteur normal intérieur $\vec{N}$ à la courbe $\mathbf{C(p,t)}$ est parallèle au vecteur gradient $\vec{\nabla} u$, il est facile alors de montrer que lorsque la courbe $\mathbf{C(p,t)}$ évolue suivant la loi $\mathbf{C_t} = \beta \vec{N}$, la courbe de niveaux correspondant à $u(x,y) = 0$ évolue avec la loi $u_t = \beta \mid \nabla u \mid$ [91]. Ceci permet alors d'écrire l'EDP (48) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & g(I)(\nu + \kappa) \mid \nabla u \mid \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{array} \right. \tag{49}$$

En notant que le terme de courbure κ de la courbe plane $\mathbf{C(p,t)}$ correspond au terme de divergence $(\mathrm{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}))$, cette EDP peut être alors écrite sous la forme simplifiée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & g(I) \mid \nabla u \mid (\mathrm{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})) + \nu g(I) \mid \nabla u \mid \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{array} \right. \tag{50}$$

Un point remarquable est que la mise en oeuvre de l'EDP (48) au travers de l'équation (50), basée sur la notion de courbe de niveau, permet de gérer de manière automatique les changements de topologie du contour [91]. En particulier, s'il existe plusieurs objets dans l'image, l'unique contour initial fermé et englobant les différents objets se scinde lors de son évolution, en autant de contours englobant les objets présents dans l'image. La méthode est aussi insensible à l'initialisation qui peut être très lointaine et très grossière. Le contour peut aussi se déformer pour s'ajuster sur les formes les plus compliquées, en particulier sur les formes pourvues de longues excroissances, exemples que les snakes classiques ont du mal à traiter à cause de leur élasticité.

Le choix du paramètre ν dans cette méthode est toutefois un point délicat. Le paramètre $\nu \vec{N}$ est semblable dans son concept à la force extérieure introduite par Cohen dans [31, 32] pour gonfler comme un ballon les courbes initiales. Des solutions possibles au problème du choix de ν ainsi que la dé-

monstration de l'existence et de l'unicité d'une solution de viscosité à l'EDP donnée par (50) peuvent être trouvés dans la référence [23].

Une autre solution élégante au problème du choix du paramètre ν est proposé par Caselles, Kimmel et Sapiro dans les références [24, 25], où ils introduisent le concept de contour actif géodésic au travers de l'EDP :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & g(I) \mid \nabla u \mid (\mathrm{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})) + \nabla g(I).\nabla u \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{array} \right. \tag{51}$$

Cette équation se différencie de l'EDP (50) par la formulation variationnelle auquelle elle se rattache, et qui justifie le qualificatif de géodesic attribué au contour actif détecté. En effet, on peut montrer que cette EDP correspond à la solution d'un problème de minimisation de fonctionnelle faisant intervenir non seulement un terme de longueur de la courbe, comme pour l'EDP (48), mais aussi le terme $g(I)$ provenant directement de l'image. Ceci se traduit par le remplacement du terme $\nu g(I) \mid \nabla u \mid$ dans (50) par le terme $\nabla g(I).\nabla u$ dans (51). Ce nouveau terme, qui pousse encore davantage les contours vers les frontières de l'objet à detecter, ne comprend plus le paramètre ν à choisir par l'opérateur lors de l'initialisation. Une propriété en plus de cette EDP par rapport à celle donnée par (50) est qu'il est possible de converger vers les contours de l'objet même lorqu'il existe une grande variation de la norme du gradient le long des frontiéres de l'objet à detecter.

Un modèle plus général d'évolution de contour actif géodesic prenant en compte le paramètre ν peut aussi être considéré :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & g(I) \mid \nabla u \mid (\mathrm{div}(\frac{\nabla u}{|\nabla u|})) + \nabla g(I).\nabla u + \nu g(I) \mid \nabla u \mid \\ u(x,y,0) & = & u_0(x,y) \end{array} \right. \tag{52}$$

Des résultats d'existence, d'unicité et de stabilité pour ce modèle d'évolution sont démontrés dans [24]. Concernant les résultats expérimentaux obtenus avec ce modèle, les auteurs remarquent que le modéle converge vers la solution correcte, mais plus lentement que lorsque le paramètre de vitesse ν n'ait pas pris égal à 0.

5.3 EDP et Stéréovision

Les idées présentées dans la dernière partie du paragraphe consacré à l'amélioration et restauration des images avec préservation des discontinuités, sont en train d'être appliquées actuellement au sein de notre projet au problème de l'estimation de la profondeur à partir de plusieurs images et à celui de l'estimation du flot optique à partir d'une séquence d'images.

En stéréoscopie, l'appariement de primitives images entre des images prises de différents points de vue est un problème essentiel si on veut remonter à une information de profondeur de la scène observée. Dans [98], nous décrivons le problème de l'appariement d'un point m_1 dans l'image I_1 à son correspondant m_2 dans l'image I_2 d'une paire stéréoscopique comme la minimisation en Z (profondeur du point 3D M qui se projette en m_1 et m_2) de la fonctionnelle suivante :

$$M_{12}(Z) = \iint \|\mathbf{I}_1(m_1) - \mathbf{I}_2(f_1(m_1, Z(m_1)))\|^2 \, dm_1 + \lambda \iint \Phi(\mid \nabla_{m_1} Z \mid) dm_1$$

On peut montrer alors que l'équation d'Euler Lagrange associée à cette fonctionnelle peut s'écrire comme :

$$\sum_k \left(\mathbf{F}_1^k(m) - \mathbf{F}_2^k(Z(m))\right) \frac{\partial \mathbf{F}_2^k}{\partial Z} - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\Phi'(\mid \nabla_m Z \mid)}{\mid \nabla_m Z \mid} Z_{\xi\xi} + \Phi''(\mid \nabla_m Z \mid) Z_{\eta\eta} \right) = 0$$

où Φ' et Φ'' représentent respectivement la 1ère et seconde dérivées de $\Phi(s)$ par rapport au paramètre s. $Z_{\eta\eta}$ représente la dérivée seconde directionnelle de la profondeur $Z(m)$ dans la direction du gradient $\eta = \frac{\nabla Z}{|\nabla Z|}$, et $Z_{\xi\xi}$ est la dérivée seconde directionnelle de $Z(m)$ dans la direction de ξ, vecteur orthogonal au gradient. Le vecteur $\mathbf{F_i^j}$ représente le vecteur des attributs de l'image i utilisés pour la mise en correspondance (intensité lumineuse, gradient,composantes couleurs....).

Les approches classiques comme celles développées dans [100] et [99] considèrent une fonction $\Phi(.)$ régularisante quadratique et ne permettent donc pas de préserver les discontinuités présentes au niveau de la profondeur. L'idée développée dans [98] consiste à remplacer le terme quadratique de la partie régularisation par une fonction qui remplit les conditions de préservation des discontinuités énumérées dans la section précédente. Des schémas de mise en

oeuvre des EDP dérivées sont aussi proposés et les résultats qui illustrent la référence [98] sont assez prometteurs.

Des exemples de résultats obtenus par cette approche sur un triplet d'images synthétiques sont illustrés dans la figure 6 où on distingue sur la première rangée le triplet d'images originales de la pyramide. Les résultats de profondeur (1ère colonne) et de reconstruction tridimensionnelle (seconde et troisième colonne) obtenus à l'aide d'une fonction de régularisation quadratique constituent la seconde rangée de résultats alors que la troisième rangée illustre les résultats obtenus à l'aide de la fonction dite *d'Aubert* qui permet de préserver les discontinuités. On remarque que l'apport de cette approche à base d'EDP est certain dans l'amélioration de la qualité des résultats obtenus.

5.4 EDP et Flot Optique

Le principe de l'approche par minimisation et régularisation d'énergie décrit pour la stéréo a été aussi appliqué au sein de notre projet au problème de l'estimation du flot optique avec préservation des discontinuités. Cette approche a été développée et mise oeuvre dans [77, 40] et les premiers résultats obtenus sont très prometteurs.

Soit $I(x, y, t)$ l'intensité en niveaux de gris de l'image I à l'instant t et au point (x, y), le flot optique $V = [u, v]^T$ est défini de manière implicite comme le minimum de la fonctionnelle suivante :

$$F(V) = \int_\Omega (\nabla I \cdot V + I_t)^2 + \alpha(\phi(\| \nabla u \|) + \phi(\| \nabla v \|))\, d\Omega \tag{53}$$

où ϕ est une fonction déterminée afin de préserver les discontinuités du flot (voir la section précédente). Les équations d'Euler-Lagrange suivantes peuvent être dérivées pour la détermination du flot optique :

$$\begin{cases} \alpha div(\frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}\nabla u) = 2(I_x u + I_y v + I_t) I_x & \\ & (x, y)\ \epsilon\Omega \\ \alpha div(\frac{\phi'(\|\nabla v\|)}{\|\nabla v\|}\nabla v) = 2(I_x u + I_y v + I_t) I_y & \\ \frac{\phi'(\|\nabla u\|)}{\|\nabla u\|}\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad , \quad \frac{\phi'(\|\nabla v\|)}{\|\nabla v\|}\frac{\partial v}{\partial n} = 0 & (x, y)\epsilon\ \partial\Omega \end{cases} \tag{54}$$

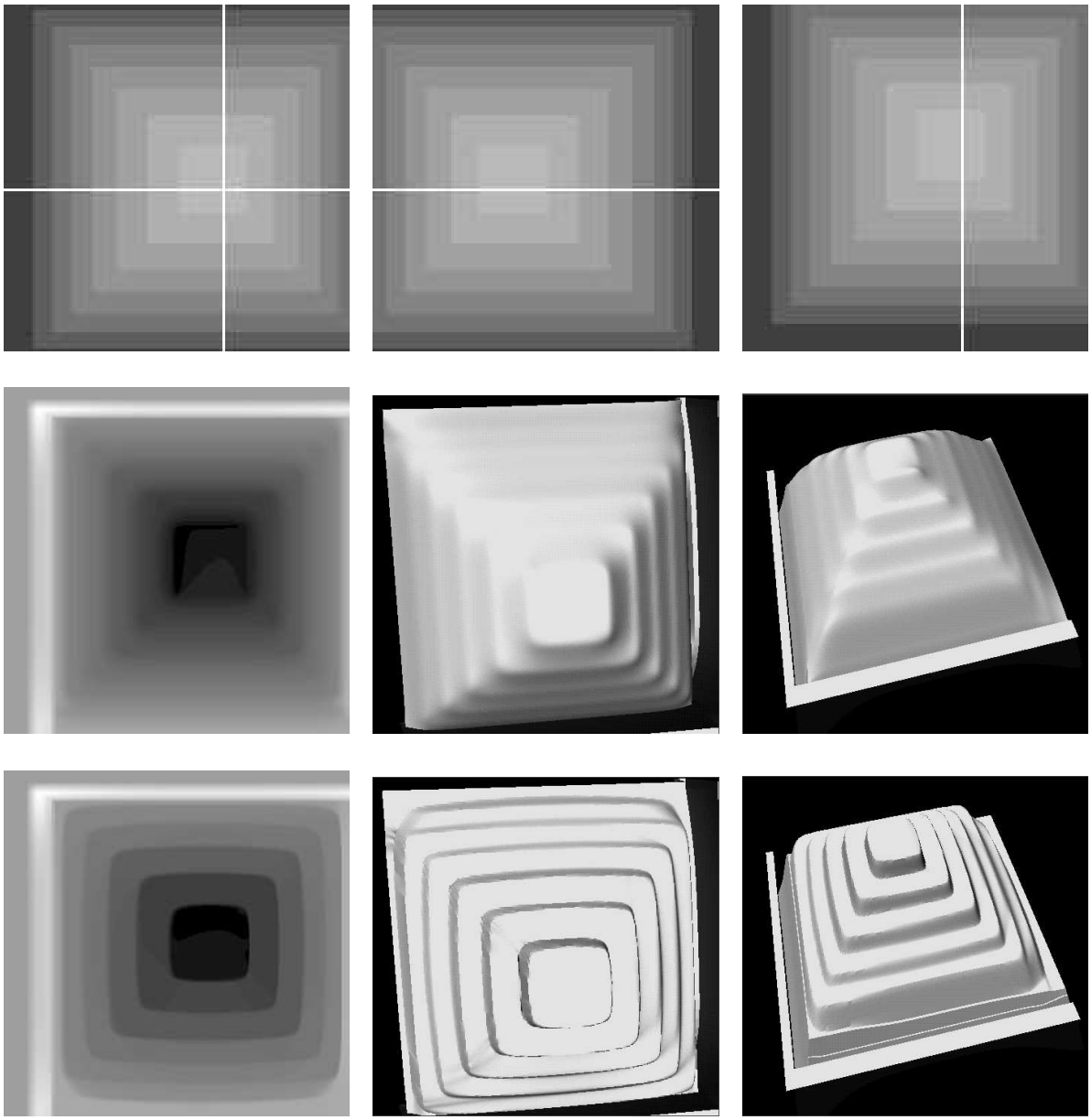


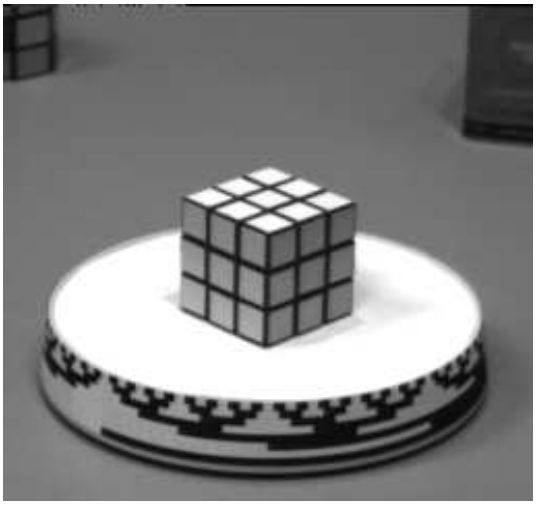
FIG. 6 – *Triplet d'images, carte de profondeur et reconstruction 3D.*

Si la fonction ϕ est quadratique, le terme en divergence se transforme en Laplacien et on retrouve ainsi le schéma classique de Horn et Schunk. Par contre, pour toute fonction ϕ non quadratique, on aura à résoudre un système d'EDP non linéaires. Divers schémas numériques ont été mis en oeuvre et testés sur des séquences d'images réelles. Les détails sur les résultats obtenus peuvent être consultés dans [77]. On donne ici un extrait de ces résultats. Les figures 7 illustrent deux images extraites de séquences d'images réelles utilisées pour tester cette méthode. Les flots optiques correspondants sont illustrés par la rangée gauche de la figure (8) pour le cas où la fonction de régularisation utilisée est quadratique (Horn et Schunck) et par la rangée droite pour le cas ou la fonction de régularisation utilisée est celle qui permet de préserver les discontinuités (fonction dite d'*Aubert* dans ce rapport).

D'autres travaux sur l'application des EDP dans le domaine de l'estimation du flot optique et de la stéréovision ont été aussi mené par Proesmans *etal* [97]. Ces travaux concernent la présentation d'un certain nombre de systèmes d'équations de diffusion non-linéaires couplés. Ces systèmes sont en effet appliqués dans des tâches d'amélioration d'images, de lissages directionnels, d'estimation robuste du flot optique à partir d'une séquence d'images, et du problème de la stéréovision. La méthode présentée pour l'estimation du flot optique est une approche variationnelle permettant une reconstruction robuste du flot optique tout en préservant les discontinuités. Ceci est effectué en opérant une diffusion anisotrope à la Perona au cours du processus d'estimation, ce qui permet de prendre en compte les discontinuités durant le processus d'estimation. Cette idée est ensuite appliquée au cas de la stéréovision, pour l'estimation de la disparité entre 2 vues préalablement rectifiées. Les résultats montrés semblent prometteurs et illustrent de manière convaincante l'apport des approches par EDP à de tels problèmes.

5.5 Shape from shading

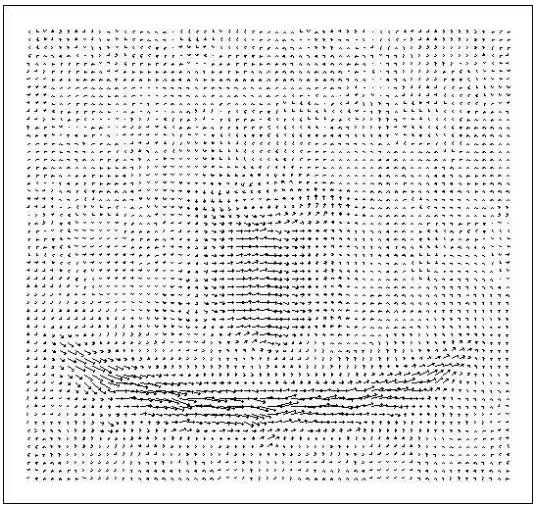
Enfin, on ne pourra pas terminer ce paragraphe sans mentionner les applications de la théorie de l'évolution des courbes de niveaux aux problèmes de *Shape from Shading* qui est un thème de recherche très actif dans le domaine de la vision par ordinateur. Le *Shape from Shading* consiste à retrouver l'orientation de la surface observée à partir des variations de l'intensité lumi-



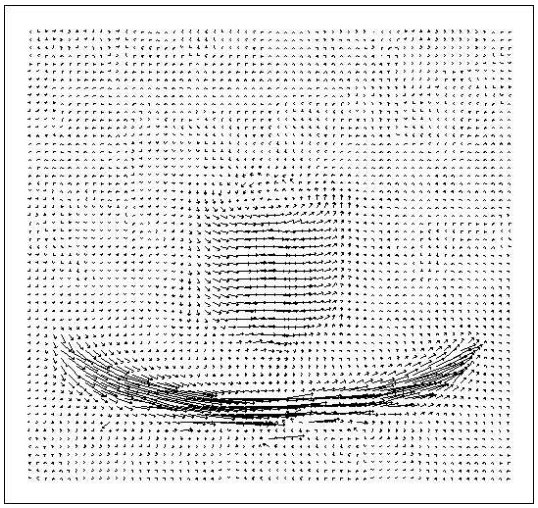
(a) Rubik Cube

(b) Taxi Hambourg

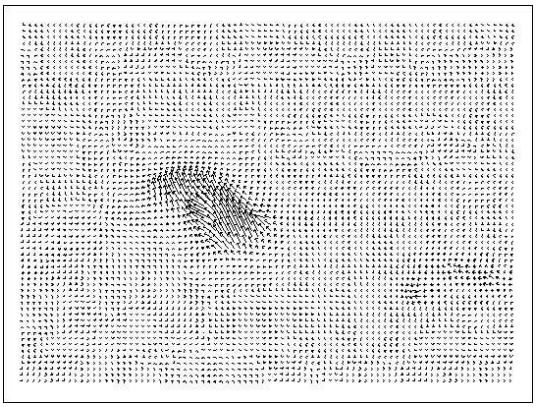
FIG. 7 – Une image de chacune des 2 séquences d'images réelles.



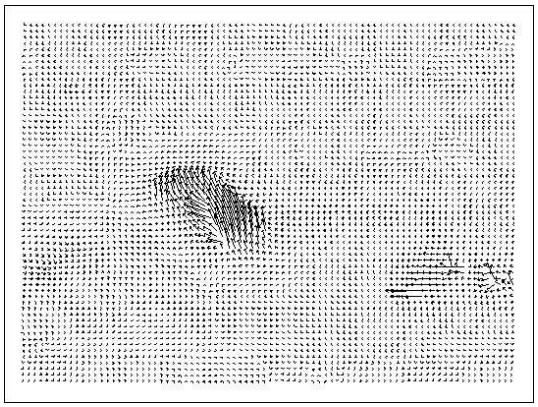
(a) Fonction quadratique



(b) Fonction d'Aubert



(a) Fonction quadratique



(b) Fonction d'Aubert

FIG. 8 – Flot Optique avec régularisation quadratique (a) et préservation des discontinuités (b).

neuse de l'image [61, 62]. Un certain nombre d'approches à base d'EDP ont été proposés à ce jour pour traiter ce problème. Le livre de Berthold Horn et Michael Brooks [61] qui présente en détail un certain nombre d'entre elles est une excellente référence. La plupart des approches présentées sont résolues à l'aide de schémas itératifs dérivés à partir de versions régularisées du problème original, De manière complémentaire, on peut citer les travaux d'Elisabeth Rouy et Agnès Torin [102] ainsi que les travaux plus récents de Ron Kimmel et d'Alfred Bruckstein [74, 73, 19, 72] qui utilisent la théorie de l'évolution des courbes de niveaux pour resoudre cet important problème. Cette méthode a été mise en oeuvre par Ron Kimmel dans [73, 72] à l'aide de la technique proposée par Osher et Sethian [91]. Enfin, l'article d'Alfred Bruckstein [20] peut aussi être considéré comme un bon pointeur vers les divers auteurs qui ont contribué dans ce domaine.

6 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons passé en revue une liste non exhaustive de travaux dans les domaines du traitement d'images et de la vision, faisant appel à une formulation où les EDP tiennent une place centrale. Au travers des exemples cités et des idées qui les ont guidés, il apparaît clairement que cette nouvelle voie est riche de résultats et de promesses pour mener à bien et traiter de manière bien plus stable et plus formalisée une large classe de problèmes dans les domaines cités. Il reste toutefois beaucoup à faire dans ces domaines et c'est notre souhait que de voir ce rapport aider à la réflexion pour ouvrir encore plus cette nouvelle voie de recherche.

Remerciements

Les auteurs voudraient remercier ici Pierre Kornprobst, Perrine Delacourt, Luc Robert et Renaud Keriven pour leur collaboration dans l'obtention des résultats qui illustrent ce rapport, ainsi que Luis Alvarez et Gilles Aubert pour leur lecture préalable de cet article et les commentaires qu'ils n'ont pas manqué d'y apporter. Enfin, les auteurs voudraient aussi exprimer ici tout

le plaisir qu'ils ont eu lors des discussions avec Michel Barlaud sur la partie restauration avec préservation des discontinuités.

Références

[1] J. F. Abramatic and L. M. Silverman. Non linear restoration of noisy images. *IEEE Trans. Patern Analysis and Machine Intelligence*, 4(2):141–149, 1982.

[2] L. Alvarez and J. Esclarin. Investigative and trial image processing. In *SPIE International Symposium on Optical Science, Engineering and Instrumentation*, volume 2567, San-Diego Convention Center, California, USA, July 1995.

[3] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions, and Morel J.M. Axiomes et equations fondamentales du traitement d'images. Technical Report 9216, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, France, 1992.

[4] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions, and Morel J.M. Analyse multiechelle de films. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 315(1):1145–1148, 1993.

[5] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions, and Morel J.M. Axioms and fundamental equations of image processing. *Archi. for Rational Mechanics*, 123(3):199–257, 1993.

[6] L. Alvarez, P.L. Lions, and J.M.. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (ii). *SIAM J, Numer Anal*, 29(3):845–866, 1992.

[7] L. Alvarez and L. Mazorra. Signal and image restoration using shock filters and anisotropic diffusion. *SIAM J. Num. Anal.*, 31(2):590–605, January 1994.

[8] L. Alvarez and F. Morales. Affine multiscale analysis of corners. *Prepublicacion, Ref: 9402, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria*, 1994.

[9] L. Alvarez and J.M. Morel. Formalization and computational aspects of image analysis. *Acta Numerica*, pages 1–61, 1994.

[10] L. Alvarez and J.M. Morel. Morphological Approach to Multi-Scale Analysis: From Principles to Equations. In Bart M. ter Haar Romeny, editor, *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*, pages 229–254. Kluwer Academic, 1994.

[11] Luis Alvarez, Frédéric Guichard, Pierre-Louis Lions, and Jean-Michel Morel. Axiomatisation et nouveaux opérateurs de la morphologie mathématique. *C.R. Acad. Sci. Paris*, pages 265–268, 1992. t. 315, Série I.

[12] L. Ambrosio. Problems in sbv and image segmentation. *Acta Applicandae Mathematicae*, (17):1–46, 1989.

[13] H.C. Andrews and B.R. Hunt. In Prentice-Hall, editor, *Digital Image Restauration*, pages 339–370. Englewood Cliff, 1977.

[14] G. Aubert and L. Lazaroaia. A variational method in image recovery. TR 423, URA 168 du CNRS, laboratoire J-A Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis, June 1995.

[15] D.H Ballard and C.M. Brown. In Prentice-Hall, editor, *Computer Vision.* Englewood Cliffs, 1982.

[16] Andrew Blake and Andrew Zisserman. *Visual Reconstruction.* MIT Press, 1987.

[17] L. Blanc-Ferraud, P. Charbonnier, G. Aubert, and M. Barlaud. Nonlinear image processing : Modeling and fast algorithm for regularization with edge detection. TR 1, Laboratoire I3S, URA 1376 du CNRS, Université de Nice Sophia-Antipolis, January 1995.

[18] C. Brice and C. Fenema. Scene analysis using regions. *Artificial Intelligence Journal*, 1:205–226, 1970.

[19] Alfred M. Bruckstein. On shape fron shading. *Computer. Vision Graphics Image Process*, 44:139–154, 1988.

[20] A.M. Bruckstein. Analyzing and Synthesizing Images by Evolving Curves. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Image Proc. ICIP*, volume I of III, pages 11–15, Austin(Texas), November 13-16 1994.

[21] Elie Cartan. *La Théorie des Groupes Finis et Continus et la Géométrie Différentielle traitée par la Méthode du Repère Mobile.* Jacques Gabay, 1992. Original edition, Gauthiers-Villars, 1937.

[22] Elie Cartan. *Leçons sur la Théorie des Espaces à Connexion Projective.* Jacques Gabay, 1992. Original edition, Gauthiers-Villars, 1937.

[23] V. Caselles, F. Catte, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66:1–31, 1993.

[24] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. Technical report, HP Labs, September 1994. A shorter version appeared at ICCV'95.

[25] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. In *Proceedings of the 5th Proc. International Conference on Computer Vision*, pages 694–699, Boston, MA, June 1995. IEEE Computer Society Press.

[26] F. Catte, T. Coll, P.L. Lions, and J.M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (i). *SIAM J, Numer Anal*, 29(1):182–193, February 1992.

[27] F. Catte and F. Dibos. A Morphological Scheme for Mean Curvature Motion and Application to Anisoptropic Diffusion and Motion of Level Sets. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Image Proc. ICIP*, volume I of III, pages 26–30, Austin(Texas), November 13-16 1994.

[28] A. Chambolle. Image segmentation by variational methods: Mumford and shah functional and the discrete approximations. *SIAM J. Num. Anal.*, 55(1):827–863, June 1995.

[29] P. Charbonnier. *Reconstruction d'image: Régularisation avec prise en compte des discontinuités.* Thèse, Université of Nice Sophia-Antipolis, September 1994.

[30] P. Charbonnier, G. Aubert, M. Blanc-Ferraud, and M. Barlaud. Two-Deterministic Half-Quadratic Regularization Algorithms for Computed Imaging. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Image Proc. ICIP*, volume II of III, pages 168–172, Austin(Texas), November 13-16 1994.

[31] L.D. Cohen. On active contour models. Technical Report 1075, INRIA, August 1989.

[32] L.D. Cohen. On active contour models and balloons. *CVGIP: Image Undertanding*, 53:211–218, 1991.

[33] G.-H. Cottet and L. Germain. Image processing through reaction combined with nonlinear diffusion. *Mathematics of Computation*, 61(204):659–673, Oct 1993.

[34] P. Delacourt. Applications des EDP en Analyse Multi-Echelle et en Traitement d'Images. Rapport de stage de DEA. proposé et encadré par R. Deriche, INRIA, Université Nice-Sophia Antipolis, France, Juin 1995.

[35] R. Deriche. Using Canny's Criteria to Derive a Recursively Implemented Optimal Edge Detector. *International Journal of Computer Vision*, 1(2):167–187, May 1987.

[36] R. Deriche. Fast Algorithms for Low-Level Vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1(12):78–88, January 1990.

[37] R. Deriche. Recursively Implementing the Gaussian and Its Derivatives. In *Proc. Second International Conference On Image Processing*, pages 263–267, Singapore, September 7-11 1992.

[38] R. Deriche. Recursively Implementing the Gaussian and Its Derivatives. Technical Report 1893, INRIA, Unité de Recherche Sophia-Antipolis, April 1993.

[39] R. Deriche and G. Giraudon. A Computational Approach For Corner And Vertex Detection. *International Journal of Computer Vision*, 10(2):101–124, 1993.

[40] R. Deriche, P. Kornprobst, and G. Aubert. Optical flow estimation while preserving its discontinuities: A variational approach. In *Proceedings of the 2nd Asian Conference on Computer Vision*, volume 2 of 3, pages 290–295, Singapore, December 1995.

[41] Françoise Dibos. Analyse multiéchelle invariante par transformations projectives. Technical Report 9505, Ceremade, January 1995.

[42] Olivier Faugeras. On the evolution of simple curves of the real projective plane. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 317, Série I*, (6):565–570, September 1993. Also INRIA Technical report number 1998.

[43] Olivier Faugeras. *Three-Dimensional Computer Vision: a Geometric Viewpoint*. MIT Press, 1993.

[44] Olivier Faugeras. Cartan's moving frame method and its application to the geometry and evolution of curves in the euclidean, affine and projective planes. In Joseph L. Mundy, Andrew Zisserman, and David Forsyth, editors, *Applications of Invariance in Computer Vision*, volume 825 of *Lecture Notes in Computer Vision*, pages 11–46. Springer-Verlag, 1994.

[45] Olivier Faugeras and Renaud Keriven. Scale-spaces and affine curvature. In R. Mohr and C. Wu, editors, *Proc. Europe-China Workshop on Geometrical modelling and Invariants for Computer Vision*, pages 17–24, Xi'an, China, April 1995. Xidan University Press.

[46] Olivier Faugeras and Renaud Keriven. Some recent results on the projective evolution of 2-D curves. In *International Conference on Image Processing*, volume III, pages 13–16, October 1995.

[47] P. Fiddelaers, E.J. Pauewels, and L.J. Van Gool. Geometry-driven curve evolution. In Jan-Olof Eklundh, editor, *Third European Conference on Computer Vision*, volume 1, pages 427–432, Stockholm,Sweden, May 1994.

[48] L.M.J Florack, A.H. Salden, B.M. ter Haar Romeny, J.J. Koenderink, and M.A. Viergever. Nonlinear Scale Space. In Bart M. ter Haar Romeny, editor, *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*, pages 339–370. Kluwer Academic, 1994.

[49] L.M.J. Florack, B.M. ter Haar Romeny, J.J. Koenderink, and M.A. Viergever. Scale and the differential structure of images. *Images and Vision Computing*, 10(6):376–388, jun/August 1992.

[50] B. R. Frieden. Restoring with maximum likelihood and maximum entropy. *Journal Opt Soc. Amer.*, 62:511–518, 1972.

[51] P. Fua and Y.G. Leclerc. Model driven edge detection. *Machine Vision and Application*, 3:45–56, 1990.

[52] C. Lopez G. Koepfler and J.M. Morel. A multiscale algorithm for image segmentation by variational method. *SIAM J. Num. Anal.*, 1994. to appear.

[53] M. Gage. An isometric inequality with applications to curve shortening. *Duke Mathematical Journal*, 50:1225–1229, 1983.

[54] M. Gage. Curve shortening makes convex curves circular. *Invent. Math.*, 76:357–364, 1984.

[55] M. Gage and R.S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. of Differential Geometry*, 23:69–96, 1986.

[56] M. Gage and R.S. Hamilton. The heat equation shrinking convex plane curves. *J. of Differential Geometry*, 23:69–96, 1986.

[57] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6, 1984.

[58] S. Geman and G. Reynolds. Constrained Restauration and the Recovery of discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14, 1992.

[59] G. Gerig, O. Kubler, R. Kikinis, and F. Jolesz. Non-Linear Anisotropic Filtering of MRI Data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11, 1992.

[60] P.J. Green. Bayesian Reconstruction From Emission Tomography Data Using A Modified EM Algorithm. *IEEE Trans. Med. Imaging*, MI-9, 1990.

[61] Berthold K. Horn and Michael J. Brooks, editors. *Shape from Shading.* The MIT Press, 1989.

[62] Berthold K.P. Horn. Height and Gradient from Shading. *ijcv*, 5(1):37–75, August 1990.

[63] B.K.P. Horn. Robot vision. *MIT Press, McGraw-Hill Book Company, New-York*, 1986.

[64] B.R. Hunt. The application of constrained least squares estimation to image restoration by digital computer. *IEEE Trans. Computers*, C-22(9):805–812, 1973.

[65] M. Baudin J. Badaud, A.P. Witkin and R.O. Duba. Uniqueness of the gaussian kernel for scale-space filtering. *IEEE Trans. Patern Analysis and Machine Intelligence*, 8(1):26–33, 1986.

[66] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. In *First International Conference on Computer Vision*, pages 259–268, London, June 1987.

[67] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. SNAKES: Active Contour Models. *The International Journal of Computer Vision*, 1:321–332, January 1988.

[68] B. Kimia and K. Siddiqi. Geometric heat equation and nonlinear diffusion of shapes and images. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 113–120, Seattle, WA, June 1994. IEEE.

[69] B. Kimia, A. R. Tannenbaum, and S. W. Zucker. Shapes, schoks and deformations i: The components of two-dimensional shape and the reaction-diffusion space. *ijcv*, 15:189–224, 1995.

[70] B. Kimia, E. Tannenbaum, and W. Zucker. Toward a computational theory of shape: An overview. In Springer Verlag, editor, *Proceedings of the First European Conference on Computer Vision*, Antibes, April 1990.

[71] Benjamin B. Kimia, Allen Tannenbaum, and Steven W. Zucker. On the Evolution of Curves via a Function of Curvature. I. The Classical Case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 163(2):438–458, 1992.

[72] R. Kimmel, K. Siddiqi, B. Kimia, and A.M. Bruckstein. Shape from shading: Level set propagation and viscosity solutions. *IJCV*, 16:107–133, 1995.

[73] Ron. Kimmel. *Curve Evolution on Surfaces.* PhD thesis, Technion Israel Institute of Technology, Haifa, May 1995.

[74] Ron Kimmel and Alfred M. Bruckstein. Trackinhg level sets by level sets : A method for solving the shape from shading problem. *Computer Vision and Image Understanding*, 62(2):47–58, July 1995.

[75] J.J. Koenderink. The structure of images. *Biol. Cybern*, 50:363–370, 1984.

[76] G. Koepfler, C. Lopez, and J-M. Morel. A multiscale algorithm for image segmentation by variational method. *Siam Journal of Numerical Analysis*, 31(1):282–299, 1994.

[77] P Kornprobst. Calcul de Flot Optique avec Préservation des Discontinuités. Rapport de stage de DEA. Proposé et encadré par R. Deriche et G. Aubert, INRIA, Université Nice-Sophia Antipolis, France, Juin 1995.

[78] P.L. Lions L. Alvarez, F. Guichard and J.M. Morel. Axiomes et equations fondamentales du traitement d'images. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 315:135–138, July 1992. Also: report 9216 CEREMADE, Université Paris Dauphine, presented at Arch. for Rat. Mech.

[79] R. Malladi, J. A. Sethian, and B.C. Vemuri. Shape modeling with front propagation": A level set approach. *pami*, 17(2):158–175, February 1995.

[80] R. Malladi, J.A. Sethian, and B.C. Vemuri. A topology-independent shape modeling scheme. In *Proceedings of SPIE Conf. on Geometric Methods in Computer Vision II, San Diego*, July 1993.

[81] R. Malladi, J.A. Sethian, and B.C. Vemuri. Evolutionary fronts for topology-independent shape modeling and recovery. In *Proceeding of 3rd European Conf. on Computer Vision (ECCV'94), Stockholm, Sweden*, volume 1, pages 3–13, May 1994.

[82] D. Marr and E. Hildreth. Theory of edge detection. In *Proc Roy. Soc.London Ser.B, 207*, pages 182–217, 1980.

[83] J-M. Morel and S. Solimini. Segmentation of images by variational methods: A constructive approach. *Rev. Math. Univ. Complut. Madrid*, 1:169–182, 1988.

[84] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42:577–684, 1989.

[85] W.J. Niessen, B.M ter Haar Romery, L.M.J. Florack, A.M. Salden, and M.A. Vergever. Nonlinear Diffusion of Scalar Images Using Well-Posed Differential Operators. In IEEE, editor, *IEEE Conf. on Comp. Vision and Pattern Recognition*, pages 92–120, Seattle, June 1994.

[86] M Nitzberg and T. Shiota. Nonlinear image filtering with edge and corner enhancement. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(8):826–832, 1992.

[87] N. Nordström. *Variational Edge Detection.* Phd thesis, University of California at Berkeley, May 1990.

[88] S. Osher and L. Rudin. Feature oriented image enhancement using shock filter. *SIAM J. Numer. Anal*, 27(4):919–940, 1990.

[89] S. Osher and L. Rudin. Shocks and Other Nonlinear Filtering Applied to Image Processing. In *Proc SPIE Vol 1567: Applications of Digital Image Processing XIV*, pages 414–431, San-Diego, 1991.

[90] S Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on the hamilton-jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.

[91] S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.

[92] T. Pavlidis. segmentation of pictures and maps through functional approximation. *Computer Graphics and Image Processing*, 1, 1972.

[93] T. Pavlidis. In *Structural Pattern Recognition.* Springer, New-York, 1977.

[94] T. Pavlidis. A critical survey of image analysis method. In *Proc. 8th Int. Conf. Pattern Recog.*, Paris, 1986.

[95] P. Perona and J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7):629–639, 1990.

[96] P. Perona, T. Shiota, and J. Malik. Anisotropic Diffusion . In Bart M. ter Haar Romeny, editor, *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*, pages 71–79. Kluwer Academic, 1994.

[97] M. Proesmans, E. Pauwels, and L. Van Gool. Coupled Geometry-Driven Diffusuin Equations for Low-Level Vision . In Bart M. ter Haar Romeny, editor, *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*, pages 191–228. Kluwer Academic, 1994.

[98] L. Robert and R. Deriche. Dense Depth Reconstruction Using A Multi-Scale Regularization Approach Which Preserves Discontinuities. In *Proceedings of the International Workshop on Stereoscopic and 3D imaging*, Santorini,Greece, September 6-8,1995 1995.

[99] L. Robert, R. Deriche, and O.D. Faugeras. Dense Depth Map Reconstruction Using Multiscale Regularization. In *Proc. Second International Conference on Image Processing*, pages 123–127, Singapore, September 7-11 1992.

[100] L. Robert, R. Deriche, and O.D. Faugeras. Dense Depth Recovery From Stereo Images. In *Proceedings of the 10th European Conference On Artificial Intelligence*, pages 821–823, Vienna, Austria, August 3-7 1992.

[101] A. Rosenfeld and A.C. Kak. In *Digital Picture Processing*. Academic Press, 1982.

[102] E. Rouy and Tourin A. A viscosity solution approach to shape from shading. *SIAM J. Num. Anal.*, 29(3):867–884, June 1992.

[103] L. Rudin. Shock filters. *Rockwell International Science Center Annual DARPA T.R*, 1984.

[104] L. Rudin. Images, numerical analysis of singularities and schock filters. Ph.D. Thesis, Computer Science Department, Technical Report 5250, CalTech, Pasadena,CA, 1987.

[105] L. Rudin and S. Osher. Total Variation Based Image Restoration With Free Local Constraints. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Image Proc. ICIP*, volume I of III, pages 31–35, Austin(Texas), November 13-16 1994.

[106] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60:259–268, 1992.

[107] G. Sapiro and M. Bruckstein. The Ubiquitous Ellipse. *Acta Applicandae Mathematica*, 38:149–161, 1995.

[108] G. Sapiro and V. Caselles. Histogram Modification Via Partial Differential Equation. Technical Report HPL-95-66, Hewlett Packard, HP Laboratories Technical Report, June 1995.

[109] G. Sapiro and A. Tannenbaum. On Affine Plane Curve Evolution. *Journal of Funtionnal Analysis*, 119(1):79–119, January 1994.

[110] G. Sapiro and A. Tannenbaum. Area and Length Preserving Geometric Invariant Scale Space. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17, 1995.

[111] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. Affine Invariant Scale-Space. Technical Report EE PUB 857, Technion Israel Institute of Technology, Department of Electrical Engineering, September 1992.

[112] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. Affine shortening of Non-Convex Plane Curve. Technical Report EE PUB 845, Technion Israel Institute of Technology-Haifa, August 1992.

[113] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. On Affine Plane Curve Evolution. Technical Report EE PUB 821, Technion Israel Institute of Technology-Haifa, February 1992.

[114] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. On Affine Plane Curve Evolution. Technical Report EE PUB 821, Technion Israel Institute of Technology, Department of Electrical Engineering, February 1992.

[115] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. Affine Invariant Scale Space. *The International Journal of Computer Vision*, 11(1):25–44, August 1993.

[116] Guillermo Sapiro and Allen Tannenbaum. On Invariant Curve Evolution and Image Analysis. *Indiana University Journal of Mathematics*, 1993. To appear.

[117] F. Guichard T. Cohignac, F. Eve and J.M. Morel. Numerical analysis of the fundamental equation of image processing. TR 9254, CEREMADE, Université Paris Dauphine, 1992.

[118] D. Terzopoulos and K. Fleischer. Deformable models. *The Visual Computer*, 1988.

[119] J. Weickert. Anisotropic diffusion filters for image processing based quality control. In *7th European Conference on Mathematics in Industry*, Montecatini Terme, Italy, March 2-6 1993.

[120] A. P. Witkin. Scale space filtering. In *Proc. IJCAI*, Karlsruhe, 1983.

[121] Y.L. You, M. Kaveh, W.Y. Xu, and A. Tannenbaum. Analysis and Design of Anisotropic Diffusion for Image Processing. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Image Proc. ICIP-94*, volume II of III, pages 497–501, Austin(Texas), November 13-16 1994.

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399