



**HAL**  
open science

# Résolution de l'équation de Poisson sur des maillages étirés par une méthode multigrille

Jérôme Francescatto

► **To cite this version:**

Jérôme Francescatto. Résolution de l'équation de Poisson sur des maillages étirés par une méthode multigrille. RR-2712, INRIA. 1995. inria-00073979

**HAL Id: inria-00073979**

**<https://inria.hal.science/inria-00073979v1>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Résolution de l'équation de Poisson sur des maillages  
étirés par une méthode multigrille*

Jérôme FRANCESCATTO

**N° 2712**

Novembre 1995

PROGRAMME 6



*Rapport  
de recherche*



# Résolution de l'équation de Poisson sur des maillages étirés par une méthode multigrille

Jérôme FRANCESCATTO

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique  
Projet SINUS

Rapport de recherche n° 2712 — Novembre 1995 — 56 pages

**Résumé :** Dans ce rapport, nous étudions une méthode multigrille adaptée pour la résolution des EDP du second ordre sur des maillages étirés. Nous utilisons l'approche multigrille de type volumes finis agglomérés développée pour la résolution des équations d'Euler. Tout d'abord, on présente une méthode de génération automatique des grilles grossières par agglomération de volume, autorisant un semi-déraffinement directionnel, basé sur les coefficients de l'équation de Poisson. Les dérivées secondes sont approchées sur chaque niveau en introduisant un facteur de correction adapté au semi-déraffinement. On applique cette méthode pour résoudre l'équation de Poisson et les équations de Navier-Stokes.

**Mots-clé :** méthodes multigrilles - éléments finis - volumes finis - semi-déraffinement - équation elliptique - analyse numérique

*(Abstract: pto)*

# A Poisson solver on stretched meshes by a multigrid method

**Abstract:** In this report, we study a multigrid method for solving second order PDE's on stretched meshes. We use the finite volume agglomeration multigrid approach developed for solving the Euler equations. First, we present a method to generate coarse grids by volume agglomeration, allowing a directional semi-coarsening based on the Poisson's equation coefficients. The second order derivatives are approximated at each level by introducing a correction factor adapted to semi-coarsening. Then, we apply this method to solve the Poisson equation and the Navier-Stokes equations.

**Key-words:** multigrid methods - finite elements - finite volumes - semi-coarsening - elliptic equations - numerical analysis

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Semi-déraffinement</b>	<b>2</b>
2.1	Motivation du semi-déraffinement . . . . .	2
2.2	Semi-déraffinement algébrique . . . . .	5
2.3	Analyse du lisseur . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Schémas numériques de l'équation advection-diffusion</b>	<b>14</b>
3.1	Système linéaire grille fine . . . . .	14
3.2	Système linéaire grilles grossières . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Générations des grilles grossières</b>	<b>17</b>
4.1	Agglomération isotrope . . . . .	17
4.2	Agglomération anisotrope . . . . .	18
4.3	Facteur de correction . . . . .	21
4.4	Exemples d'agglomérations . . . . .	22
4.4.1	Maillages structurés . . . . .	22
4.4.2	Maillages plus complexes . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Méthode multigrille</b>	<b>35</b>
5.1	Opérateurs de transfert . . . . .	35
5.1.1	Opérateur de restriction . . . . .	35
5.1.2	Opérateur d'interpolation . . . . .	36
5.2	Applications numériques à l'équation de Poisson . . . . .	36
5.2.1	Maillage régulier . . . . .	39
5.2.2	Maillage étiré . . . . .	41
5.2.3	Maillage de la plaque . . . . .	43
5.2.4	Maillage de la conduite . . . . .	44
5.2.5	Maillage du NACA0012 . . . . .	46
5.2.6	Maillage du RAE2822 . . . . .	48
5.3	Applications aux équations de Navier-Stokes . . . . .	49
5.3.1	Phase linéaire . . . . .	50
5.3.2	Phase non linéaire . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>54</b>
<b>7</b>	<b>Remerciement</b>	<b>54</b>

## 1 Introduction

On distingue dans l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion deux zones typiques. La zone éloignée de la paroi de l'aile où les forces de frottement sont négligeables et l'écoulement est considéré comme essentiellement non visqueux. Et la zone près de la paroi où se situe la couche laminaire de très faible épaisseur ainsi que des phénomènes complexes liés notamment à la turbulence. On adopte en général une modélisation de la turbulence autorisant un calcul sur des maillages fins et étirés suivant la seule direction tangente à la paroi.

La résolution numérique de ces écoulements compressibles vers un état stationnaire est souvent à convergence lente et très coûteuse. Pour accélérer la vitesse de convergence plusieurs méthodes peuvent être utilisées. La technique employée dans ce rapport est basée sur une approche multigrille développée pour résoudre les équations d'Euler ([1],[8]). Son extension aux termes diffusifs s'avère très efficace sur des maillages non structurés et isotropes [1]. La génération automatique des grilles grossières est obtenue par agglomération des cellules du maillage fin ([1],[6]). Toutefois cette méthode nécessite des aménagements pour s'appliquer à des maillages présentant de forts étirements [2].

Des résultats ont été publiés dans cette direction par Mavriplis et Venkatakrisnan [14] pour résoudre les équations de Navier-Stokes en deux dimensions avec un modèle de turbulence à une équation de Spalart et Allmaras. Une extension en trois dimensions a été amorcée pour résoudre les équations d'Euler [12] et celles de Navier-Stokes [13] sur des maillages non structurés et isotropes. En maillage structuré, l'utilisation d'une méthode multigrille à partir d'un semi-déraffinement a été présentée par Radespiel sur les équations de Navier-Stokes en deux dimensions [9]. L'utilisation de la méthode multigrille algébrique sur des maillages non structurés fortement anisotropiques a été étudiée par Vanek [15] sur l'équation elliptique. Morano, Mavriplis et Venkatakrisnan ont conçu un algorithme de semi-déraffinement de triangulations [22]. Ce déraffinement lié à la discrétisation de l'équation de Poisson est appliqué à des maillages non structurés et étirés.

Cette étude est le prolongement d'un travail effectué par Koobus [1] sur des maillages non structurés pour la résolution de l'équation de Poisson par la méthode multigrille de type volumes finis agglomérés. L'utilisation de cette méthode sur des maillages isotropes a donné de bons résultats. En revanche, l'utilisation de maillages étirés diminue sa performance. L'objet de notre étude consiste à élaborer un algorithme permettant la construction automatique des grilles grossières par déraffinement directionnelle. Cet algorithme est appliqué par la suite à l'équation de Poisson et aux équations de Navier-Stokes.

La suite de ce rapport est divisée en quatre parties. Dans la partie 2, on présente l'intérêt du semi-déraffinement et ses conséquences sur l'application d'un carré unité (inconsistance, optimisation du paramètre de relaxation). La partie 3 traite de la discrétisation de l'équation d'advection-diffusion sur un maillage initial quelconque. On présente dans la quatrième partie la génération automatique des grilles grossières du maillage fin par agglomération directionnelle et propose un facteur de correction matriciel pour l'approche de la consistance des schémas numériques sur ces grilles. On montre dans la partie 5 des applications numériques à l'équation de Poisson et aux équations de Navier-Stokes.

## 2 Semi-déraffinement

L'objet de ce paragraphe est de présenter, à travers l'étude d'un modèle simple et d'un maillage cartésien, l'intérêt du semi-déraffinement et ses conséquences.

### 2.1 Motivation du semi-déraffinement

On considère l'équation de Poisson sur un carré unité avec des conditions aux limites de type Dirichlet imposées aux bords du domaine, soit :

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & \text{sur } \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ u|_{\Gamma} = 0, & \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

Une méthode de différences finies est utilisée pour résoudre cette équation. Le domaine d'étude  $\Omega$  est discrétisé suivant le choix de deux entiers  $n_x$  et  $n_y$  représentant le nombre de degrés de liberté respectivement suivant  $Ox$  et  $Oy$ . La numérotation des sommets est dirigée suivant  $Oy$ . Les pas de ce maillage suivant  $Ox$  et  $Oy$  sont :

$$h_x = \frac{1}{n_x + 1} \quad \text{et} \quad h_y = \frac{1}{n_y + 1},$$

et les coordonnées de chaque sommet  $k$  sont :

$$a_k = (x_i, y_j) = (ih_x, jh_y) \quad \text{pour } (i, j) \in [0, n_x + 1] \times [0, n_y + 1] \quad \text{et} \quad k = i(n_y + 2) + j + 1.$$

La discrétisation de l'équation (1) sur ce maillage s'écrit :

$$\begin{cases} -\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(h_x)^2} - \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(h_y)^2} = 1 \\ u_{0,j} = u_{n_x+1,j} = u_{i,0} = u_{i,n_y+1} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

pour  $j \in [1, \dots, n_y]$  et  $i \in [1, \dots, n_x]$ . Les inconnues  $u_{i,j}$  sont destinées à approcher le mieux possible les valeurs de la solution exacte aux points du maillage. On souhaite avoir  $u_{i,j} \simeq u(a_k)$ . Le schéma (2) est consistant et précis à l'ordre 2 pour l'approximation du problème continu.

Pour montrer l'intérêt du semi-déraffinement, on s'intéresse à la résolution du schéma (2) par une méthode multigrille à deux niveaux. Soit  $G_h$  la discrétisation uniforme du carré unité  $\Omega$  et  $G_H$  la discrétisation plus grossière telle que :

$$G_h = \{(x_i, y_j) \in \Omega \text{ tq } x_i = ih_x, y_j = jh_y\} \quad (3)$$

et

$$G_H = \{(x_i, y_j) \in \Omega \text{ tq } x_i = 2ih_x, y_j = 2jh_y\}.$$

Le système matriciel de (2) sur  $G_h$  s'écrit :

$$A^h U^h = f^h \quad (4)$$



où  $U^h = (U_1^h, U_2^h, \dots, U_k^h, \dots, U_{n_x n_y}^h)^T$ .

De même sur la grille  $G_H$  :

$$A^H U^H = f^H. \quad (5)$$

Soit l'opérateur de prolongement  $I_H^h$  défini de  $G_H$  vers  $G_h$  et l'opérateur de restriction  $I_h^H$  défini de  $G_h$  vers  $G_H$ .

Le cycle multigrille consiste à appliquer une ou quelques itérations d'un schéma de relaxation (Jacobi, Gauss-Seidel) sur le système matriciel (4), suivies d'une correction de grille grossière ; on opère un transfert sur  $G_H$  de l'équation du résidu :

$$A^H e^H = I_h^H (f^h - A^h u^h) \quad (6)$$

où  $u^h$  est la solution relaxée sur la grille  $G_h$ .

Le calcul exact de la solution du système (6) suivi de son transfert par  $I_H^h$  donne une solution corrigée de  $u^h$  notée  $u_{new}^h$  :

$$u_{new}^h = u^h + I_H^h e^H. \quad (7)$$

Soit,

$$u_{new}^h = I_h u^h + I_H^h (A^H)^{-1} I_h^H (f^h - A^h u^h)$$

où  $I_h$  dénote l'opérateur identité sur  $G_h$ .

En posant  $e^h = U^h - u^h$ , on obtient :

$$e_{new}^h = K^h e^h \quad (8)$$

avec

$$K^h = I_h - I_H^h (A^H)^{-1} I_h^H A^h. \quad (9)$$

La fonction de la grille  $G_H$  est de permettre le lissage de toutes les basses fréquences de l'erreur provenant de la maillage fin  $G_h$ . Les hautes fréquences sont supposées avoir été lissées par le schéma de relaxation sur  $G_h$ . Finalement *un cycle bigrille idéal* se décompose en deux phases :

- **La phase grille fine :**

Lissage des hautes fréquences de l'erreur de la solution du système (4) par le schéma de relaxation et restriction du résidu sur la grille  $G_H$ .

- **La phase grille grossière :**

Calcul de la correction à ajouter à la solution de la phase grille fine donnée par l'équation (8).

**Définition 2.1** Soit  $M_{\Delta x, \Delta y}$  une grille structurée paramétrée par  $\epsilon = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ . On dira que  $M_{\Delta x, \Delta y}$  est isotrope (respectivement anisotrope) si et seulement si  $\epsilon$  est proche de 1 (respectivement loin de 1).

Comme l'a montré récemment Koobus [1], cette méthode par déraffinement isotrope donne de bons résultats pour des maillages isotrope. Par contre, elle se détériore lors de l'utilisation de maillages étirés (anisotropes).

Pour remédier à ce problème plusieurs traitements peuvent être envisagés :

- **Dans la phase grille fine :**

Il consiste à modifier la méthode de relaxation afin de lisser les hautes fréquences de manière parfaite dans la direction perpendiculaire à l'étirement. Ceci peut être effectué, par exemple, en utilisant la méthode de Gauss-Seidel par lignes dont chaque noeud du maillage est pris en compte par une ligne et une seule ([16] [17]).

- **Dans la phase grille grossière :**

Il consiste à reprendre sur la grille grossière, dans le cas où la phase précédente n'a pas été modifiée, les hautes fréquences mal lissées sur la grille fine. Ceci peut être effectué, par exemple, en déraffinant uniquement suivant  $Ox$  quand seule les fréquences suivant  $Oy$  sont lissées et pas celles suivant  $Ox$ .

Dans ce rapport, on étudie l'amélioration de la phase grille grossière par un déraffinement directionnel automatique. Les figures 1 et 2 montrent les deux types de déraffinement suivant le maillage initial.

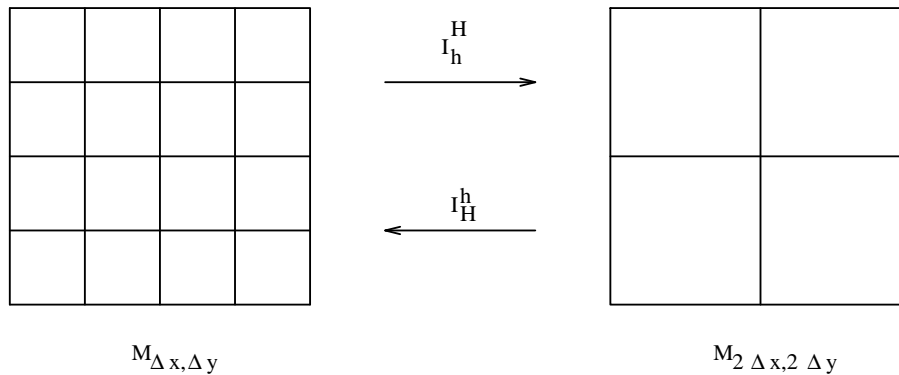
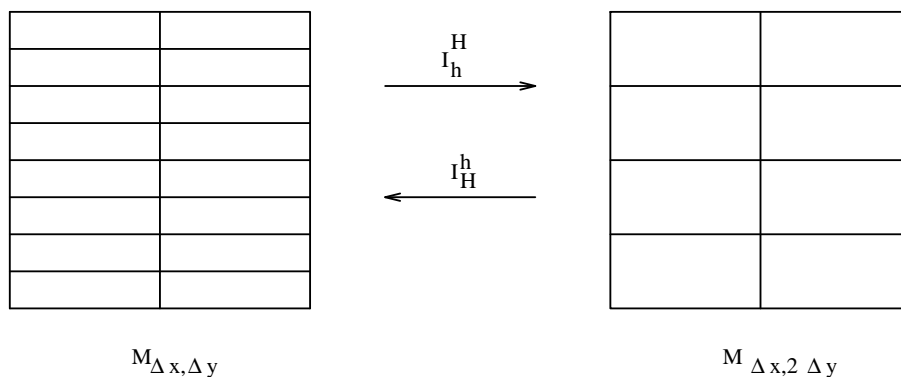


Figure 1 – Déraffinement suivant  $Ox$  et  $Oy$  (isotrope)


 Figure 2 – Déràffinement suivant  $Oy$  (anisotrope)

## 2.2 Semi-déràffinement algébrique

Le déràffinement algébrique consiste à générer une série finie de grilles grossières construites par agglomération des cellules de contrôle (voir figure 3) de la grille fine. Les cellules sont formées à partir des médianes des triangles. A chaque sommet  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, ns$  ( $ns$  est le nombre total de noeuds du maillage), on associe une cellule  $C_i$  construite en joignant successivement les centres de gravité des triangles contenant le noeud  $A_i$  et les milieux des segments issus de  $A_i$ .

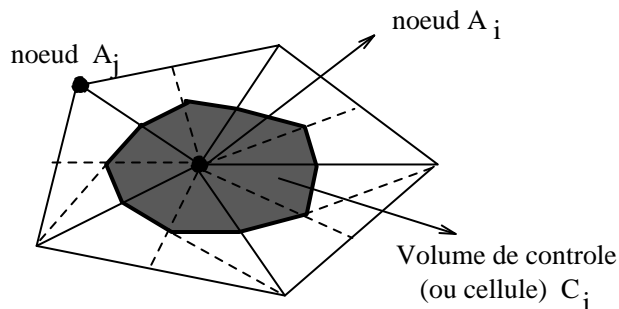


Figure 3 – Construction d'une cellule de contrôle

La discrétisation du Laplacien sur la grille fine est obtenue par la méthode des éléments finis. Du fait de l'absence de triangles sur les grilles grossières, on effectue une approximation de l'opérateur Laplacien sur chacune de ces grilles par une méthode de type Galerkin. Ceci revient à définir, par l'intermédiaire du déràffinement, deux opérateurs de transfert d'ordre 1 :

- **Opérateur de prolongement ( $P$ ) :**

Il est défini de  $G_H$  vers  $G_h$  par une injection naturelle :

$$Pu^H = u^h \quad \text{avec } u^H \in G_H \text{ et } u^h \in G_h.$$

- **Opérateur de restriction ( $R$ ):**

Il est défini de  $G_h$  vers  $G_H$ . Cet opérateur est l'adjoint de l'opérateur de prolongement  $P$  :

$$R = P^*.$$

La matrice et le second membre du système linéaire (5) de la grille  $G_H$  sont donnés par :

$$\begin{cases} A^H = RA^h P \\ f^H = Rf^h. \end{cases} \quad (10)$$

Le schéma (5) est cependant inconsistant par rapport au problème continu car :

$$\lim_{H \rightarrow 0} (A^H)^{-1} f^H \neq u$$

où  $u$  est la solution exacte du problème (1).

Une explication à ceci est fournie par l'analyse de la précision des transferts. D'après Hackbusch [18], la condition nécessaire pour assurer une bonne efficacité bigrille est donnée par :

$$m_R + m_P > m \quad (11)$$

où  $m_R$  et  $m_P$  sont respectivement l'ordre de précision de  $R$  et  $P$ , et  $m$  le degré de l'équation aux dérivées partielles à résoudre. L'opérateur de l'équation de Poisson étant de degré 2 et l'ordre des opérateurs de transfert de degré 1, l'inégalité (11) n'est pas vérifiée. Pour corriger cette inconsistance, une méthode consiste à appliquer aux termes de la matrice  $A^H$  un coefficient multiplicatif  $k$ . Ce coefficient est déterminé à partir au système (1) en une dimension et en comparant la solution numérique et la solution exacte.

L'équation (1) en 1-D s'écrit :

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

La solution exacte de ce système est :

$$u(x) = \frac{x(1-x)}{2}. \quad (13)$$

On considère deux discrétisations différentes de l'intervalle  $[0,1]$  dont l'une est deux fois plus grossière.

- **Grille fine :**

A partir de la discrétisation de l'intervalle  $[0,1]$  constitué de  $N + 1$  intervalles avec  $N = 2^k - 1$ , le schéma numérique du problème (12) s'écrit :

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = 1, \quad i = 1, \dots, N; \quad \text{avec } h = \frac{1}{N+1}. \quad (14)$$

La solution exacte du système (14) est :

$$u_k = \frac{kh(1 - kh)}{2}, \quad k = 0, \dots, N+1.$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_k = u(x).$$

Le schéma (14) est donc consistant au problème (12).

• **Grille grossière :**

On considère maintenant l'intervalle  $[0, 1]$  constitué de  $N' + 1$  intervalles avec  $N' = 2^{k-1} - 1$ . Le système linéaire construit à partir du schéma (14) et des opérateurs  $R$  et  $P$  s'écrit :

$$-\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = 2, \quad i = 1, \dots, N'. \quad (15)$$

La solution exacte du système (15) est :

$$U_k = \frac{1}{2} \times \frac{kH(1 - kH)}{2} \quad k = 0, \dots, N' + 1, \quad \text{avec } H = 2h.$$

D'où :

$$\lim_{H \rightarrow 0} U_k = \frac{1}{2} \times u(x).$$

Le schéma (15) est donc inconsistant au problème (12).

On voit facilement que la multiplication du membre de gauche du système (15) par  $k = \frac{1}{2}$  permet à  $U_k$  de converger vers la solution exacte (13) du problème continue (12).

On revient maintenant au problème (1) afin de déterminer les coefficients multiplicatifs suivant les directions de déraffinement utilisées. On utilise la grille fine  $G_h$  décrite dans l'expression de (3).

Soit les matrices  $A^{h_x}$  et  $A^{h_y}$  constituant le système linéaire sur cette grille obtenue par la méthode des éléments finis. Ainsi le système (4) devient :

$$\left( \frac{1}{\epsilon} A^{h_x} + \epsilon A^{h_y} \right) u^h = f^h$$

où

- $\epsilon = \frac{h_x}{h_y}$  : coefficient d'étirement
- $u^h = (u_1^h, u_2^h, \dots, u_i^h, \dots, u_{n_x n_y}^h)^T$
- $f^h = (f_1^h, f_2^h, \dots, f_i^h, \dots, f_{n_x n_y}^h)^T$  avec  $f_i^h = h_x h_y$
- $A_{i,i}^{h_x} = A_{i,i}^{h_y} = 2$
- $A_{i,i+n_y}^{h_x} = A_{i,i-n_y}^{h_x} = A_{i,i+1}^{h_y} = A_{i,i-1}^{h_y} = -1$ .

On considère maintenant la grille grossière  $G_H$  construite par déraffinement de  $G_h$  ( $G_H \subset G_h$ ) :

$$G_H = \{(x_i, y_j) \in G \text{ tq } x_i = iH_x, y_j = jH_y\}$$

où

$$H_x = \frac{1}{N_x + 1} \text{ et } H_y = \frac{1}{N_y + 1}.$$

Le type de déraffinement utilisé est contrôlé suivant les valeurs de  $n_x$  et  $n_y$  représentant le nombre de degrés de liberté respectivement suivant  $Ox$  et  $Oy$ . Le système linéaire sur  $G_H$  construit par les opérateurs de transfert  $R$  et  $P$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \end{pmatrix} A^{H_x} + \epsilon A^{H_y} u^H = f^H$$

où

$$A^{H_x} = RA^{h_x}P, \quad A^{H_y} = RA^{h_y}P,$$

$$u^H = (u_1^H, u_2^H, \dots, u_{N_x N_y}^H)^T,$$

$$f^H = (f_1^H, f_2^H, \dots, f_I^H, \dots, f_{N_x N_y}^H)^T.$$

On distingue 3 cas :

### 1er cas ( $n_x = n_y = n$ ) :

Dans la mesure où  $G_h$  est uniforme ( $h_x = h_y = h$ ) et où le déraffinement s'effectue dans les deux directions  $Ox$  et  $Oy$ , on a  $N_x = N_y = \frac{n-1}{2}$  ( $H_x = H_y = 2h$ ). D'où :

- $f_I^H = H_x H_y = 4h^2, \quad I \in [1, \dots, N_x N_y]$
- $A_{I,I}^{H_x} = A_{I,I}^{H_y} = 4$

- $A_{I,I+N_y}^{H_x} = A_{I,I-N_y}^{H_x} = A_{I,I+1}^{H_y} = A_{I,I-1}^{H_y} = -2$ .

La comparaison de ce système avec le schéma consistant montre qu'il suffit de multiplier les coefficients de la matrice  $A^{H_x}$  par un facteur de correction  $k_x$  et  $A^{H_y}$  par  $k_y$  pour le rendre consistant.

$$\left(\frac{1}{\epsilon}k_x A^{H_x} + \epsilon k_y A^{H_y}\right) u^H = f^H, \quad \text{avec } k_x = k_y = \frac{1}{2}.$$

### 2ième cas ( $n_x < n_y$ ):

Du fait de l'étirement des cellules suivant  $Ox$  ( $h_x > h_y$ ), on effectue un déraffinement seulement dans la direction  $Oy$ . On a donc  $N_x = n_x$  et  $N_y = \frac{n_y-1}{2}$  ( $H_x = h_x$  et  $H_y = 2h_y$ ). D'où :

- $f_I^H = H_x H_y = 2h_x h_y, \quad I \in [1, \dots, N_x N_y]$
- $A_{I,I}^{H_x} = 2 \quad A_{I,I}^{H_y} = 4$
- $A_{I,I+N_y}^{H_x} = A_{I,I-N_y}^{H_x} = -1 \quad \text{et} \quad A_{I,I+1}^{H_y} = A_{I,I-1}^{H_y} = -2$ .

Les valeurs de  $k_x$  et  $k_y$  sont donc :

$$k_x = 1 \quad \text{et} \quad k_y = \frac{1}{2}.$$

### 3ième cas ( $n_x > n_y$ ):

Inversement, le déraffinement de  $G_h$  dans la direction  $Ox$  entraîne  $N_x = \frac{n_x-1}{2}$  et  $N_y = n_y$  ( $H_x = 2h_x$  et  $H_y = h_y$ ). On a donc :

$$k_x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad k_y = 1.$$

**Définition 2.2** On appelle facteur de correction suivant  $Ox$  noté  $k_x$  (respectivement suivant  $Oy$  noté  $k_y$ ), le coefficient appliqué à la matrice  $A^{H_x}$  (respectivement  $A^{H_y}$ ) pour restaurer la consistance du système sur  $G_H$ .

**Lemme 2.1** Sur un maillage cartésien et orthogonal, les valeurs  $k_x$  et  $k_y$  corrigeant la consistance du schéma sur  $G_H$  sont :

- cas isotrope :

$$k_x = k_y = \frac{1}{2}$$

- cas anisotrope :

- étirement suivant  $Ox$  :

$$k_x = 1 \quad \text{et} \quad k_y = \frac{1}{2}$$

- étirement suivant  $Oy$  :

$$k_x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad k_y = 1.$$

### 2.3 Analyse du lisseur

La convergence de l'algorithme multigrille dépend fortement de la méthode de relaxation (lisseur) utilisée. Nous avons choisi les méthodes itératives standard de Gauss-Seidel et Jacobi paramétrées pour leur propriété de bons lisseurs hautes fréquences. Une analyse numérique des modes locaux de Fourier [21] sur l'équation de Poisson est effectuée afin de déterminer le paramètre de relaxation ( $\omega_{opt}$ ) permettant d'obtenir une vitesse de convergence optimum.

Soit  $G_h$  la grille décrite dans l'expression (3) paramétrée par  $\epsilon = \frac{h_x}{h_y}$  et  $A = A^h$  la matrice du système linéaire sur  $G_h$  de dimension  $n_x \times n_y$ , telle que :

$$A = \frac{1}{(h_x)^2} A^x + \frac{1}{(h_y)^2} A^y$$

où

$$A_{i,i}^x = A_{i,i}^y = 2,$$

$$A_{i,i+n_y}^x = A_{i,i-n_y}^x = A_{i,i+1}^y = A_{i,i-1}^y = -1.$$

La méthode itérative pour la résolution du système linéaire  $Au = f$  est obtenue par la décomposition de la matrice sous la forme  $A = M - N$ . D'où :

$$u^{\alpha+1} = Bu^\alpha + C \tag{16}$$

avec  $B = M^{-1}N$  et  $C = M^{-1}f$ .

En posant  $e^{\alpha+1} = u^{\alpha+1} - u^\alpha$  le système (16) devient :

$$e^{\alpha+1} = Be^\alpha. \tag{17}$$

A partir de la décomposition  $A = D - E - F$  où  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont respectivement la diagonale, la partie triangulaire strictement inférieure et la partie triangulaire strictement supérieure, on en déduit les deux méthodes de relaxation suivantes :



- **Méthode de Jacobi :**

$$M = \frac{D}{\omega}$$

$$N = \frac{D}{\omega} - A$$

$$B = I_d - \omega D^{-1}A$$

- **Méthode de Gauss-Seidel :**

$$M = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)$$

$$N = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$$

$$B = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right).$$

L'introduction dans l'équation (17) des modes de Fourier s'écrivant sous la forme :

$$e_{ij}^\alpha = \hat{e}_{kl}^\alpha \exp^{i(\theta_k + j\theta_l)}$$

où

$$(\theta_k = kh_x, \theta_l = lh_y) \in \Theta = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \text{ et } \underline{\mathbf{i}}^2 = -1,$$

permet d'obtenir l'équation des coefficients  $\hat{e}_{kl}^\alpha$  :

$$\hat{e}_{kl}^{\alpha+1} = g(\theta_k, \theta_l, \omega; \epsilon) \hat{e}_{kl}^\alpha$$

où  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in [0, 1]$  et  $g$  le module d'amplification appartenant à  $\mathcal{C}$ .

Le critère de stabilité pour la résolution numérique est établi sur la condition stricte de Von Neumann :

$$|g(\theta_k, \theta_l)| < 1 \quad \forall (\theta_k, \theta_l) \in \Theta.$$

L'erreur est décomposée en une somme de hautes fréquences  $\Theta_h$  et basses fréquences  $\Theta_b$ . Suivant le type de déraffinement de  $G_h$  les domaines  $\Theta_h$  et  $\Theta_b$  sont représentés sur les figures 4 et 5. Le lisseur doit être optimisé pour atténuer optimalement toutes les hautes fréquences de l'erreur provenant du maillage fin. Pour  $\epsilon$  donné, la détermination du paramètre  $\omega_{opt}$  (tableau 1 et 2) s'effectue à partir du problème classique du min-max :

$$g_\epsilon(\omega_{opt}) = \min_{\omega} \max_{(\theta_l, \theta_k) \in \Theta_h^2} |g(\theta_k, \theta_l, \omega; \epsilon)|.$$

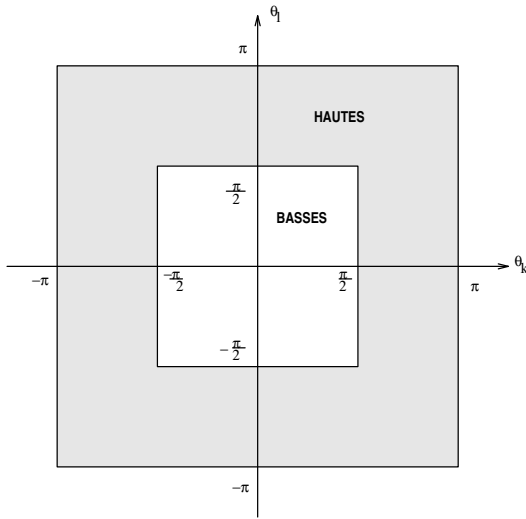


Figure 4 – Répartition des hautes et basses fréquences après un déraffinement isotrope.

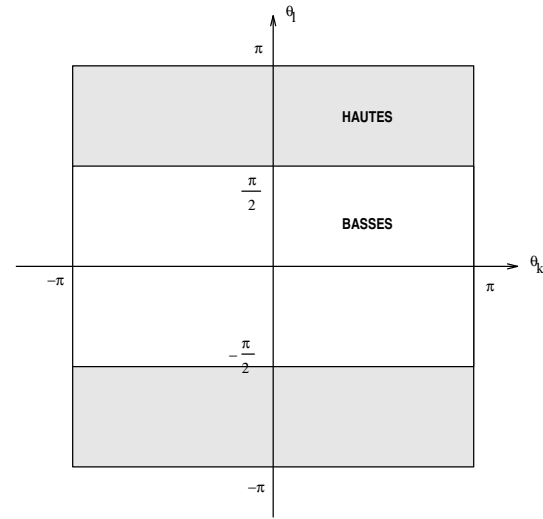


Figure 5 – Répartition des hautes et basses fréquences après un déraffinement suivant  $Oy$ .

- **Méthode de Jacobi :**

$$g(\theta_k, \theta_l, \omega; \epsilon) = 1 - \omega + \frac{\omega}{(1 + \epsilon^2)} (\cos(\theta_l) + \epsilon^2 \cos(\theta_k)).$$

$\epsilon$	Déraf. isotrope		Déraf. anisotrope	
	$\omega_{opt}$	$g_\epsilon$	$\omega_{opt}$	$g_\epsilon$
1.	0.80	0.60	0.80	0.60
0.5	0.91	0.82	0.71	0.43
$10^{-1}$	0.99	0.99	0.67	0.34
$10^{-3}$	1.00	1.00	0.66	0.33
$10^{-5}$	1.00	1.00	0.66	0.33

Table 1 – Paramètre de relaxation optimum et facteur de réduction pour la méthode de Jacobi, suivant  $\epsilon$  et le type de déraffinement employé.

- **Méthode de Gauss-Seidel :**

$$g(\theta_k, \theta_l, \omega; \epsilon) = \frac{g_0}{g_1}$$

où

$$g_0 = 1 - \omega + \frac{\omega}{(1 + \epsilon^2)} \left[ \exp^{i\theta_l} + \epsilon^2 \exp^{i\theta_k} \right]$$

$$g_1 = 1 - \frac{\omega}{(1 + \epsilon^2)} \left[ \exp^{-i\theta_l} + \epsilon^2 \exp^{-i\theta_k} \right].$$

$\epsilon$	<i>Déraf.isotrope</i>		<i>Déraf. anisotrope</i>	
	$\omega_{opt}$	$g_\epsilon$	$\omega_{opt}$	$g_\epsilon$
1.	1.00	0.50	1.00	0.50
0.5	1.00	0.68	0.88	0.44
$10^{-1}$	1.00	0.98	0.83	0.41
$10^{-3}$	1.00	1.00	0.83	0.41
$10^{-5}$	1.00	1.00	0.83	0.41

Table 2 – Paramètre de relaxation optimum et facteur de réduction pour la méthode de Gauss-Seidel, suivant  $\epsilon$  et le type de déraffinement employé.

Finalement le paramètre de relaxation  $\omega_{opt}$  varie, pour les deux méthodes itératives, suivant la valeur de  $\epsilon$ .

• **Déraffinement isotrope :**

Le facteur de réduction  $g_\epsilon$  est optimum pour  $\epsilon = 1$  et tend vers 1 dès que  $\epsilon < 1$ . Dans le cas de maillages étirés, le déraffinement isotrope est mal adapté.

Pour les deux méthodes de relaxation, on a :

$$0.60 \leq g_\epsilon \leq 1.00 \quad \forall \epsilon$$

• **Déraffinement anisotrope :**

Pour  $\epsilon$  quelconque dans  $]0, 1]$ , ces méthodes restent de bons lisseurs :

– Méthode de Jacobi :

$$0.33 \leq g_\epsilon \leq 0.60$$

– Méthode de Gauss-Seidel :

$$0.41 \leq g_\epsilon \leq 0.50$$

En conclusion le meilleur facteur de réduction pour les deux méthodes itératives est obtenu quand le semi-déraffinement est utilisé. Si le coût du transfert est négligé, la complexité arithmétique pour un V-cycle avec un balayage de Jacobi sur chaque niveau est de 4 par sommet pour le déraffinement isotrope et de 6 pour l'anisotrope [8]. Dans ce cas, la complexité totale minimum pour décroître l'erreur d'une décade sur un maillage isotrope est de 18.00 par sommet et sur un maillage fortement anisotrope de 12.46.

### 3 Schémas numériques de l'équation advection-diffusion

On se propose de discrétiser sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  le système suivant :

$$\begin{cases} -\epsilon \Delta u + \nabla \cdot (Vu) = 1, & V \in \mathbb{R}^2 \quad u \in \mathbb{R} \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

$\Gamma$  étant la frontière du domaine  $\Omega$  et  $V$  un vecteur vitesse de propagation.

#### 3.1 Système linéaire grille fine

La méthode utilisée pour discrétiser les équations (18) est une méthode mixte volumes finis et éléments finis. Le problème continu (18) est approché par un problème discret en utilisant la formulation variationnelle suivante : on cherche  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que :

$$a(u, \psi) = l(\psi) \quad \text{pour tous } \psi \in H_0^1(\Omega)$$

où

$$a(u, \psi) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} (-\epsilon \Delta u + \nabla \cdot (Vu)) \psi \, dx dy$$

et

$$l(\psi) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} f \psi \, dx dy.$$

Le domaine d'étude  $\Omega$  est approché par des polygones. La discrétisation spatiale repose sur une triangulation  $\tau_h$  du domaine  $\Omega_h$

$$\Omega_h = \bigcup_{j=1}^{nt} T_j, \quad T_j \in \tau_h = \{T_i, \quad i = 1, \dots, nt\} .$$

On associe à  $\Omega_h$  une partition duale, constituée de cellules de contrôle (voir figure 3) :

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{ns} C_i .$$

Posons  $V^h = \{\psi \text{ continue, linéaire par morceau, tq } \psi|_{\Gamma} = 0\}$ , l'espace des fonctions incluses dans  $H_0^1(\Omega_h)$ . Soit la suite  $\{\psi_i\}_i$  constituant une base de l'espace  $V^h$ .

#### Formulation variationnelle :

Trouver  $u \in V^h$  tel que pour tous  $\psi_i \in V^h$  on ait :

$$\iint_{\Omega_h} (-\epsilon \Delta u + \nabla \cdot (Vu)) \psi_i \, dx dy = \iint_{\Omega_h} \psi_i \, dx dy. \quad (19)$$

Soit  $S_i$  le support de la fonction teste  $\psi_i$ . La formulation mixte se traduit par le choix des fonctions testes  $\psi_i$  suivant les termes intégrés :

- Pour le terme de diffusion, on utilise une formulation éléments finis, dont la fonction teste est une fonction de base  $P_1$  du sommet  $a_i$  :

$$\psi_i = \varphi_i, \quad S_i = \bigcup_{T, a_i \in T} T,$$

- Pour le terme d'advection et le terme du second membre, on utilise une formulation volumes finis, dont la fonction test est la fonction caractéristique de la cellule de contrôle :

$$\psi_i = \chi(C_i), \quad S_i = C_i.$$

L'équation (19) s'écrit alors :

$$-\epsilon \iint_{\bigcup_{T, a_i \in T} T} \Delta u \varphi_i \, dx dy + \iint_{C_i} \nabla \cdot (Vu) \chi(C_i) \, dx dy = \iint_{C_i} \chi(C_i) \, dx dy. \quad (20)$$

En utilisant l'intégration de Green, l'équation (20) est approchée par :

$$-\epsilon \underbrace{\sum_{T, a_i \in T} \left[ \sum_{j, a_j \in T} \text{aire}(T) u_j \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \right]}_{\text{diffusion}} + \underbrace{\sum_{j \in K(i)} \int_{\delta C_{ij}} u V \cdot \vec{n}_{ij} \, d\delta}_{\text{advection}} = \text{aire}(C_i) \quad (21)$$

où (voir figure 6) :

- $K(i)$  l'ensemble des sommets voisins du noeud  $a_i$ ,
- $\partial C_{ij} = \partial C_i \cap \partial C_j = [G_{1,ij}, I_{ij}] \cup [I_{ij}, G_{2,ij}]$ ,
- $\vec{n}_{ij} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2$  est la normale extérieure à  $\delta C_{ij}$ .

Le terme advectif avec  $V$  constant dans tout le domaine  $\Omega_h$  s'exprime sous la forme suivante :

$$\int_{\delta C_{ij}} u V \cdot \vec{n}_{ij} \, d\delta = \alpha_{ij} (\theta_{ij} u_i + (1 - \theta_{ij}) u_j)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_{ij} = \int_{\delta C_{ij}} V \cdot \vec{n}_{ij} \, d\delta \\ \theta_{i,j} = \frac{1}{2} (\text{sign}(\alpha_{ij}) + 1). \end{cases}$$

Finalement pour  $\epsilon$  et  $V$  donnés, on obtient un système matriciel dont la matrice est tridiagonale. Les méthodes les plus classiques pour résoudre ce type de système sont les méthodes directes telle que la méthode de Gauss et les méthodes itératives. En général les équations que l'on résout sont complexes (équations de Navier-Stokes). Dans ce cas, seule les méthodes itératives peuvent être utilisées.

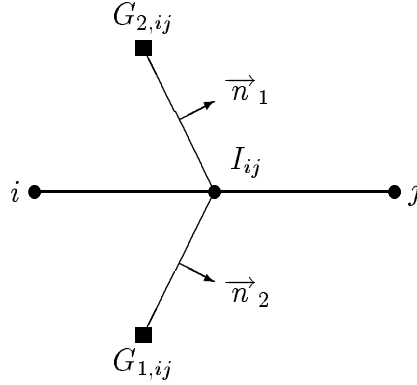


Figure 6 – Portion d'intégration entre deux cellules

### 3.2 Système linéaire grilles grossières

L'élaboration d'un schéma numérique, sur une grille grossière, repose sur une approximation par la méthode de type Galerkin.

On considère  $G^k$  la grille du niveau  $k$  dont le recouvrement est constitué de cellules agglomérées de la grille fine  $G^1$ . Le système linéaire de l'équation (1) sur la grille  $G^k$  s'écrit :

$$A^k u^k = f^k. \quad (22)$$

L'ensemble des indices  $i$  des  $n_k$  cellules sur  $G^k$  est noté :

$$I^k = \{1, \dots, i, \dots, n_k\}.$$

On définit  $(I_i)_{i=1, n_{k+1}}$  la suite des sous-ensembles contenant les numéros des cellules emboîtées de la grille  $G^k$  pour la construction de la grille grossière  $G^{k+1}$ , telle que  $I_i \cap I_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ )

$$I^k = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{n_{k+1}}, \quad n_{k+1} < n_k.$$

De même, l'ensemble des indices  $i$  des  $n_{k+1}$  cellules de la grille grossière  $G^{k+1}$  est :

$$I^{k+1} = \{1, \dots, i, \dots, n_{k+1}\}.$$

La cellule de la grille  $G^{k+1}$  est alors définie par :

$$C_i^{k+1} = \bigcup_{j \in I_i} C_j^k.$$

Ainsi, deux opérateurs de transfert peuvent être déterminés :  $R$  l'opérateur de restriction pour le transfert du résidu de la grille  $G^k$  à la grille  $G^{k+1}$  et  $P$  l'opérateur de prolongement pour l'interpolation de la solution de  $G^{k+1}$  vers  $G^k$ . Ces opérateurs sont adjoints l'un de l'autre.

La définition de l'opérateur d'injection naturelle  $R$  est déduite du déraffinement de  $G^k$  par :

$$R = (R_{ij})_{ij}, \quad i \in I^{k+1} \quad \text{et} \quad j \in I^k$$

avec

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in I_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A partir du système linéaire (22) sur  $G^k$ , la définition du système sur  $G^{k+1}$  s'écrit :

$$A^{k+1}u^{k+1} = f^{k+1} \tag{23}$$

où :

$$A^{k+1} = RA^kP \quad \text{et} \quad f^{k+1} = Rf^k.$$

**Remarque :** Les opérateurs de transfert  $R$  et  $P$  sont du premier ordre en espace. Ce manque de précision se répercute dans la construction des schémas numériques sur les niveaux grossiers.

## 4 Générations des grilles grossières

Le but est d'obtenir plusieurs niveaux de grille par emboitement *d'un certain nombre de cellules voisines* appartenant à la grille précédente. Plusieurs techniques d'agglomération peuvent être envisagées. Dans ce paragraphe deux algorithmes sont définis :

- **Algorithme isotrope:**

Il s'agit d'un déraffinement suivant les deux directions principales du maillage.

- **Algorithme anisotrope:**

Il repose sur certains critères. Son utilisation nous permet un déraffinement suivant des directions privilégiées.

### 4.1 Agglomération isotrope

Cette technique a été développée à l'INRIA [6]. Son algorithme, simple et peu coûteux, nécessite seulement l'utilisation d'un maillage initial. A partir de la grille fine  $G^1$ , on obtient une série finie de grilles emboîtées :

$$G^1 \supset G^2 \supset \dots \supset G^k \supset \dots \supset G^{N_{max}}.$$

La génération de la grille grossière  $G^{k+1}$  s'effectue à partir de la grille  $G^k$  de la manière suivante :

### Algorithme isotrope :

- (I) Faire une boucle sur les cellules  $C_i^k$  ( $i = 1, n_k$ ) de la grille  $G^k$
- Si  $C_i^k$  appartient à une cellule grossière de  $G^{k+1}$  déjà construite Alors  
Aller à (I)
  - Sinon on construit une nouvelle cellule grossière de  $G^{k+1}$ , en agglomérant la cellule  $C_i^k$  avec toutes ces cellules voisines  $C_j^k$  qui n'ont pas encore été emboîtées.

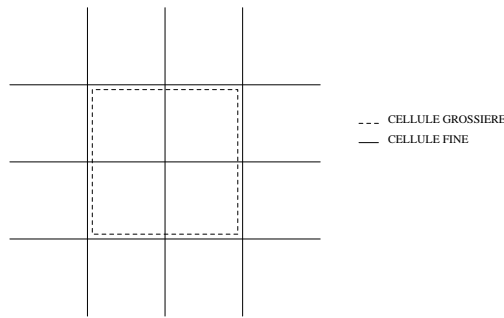


Figure 7 – Agglomération isotrope

**Remarque :** L'implémentation de cette méthode est simple mais le rapport de forme des cellules n'est pas pris en compte.

## 4.2 Agglomération anisotrope

Cette technique plus complexe repose sur une prise en compte de l'aspect des cellules. on utilise comme outil de base la discrétisation en éléments finis de l'équation de Poisson sur la grille fine. Soit le système linéaire (22) consistant sur  $G^k$ . Posons  $I^k$  l'ensemble des indices  $i$  des cellules sur  $G^k$  et  $g_i^k$  les coordonnées du barycentre de la cellule  $C_i^k$ .

**Définition 4.1** A chaque cellule  $C_i^k$  de la grille  $G^k$ , on définit l'ensemble des cellules voisines  $C_j^k$  par :

$$N_i^k = \{j \in I^k, A_{ij}^k \neq 0\}.$$

La distance entre deux sommets  $i$  et  $j \in N_i^k$  notée  $d(i, j)$  est comprise entre :

$$\min_{j \in N_i^k} d(i, j) \leq d(i, j) \leq \max_{j \in N_i^k} d(i, j).$$

A partir de l'équivalence :



$$|A_{ij}^k| \simeq \left( \frac{1}{d(i,j)} \right)^2,$$

on peut formuler la définition suivante :

**Définition 4.2** On dit que  $i$  est en forte connection avec  $j$  si :

$$|A_{ij}^k| \geq \epsilon_1 \max_{p \in N_i^k} |A_{ip}^k|, \quad \epsilon_1 \in ]0, 1].$$

On pose  $S_i^k$  l'ensemble des sommets  $j \in I^k$  qui sont en forte connection avec  $i$ .

L'invariance de l'équation de Poisson par rotation permet d'effectuer, pour chaque sommet, une rotation du repère euclidien. Ce changement d'axes, permet d'estimer un vecteur  $\vec{V}_i$ . Le rapport des composantes de ce vecteur renseigne sur l'aspect de la future cellule grossière  $C_I^{k+1}$  et la direction d'agglomération. Soit  $(Ox, Oy)$  les axes du repère dans la base euclidien  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et  $(O\xi, O\eta)$  dans la base  $(\vec{E}_1^i, \vec{E}_2^i)$  associé à la cellule  $C_i^k$ . Le vecteur  $\vec{E}_1^i$  est dans la direction de la plus forte connection et  $\vec{E}_2^i$  est pris perpendiculaire à  $\vec{E}_1^i$ .

La nouvelle base  $(\vec{E}_1^i, \vec{E}_2^i)$  est déterminée par l'indice de la plus forte connection  $j_0$  ( figure 8 ) :

$$\forall i \in I^k, \exists j_0 \in S_i^k \text{ tel que } A_{ij_0}^k = \max_{j \in S_i^k} |A_{i,j}^k| \simeq \left( \frac{1}{\min_{j \in S_i^k} d(i,j)} \right)^2$$

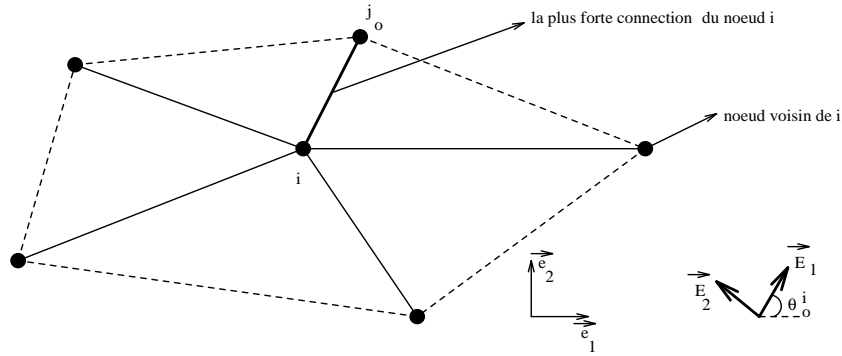


Figure 8 – Changement de base associé au noeud  $i$

alors

$$\vec{E}_1^i = \frac{g_i^k \vec{g}_{j_0}^k}{\|g_i^k \vec{g}_{j_0}^k\|} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0^i) \\ -\sin(\theta_0^i) \end{pmatrix} = (R_i^k)^{-1} \vec{e}_1$$

et

$$\vec{E}_2^i = \begin{pmatrix} \sin(\theta_0^i) \\ \cos(\theta_0^i) \end{pmatrix} = (R_i^k)^{-1} \vec{e}_2.$$

On en déduit la matrice de rotation  $R_i^k$  d'angle  $\theta_0^i$  associée à la cellule  $C_i^k$  :

$$R_i^k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0^i) & -\sin(\theta_0^i) \\ \sin(\theta_0^i) & \cos(\theta_0^i) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur  $\vec{V}_i$  dans la base  $(\vec{E}_1^i, \vec{E}_2^i)$  est déterminé de la façon suivante :

$$\vec{V}_i = \begin{pmatrix} V_i^\xi \\ V_i^\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j \in S_i^k} |g_i^k g_j^k \cdot \vec{E}_1^i| \\ \sum_{j \in S_i^k} |g_i^k g_j^k \cdot \vec{E}_2^i| \end{pmatrix}.$$

On pose  $L_i$ , le rapport de ces composantes :

$$L_i = \frac{V_i^\xi}{V_i^\eta}.$$

A partir de toutes ces considérations on est en mesure de construire la grille  $G^{k+1}$  par agglomération isotrope ou anisotrope des cellules de  $G^k$  :

### Algorithme anisotrope :

(1) Faire une boucle sur les cellules  $C_i^k$  de la grille  $G^k$  :

• Si  $C_i^k$  a déjà été agglomérée pour la construction d'une cellule grossière de  $G^{k+1}$  Alors  
Aller à (1)

• Sinon

- Calcul de  $N_i^k$ , les indices des cellules voisines
- Calcul de  $S_i^k$ , les indices  $j \in N_i^k$  qui sont en fortes connections avec  $i$
- Calcul du vecteur  $\vec{V}_i$  et de son rapport  $L_i$

- Si  $L_i \approx 1$ . Alors agglomération suivant  $\xi$  et  $\eta$  :

$$C_I^{k+1} = \bigcup_{j \in N_i^k \cup \{i\}} C_j^k \text{ (restante)}$$

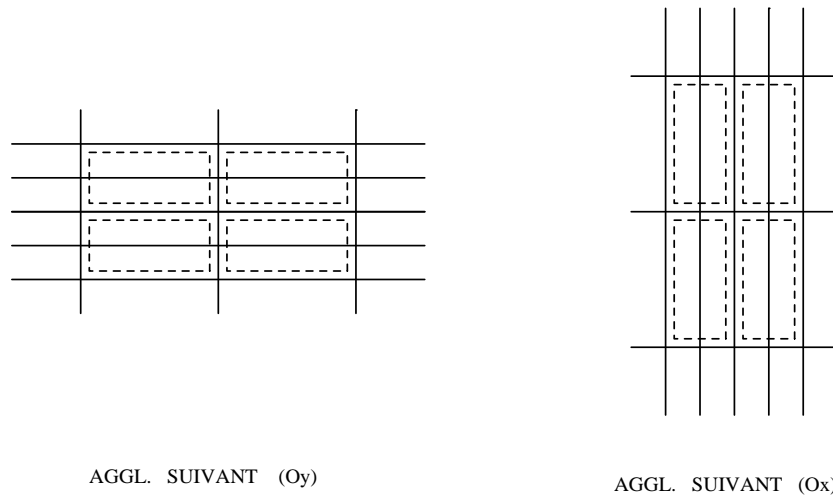
- Sinon agglomération des cellules suivant  $\xi$  ou  $\eta$  (voir figure 9) :

$$C_I^{k+1} = \bigcup_{j \in S_i^k \cup \{i\}} C_j^k \text{ (restante)}.$$

On obtient ainsi la grille

$$G^{k+1} = \bigcup_{I=1}^{n_{k+1}} C_I^{k+1}, \quad n_{k+1} < n_k.$$

On calcule par la même occasion le barycentre de chaque cellule grossière en effectuant une somme pondérée sur toutes les cellules agglomérées. L'initialisation du barycentre sur la grille fine est donnée par les coordonnées des sommets.


 Figure 9 – *Semi-déraffinements*

### 4.3 Facteur de correction

Soit une grille grossière  $G^k$  et sa suite des fonctions de base associée  $\{\varphi_i^k\}_{i=1,\dots,n_k}$  construite par la méthode de Galerkin. Pour des raisons de consistance évoquées section 2.1, on est amené à appliquer à chaque gradient de la fonction de base  $\varphi_i^k$  une matrice de correction symétrique :

- **Algorithme isotrope :**

Les coefficients de la matrice diagonale de correction  $K_{xy}$  pour des maillages structurés sont donnés par le Lemme 2.2. Dans le cas général, la correction du gradient  $\varphi_i^k$  s'écrit :

$$\left(\nabla \varphi_i^k\right)_{cor} = K_{xy} \nabla \varphi_i^k$$

avec

$$K_{xy} = \begin{pmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{pmatrix}, \quad k_x = k_y = \sqrt{2} \left( \frac{N-1}{2N-1} \right)$$

où  $N$  est l'évaluation du nombre de points dans les  $d$  directions ( $d$  étant la dimension d'espace). Le caractère isotrope du déraffinement permet d'approcher cette valeur par  $N = \sqrt[d]{n_{k-1}}$  ( $n_{k-1}$  est le nombre de cellules sur  $G^{k-1}$ ) [1].

- **Algorithme anisotrope :**

La correction du gradient de la fonction de base  $\varphi_i^k$  dans le repère euclidien s'écrit :

$$\left(\nabla \varphi_i^k\right)_{cor} = K_{x,y}^i \nabla \varphi_i^k$$

où

$$K_{xy}^i = (R_i^k) (K_{\xi\eta}^i) (R_i^k)^{-1}.$$

La matrice diagonale de correction associée à la cellule  $C_i^k$  dans le repère  $(O\xi, O\eta)$  s'écrit :

$$K_{\xi\eta}^i = \begin{pmatrix} k_\xi^i & 0 \\ 0 & k_\eta^i \end{pmatrix}$$

où  $k_\xi^i$  et  $k_\eta^i$  sont les facteurs de correction appliqués respectivement suivant  $O\xi$  et  $O\eta$  dont leurs valeurs sont données par le Lemme 2.1.

## 4.4 Exemples d'agglomérations

Ces deux algorithmes de déraffinement ont été testés sur plusieurs types de maillages.

### 4.4.1 Maillages structurés

Les algorithmes isotrope et anisotrope présentés dans les sections 4.1 et 4.2 sont appliqués sur des maillages du carré unité :

- **Maillage isotrope :**

Ce maillage est constitué de 41 points dans la direction  $Ox$  et  $Oy$  et incliné d'un angle de  $\frac{\pi}{6}$  par rapport à l'axe  $Ox$  (voir figure 10). Les deux algorithmes donnent les mêmes résultats (voir les figures de 11 à 16).

- **Maillage anisotrope :**

Ce maillage est identique au premier mais avec une progression géométrique suivant l'axe des  $Ox$  (figure 17). Il est étiré dans les deux directions avec un rapport de maille maximum de 100. Les résultats de l'algorithme isotrope sont présentés dans les figures de 18 à 23 et ceux du déraffinement anisotrope dans les figures de 24 à 29.

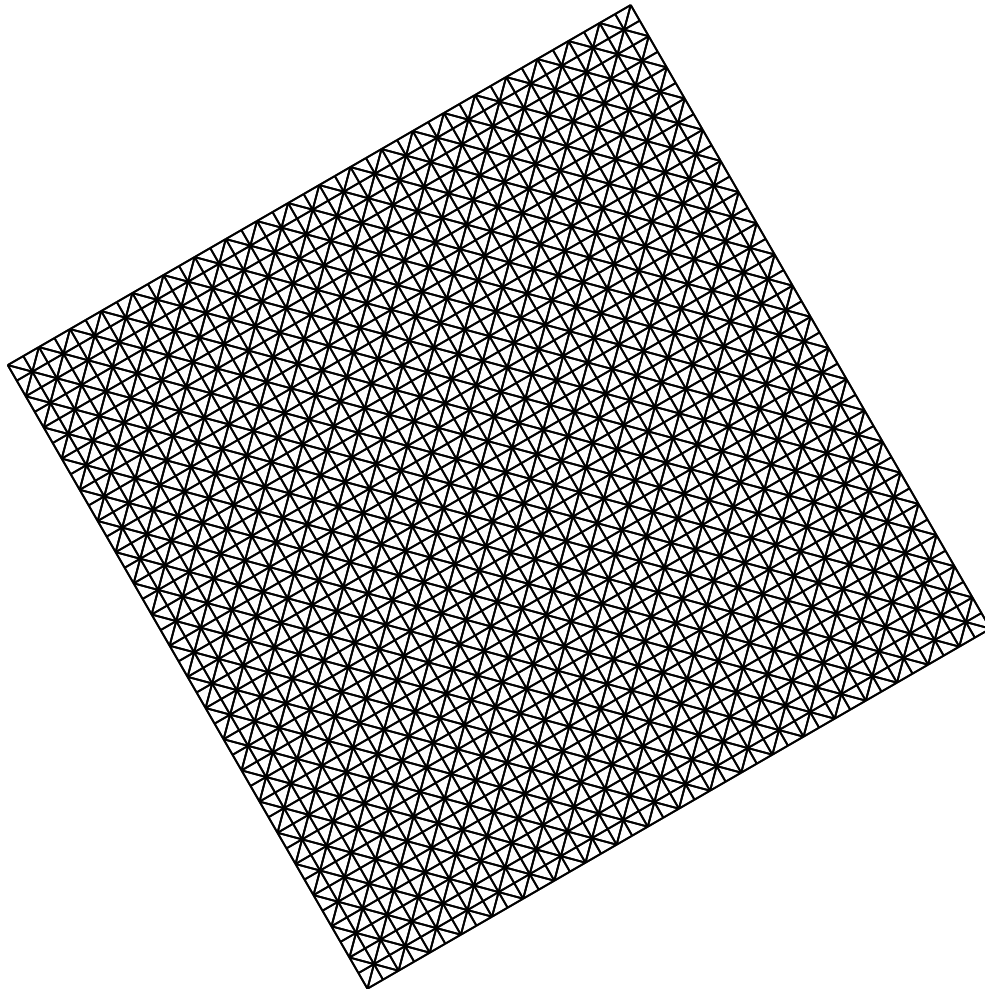


Figure 10 – *Triangulation du maillage régulier  $41 \times 41$  points.*

Application des algorithmes isotrope et anisotrope (résultats identiques) :

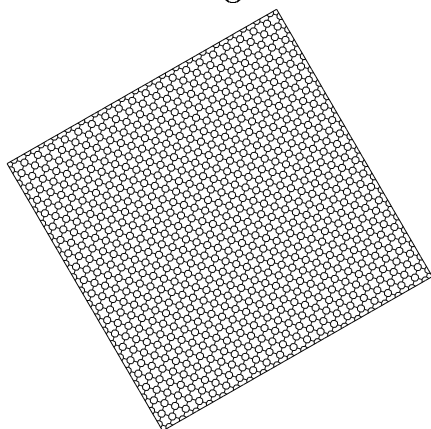


Figure 11 –  $G_1$  : 1681 cellules

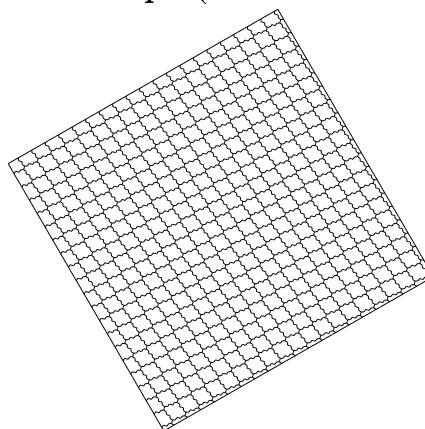


Figure 12 –  $G_2$  : 441 cellules

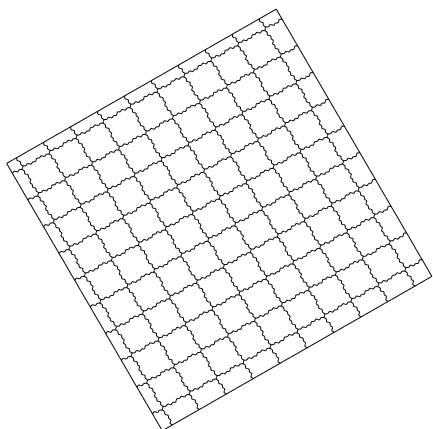


Figure 13 –  $G_3$  : 121 cellules

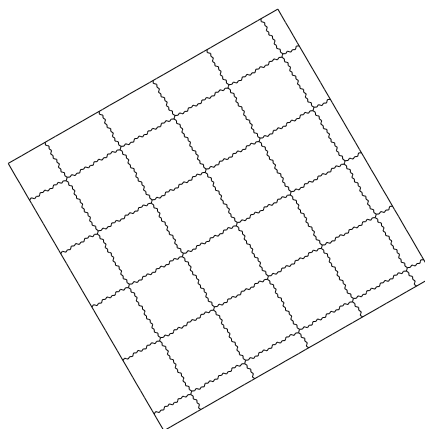


Figure 14 –  $G_4$  : 36 cellules

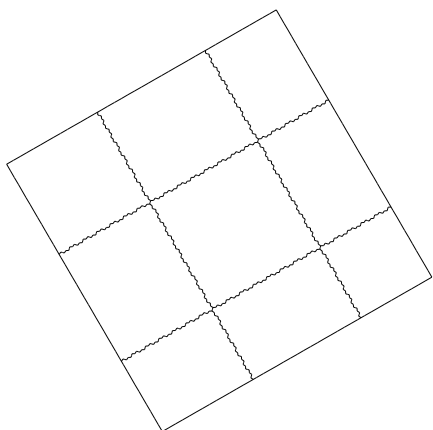


Figure 15 –  $G_5$  : 9 cellules

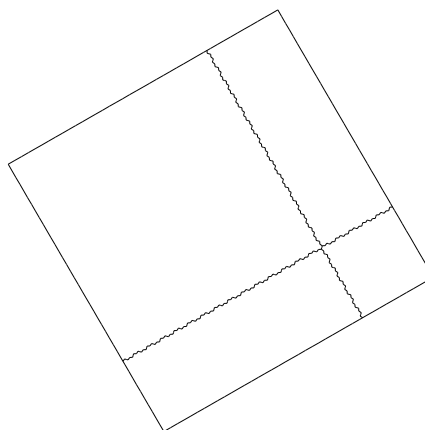


Figure 16 –  $G_6$  : 4 cellules

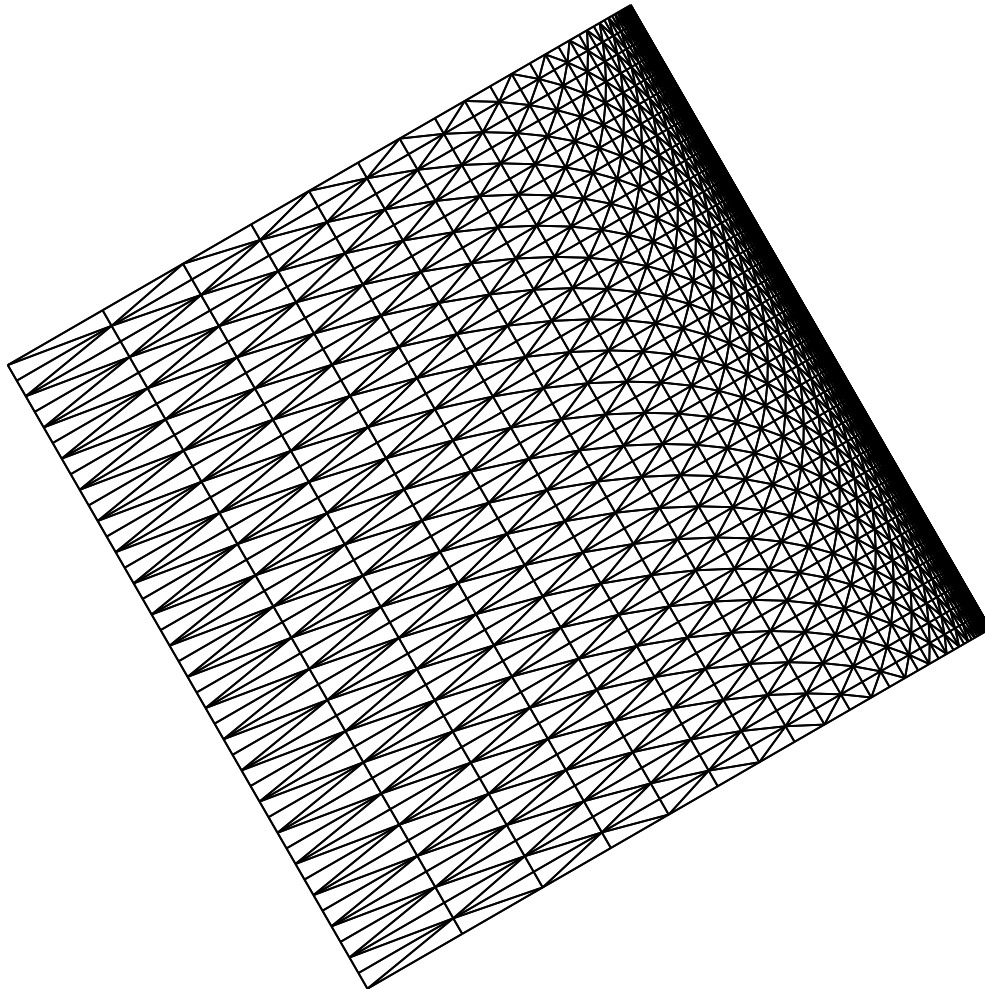


Figure 17 – *Triangulation du maillage étiré  $41 \times 41$  points*

Agglomération isotrope :

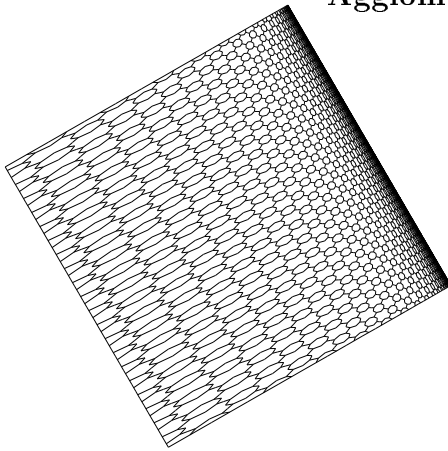


Figure 18 –  $G_1$  : 1681 cellules

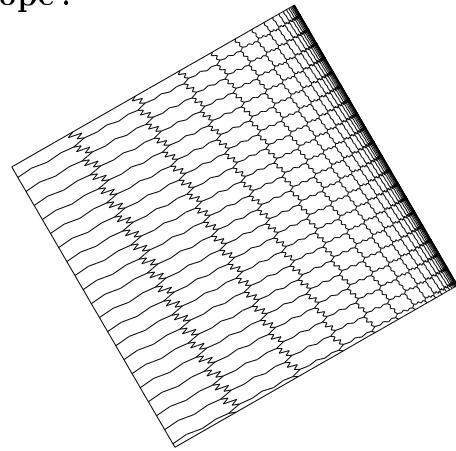


Figure 19 –  $G_2$  : 441 cellules

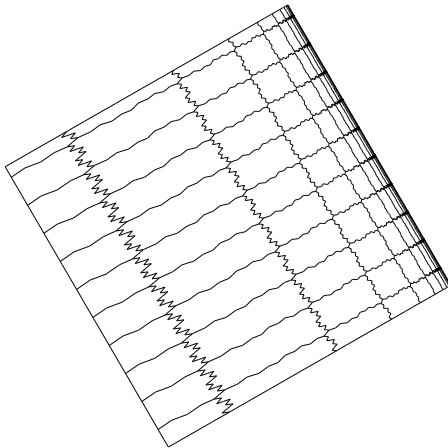


Figure 20 –  $G_3$  : 121 cellules

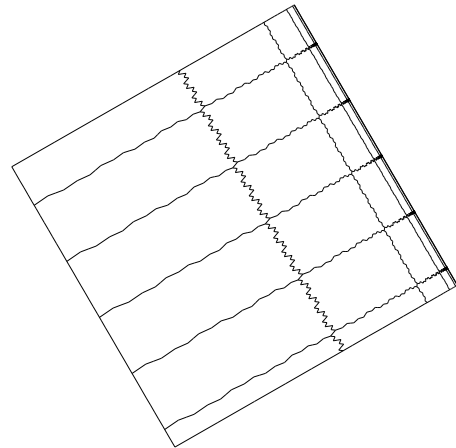


Figure 21 –  $G_4$  : 36 cellules

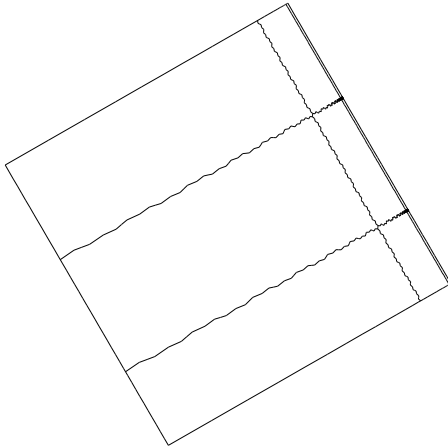


Figure 22 –  $G_5$  : 9 cellules

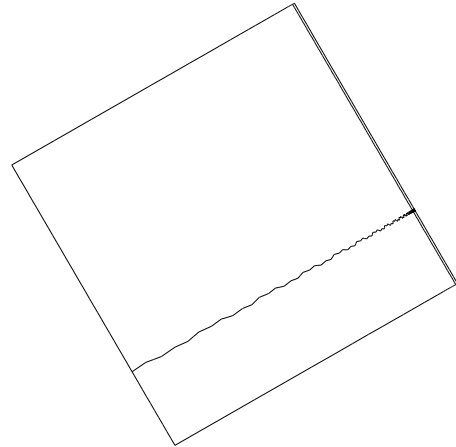


Figure 23 –  $G_6$  : 4 cellules



Agglomération anisotrope :

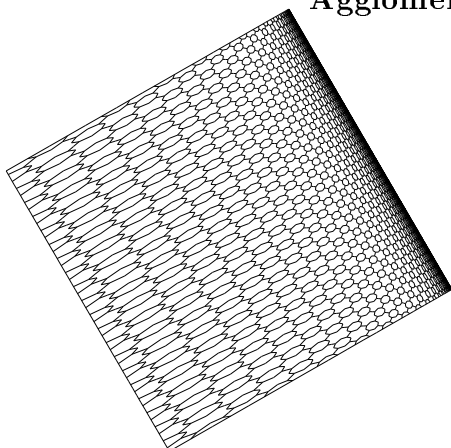


Figure 24 –  $G_1$  : 1681 cellules

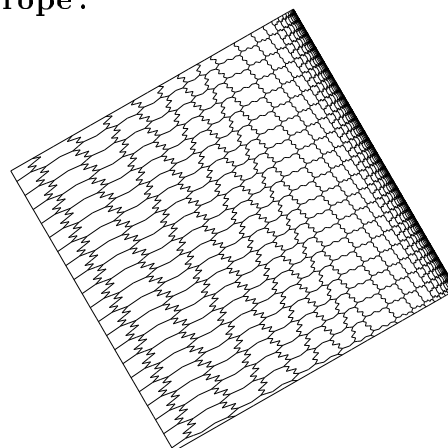


Figure 25 –  $G_2$  : 761 cellules

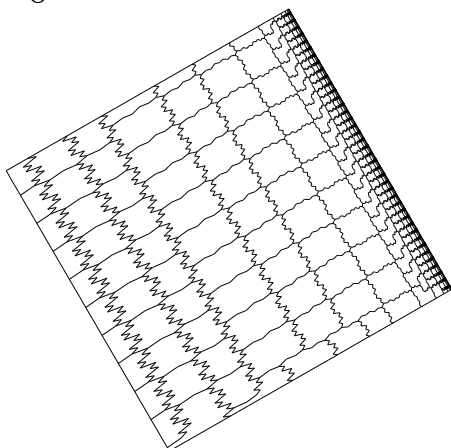


Figure 26 –  $G_3$  : 321 cellules

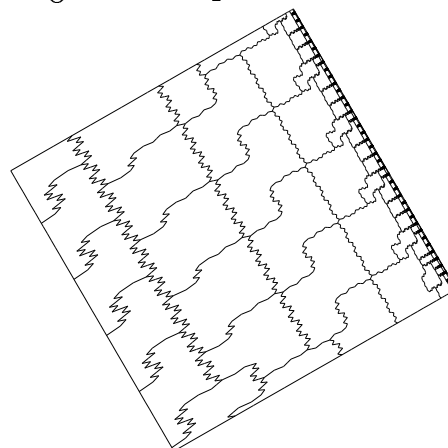


Figure 27 –  $G_4$  : 123 cellules

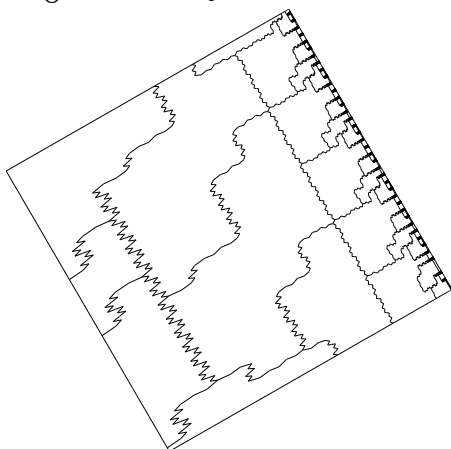


Figure 28 –  $G_5$  : 58 cellules

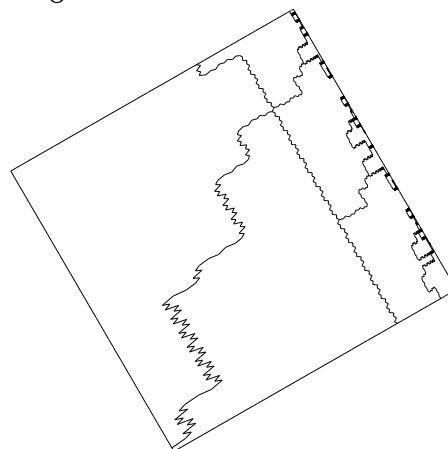


Figure 29 –  $G_6$  : 19 cellules

#### 4.4.2 Maillages plus complexes

Pour généraliser nos deux méthodes de déraffinement, on utilise deux profils d'aile d'avion : un NACA0012 isotrope et un RAE2822 anisotrope.

- **Maillage isotrope :**

Ce maillage autour d'un profil NACA0012 est constitué de 3114 points et de 6056 triangles (voir figure 30). Les deux algorithmes donnent des résultats très voisins (figures 31 à 36).

- **Maillage anisotrope :**

Le profil RAE2822 a une forme géométrique plus complexe. Ce maillage considéré est constitué de 3014 points et de 5800 triangles (figure 37). Les étirements sont présents dans tout le domaine et dirigés dans les deux directions. Les résultats de l'algorithme isotrope sont présentés dans les figures 38 à 42 et ceux du déraffinement anisotrope dans les figures 43 à 48.

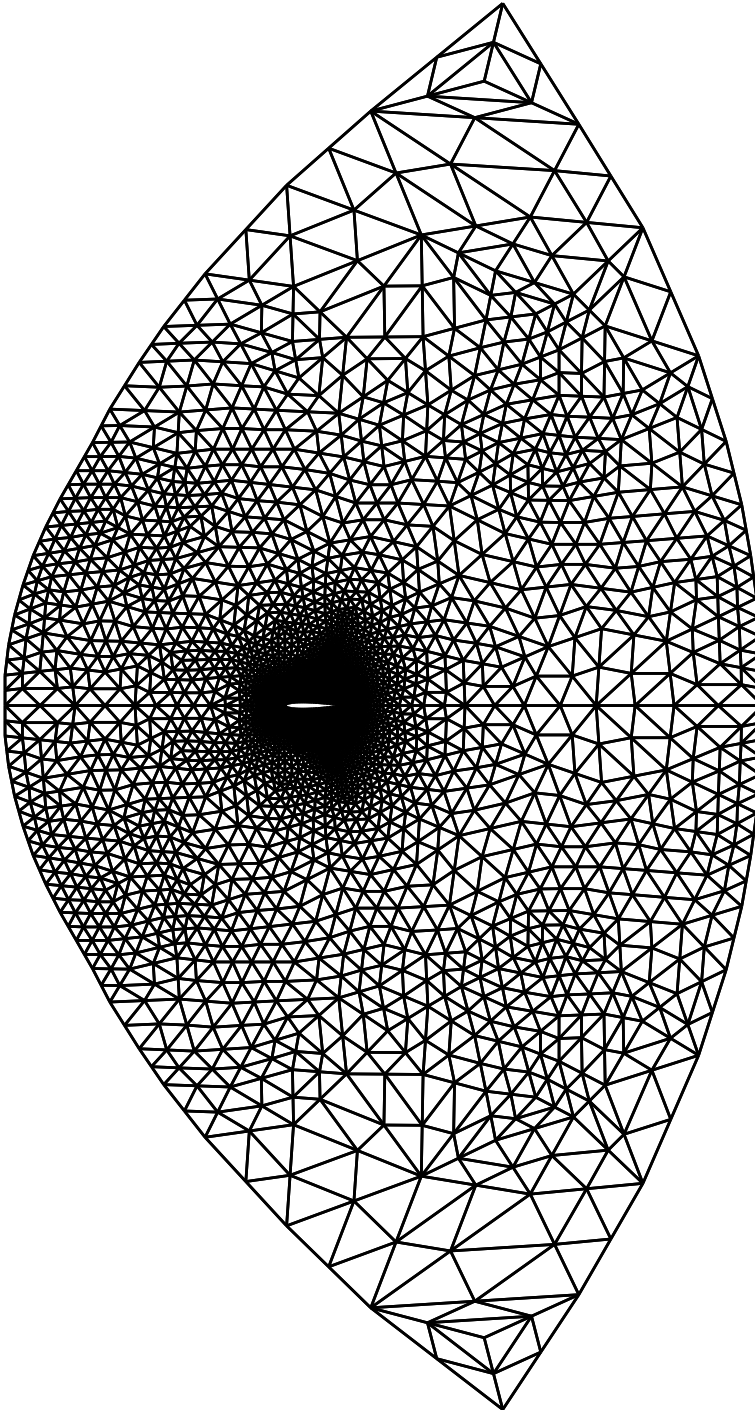
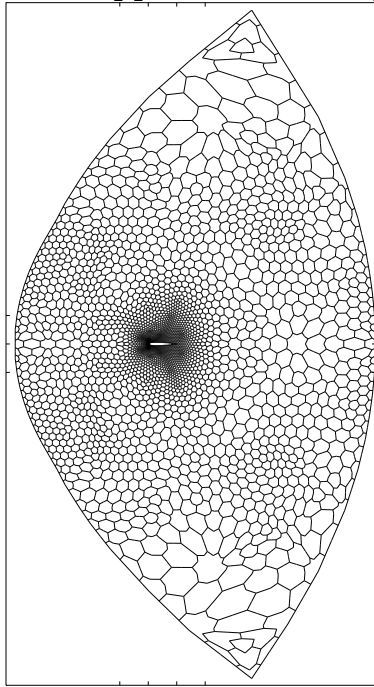
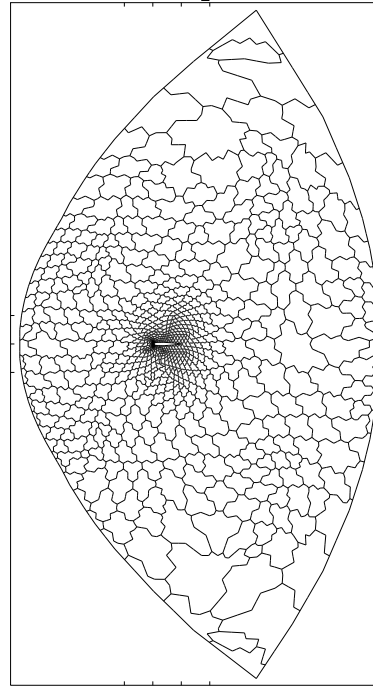
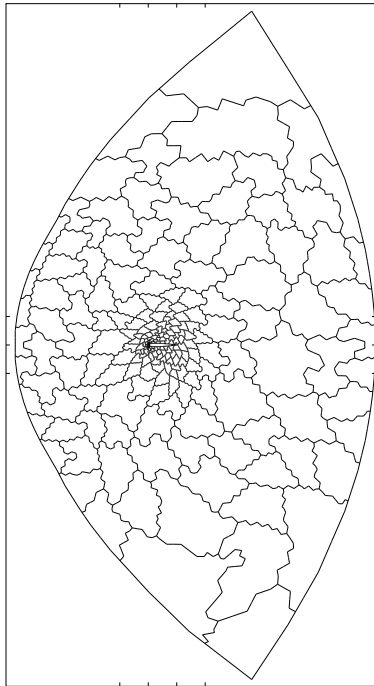
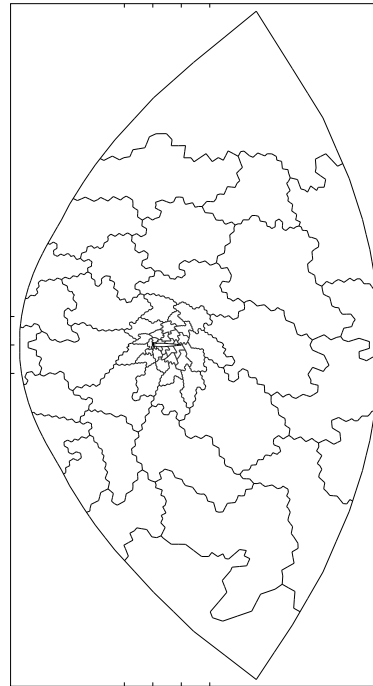


Figure 30 – Triangulation du NACA0012 avec 3114 points

## Application des algorithmes isotrope et anisotrope :

Figure 31 –  $G_1$  : 3114 cellulesFigure 32 –  $G_2$  : 800 cellulesFigure 33 –  $G_3$  : 221 cellulesFigure 34 –  $G_4$  : 66 cellules

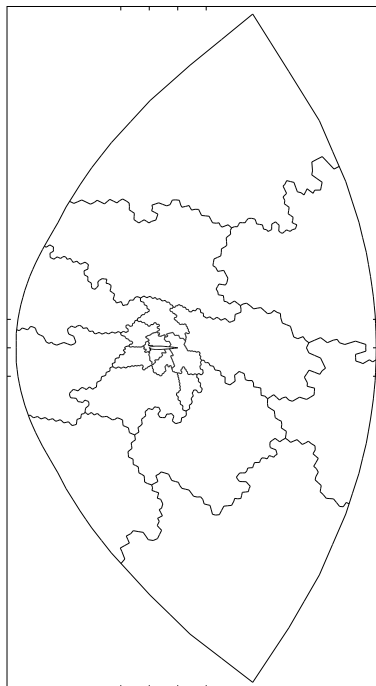


Figure 35 –  $G_5$  : 20 cellules

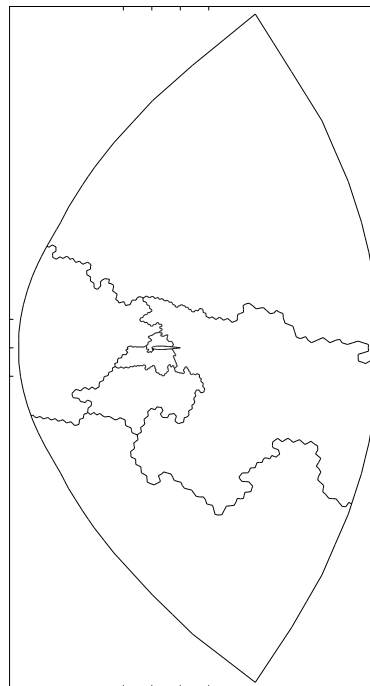


Figure 36 –  $G_6$  : 7 cellules

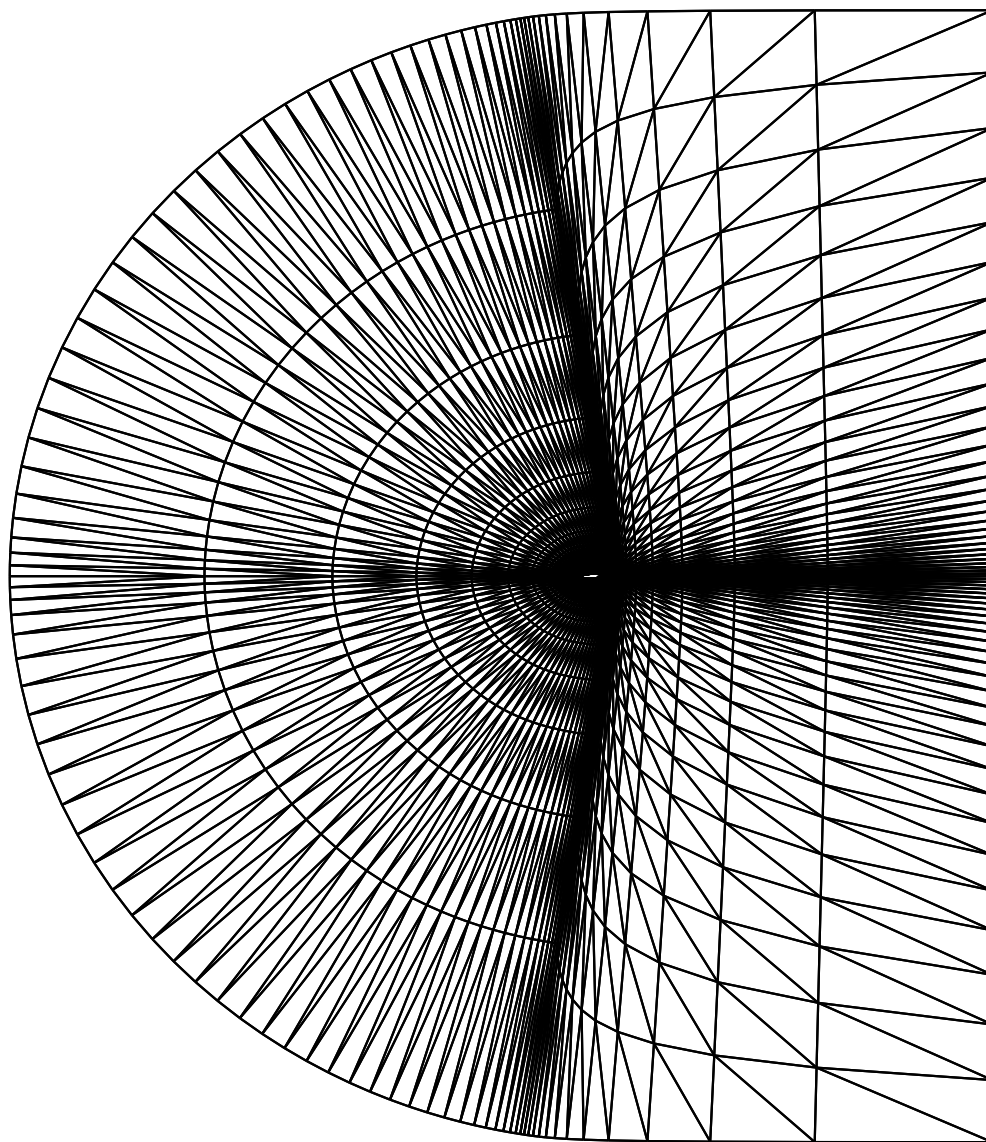


Figure 37 – *Triangulation du RAE2822 avec 3014 points*

Agglomération isotrope :

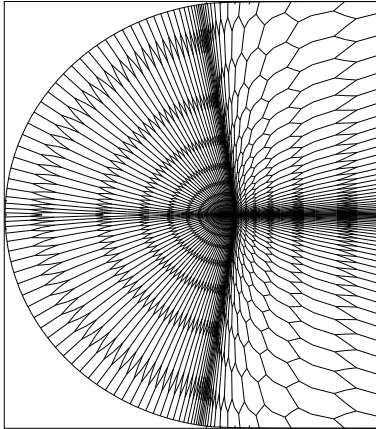


Figure 38 –  $G_1$  : 3014 cellules

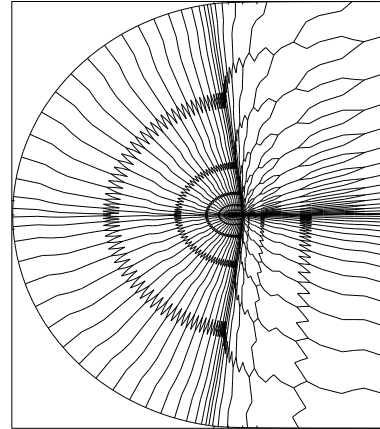


Figure 39 –  $G_2$  : 765 cellules

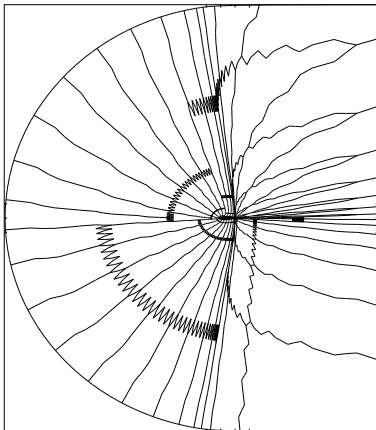


Figure 40 –  $G_3$  : 198 cellules

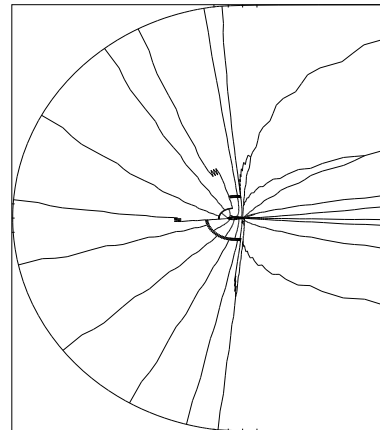


Figure 41 –  $G_4$  : 56 cellules

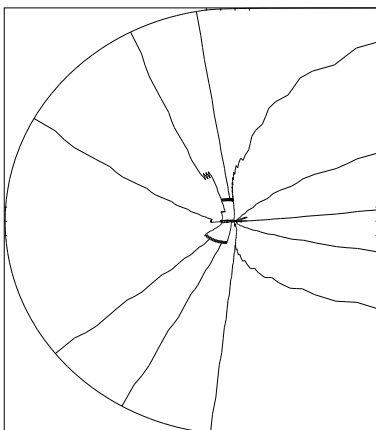


Figure 42 –  $G_5$  : 18 cellules

Agglomération anisotrope :

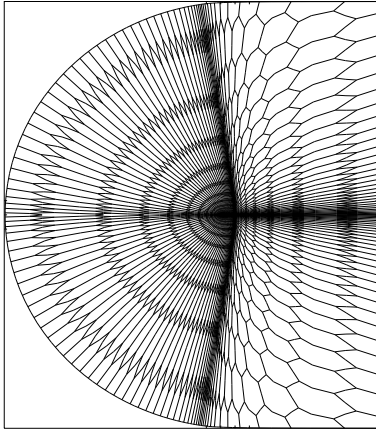


Figure 43 –  $G_1$  : 3014 cellules

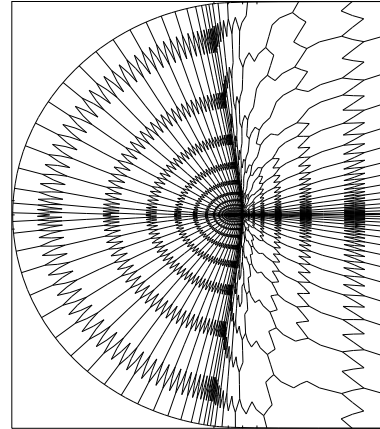


Figure 44 –  $G_2$  : 1380 cellules

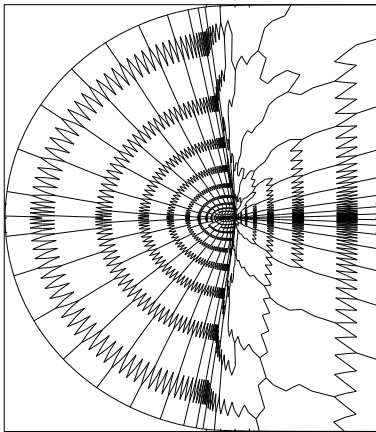


Figure 45 –  $G_3$  : 610 cellules

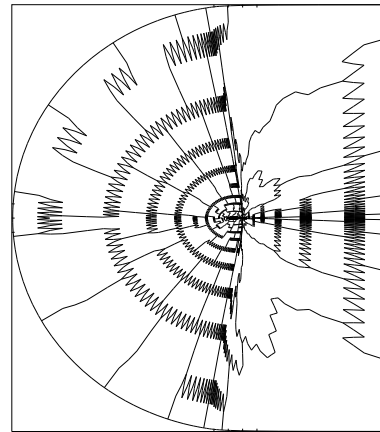


Figure 46 –  $G_4$  : 248 cellules

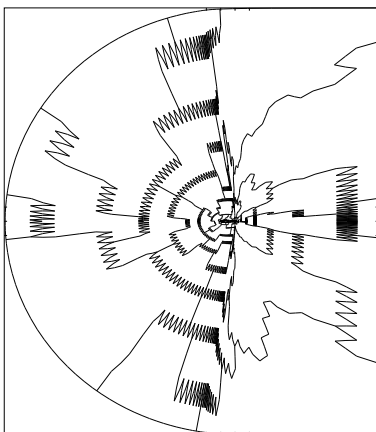


Figure 47 –  $G_5$  : 96 cellules

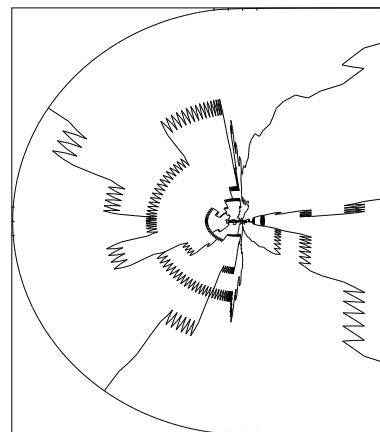


Figure 48 –  $G_6$  : 38 cellules



## 5 Méthode multigrille

Maintenant que la génération des grilles grossières et des schémas numériques respectifs a été élaborée, la méthode multigrille peut être utilisée.

Le principe de la méthode multigrille est d'estimer une correction de l'erreur de la solution convergée après quelques relaxations sur la grille fine. Les schémas de relaxation itératives classiques de Gauss-Seidel et Jacobi ont la propriété d'être de bons lisseurs hautes fréquences. Les basses fréquences qui n'ont pas été lissées sur la grille fine seront lissées sur les grilles grossières.

### 5.1 Opérateurs de transfert

La variation du nombre de cellules d'une grille  $G^k$  à une autre  $G^{k+1}$  conduit à la mise en place de deux opérateurs de transfert  $T_k^{k+1}$  et  $T_{k+1}^k$ .

Soit la suite finie  $(G^k)_{k=1, N_{max}}$  constituée des grilles emboîtées :

$$G^1 \supset G^2 \supset \dots \supset G^k \supset \dots \supset G^{N_{max}}$$

avec

$$G^k = \bigcup_{i=1}^{n_k} C_i^k$$

où  $n_k$  le nombre de cellules de la grille  $G^k$ .

On définit sur la grille  $G^k$ ,  $I^k$  l'ensemble des indices  $i$  des cellules et  $V^k$  l'espace des fonctions de base :

$$I^k = \{1, \dots, i, \dots, n_k\},$$

$$V^k = \{\varphi_i^k, i = 1, \dots, n_k\}.$$

Soit la suite de sous-ensemble  $(I_i)_{i=1, n_{k+1}}$  contenant les numéros des cellules agglomérées pour la construction de la grille plus grossière  $G^{k+1}$  tel que  $I_i \cap I_j = \emptyset$

$$I^k = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{n_{k+1}} \text{ avec } n_{k+1} < n_k.$$

#### 5.1.1 Opérateur de restriction

L'opérateur de restriction  $T_k^{k+1}$  est défini de  $V^k$  dans  $V^{k+1}$ , il permet le transfert du résidu du niveau  $k$  vers le niveau  $k+1$ . Soit  $Res_i^k$  le résidu de la cellule  $C_i^k$  appartenant à la grille  $G^k$ . La définition de l'opérateur de restriction  $T_k^{k+1}$  s'écrit de la manière suivante :

$$T_k^{k+1} (Res^k) = Res^{k+1}$$

avec

$$Res_i^{k+1} = \left[ T_k^{k+1} (Res^k) \right]_i = \sum_{j \in I_i} Res_j^k \quad i = 1, n_k.$$

Cet opérateur est utilisé dans *la phase descendante* de l'algorithme multigrille.

### 5.1.2 Opérateur d'interpolation

L'opérateur de prolongement  $T_{k+1}^k$  est défini de  $V^{k+1}$  dans  $V^k$ , il permet d'interpoler l'estimation d'erreur de la solution ( $Er^{k+1}$ ) d'une grille grossière  $G^{k+1}$  vers une grille moins grossière  $G^k$ . Cette interpolation correspond ici à une injection naturelle, définie par :

$$T_{k+1}^k (Er^{k+1}) = Er^k$$

où

$$\forall j \in \{1, \dots, i, \dots, n_{k+1}\}$$

et

$$Er_i^k = Er_j^{k+1} \quad \forall i \in I_j.$$

Cet opérateur est utilisé dans *la phase montante* de l'algorithme multigrille.

## 5.2 Applications numériques à l'équation de Poisson

Dans ce paragraphe, on se propose de montrer l'efficacité du semi-déraffinement appliqué sur des maillages étirés pour la résolution de l'équation de Poisson par la méthode multigrille. Pour cela on compare les convergences obtenues à partir de l'algorithme isotrope et celles obtenues par l'algorithme anisotrope sur plusieurs maillages : 5 maillages structurés et 2 maillages plus complexes.

L'équation de Poisson en 2-D s'écrit :

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & \text{sur } \Omega \in \mathbb{R}^2 \\ u|_{\Gamma} = 0, & \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (24)$$

On se propose de résoudre le système (24) après discrétisation par 3 cycles différents :

- **Bigrille idéal :**

Il est composé de la grille fine et d'une grille plus grossière. Le principe est de lisser toutes les basses fréquences de la grille fine sur la grille grossière (voir figure 3). Pour cela, on résout complètement le système linéaire sur la grille grossière avec un test d'arrêt sur la normalisation de l'erreur (convergence jusqu'à  $10^{-10}$ ). Soit  $Res_{iter}(n)$  le résidu normalisé obtenu après  $n$  relaxations défini par :

$$Res_{iter}(n) = \frac{\|u^{n-1} - u^n\|_{L_2}}{\|u^0 - u^1\|_{L_2}}$$

où  $u^n$  est la solution du système linéaire après  $n$  relaxations et  $u^0$  la solution initiale (initialisée à zéro sur les grilles grossières).

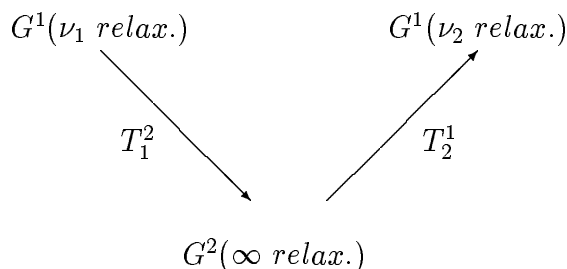


Figure 3 : Cycle bigrille idéal :  $\nu_1 = 1$  et  $\nu_2 = 0$ .

• **V-cycle :**

Il est composé d'une phase descendante et d'une phase montante avec un nombre fini de grilles grossières ( $k > 2$ ). Sur chaque grille, on résout le système linéaire après un nombre fini de relaxations  $\alpha$ . Le but est de lisser les basses fréquences de l'erreur à partir des grilles grossières en effectuant très peu de relaxations (en général  $\alpha = 1, 2$ ).

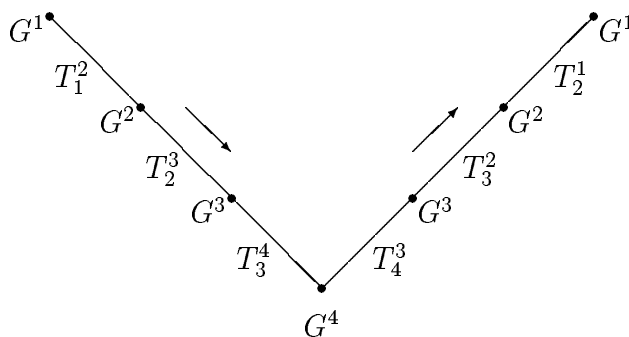


Figure 4 : V-cycle (ng=4)  $G^1 \supset G^2 \supset G^3 \supset G^4$ .

- **F-cycle :**

C'est un cycle qui s'inspire de la méthode FMG (Full MultiGrid).

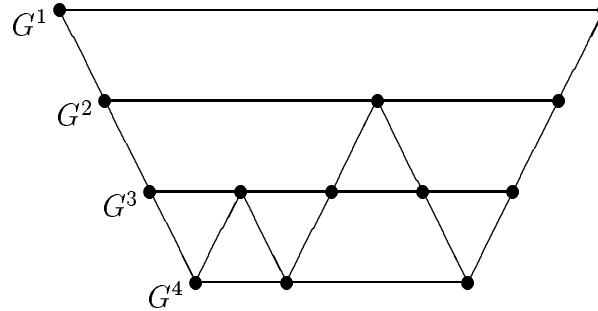


Figure 5 : F-cycle (ng=4)  $G^1 \supset G^2 \supset G^3 \supset G^4$ .

Pour chaque expérience numérique, le test d'arrêt de notre solution est donné à partir du résidu multigrille normalisé  $Res_{mult}(\alpha)$  ( $\alpha$  est le  $\alpha^{ieme}$  cycles multigrilles).

$$Res_{mult}(\alpha) = \frac{\|u^{\alpha-1} - u^\alpha\|_{L_2}}{\|u^1\|_{L_2}}$$

où  $u^\alpha$  est la solution obtenue après  $\alpha$  cycles multigrilles, avec  $u^0 = 0$ .

On dira que la solution a convergé si ce résidu est inférieur à  $10^{-6}$ . La résolution des systèmes linéaires s'effectuent en utilisant la méthode itérative de Gauss-Seidel avec un paramètre de relaxation égal à 1. En raison du manque de précision des opérateurs de transfert, le nombre de relaxations effectuées pour la résolution du système linéaire sur chaque grille, lors de l'utilisation du V-cycle et F-cycle, est de 2. Pour le cycle bigrille idéal, on effectue 2 + 2 relaxations (avant + après correction) pour la résolution du système linéaire de la grille fine.

Dans les tableaux ci-dessous, on notera par :

- $BGI(\nu_1, \nu_2)$  : la méthode bigrille idéale avec  $\nu_1$  relaxations de Gauss-Seidel sur la grille fine avant estimation de la correction et  $\nu_2$  relaxations après estimation de la correction (voir figure 3)
- $V\text{-cycle}(\nu_1, \nu_2)$  et  $F\text{-cycle}(\nu_1, \nu_2)$  : les méthodes multigrilles avec  $\nu_1$  relaxations de Gauss-Seidel sur chaque grille avant estimation de la correction et  $\nu_2$  relaxations sur chaque grille après estimation de la correction
- $\alpha_{conv}$  : le nombre de cycles multigrilles que l'on doit effectuer pour avoir un résidu multigrille inférieur à  $10^{-conv}$
- $\mu_{moy}$  : le facteur de réduction moyen du résidu multigrille :

$$(\mu_{moy}) = \alpha_{conv} \sqrt{\mu(\alpha_{conv})}$$

où

$$\mu(\alpha) = \frac{\|u^{\alpha+1} - u^\alpha\|_{L^2}}{\|u^\alpha - u^{\alpha-1}\|_{L^2}}$$

- *nivx*: le nombre de grilles grossières utilisé
- *cplx*: le nombre d'opérations effectué par sommet pour la résolution des systèmes linéaires et le calcul des résidus ( $f - Au$ ).

### 5.2.1 Maillage régulier

Le premier maillage correspond à la discrétisation du carré unité par un même pas d'espace suivant  $Ox$  et  $Oy$ . Il est constitué de 41 points dans les deux directions (figure 10). Pour les deux algorithmes (anisotrope et isotrope) on obtient les mêmes grilles grossières. La seule différence réside dans l'application du facteur de correction. Le rapport du nombre de cellules d'une grille à une autre est approximativement de 4.

- **Multigrille sans facteur de correction :**

Les résultats obtenus pour les deux algorithmes sont sensiblement les mêmes (voir tableau 3). Dans les deux cas, la convergence du bigrille idéal nécessite environ 1.5 fois moins de cycles que la convergence du F-cycle et environ 3 fois moins de cycles que la convergence du V-cycle. L'utilisation du F-cycle est plus efficace que le V-cycle d'une part parce qu'il nécessite moins de cycles pour converger et d'autre part parce que sa complexité totale est inférieure. Finalement, sans facteur de correction, le F-cycle est le plus adapté.

<i>Cycles</i>	<i>Algo. Isotrope</i>				<i>Algo. Anisotrope</i>			
	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>
BGI(2,2)	2	0.510	22	$\infty$	2	0.510	22	$\infty$
V-cycle(2,2)	5	0.800	63	385	5	0.800	64	392
F-cycle(2,2)	5	0.668	36	272	5	0.669	36	273

Table 3 – Résultats sans facteur de correction (maillage régulier)

- **Multigrille avec facteur de correction :**

La comparaison du tableau 4 avec le tableau 3 montre que le traitement de l'inconsistance de nos schémas numériques entraîne une importante diminution du nombre de cycles nécessaire à la convergence. Ce dernier devient à peu près le même quelque soit l'algorithme et le type de cycle utilisé. Finalement dans ce cas, le V-cycle est plus intéressant car il est moins complexe et tout aussi performant.

<i>Cycles</i>	<i>Algo. Isotrope</i>				<i>Algo. Anisotrope</i>			
	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>
BGI(2,2)	2	0.202	10	$\infty$	2	0.166	9	$\infty$
V-cycle(2,2)	5	0.227	11	67	5	0.177	9	56
F-cycle(2,2)	5	0.175	9	68	5	0.159	9	70

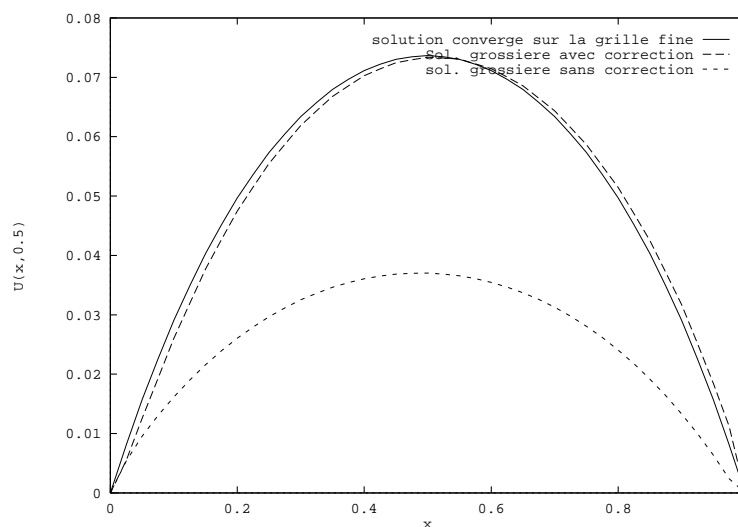
Table 4 – Résultats avec facteur de correction (maillage régulier)

Le nombre de relaxations nécessaire pour la convergence du schéma monogrille est de  $\alpha_6 = cplx = 2213$ . Ainsi le rapport d'efficacité (en terme de complexité arithmétique) entre le schéma monogrille (1G) et le schéma multigrille (MG) pour l'équation de Poisson est de :

$$\frac{1G}{MG_{(V-cycle)}} = 39.5$$

$$\frac{1G}{MG_{(F-cycle)}} = 31.6$$

La figure 49 compare une coupe de la solution sur la grille grossière interpolée sur la grille fine après un cycle bigrille idéal (avec et sans correction) avec la solution totalement convergée sur la grille fine. On voit clairement que la solution sur la grille grossière sans facteur de correction est deux fois moins bonne qu'avec correction.

Figure 49 – Solution grille fine et grossière pour  $y=0.5$  à partir de l'algorithme anisotrope

- **Indépendance de maillage :**

L'indépendance du nombre de points du maillage est montrée sur trois maillages emboîtés (voir figure 50 et 51). On constate que les courbes de convergence ont les mêmes pentes ( $\mu_{moy} \simeq 0.18$ ). Le nombre de cycles nécessaire pour la convergence est indépendant du nombre de points du maillage. La figure 51 montre la convergence de la méthode multigrille (F-cycle(2,2)) vers la méthode bigrille idéale (BGI(2,2)) quand le nombre de grilles grossières utilisé est optimum.

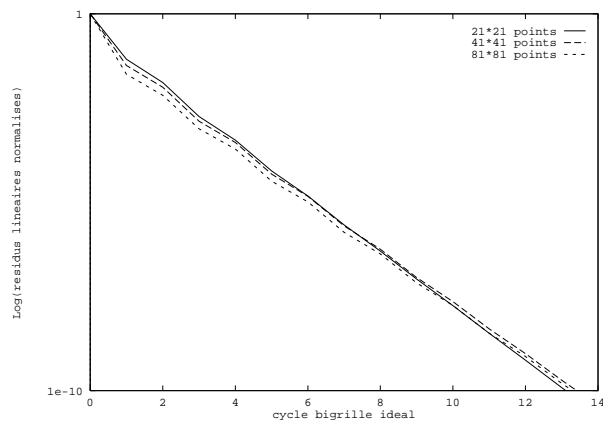


Figure 50 – Indépendance de maillage sur trois maillages emboîtés avec BGI(2,2) et  $\omega = 1$

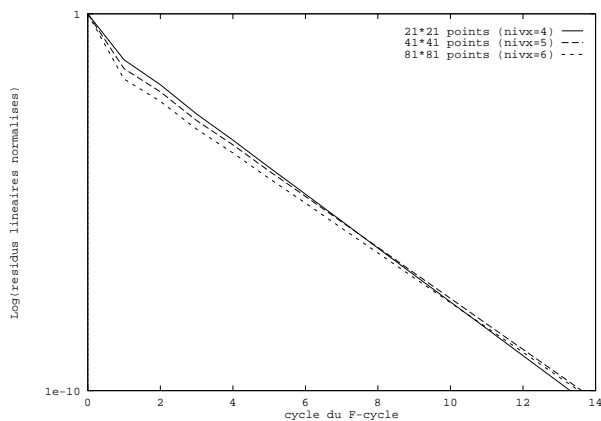


Figure 51 – Indépendance de maillage sur trois maillages emboîtés avec F-cycle(2,2) et  $\omega = 1$

### 5.2.2 Maillage étiré

Ce maillage est identique au précédent mais avec une progression géométrique suivant l'axe  $Ox$  (voir figure 17). Ceci permet d'avoir des mailles aplaties dans les deux directions d'espaces. Ce maillage présente un rapport d'aspect maximum de 100.

- **Multigrille sans facteur de correction :**

En déraffinement isotrope, l'efficacité de la méthode multigrille se détériore. En revanche, l'utilisation de l'algorithme anisotrope permet d'obtenir de meilleurs résultats.

Cycles	Algo. Isotrope				Algo. Anisotrope			
	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	cplx	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	cplx
BGI(2,2)	2	0.817	70	$\infty$	2	0.454	19	$\infty$
V-cycle(2,2)	5	0.848	85	519	6	0.752	50	401
F-cycle(2,2)	5	0.829	75	566	6	0.615	30	367

Table 5 – Résultats sans facteur de correction (maillage étiré)

- **Multigrille avec facteur de correction :**

L'algorithme isotrope avec l'application du facteur de correction ( $k_x, k_y$ ) ne permet pas de résoudre ce problème ( voir tableau 6). Par contre, l'utilisation de l'agglomération anisotrope des cellules réduit nettement le nombre de cycles nécessaire. De plus, on constate que le nombre de cycles pour la convergence sur ce maillage est pratiquement le même que celui nécessaire pour le maillage isotrope précédant, mais avec une complexité un peu plus importante.

Cycles	Algo. Isotrope				Algo. Anisotrope			
	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	cplx	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	cplx
BGI(2,2)	2	0.796	62	$\infty$	2	0.201	10	$\infty$
V-cycle(2,2)	5	0.801	64	391	6	0.224	11	87
F-cycle(2,2)	5	0.798	63	476	6	0.227	11	130

Table 6 – Résultats avec facteur de correction (maillage étiré)

Le nombre de relaxations nécessaire pour la convergence du schéma monogrille est de  $\alpha_6 = cplx = 1440$ . Ainsi le rapport d'efficacité entre le schéma monogrille (1G) et le schéma multigrille (MG) pour l'équation de Poisson est de :

$$\frac{1G}{MG_{(V-cycle)}} = 16.5$$

$$\frac{1G}{MG_{(F-cycle)}} = 11.1$$

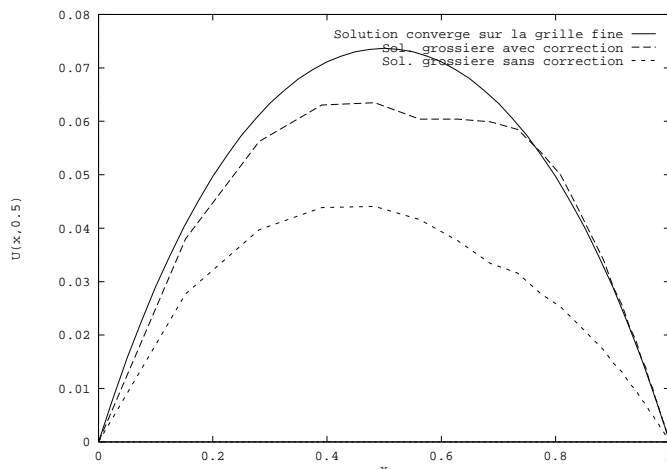


Figure 52 – Solution grille fine et grossière pour  $y=0.5$  à partir de l'algorithme anisotrope



La figure 52 compare une coupe de la solution sur la grille grossière interpolée sur la grille fine après un cycle bigrille idéal (avec et sans correction) avec la solution totalement convergée sur la grille fine. Cette comparaison est fortement réduite par l'utilisation du facteur de correction.

- **Indépendance de maillage :**

Comme dans le cas précédant, on observe une indépendance de la vitesse de convergence effectuée sur trois maillages cartésiens emboîtés dont le rapport d'aspect est de 10 (voir figure 53 et 54). Le facteur de réduction commun pour les trois courbes est de  $\mu_{moy} \simeq 0.18$ . D'autre part, le changement du paramètre de relaxation de Gauss-Seidel de 1 à 0.83 (voir tableau 2) pour la résolution bigrille idéale (BGI(2,2)) sur ces trois maillages étirés permet d'obtenir un nombre de cycles nécessaire inférieur comparé au maillage isotrope précédant (voir figure 50).

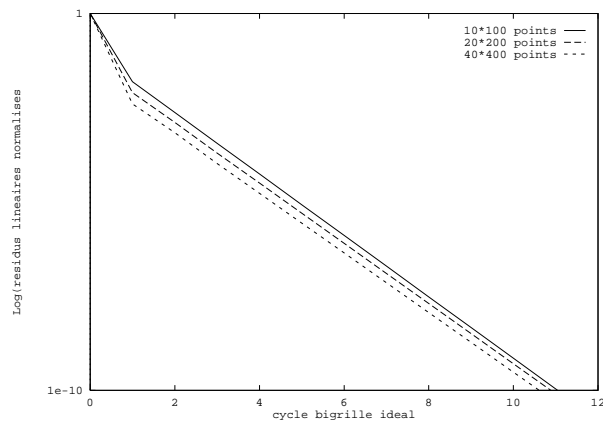


Figure 53 – Indépendance de maillage sur 3 maillages emboîtés avec BGI(2,2) et  $\omega = 0.83$

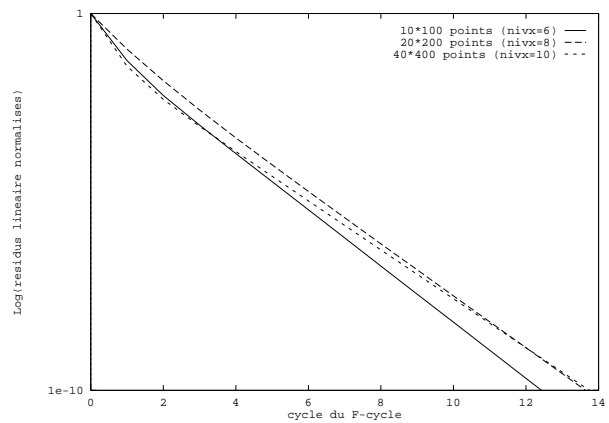


Figure 54 – Indépendance de maillage sur 3 maillages emboîtés avec F-cycle(2,2) et  $\omega = 0.83$

### 5.2.3 Maillage de la plaque

C'est un maillage qui a été spécialement conçu pour des calculs turbulents en bas Reynolds [2], composé de 113 points suivant l'axe des  $Ox$  et de 81 points suivant  $Oy$ . Le rapport d'aspect maximum est de 5000.

- **Multigrille sans facteur de correction :**

<i>Cycles</i>	<i>Aggl. Isotrope</i>				<i>Aggl. Anisotrope</i>			
	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>
BGI(2,2)	2	0.919	164	$\infty$	2	0.472	20	$\infty$
V-cycle(2,2)	6	0.933	200	1211	8	0.817	70	588
F-cycle(2,2)	6	0.902	182	1358	8	0.683	38	522

Table 7 – Résultats sans facteur de correction (maillage de la plaque)

- **Multigrille avec facteur de correction :**

<i>Cycles</i>	<i>Aggl. Isotrope</i>				<i>Aggl. Anisotrope</i>			
	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>
BGI(2,2)	2	0.902	135	$\infty$	2	0.191	10	$\infty$
V-cycle(2,2)	5	0.903	137	827	6	0.384	16	132
F-cycle(2,2)	5	0.906	141	1041	6	0.239	11	141

Table 8 – Résultats avec facteur de correction (maillage de la plaque)

Nous constatons à nouveau que pour les résultats des tableaux 5 et 6, l'utilisation de l'algorithme isotrope sur ce maillage étiré détériore la convergence de la méthode multigrille. Par contre, l'utilisation de l'algorithme anisotrope permet d'avoir une bonne vitesse de convergence.

#### 5.2.4 Maillage de la conduite

Les résultats numériques des tableaux de 9 à 12 ont été effectués sur deux maillages différents provenant de la discrétisation de la conduite de Comte-Bellot. Le premier est conçu pour les modèles de turbulence à haut Reynolds et l'autre pour les modèles à bas Reynolds. Ils sont constitués de 600 points dont 10 points suivant l'axe des  $Ox$  et 60 points suivant  $Oy$ . Du fait de la répartition uniforme des points suivant  $Ox$ , la différence de ces maillages réside dans la répartition des points suivant la verticale.

• **Conduite à haut-Reynolds :**

– **Multigrille sans facteur de correction :**

<i>Cycles</i>	<i>Aggl. Isotrope</i>				<i>Aggl. Anisotrope</i>			
	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>
BGI(2,2)	2	0.978	629	$\infty$	2	0.514	22	$\infty$
V-cycle(2,2)	4	0.981	725	4361	5	0.848	85	727
F-cycle(2,2)	4	0.980	698	5076	5	0.725	44	587

Table 9 – Résultats sans facteur de correction (conduite à haut Reynolds)

– **Multigrille avec facteur de correction :**

<i>Cycles</i>	<i>Aggl. Isotrope</i>				<i>Aggl. Anisotrope</i>			
	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>
BGI(2,2)	2	0.976	579	$\infty$	2	0.130	8	$\infty$
V-cycle(2,2)	4	0.979	652	3922	5	0.277	12	103
F-cycle(2,2)	4	0.978	623	4531	5	0.172	9	120

Table 10 – Résultats avec facteur de correction (conduite à haut Reynolds)

• **Conduite à bas-Reynolds :**

– **Multigrille sans facteur de correction :**

<i>Cycles</i>	<i>Aggl. Isotrope</i>				<i>Aggl. Anisotrope</i>			
	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>
BGI(2,2)	2	0.968	434	$\infty$	2	0.502	22	$\infty$
V-cycle(2,2)	4	0.971	471	2833	5	0.805	65	556
F-cycle(2,2)	4	0.970	459	3338	5	0.679	37	493

Table 11 – Résultats sans facteur de correction (conduite à bas Reynolds)

– **Multigrille avec facteur de correction :**

<i>Cycles</i>	<i>Aggl. Isotrope</i>				<i>Aggl. Anisotrope</i>			
	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>
BGI(2,2)	2	0.966	401	$\infty$	2	0.127	8	$\infty$
V-cycle(2,2)	4	0.968	429	2581	5	0.235	11	94
F-cycle(2,2)	4	0.967	417	3033	5	0.159	9	120

Table 12 – Résultats avec facteur de correction (conduite à bas Reynolds)

Pour les deux maillages, on constate qu'à partir de l'algorithme anisotrope les résultats pour les différents cycles multigrilles sont les mêmes (tableau 10 et 12). Cette remarque montre l'indépendance de la répartition des points suivant l'axe  $Oy$ . Par contre, l'utilisation de l'algorithme isotrope entraîne une convergence lente.

### 5.2.5 Maillage du NACA0012

Le NACA0012 est un profil d'aile d'avion symétrique. Le maillage choisi est isotrope et est composé de 3114 points (figure 30). L'aspect de chaque cellule ne présentant pas d'étirement significatif, les résultats dans les tableaux 13 et 14 sont sensiblement les mêmes.

- **Multigrille sans facteur de correction :**

Les résultats obtenus pour les deux algorithmes sont pratiquement les mêmes pour les trois cycles (voir tableau 13). Toutefois l'utilisation du F-cycle est plus efficace que le V-cycle car il nécessite deux fois moins de cycles pour converger et  $cplx_{F-cycle} < cplx_{V-cycle}$ . Finalement sans facteur de correction, le F-cycle est le plus intéressant.

<i>Cycles</i>	<i>Aggl. Isotrope</i>				<i>Aggl. Anisotrope</i>			
	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>
BGI(2,2)	2	0.582	27	$\infty$	2	0.582	27	$\infty$
V-cycle(2,2)	6	0.873	103	629	6	0.875	105	644
F-cycle(2,2)	6	0.774	55	418	6	0.779	57	438

Table 13 – Résultats sans facteur de correction (NACA0012)

- **Multigrille avec facteur de correction :**

Le traitement de l'inconsistance permet d'obtenir de bons résultats (voir tableau 14). Toutefois le F-cycle est celui qui approche le mieux le nombre de cycles bigrilles idéals. L'utilisation de l'algorithme isotrope donne une meilleur convergence pour le V-cycle.

<i>Cycles</i>	<i>Aggl. Isotrope</i>				<i>Aggl. Anisotrope</i>			
	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>	<i>nivx</i>	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	<i>cplx</i>
BGI(2,2)	2	0.220	11	$\infty$	2	0.250	11	$\infty$
V-cycle(2,2)	6	0.360	15	91	6	0.502	22	135
F-cycle(2,2)	6	0.239	11	84	6	0.312	13	100
<i>résultat avec facteur de correction</i>								

Table 14 – Résultats avec facteur de correction (NACA0012)

Le nombre de relaxations nécessaire pour la convergence du schéma monogrille est de  $\alpha_6 = cplx = 3007$ . Ainsi le rapport d'efficacité entre le schéma monogrille (1G) et le schéma multigrille (MG) pour l'équation de Poisson est de :

$$\frac{1G}{MG_{(V-cycle)}} = 22.3$$

$$\frac{1G}{MG_{(F-cycle)}} = 30.1$$

La figure 55 montre une coupe de la solution complètement convergée sur la grille fine et celle convergée après un cycle bigrille idéal. On constate que l'application du facteur de correction permet de réduire considérablement la différence d'erreur entre la solution grille fine et grille grossière interpolée.

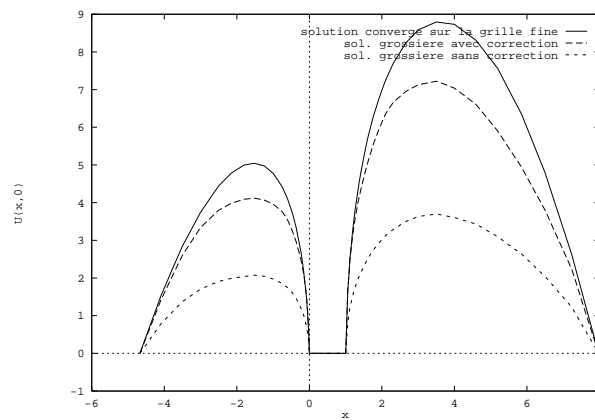


Figure 55 – Solution grille fine et grossière pour  $y=0$  à partir de l'algorithme anisotrope

- **Indépendance de maillage :**

La figure 56 représente les courbes de convergence obtenues par la méthode bigrille idéale sur trois maillages emboîtés. Le maillage composé de 3114 points a été construit par déraffinement triangulaire du maillage constitué de 12284 points et le 800 points à partir du 3114 points. D'autre part, la figure 57 montre la convergence du F-cycle vers la méthode bigrille idéale quand le nombre de grilles grossières utilisées augmente. En terme de convergence, l'utilisation d'un F-cycle est aussi efficace que l'utilisation d'un bigrille idéal à condition d'utiliser toutes les grilles grossières possibles. Ce résultat permet d'en déduire l'indépendance de maillage pour le F-cycle.

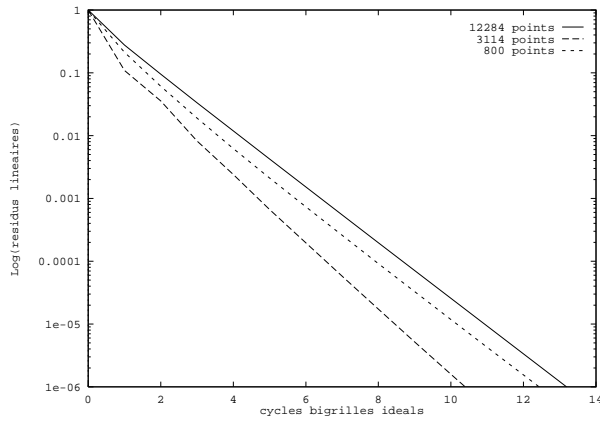


Figure 56 – Indépendance de maillage sur trois maillages différents avec BGI(2,2)

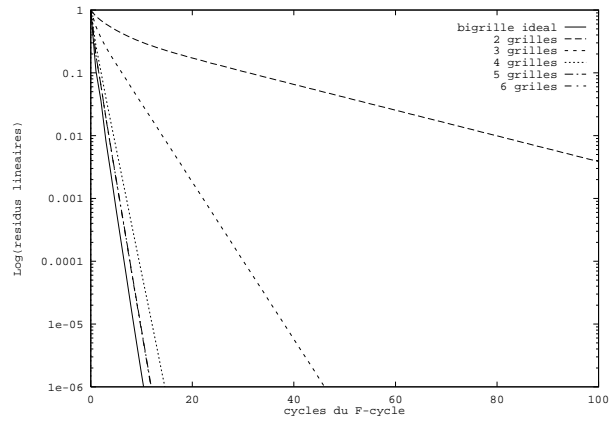


Figure 57 – Méthode multigrille (F-cycle(2,2)) sur le maillage comportant 3114 points

### 5.2.6 Maillage du RAE2822

Le RAE2822 est un profil d'aile d'avion plus réaliste. Son maillage structuré comporte 3014 points (voir figure 37). Il présente des étirements de mailles dans tout le domaine, en particulier dans la zone proche de la paroi avec des rapports d'aspect d'environ 1000.

- Multigrille sans facteur de correction :

Cycles	Aggl. Isotrope				Aggl. Anisotrope			
	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	cplx	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	cplx
BGI	2	0.988	1134	$\infty$	2	0.908	145	$\infty$
V-cycle	5	0.992	1648	9940	6	0.956	306	2481
F-cycle	5	0.990	1435	10582	6	0.920	167	2087

Table 15 – Résultats sans facteur de correction (RAE2822)

- Multigrille avec facteur de correction :

Cycles	Aggl. Isotrope				Aggl. Anisotrope			
	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	cplx	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	cplx
BGI	2	0.985	932	$\infty$	2	0.894	123	$\infty$
V-cycle	5	0.988	1162	7009	6	0.925	180	1441
F-cycle	5	0.987	1088	8023	6	0.900	133	1612

Table 16 – Résultats avec facteur de correction (RAE2822)

Le nombre de relaxations nécessaire pour la même convergence du schéma monogrille est de  $\alpha_6 = cplx=18566$ . Ainsi le rapport d'efficacité entre le schéma monogrille (1G) et le schéma multigrille (MG) pour l'équation de Poisson est de :

$$\frac{1G}{MG_{(V-cycle)}} = 12.9$$

$$\frac{1G}{MG_{(F-cycle)}} = 11.5$$

### 5.3 Applications aux équations de Navier-Stokes

Dans cette section, on applique l'approche anisotropique à un problème plus réaliste à savoir l'écoulement d'un gaz autour d'un profil d'aile d'avion (NACA0012).

Le maillage structuré est composé de 14106 points et de 27636 triangles. La frontière externe du domaine est en forme de  $C$ . Il présente des étirements. Le rapport d'aspect maximum dans la zone proche de la paroi du profil est d'environ 6 (figure 58) et à l'extérieur de cette zone monte à certain endroit à 5900 (figure 59).

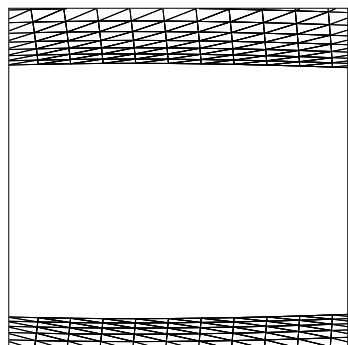


Figure 58 – Zoom sur le milieu du profil

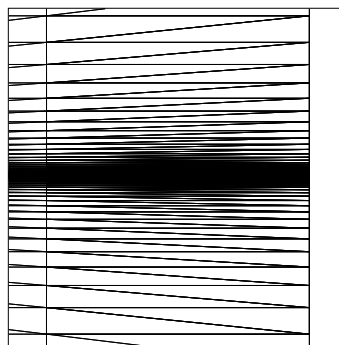


Figure 59 – Zoom sur l'extrémité arrière du domaine

Les équations sont celles de Navier-Stokes compressibles pseudo-instationnaires. La discrétisation des équations est basée sur une approche mixte éléments finis et volumes finis en utilisant des flux numériques décentrés [3]. La précision du schéma est d'ordre deux en espace. La formulation implicite est suivie d'une linéarisation des termes à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 1 en temps. Finalement, on aboutit à un système linéaire dépendant du temps dont la résolution s'effectue par la méthode multigrille.

Les tests présentés dans cette section ont été réalisés avec un nombre de Mach à l'infini de 0.8, une incidence de 10 degrés et un nombre de Reynolds égal à 73. L'initialisation des variables physiques au temps  $t_0$  est faite à partir des valeurs à l'infini; elle est uniforme dans tout le domaine.

Dans la section 5.3.1, on montre la phase de convergence complète du système linéaire initialisé au temps  $t_0$ . Et dans la partie 5.3.2, on présente la phase de convergence en temps du problème non linéaire à partir de la solution uniforme au temps  $t_0$ .

Les résultats de convergence multigrille pour l'équation de Poisson obtenus sur ce maillage sont présentés dans le tableau 17.

Cycles	Aggl. Isotrope				Aggl. Anisotrope			
	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	cplx	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_6$	cplx
BGI	2	NE	NE	NE	2	0.436	18	$\infty$
V-cycle	4	0.999	29151	173690	7	0.910	147	1195
F-cycle	5	0.999	24661	180643	7	0.707	41	517

Table 17 – Résultats avec facteur de correction (équation de Poisson). NE:Non Effectué.

### 5.3.1 Phase linéaire

La matrice et le second membre sont appelés respectivement matrice implicite et flux explicites dépendent du temps. A partir de la solution initiale au temps  $t_0$ , on cherche à résoudre complètement le système linéaire afin d'obtenir la solution au temps  $t_1 = t_0 + cfl * \Delta t$  avec  $cfl = 1000$ . On dira que la solution a convergé si le résidu normalisé de Gauss-Seidel est inférieur à  $10^{-10}$ . On compare deux types de cycle multigrille : le V-cycle et le F-cycle. On effectue sur chacune des grilles 2 relaxations de Gauss-Seidel avec un paramètre de relaxation égal à 1.

- **Multigrille sans facteur de correction :**

Les résultats de la résolution du système linéaire sur la grille fine à partir des schémas numériques inconsistants sur les grilles grossières sont représentés dans le tableau 18. On constate une amélioration de la convergence lorsque l'algorithme anisotrope est utilisé. En effet dans ce cas 1.5 à 2 fois moins de cycles multigrilles sont nécessaires et la complexité arithmétique totale est inférieure.

Cycles	Aggl. Isotrope				Aggl. Anisotrope			
	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_{10}$	cplx	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_{10}$	cplx
V-cycle(2,2)	5	0.72	72	500	6	0.57	43	385
F-cycle(2,2)	5	0.71	69	607	6	0.53	38	532

Table 18 – Comparaison des résultats obtenus avec l'algorithme isotrope et anisotrope sans facteur de correction.

- **Multigrille avec facteur de correction :**

La figure 60 représente les courbes de convergence obtenues par la résolution mono-grille du système matriciel et par la résolution multigrille suivant le type de l'algorithme



utilisé (isotrope ou anisotrope). On note que la courbe de convergence “isotrope” est incurvée et présente un facteur de réduction moyen de 0.65 (voir tableau 19). En revanche, ce facteur devient inférieur lors de l'utilisation de l'algorithme anisotrope avec  $\mu_{moy} = 0.38$  pour les deux cycles multigrilles. Ces résultats mettent en valeur les avantages du semi-déraillement pour des maillages étirés dans le cadre d'équations complexes implicites. Ce sont les méthodes itératives qui en bénéficient avec un meilleur lissage des hautes fréquences sur toutes les grilles. Cependant, on constate une augmentation du facteur de réduction lors de la résolution numérique à partir d'une initialisation du système linéaire pour un temps  $t_1 > t_0$ .

Cycles	Aggl. Isotrope				Aggl. Anisotrope			
	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_{10}$	cplx	nivx	$\mu_{moy}$	$\alpha_{10}$	cplx
V-cycle(2,2)	5	0.65	54	374	6	0.38	25	220
F-cycle(2,2)	5	0.65	54	475	6	0.38	25	350

Table 19 – Comparaison des résultats obtenus avec l'algorithme isotrope et anisotrope avec facteur de correction.

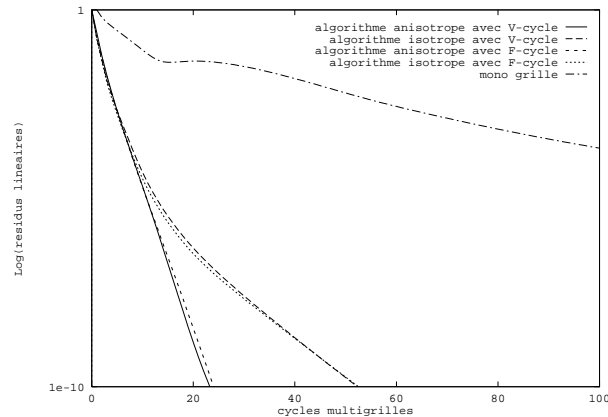


Figure 60 – Résolution complète du système linéaire pour une itération en temps.

### 5.3.2 Phase non linéaire

A partir de la solution initiale à l'instant  $t_0$ , On s'intéresse à la convergence numérique en temps des équations de Navier-Stokes vers une solution stationnaire. La solution est stationnaire si le résidu multigrille normalisé au temps  $t_n$  est inférieur à  $10^{-10}$ . Pour cela, on utilise un CFL qui augmente de manière linéaire en temps ( $CFL = 1000 + 500 \times \text{itérations-en-temps}$ ).

Les courbes de la figure 61 représente le logarithme du résidu multigrille normalisé en fonction des itérations en temps. Ces résultats ont été effectués par la méthode du F-cycle avec deux relaxations par grille et un cycle pour chaque itération en temps. Comme pour la

convergence linéaire, les courbes obtenues à partir de l'algorithme anisotrope sont rectilignes avec une pente de 0.85.

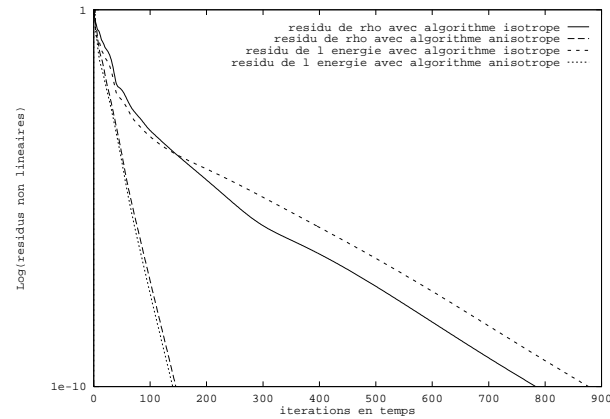


Figure 61 – Courbes de convergence de l'écoulement subsonique autour du profil (F-cycle(2,2)).

Finalement, même si le facteur de réduction reste élevé l'utilisation de l'algorithme anisotrope permet d'obtenir une meilleure pente de convergence avec une complexité arithmétique totale inférieure. En effet, la complexité arithmétique pour une itération en temps avec le F-cycle(2,2) est de 8.80 pour l'algorithme isotrope et 13.45 pour l'anisotrope. Dans le cas précis de la figure 61, la méthode multigrille avec agglomération anisotrope est 3.91 fois moins coûteuse que celle avec agglomération isotrope.

Les figures 62 et 63 représentent les isovaleurs de la solution stationnaire.

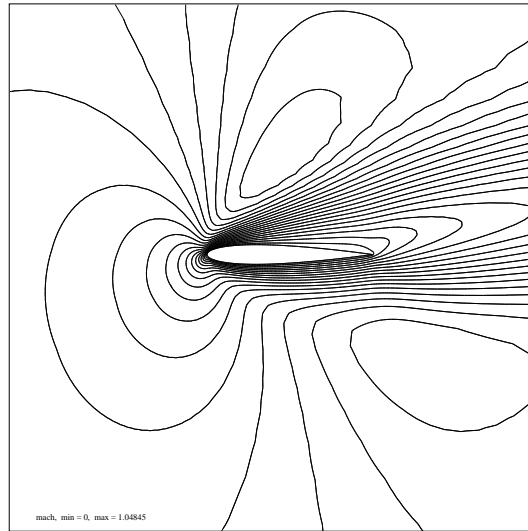


Figure 62 – Isovaleurs du Mach pour l'écoulement subsonique.

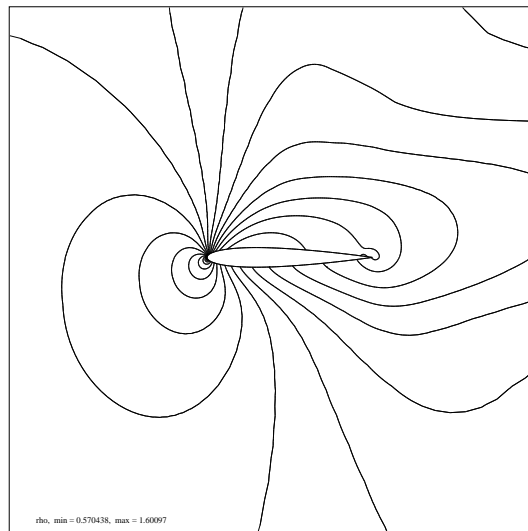


Figure 63 – Isovaleurs de la densité pour l'écoulement subsonique.

## 6 Conclusion

A partir de maillages structurés, on a montré dans la section 2 que le nombre de cycles multigrilles pour la résolution de l'équation de Poisson par la méthode multigrille dépend du déraffinement utilisé. L'analyse des résultats de la section 2.3 a mis en évidence le fait qu'un déraffinement isotrope sur un maillage étiré ne permet pas de lisser efficacement toutes les hautes fréquences de l'erreur ( $g_\epsilon$  tend vers 1). Par contre, on montre qu'une extension de ce déraffinement vers un semi-déraffinement permet d'obtenir un facteur de réduction théorique nettement inférieur à 1 ( $g_\epsilon < 0.6$  pour Jacobi et  $g_\epsilon < 0.5$  pour Gauss-Seidel).

Par ailleurs, l'approche par la méthode de type Galerkin des termes diffusifs sur les grilles grossières entraîne une inconsistance entre les schémas numériques. L'analyse menée dans la section 2.2 a permis de définir un facteur de correction dans chaque direction principale.

L'expérience numérique de l'équation de Poisson appliquée sur plusieurs maillages différents avec l'utilisation de l'algorithme anisotrope a permis d'obtenir de très bons résultats. D'une manière générale le nombre de cycles nécessaire pour la convergence complète avec l'algorithme anisotrope est toujours meilleur ou équivalent par rapport au nombre de cycles avec l'algorithme isotrope. Durant cette application, on a montré l'indépendance de la vitesse de convergence par rapport au nombre de points du maillage isotrope ou anisotrope.

L'utilisation de cette méthode sur un écoulement laminaire externe nous a permis de la valider.

L'extension de l'algorithme de déraffinement directionnel pour un maillage en trois dimensions ne devrait pas poser de problème de conception. Par la suite on pourra, par exemple, utiliser ce type d'agglomération pour des calculs de couche limite. Toutefois, des améliorations dans l'algorithme d'agglomération peuvent être apportées afin d'être capable de contrôler mieux la taille et la forme des cellules grossières, par exemple par un changement de métrique [19].

## 7 Remerciement

Je voudrais remercier tout particulièrement Jean-Antoine Désidéri et Alain Dervieux pour les discussions fructueuses que j'ai eu avec eux. Mais aussi Bruno Koobus, Gilles Carré et Cyril Godart pour leurs précieux conseils et Cécile Viozat pour m'avoir aidé dans la rédaction de ce rapport.

## Références

- [1] B. Koobus ,M-H Lallemand and A. Dervieux (“Unstructured Volume-Agglomeration MG: Solution of the Poisson Equation”, *Rapport INRIA 1946, Juin 1993*)
- [2] B. Koobus “Algorithmes multigrilles et algorithmes implicites pour les écoulements compressibles turbulents”, *Thèse, Université de Nice Sophia-Antipolis, Décembre 1994*
- [3] G. Carré “An Implicit Multigrid Method by Agglomeration Applied to Turbulent Flows”, *submitted to Computers and Fluids*
- [4] M-H Lallemand “Schémas décentrés multigrilles pour la résolution des équations d’Euler en éléments finis”, *Thèse, Université de Marseille (1988)*
- [5] M-H Lallemand “Algebraic multigrid”, *ERCIM, february 18-21, 1992 inria Sophia-Antipolis*
- [6] M-H Lallemand, H. Steve, and A. Dervieux “Unstructured multigridding by volume agglomerating: current status”, *Computers Fluids vol. 21, pp. 397-433, 1992*
- [7] E. Morano “Résolution des équations d’Euler par une méthode multigrille stationnaire”, *Thèse, Université de Nice Sophia-Antipolis, Décembre 1992*
- [8] P. Wesseling “An introduction to multigrid methods”, *A volume in pure and applied mathematics, John Wiley and Sons, 1992*
- [9] R. Radespiel AND N. Kroll “Multigrid schemes with semicoarsening for accurate computations of hypersonic viscous flows”, *DLR-IB 129 - 90/19, Braunschweig, April 1991*
- [10] R. Radespiel AND R. C. Swanson “Progress with multigrid schemes for hypersonic flow problems”, *ICASE Report No. 91-89*
- [11] V. Venkatakrisnan, D. J. Mavriplis AND M. J. Berger “Unstructured multigrid through agglomeration”, *Proceedings of the 6th Copper Mountain Multigrid Conference, April 1993*
- [12] V. Venkatakrisnan, D. J. Mavriplis “Agglomeration multigrid for the three-dimensional Euler equations”, *ICASE Report No. 94-5, January 1994*
- [13] D. J. Mavriplis, V. Venkatakrisnan “A 3d agglomeration multigrid solver for the Reynolds-averaged Navier-Stokes equation on unstructured meshes ”, *ICASE Report No. 95-30, April 1995*
- [14] D. J. Mavriplis, V. Venkatakrisnan “ Agglomeration multigrid for viscous turbulent flows ”, *ICASE Report No. 94-62, July 1994*

- 
- [15] P. Vanek, J. Mandel, and M. Brezina “Algebraic multigrid on unstructured meshes”, *Preprint University Colorado at Boulder, 1994*
  - [16] W. Mulder “Dynamics of gas in Rotating Galaxy”, *PhD. University of Leiden, 1985*
  - [17] O. Hassan, K. Morgan and J. Peraire “An implicit finite element method for high speed flows”, *28<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting, January 1990 Reno/Nevada*
  - [18] W. Hackbusch “Multi-grid methods and application”, *Springer series in Computational Mathematics, Springer Verlag, Vol. 4, 1985*
  - [19] M.G. Vallet “Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs”, *Thèse, Université de Paris VI, 1992*
  - [20] John F. Lynn and Bram van Leer “A semi-coarsened multigrid solver for the Euler and Navier-Stokes equations with local preconditioning”, *in AIAA Paper 95-1667, 1995*
  - [21] A. Brandt “Algebraic multigrid theory: the symmetric case”, *Appl. Math. Comput., 19, 1986*
  - [22] E. Morano, D.J. Mavriplis and V. Venkatesh “Coarsening strategies for unstructured multigrid techniques with application to anisotropic problems”, *ICASE Report No. 95-34, May 1995*



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399