



**HAL**  
open science

## Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie I: Algorithmes

Houman Borouchaki, Paul-Louis George, Frédéric Hecht, Patrick Laug, Eric  
Saltel

► **To cite this version:**

Houman Borouchaki, Paul-Louis George, Frédéric Hecht, Patrick Laug, Eric Saltel. Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie I: Algorithmes. [Rapport de recherche] RR-2741, INRIA. 1995. inria-00073952

**HAL Id: inria-00073952**

**<https://inria.hal.science/inria-00073952>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

***Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné  
par une carte de métriques. Partie I:  
Algorithmes.***

Houman BOROUCI, Paul Louis GEORGE,  
Frédéric HECHT, Patrick LAUG et Eric SALTEL

**N° 2741**

5 décembre 1995

PROGRAMME 6



***rapport  
de recherche***



# Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie I: Algorithmes.

Houman BOROUCHEKI, Paul Louis GEORGE\*,  
Frédéric HECHT, Patrick LAUG et Eric SALTEL

Programme 6 — Calcul scientifique, modélisation et logiciel numérique  
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 2741 — 5 décembre 1995 — 47 pages

**Résumé :** Dans ce rapport, on propose un algorithme de maillage de type Delaunay gouverné par une carte de métriques. La méthode classique est rappelée puis chacune de ses étapes est généralisée. On montre par ailleurs que la méthode proposée s'étend à la dimension trois. Cette étude est divisée en deux parties. Le présent rapport constitue la partie I et expose la partie algorithmique de la méthode. La partie II, quant à elle, présentera plusieurs applications de type éléments finis.

**Mots-clé :** Triangulation de Delaunay, espace riemannien, maillage anisotrope, maillage adaptatif.

*(Abstract: pto)*

\*. E-mail: Paul-Louis.George@inria.fr

# **Delaunay Mesh generation governed by metrics specifications. Part 1: Algorithms.**

**Abstract:** This paper aims to propose a Delaunay type mesh generation algorithm governed by a metric map. The classical method is briefly established and, furthermore, the different steps it involves are extended in the present case. It will be shown that the proposed method apply in three dimensions. The work is divided in two parts. Part I, i.e. the present paper, is devoted to the algorithmical aspects while Part II will present numerous application examples in the context of finite element computations.

**Key-words:** Delaunay triangulation, Riemannian space, anisotropic mesh generation, mesh adaption.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Mailleur classique de Delaunay (Rappel)</b>	<b>6</b>
2.1	Schéma du mailleur classique . . . . .	6
2.2	Création du maillage frontalier . . . . .	8
2.2.1	Noyau de Delaunay . . . . .	8
2.2.2	Maillage du rectangle englobant . . . . .	9
2.2.3	Modification topologique locale . . . . .	9
2.2.4	Forçage des arêtes contraintes . . . . .	11
2.2.5	Identification du maillage frontalier . . . . .	11
2.3	Création du maillage de $\Omega$ . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Schéma d'un mailleur gouverné</b>	<b>13</b>
3.1	Maillage de la frontière . . . . .	15
3.2	Maillage du domaine . . . . .	15
3.3	Schéma du mailleur . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Quelques définitions fondamentales</b>	<b>17</b>
4.1	Métrie en un point . . . . .	18
4.2	Longueur d'un segment . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Noyau de Delaunay généralisé</b>	<b>19</b>
5.1	Mesure de Delaunay . . . . .	20
5.2	Approche utilisant une seule métrie . . . . .	21
5.3	Approche utilisant deux métriques . . . . .	21
5.4	Approche utilisant quatre métriques . . . . .	22
5.5	Solution générale . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Définition des points internes</b>	<b>23</b>
6.1	Espace de contrôle . . . . .	23
6.1.1	Interprétation géométrique des métriques . . . . .	24
6.1.2	Interpolation sur un segment . . . . .	25
6.1.3	Interpolation dans un triangle . . . . .	28
6.1.4	Intersection de métriques . . . . .	31

6.2	Calcul de la longueur d'une arête . . . . .	32
6.3	Génération de points sur les arêtes . . . . .	34
6.4	Filtrage des points générés . . . . .	36
6.5	Insertion des points retenus . . . . .	38
<b>7</b>	<b>Optimisation</b> . . . . .	<b>39</b>
7.1	Qualité d'un triangle . . . . .	39
7.2	Bascule des arêtes . . . . .	41
7.3	Bougé de points . . . . .	42
	7.3.1 Bougé à longueur unité . . . . .	42
	7.3.2 Bougé à triangle optimal . . . . .	43
<b>8</b>	<b>Conclusions</b> . . . . .	<b>44</b>

## 1 Introduction

La résolution par la méthode des éléments finis d'un problème physique formulé en terme d'équations aux dérivées partielles s'appuie sur une discrétisation spatiale ou maillage du domaine étudié. De nombreuses méthodes permettent de construire, généralement à partir de la donnée de la frontière du domaine, un maillage de celui-ci.

L'adaptation locale des maillages à la physique des problèmes permet d'obtenir une meilleure précision des solutions calculées (voir par ex. [13] [14] [15] [16] [20]), en particulier il est ainsi possible de bien capter des évolutions rapides de la solution dans les zones de forte variation tout en conservant un nombre total de degrés de liberté raisonnable.

Un couplage des techniques de régularisation et de découpe locale des éléments du maillage permet d'envisager la construction de maillages adaptés à la physique des problèmes traités. Dans une première phase un maillage du domaine est construit par l'emploi de telle ou telle méthode puis un premier calcul de la solution du problème est effectué. Après choix d'un critère pertinent (gradient de la solution, champ dérivé, estimation d'erreurs, ...), on détecte dans le maillage initial les zones à adapter, par raffinement ou par déraffinement, et on génère un nouveau maillage mieux adapté au problème; ce processus est itéré jusqu'à l'obtention d'un maillage vérifiant le critère spécifié.

En dimension quelconque (en pratique en dimensions 2 et 3), la procédure de raffinement est bien maîtrisée (par ex. [1] [7] [12]) tandis que celle de déraffinement est loin d'être complètement résolue. Par suite, au lieu de cette approche basée sur des modifications locales nous proposons une méthode plus globale qui consiste à utiliser un mailleur automatique en le gouvernant par un critère. Le maillage est alors entièrement recréé à chaque itération en fonction des résultats obtenus à l'itération précédente. Le critère d'adaptation indique, en général, la taille souhaitée des éléments. Une généralisation de cette dernière est de considérer localement la taille, non pas dans la métrique habituelle, mais dans une métrique quelconque [18] permettant ainsi de considérer le cas anisotrope.

On se propose d'indiquer ce qu'il est possible de faire en suivant cette approche. Pour ce faire, on présente rapidement, section 2, les différentes étapes intervenant dans le schéma d'un mailleur classique de type Delaunay. En sec-



tion 3, on généralise le schéma classique au cas d'un mailleur gouverné; on donne d'abord les grandes étapes d'un tel schéma, étapes qui sont ensuite développées. Dans la section 4, on définit les notions de métrique et de longueur d'un segment dans un espace riemannien. Puis en section 5, on généralise la méthode de Delaunay, en insistant particulièrement sur les aspects de flexibilité présents qui permettent l'extension proposée. La définition des points internes fait l'objet de la section 6 tandis que la section 7 présente deux procédures d'optimisation de maillage. En conclusion, section 8, les extensions en trois dimensions ainsi que quelques problèmes ouverts sont indiqués.

## 2 Mailleur classique de Delaunay (Rappel)

De manière usuelle, les méthodes de maillage de type Delaunay construisent le maillage du domaine étudié à partir de la seule connaissance de son contour et plus spécialement d'une discrétisation de ce dernier. Le maillage d'un domaine (fermé) de  $R^2$  est donc basé uniquement sur des connaissances à caractère géométrique (la discrétisation de la frontière), indépendamment du problème que l'on veut résoudre. La taille tout comme la densité des éléments du maillage obtenu sont liées localement à la discrétisation de la frontière. A priori, cette donnée est la seule qui puisse raisonnablement gouverner le maillage du domaine. On se propose de rappeler le schéma classique d'un tel mailleur [2] partant de la donnée de l'ensemble des arêtes composant la discrétisation de la frontière du domaine.

### 2.1 Schéma du mailleur classique

Soient  $\Omega$  un domaine quelconque et  $F(\Omega)$  l'ensemble des arêtes discrétisant sa frontière. Ces arêtes, appelées *arêtes contraintes*, ont pour sommets un ensemble de points noté  $S(\Omega)$ .

Pour mailler le domaine  $\Omega$ , on construit dans un premier temps un *maillage frontalier* de  $\Omega$  qui (selon [9]) s'appuie uniquement sur les points de  $S(\Omega)$ , puis, en ajoutant des points à l'intérieur du maillage frontalier, on construit un nouveau maillage qui, après optimisation, donnera le maillage final de  $\Omega$ . Les points internes sont définis de telle manière qu'une arête interne du maillage ait une longueur satisfaisante. L'ensemble de ces étapes suit le schéma suivant

**Mailleur classique.**

1. Création du maillage frontalier  $T(S, F)$  de  $\Omega$ .
  - Génération d'un rectangle  $R(\Omega)$  englobant le domaine.
  - Maillage  $T(R)$  du rectangle  $R(\Omega)$ .
  - Insertion des points de  $S(\Omega)$  dans  $T(R)$  définissant le maillage  $T(R, S)$ .
  - Forçage des arêtes contraintes de  $F(\Omega)$  dans  $T(R, S)$  définissant le maillage  $T(R, S, F)$ .
  - Identification du maillage frontalier  $T(S, F)$  dans  $T(R, S, F)$ .
2. Création du maillage  $T(\Omega)$  de  $\Omega$ .
  - Initialisation du maillage  $T(\Omega)$  par  $T(S, F)$ .
  - Boucle de création de points internes.
    - Génération de points sur les arêtes internes de  $T(\Omega)$  selon un critère de longueur.
    - Insertion des points générés dans  $T(\Omega)$ .
    - Itération si  $T(\Omega)$  est modifié.
  - Optimisation de  $T(\Omega)$ .

Chacune des étapes de ce schéma est maintenant brièvement décrite. On montre en premier comment construire le maillage frontalier. Pour ce faire, on rappelle l'ingrédient de base de la méthode qui est le processus incrémental d'insertion d'un point dans un maillage ou *noyau de Delaunay*. On indique comment utiliser cet outil pour construire le maillage s'appuyant sur les points de  $S(\Omega)$  puis on montre comment contraindre les arêtes de  $F(\Omega)$  afin de construire le maillage cherché. Ensuite, on décrit la manière d'obtenir, à partir de ce maillage frontalier, le maillage final par création et insertion des points internes.

## 2.2 Création du maillage frontalier

### 2.2.1 Noyau de Delaunay

Le noyau de Delaunay est une procédure qui permet l'insertion d'un point interne à une triangulation (de Delaunay). La particularité de cette procédure est le fait qu'elle est basée sur un *critère de proximité*. Ce dernier, prenant en compte des longueurs, sera bien adaptés à la généralisation que nous proposons.

Dans un espace de dimension quelconque, muni de la métrique euclidienne habituelle, le noyau de Delaunay a été indépendamment proposé par Bowyer [5], Watson [19] et Hermeline [10]. En deux dimensions cet algorithme se traduit par (figure 1) le fait de remplacer la réunion des triangles dont le disque ouvert circonscrit contient le point à insérer, que l'on appelle *cavité* associée à ce point, par la *boule* constituée par les triangles formés en joignant ce point aux arêtes frontières de la cavité. Le résultat fondamental est que, d'une part, la cavité est un polygone étoilé par rapport au point considéré et que la triangulation du complémentaire de ce polygone est inchangée. L'algorithme se résume ainsi en

- l'évaluation de la cavité et
- la construction de la boule.

D'une manière formelle, le noyau de Delaunay s'écrit

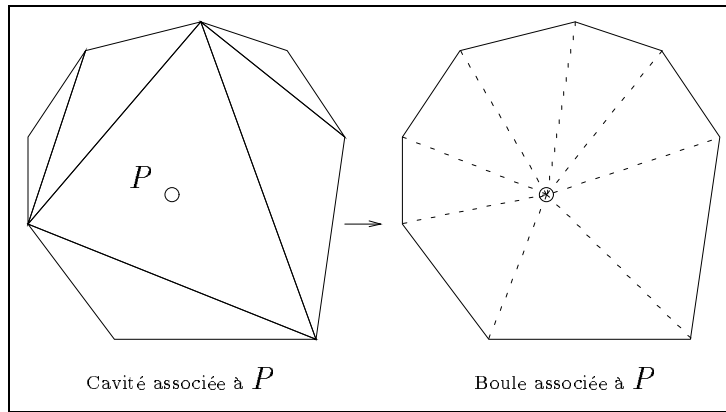
$$T = T - C(P) + B(P) \quad (1)$$

où  $C(P)$  est la cavité associée au point  $P$  traité et  $B(P)$  est la boule correspondante,  $T$  étant le maillage courant. La cavité  $C(P)$  est construite via le critère de proximité qui s'exprime comme

$$\{K, K \in T, \quad \text{tel que } P \in Disc(K)\} \quad (2)$$

où  $Disc(K)$  est le disque ouvert circonscrit à l'élément  $K$ .

Une implémentation robuste et efficace de cette algorithme a été proposée par Borouchaki et al dans [3].

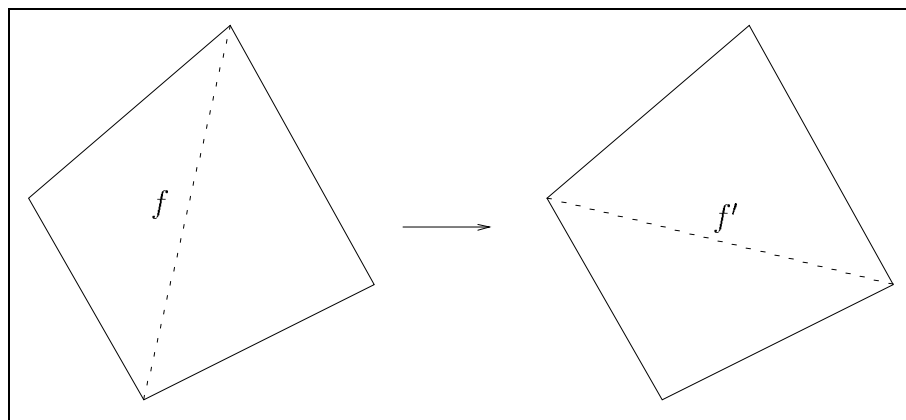
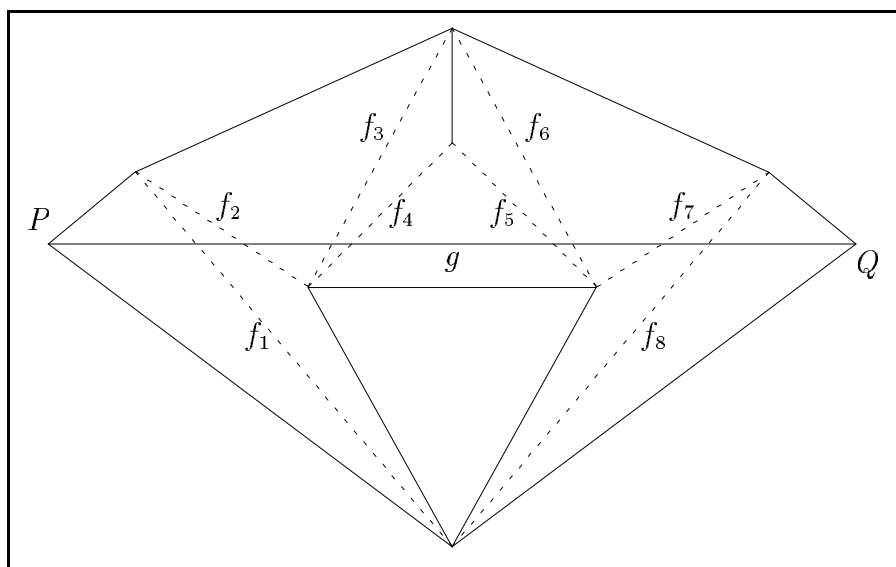
FIG. 1 - *Noyau de Delaunay.*

### 2.2.2 Maillage du rectangle englobant

L'introduction d'un rectangle englobant le domaine permet d'avoir un environnement convexe englobant tous les points frontières, permettant d'utiliser le noyau de Delaunay ci-dessus. Ce rectangle est défini par quatre points et son maillage  $T(R)$  est formé par deux triangles. Les points de  $S(\Omega)$  sont insérés dans  $T(R)$  en utilisant le noyau de Delaunay. Le maillage  $T(R, S)$  ainsi obtenu s'appuie sur les quatre sommets du rectangle englobant le domaine ainsi que sur les extrémités des arêtes de  $F(\Omega)$ . Ces dernières ne sont pas en général incluses dans ce maillage. Par suite, on propose un algorithme basé sur des modifications locales pour intégrer ces arêtes dans  $T(R, S)$ .

### 2.2.3 Modification topologique locale

Soit  $T$  un maillage. Soient 2 triangles de  $T$ , adjacents par une arête  $f$ , dont la réunion est un polygone convexe; la *bascule* [11] appliquée à l'arête  $f$  est le remaillage de ce polygone en créant l'arête  $f'$  formée par les 2 sommets opposés à l'arête  $f$  et en supprimant cette dernière (figure 2). Une telle bascule permet donc de modifier localement la topologie d'une triangulation.

FIG. 2 - *Bascule appliquée à f.*FIG. 3 -  $\tau(g) = \bigcup_{1 \leq i \leq 8} f_i.$

### 2.2.4 Forçage des arêtes contraintes

Soit  $g = [P, Q]$  un segment. On note par  $\tau(g)$  l'ensemble des arêtes de  $T$  intersectant l'intérieur de  $g$  (c.a.d.  $g - \{P, Q\}$ ) (figure 3). Pour déterminer  $\tau(g)$ , on recherche d'abord l'un des triangles qui contient  $P$  comme sommet, puis par adjacence, à partir de ce triangle, on cherche le triangle contenant  $P$  comme sommet et possédant une arête intersectant  $g$ . A partir de ce dernier on complète  $\tau(g)$ , par adjacence via les arêtes intersectant  $g$ .

L'algorithme de forçage des arêtes contraintes est basé sur des bascules (cf. ci-dessus) appliquées d'une manière aléatoire, il a pour schéma

#### Forçage des arêtes contraintes.

- Boucle sur toutes les arêtes de  $F(\Omega)$ .
  - Soient  $g$  une arête de  $F(\Omega)$  et  $\tau(g)$  l'ensemble correspondant dans  $T(R, S)$ .
  - Tant que  $\tau(g)$  est non vide, appliquer des bascules d'une manière aléatoire aux arêtes de  $\tau(g)$  dans  $T(R, S)$ .

La convergence de cet algorithme est garantie grâce aux 2 théorèmes suivants [8][17]

**Théorème 1.** *Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux triangulations différentes d'un nuage de points. On peut transformer  $T_1$  en  $T_2$  en utilisant des bascules.*

**Théorème 2.** *On peut toujours trianguler un polygone simple sans ajout de point supplémentaire.*

### 2.2.5 Identification du maillage frontalier

Une fois les arêtes contraintes intégrées dans  $T(R, S)$  on obtient le maillage  $T(R, S, F)$ . Pour définir le maillage  $T(S, F)$  du domaine, on identifie son complémentaire dans  $T(R, S, F)$ . Ce dernier est identifié dans une recherche par

adjacence par une arête non contrainte, à partir d'un triangle possédant l'un des sommets du rectangle englobant. En d'autres termes, on caractérise ici l'intérieur de  $\Omega$ .

### 2.3 Création du maillage de $\Omega$

A ce stade on dispose d'un maillage  $T(S, F)$  du domaine. Pour créer  $T(\Omega)$ , le maillage cherché, on génère d'une manière itérative des points à l'intérieur du domaine. A l'étape initiale le maillage  $T(\Omega)$  du domaine est initialisé par  $T(S, F)$ . A chaque itération, les arêtes internes du maillage sont examinées et les points internes

- sont générés sur ces arêtes de telle manière qu'elles soient subdivisées en des segments de *longueur idéale* et qu'ils ne soient pas à une distance inférieure à la distance idéale des autres points déjà présents et
- sont insérés dans  $T(\Omega)$  via le noyau de Delaunay *contraint*.

Ce procédé est itéré si  $T(\Omega)$  est modifié.

Il nous reste à définir la distance idéale de deux points connaissant la taille souhaitée des éléments en chaque point et le noyau de Delaunay contraint.

Soient  $(P, Q)$  un couple de points,  $h_P$  (resp.  $h_Q$ ) la taille souhaitée au point  $P$  (resp.  $Q$ ) et  $h(t)$  une fonction continue monotone, indiquant la variation en taille sur le segment  $[P, Q]$ , et vérifiant  $h(0) = h_P$  et  $h(1) = h_Q$ . La longueur  $l(P, Q)$  du segment  $[P, Q]$  est idéale par rapport à  $h(t)$  si et seulement si (selon [4])

$$l(P, Q) = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt} \quad (3).$$

La fonction  $h(t)$  est une fonction d'interpolation de tailles à l'intérieur du domaine. La taille souhaitée en chaque point frontière est calculée comme la moyenne des longueurs des arêtes frontières incidentes en ce point. La taille en chaque point interne est définie à partir de la fonction d'interpolation  $h(t)$  associée à l'arête support du point.

Le noyau de Delaunay contraint est une restriction du noyau usuel empêchant de supprimer une arête contrainte.

Une variante de la procédure de création des points internes consiste à prendre en compte les variations de taille les plus significatives à l'intérieur du domaine. Pour cela on peut subdiviser les arêtes supports des points internes, dans l'ordre croissant de leur longueur. En effet la variation de taille à l'intérieur du domaine est plus significative sur des arêtes de longueur assez petite. De même si la longueur d'une arête est trop grande par rapport à sa longueur idéale, on peut la subdiviser uniquement en deux segments en générant uniquement un point. En effet dans ce cas la variation de taille sur l'arête n'est pas toujours significative.

La procédure d'optimisation permet d'améliorer la qualité des éléments obtenus. Pour cela on utilise les bascule d'arêtes et le bougé de points. Ces deux procédures, dépendant de la notion de qualité associée à un triangle, sont décrites dans un cadre plus général à la section 7.

### 3 Schéma d'un mailleur gouverné

On suppose maintenant que nous sommes dans le cas d'un calcul mené au sein d'un processus adaptatif. Celui-ci consiste à

- construire un maillage initial
- calculer la solution correspondante
- utiliser un estimateur d'erreur
- en déduire l'adéquation ou non du maillage actuel et
  - si le maillage actuel est stable, fin;
  - sinon, traduire les résultats de l'estimateur en une *carte de spécifications* ou *carte de métriques* permettant de construire un nouveau maillage adapté puis itérer le processus.

Ainsi, une première résolution du problème (avec un maillage généré par la méthode classique décrite ci-dessus) fournit via un estimateur la taille souhaitée des éléments en chaque sommet de ce maillage (initial). Plus formellement,



en chaque sommet de ce maillage, est spécifiée une *métrique* dans laquelle la taille souhaitée est égale à l'unité [18]. Ceci change sensiblement le problème de génération de maillage et par conséquent les algorithmes à mettre en jeu car, dans ce cas, le mailleur doit être conçu de manière à produire un maillage satisfaisant vis-à-vis du champ de métriques spécifié. En bref, cette requête nécessite

- la généralisation de la notion de taille souhaitée qui peut ainsi être différente suivant les directions et
- la normalisation des longueurs idéales du schéma classique à l'unité pour l'espace de métriques considéré.

En considérant le champ “discret” de métriques et en *interpolant* la métrique en tout point où celle-ci n'est pas spécifiée, on obtient une structure riemannienne dans le domaine. Pour ce faire, on utilise le maillage initial qui est un recouvrement conforme du domaine  $\Omega$  par des triangles et pour tout point  $X$  de  $\Omega$ , il existe un triangle du maillage initial le contenant, alors la métrique en  $X$  est définie à partir d'un schéma d'interpolation convenable prenant en compte les sommets de cet élément.

Le domaine muni de cette structure est appelé *espace de contrôle*. Un maillage *parfait* du domaine est celui dont chaque élément est équilatéral dans cet espace.

Ainsi, le problème est de généraliser l'approche classique présentée dans la section précédente pour permettre la construction d'un maillage (presque) parfait du domaine par rapport à l'espace de contrôle. Le maillage du domaine comprend deux phases

1. le maillage de la frontière de  $\Omega$  et
2. le maillage de  $\Omega$  s'appuyant sur le maillage de sa frontière,

dans l'espace de contrôle.

Le maillage gouvernée de la frontière, étape nouvelle par rapport au cas classique, nécessite de disposer d'une représentation manipulable de la géométrie de cette dernière (section 3.1) tandis que le maillage du domaine s'appuie sur une généralisation du noyau de Delaunay et sur la création de points internes basées sur une définition adéquate des longueurs liée à l'espace de contrôle (section 3.2).

### 3.1 Maillage de la frontière

Il est commode de faire l’hypothèse que la géométrie du domaine est correctement décrite via une discrétisation (suffisamment fine) de sa frontière. Cette discrétisation est un maillage, noté  $T_{geom}$ , qui permet de construire un support, noté  $Supp_{geom}$ , à l’aide d’une représentation mathématique adéquate [4].

Il faut remarquer à ce stade que dans le cas classique le mailleur n’a pas besoin, stricto sensu, de  $T_{geom}$  ni de  $Supp_{geom}$  puisqu’il ne se sert que de la discrétisation de la frontière fournie (les arêtes contraintes) et n’a pas à “manipuler” la frontière. Ici, comme on veut créer un maillage adapté, on a besoin de mailler la frontière donc on a strictement besoin de connaître sa définition géométrique.

D’un point de vue pratique si  $T_{geom}$  n’est pas connu, on identifie ce dernier à  $F(\Omega)$ , l’ensemble des arêtes décrivant la frontière de  $\Omega$  donné initialement.

Tout maillage gouverné de la frontière est alors une discrétisation de  $Supp_{geom}$  qui consiste à le subdiviser en des segments de *longueur d’arc unité* dans l’espace de contrôle. Pour cela on peut approcher le support par un segment polygonal, puis subdiviser le segment polygonal en des segments polygonaux de longueur un (voir [4] pour une description détaillée).

### 3.2 Maillage du domaine

Pour obtenir le maillage du domaine associé à l’espace de contrôle, il suffit d’appliquer le schéma classique en utilisant comme donnée le maillage de la frontière obtenu ci-dessus et en

- généralisant le noyau de Delaunay au cas d’un espace riemannien (section 5),
- remplaçant la longueur idéale par la *mesure unité* de l’espace de contrôle pour créer les points internes (section 6) et
- en généralisant la notion de qualité associée à un triangle à un espace riemannien (section 7).

### 3.3 Schéma du mailleur

En conséquence, le schéma de maillage gouverné par un espace de contrôle s'écrit comme

#### Schéma du mailleur gouverné.

- Maillage de la frontière du domaine.
  - Discrétisation des contours en des segments de longueur d'arc unité dans l'espace de contrôle.
- Maillage du domaine.
  - Maillage frontalier du domaine défini par l'insertion des points frontières et l'intégration des arêtes contraintes dans le maillage du rectangle englobant.
  - Génération et insertion des points internes.
    - Calcul de la longueur des arêtes du maillage courant dans l'espace de contrôle.
    - Subdivision des arêtes de longueur plus grande que "un" (de l'espace de contrôle) en générant des points sur celles-ci (si ces points ne sont pas à une distance inférieure à un des autres points déjà retenus),
    - Insertion des points générés dans le maillage courant.
    - Itération si le maillage courant est modifié.
- Optimisation.

Ce cadre permet aisément de construire une boucle d'adaptation. Pour cela il suffit à chaque itération, de définir l'espace de contrôle correspondant. L'espace de contrôle à l'itération  $i$  est défini par le maillage adapté du domaine à l'étape  $i - 1$  et par une carte de métriques spécifiée en chaque sommet de ce maillage. On obtient alors le schéma d'adaptation suivant

**Schéma d'adaptation.**

- Donnée de  $T_{geom}$ , le maillage servant à définir la géométrie et construction du support  $Supp_{geom}$ .
- Construction de la discrétisation initiale  $F_0$  de la frontière gouvernée par une carte de tailles  $H_0$  donnée sur  $Supp_{geom}$ .
- Maillage initial  $T_0$  s'appuyant sur  $F_0$  et gouverné par  $H_0$ .
- Boucle d'adaptation démarrant à  $i = 1$ .
  - Donnée d'une carte de métriques  $H_i$  sur  $T_{i-1}$ .
  - Discrétisation  $F_i$  du support  $Supp_{geom}$  gouvernée par l'espace de contrôle  $(T_{i-1}, H_i)$ .
  - Maillage adapté  $T_i$  s'appuyant sur  $F_i$  et gouverné par l'espace de contrôle  $(T_{i-1}, H_i)$ .
  - Itération en incrémentant  $i$ , si nécessaire.

Le schéma ci-dessus est en général itéré jusqu'à l'obtention d'un maillage  $T_i$  qui sera (presque) parfait dans l'espace de contrôle  $(T_i, H_{i+1})$ . En d'autres termes, les arêtes de  $T_i$  auront une longueur (presque) égale à l'unité dans l'espace de contrôle  $(T_i, H_{i+1})$ . Notons que ce critère d'arrêt ne dépend que de la carte de métriques spécifiée en entrée et que d'autres critères peuvent également s'ajouter à ce dernier ou même le remplacer.

## 4 Quelques définitions fondamentales

Dans cette courte section on se propose de rappeler la définition d'une métrique (notion propre aux espaces riemanniens), ainsi que la définition de la longueur d'un segment dans un espace riemannien, ces notions étant à la base des algorithmes proposés.

## 4.1 Métrique en un point

La métrique ou le tenseur métrique en tout point  $X$  du domaine  $\Omega$  est la donnée en  $X$  d'une matrice symétrique définie positive

$$\mathcal{M}(X) = \begin{pmatrix} a_X & b_X \\ b_X & c_X \end{pmatrix}$$

avec  $a_X > 0$ ,  $c_X > 0$  et  $a_X c_X - b_X^2 > 0$ .

Le champ des métriques  $(\mathcal{M}(X))_{X \in \Omega}$  définit une structure riemannienne sur  $\Omega$ . Ce dernier muni de cette structure est désigné par  $(\Omega, (\mathcal{M}(X))_{X \in \Omega})$ . Dans le cas particulier où pour tout point  $X$  du domaine la métrique est identique, la structure riemannienne est une structure euclidienne; dans ce cas  $\Omega$  muni de cette structure est désigné par  $(\Omega, \mathcal{M}(X))$ , où  $X$  est un point quelconque du domaine ou simplement par  $(\Omega, \mathcal{M})$ .

## 4.2 Longueur d'un segment

Dans l'espace riemannien  $(\Omega, (\mathcal{M}(X))_{X \in \Omega})$ , la longueur d'un segment  $[P, Q] = (P + t\overrightarrow{PQ})_{0 \leq t \leq 1}$  de  $\Omega$  est donnée par la relation

$$l(P, Q) = \int_0^1 \sqrt{{}^t\overrightarrow{PQ} \mathcal{M}(P + t\overrightarrow{PQ}) \overrightarrow{PQ}} dt \quad (4)$$

où  $\overrightarrow{PQ}$  est le vecteur colonne d'origine  $P$  et d'extrémité  $Q$ , et  $\mathcal{M}(P + t\overrightarrow{PQ})$  est la métrique au point  $P + t\overrightarrow{PQ}$  du segment.

En posant  $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  et  $\mathcal{M}(P + t\overrightarrow{PQ}) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}$ , on obtient

$$l(P, Q) = \int_0^1 \sqrt{a(t)u_1^2 + 2b(t)u_1u_2 + c(t)u_2^2} dt.$$

Dans le cas particulier de l'espace euclidien défini par  $(\Omega, \mathcal{M})$ , en posant  $\mathcal{M}(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ , on obtient

$$l(P, Q) = \sqrt{au_1^2 + 2bu_1u_2 + cu_2^2} \quad (5).$$

## 5 Noyau de Delaunay généralisé

La clé du noyau de Delaunay est la définition correcte de la cavité (cf. (1) et (2)) associée au point en cours de traitement. L'évaluation de la cavité, qui est la seule opération à utiliser des calculs de longueurs, doit être généralisée au cas d'un espace riemannien.

La cavité, dans le cas classique, peut être évaluée à partir de la *base*, ensemble des triangles qui contiennent le point à insérer, complétée par adjacence par les triangles à disques ouverts circonscrits contenant le point à insérer. La cavité, définie de la sorte, est connexe quelque soit les erreurs d'arrondis intervenant dans la décision d'appartenance du point au disque ouvert circonscrit associé à un triangle. Ces disques sont évalués dans la métrique euclidienne habituelle. C'est ce critère de proximité qu'il convient de généraliser au cas d'un espace riemannien.

Soient  $K = [P_1, P_2, P_3]$  un triangle du maillage courant et  $P$  le point interne à insérer, le problème que l'on se pose est de décider si le triangle  $K$  appartient à la cavité associée au point  $P$ . Remarquons déjà qu'une réponse positive impliquera que les arêtes  $([P, P_i])_{1 \leq i \leq 3}$  seront dans la boule associée au point  $P$  et par conséquent seront formées.

Le problème est donc de trouver le critère de proximité nécessaire à la construction de la cavité. La solution générale de ce problème, comme on le verra par la suite, est très difficile à trouver car la métrique varie d'un point à un autre. Pour cette raison, on va d'abord explorer quelques solutions approchées. La plus simple consiste à approcher l'espace riemannien par un espace euclidien dont la métrique est celle du point  $P$  qui est un choix naturel (cf. section 5.2). La seconde solution résulte de la remarque ci-dessus et conduit à prendre en compte deux espaces euclidiens, le premier lié au point  $P$  et le second lié au sommet de l'élément  $K$  n'appartenant pas encore à la cavité

(cf. section 5.3). Une troisième solution approchée consiste à se baser sur les 4 points en présence, le point  $P$  et les trois sommets du triangle  $K$  examiné (cf. section 5.4).

Afin d'obtenir ces solutions, on va d'abord, section 5.1, définir localement le critère de proximité via une mesure relative à une métrique, la *mesure de Delaunay*.

## 5.1 Mesure de Delaunay

Soit  $Z$  un point quelconque de  $\Omega$ , considérons l'espace  $(\Omega, \mathcal{M}(Z))$  et notons par  $l^Z$ , la distance entre deux points de  $\Omega$  dans cet espace. Le disque circonscrit au triangle  $K$  de centre  $O$  est défini dans cet espace par

$$(l^Z(O, X))^2 = {}^t\overrightarrow{OX}\mathcal{M}(Z)\overrightarrow{OX} = k^2$$

où  $X \in R^2$  et  $k$  est un réel défini de telle manière que le disque soit circonscrit au triangle  $K$ . Le centre  $O$  de ce disque vérifie ainsi le système linéaire

$$\begin{cases} l^Z(O, P_1) = l^Z(O, P_2) \\ l^Z(O, P_1) = l^Z(O, P_3), \end{cases}$$

et on a  $k = l^Z(O, P_1)$ .

Le disque circonscrit au triangle  $K$  contient le point  $P$  si et seulement si

$$l^Z(O, P) < l^Z(O, P_1),$$

et dans ce cas on dit que le critère de Delaunay associé au couple  $(P, K)$  est violé par rapport à la métrique du point  $Z$ . En normalisant à un l'inéquation ci-dessus on obtient une mesure sans dimension définie par

$$\alpha_Z(P, K) = \frac{l^Z(O, P)}{l^Z(O, P_1)}.$$

La violation du critère de Delaunay associé au couple  $(P, K)$  par rapport à la métrique de  $Z$  est traduite par  $\alpha_Z(P, K) < 1$ . Le coefficient  $\alpha_Z(P, K)$  est appelé mesure de Delaunay du triplet  $(P, K, Z)$ .

## 5.2 Approche utilisant une seule métrique

Avec cette notion de mesure, on considère le cas où le critère de Delaunay dépend uniquement de la métrique d'un point,  $P$ , le point à insérer. C'est l'approche la plus simple. Le triangle  $K$  appartient à la cavité si

$$\alpha_P(P, K) < 1 \quad (6).$$

Il est évident de vérifier que la cavité ainsi définie reste étoilée par rapport à  $P$  car les disques circonscrits intervenant sont convexes et que la cavité est construite par adjacence via une arête divisant ces disques en deux parties disjointes. Par suite,

- ce choix donne une solution valide,
- cette solution n'est cependant qu'une approximation grossière (dans la mesure où un espace riemannien est approché localement par un espace euclidien) comme nous l'avons vérifié par des tests numériques.

## 5.3 Approche utilisant deux métriques

Une analyse plus détaillée du processus de construction de la cavité montre qu'il existe au moins un triangle de la cavité adjacent à  $K$ . Soient alors  $f$  l'arête commune et  $P_j$  le sommet de  $K$  vérifiant  $K = [f, P_j]$ , en raisonnant sur la construction des arêtes de la boule associée à  $P$ , on peut dire que si  $K$  appartient à la cavité alors l'arête  $[P, P_j]$  sera formée. Il est naturel de prendre en compte, dans le critère de proximité la métrique du point  $P$  et celle de ce point  $P_j$ . Ainsi, le triangle  $K$  appartient à la cavité si

$$\alpha_P(P, K) + \alpha_{P_j}(P, K) < 2 \quad (7).$$

Vérifier que la cavité ainsi définie reste étoilée par rapport à  $P$  se démontre comme dans ce cas précédent. Par suite,

- ce choix donne également une solution valide,
- cette solution est une approximation meilleure car la violation du critère de Delaunay est jugée par rapport à deux métriques, celle du point à insérer  $P$  et celle du sommet de  $K$  défini ci-dessus.



## 5.4 Approche utilisant quatre métriques

C'est la solution approchée la plus riche. Dans ce cas on considère quatre métriques, celle du point  $P$  à insérer et celles des trois sommets du triangle  $K$  examiné. Le critère de Delaunay est non valide pour le triangle  $K$  si

$$\alpha_P(P, K) + \alpha_{P_1}(P, K) + \alpha_{P_2}(P, K) + \alpha_{P_3}(P, K) < 4 \quad (8).$$

On a la même conclusion que pour le cas avec deux métriques. L'expérimentation montre néanmoins qu'il n'y a pas de différences significatives avec le cas précédent pour un coût deux fois supérieur.

## 5.5 Solution générale

On indique maintenant ce que serait la vraie solution au problème. Le critère de proximité s'écrit

$$l(O, P) < l(O, P_1)$$

où  $O$  est solution du système *non linéaire*

$$\begin{cases} l(O, P_1) = l(O, P_2) \\ l(O, P_1) = l(O, P_3). \end{cases}$$

Malheureusement, nous n'avons pas plus établi l'existence d'un point  $O$  solution du système ci-dessus. On peut alors "adoucir" la difficulté en considérant pour le point  $O$  le système

$$\begin{cases} l^{P_1}(O, P_1) = l^{P_2}(O, P_2) \\ l^{P_1}(O, P_1) = l^{P_3}(O, P_3) \end{cases}$$

et comme critère de Delaunay

$$l^P(O, P) < l^{P_1}(O, P_1).$$

Pour cette approche, on n'a de même pas pu garantir l'existence d'une solution unique pour le système ainsi défini.

## 6 Définition des points internes

La création de points internes est une étape très importante du processus de maillage. Il convient d'en construire le bon nombre et de les placer correctement. Les points internes devront être définis de telle manière que toutes les arêtes du maillage du domaine aient une longueur égale à l'unité de l'espace de contrôle.

On propose, comme dans le schéma classique, une procédure itérative où, à chaque itération, les points sont générés sur les arêtes internes du maillage courant, le maillage initial étant le maillage frontalier du domaine. Ainsi à l'itération  $i$ , les arêtes du maillage de domaine de l'itération  $i - 1$  constituent les supports des points internes. Les points sont générés sur les arêtes de telle manière qu'ils les subdivisent en des segments de longueur un. Chaque point généré est retenu pour l'insertion s'il n'est pas situé à une distance inférieure à un d'un point déjà retenu pour l'insertion.

La génération, le *filtrage* et l'insertion des points sont gouvernés par l'espace de contrôle. Ce dernier est une structure riemannienne définie sur le domaine qui permet le calcul de la longueur d'une arête du domaine ou la distance entre deux points du domaine. Par la suite on développe en détail la structure riemannienne de l'espace de contrôle (section 6.1) ainsi que les différentes procédures intervenant dans la définition des points internes (sections 6.2 et 6.3).

### 6.1 Espace de contrôle

L'espace de contrôle est défini à partir d'un *maillage de fond* du domaine et d'une carte de métriques en chaque sommet de ce maillage. Pour le premier maillage gouverné du domaine, le maillage de fond est le maillage classique. Dans une boucle d'adaptation le maillage de fond à l'itération  $i$  est le maillage du domaine de l'itération  $i - 1$ . La structure riemannienne de l'espace de contrôle est définie d'une manière explicite en chaque sommet du maillage de fond et d'une manière implicite pour les autres points du domaine. En effet, si  $X$  est un point du domaine,

- soit  $X$  est sommet du maillage de fond, alors la métrique en  $X$  existe dans la carte de métriques,

- soit  $X$  appartient à un triangle du domaine et la métrique en  $X$  est définie par interpolation des métriques des sommets de ce triangle.

La carte de métriques est un ensemble fini de matrices définies positives d'ordre 2. Ces matrices représentent localement la taille et la forme souhaitée des éléments. Pour justifier notre choix d'interpolation de métriques, on rappelle d'abord l'interprétation géométrique des métriques.

### 6.1.1 Interprétation géométrique des métriques

Dans le cas particulier, *isotrope*, la métrique est définie par  $\lambda I_2$ , où  $I_2$  est la matrice identité d'ordre 2 et  $\lambda$  est un réel strictement positif. On peut interpréter cette métrique à partir d'une valeur  $h$  indiquant la taille souhaitée des éléments suivant toutes les directions. Dans le plan euclidien muni de cette métrique, le cercle unité centré à l'origine est un cercle de rayon  $h$  du plan euclidien muni de la métrique habituelle; ce cercle est défini par

$$\phi(X) = x_1^2/h^2 + x_2^2/h^2 = 1$$

où  $X$  est le point de coordonnées  $(x_1, x_2)$ . On en déduit la relation liant  $\lambda$  et  $h$

$$\lambda = \frac{1}{h^2}.$$

Dans le cas général, *anisotrope*, la métrique est définie par une matrice symétrique définie positive d'ordre 2

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

et le cercle unité centré à l'origine dans le plan euclidien associé à cette métrique est une ellipse définie par l'équation

$$\phi(X) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2,$$

dans le plan euclidien habituel. Cette équation s'écrit dans la base associée aux axes principaux de l'ellipse

$$\phi'(Y) = y_1^2/h_1^2 + y_2^2/h_2^2 = 1;$$

en effet la matrice  $\mathcal{M}$  est symétrique définie positive, donc diagonalisable dans  $R^2$  et on a

$$\mathcal{M} = \mathcal{P} \Lambda \mathcal{P}^{-1},$$

où  $\mathcal{P}$  est une matrice orthogonale ( $\mathcal{P}^{-1} = {}^t\mathcal{P}$ ) dont chaque colonne est un vecteur propre de  $\mathcal{M}$  et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

où  $(\lambda_1, \lambda_2)$  sont les valeurs propres de  $\mathcal{M}$ . Si  $\theta$  est l'angle compris entre l'axe principal de l'ellipse associé à la valeur propre  $\lambda_1$  et l'axe des abscisses alors  $\mathcal{P}$  est la matrice de rotation  $\mathcal{R}(\theta)$  d'angle  $\theta$  et on a

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

En substituant  $X$  par  $\mathcal{P}Y$  dans  $\phi(X)$ , on obtient

$$\phi(X) = {}^tX\mathcal{M}X = {}^tY{}^t\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{P}Y = {}^tY\Lambda Y = \phi'(Y);$$

la dernière égalité résulte du fait que les valeurs propres  $(\lambda_1, \lambda_2)$  sont toutes positives et qu'ils existent les réels positifs  $(h_1, h_2)$  tels que  $\lambda_1 = 1/h_1^2$  et  $\lambda_2 = 1/h_2^2$ .

Remarquons que la valeur  $h_1$  (resp.  $h_2$ ) dans la métrique euclidienne habituelle, représente la longueur unité dans la métrique  $\mathcal{M}$  suivant l'axe du vecteur propre associé à  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_2$ ). La figure 4 montre le cercle unité associé à la métrique correspondant à  $h_1 = 2.5$ ,  $h_2 = 1$  et  $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$  ( $\theta = \pi/6$ ).

### 6.1.2 Interpolation sur un segment

On se pose le problème suivant : comment interpoler la métrique sur un segment, connaissant les métriques aux extrémités ou encore *ayant deux ellipses  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , définir une fonction qui permet de passer de l'une à l'autre d'une manière continue et monotone en terme de tailles.*

La solution est immédiate dans le cas isotrope. En effet si la première métrique est définie par  $\lambda I_2$  et la seconde par  $\mu I_2$ , la taille souhaitée pour

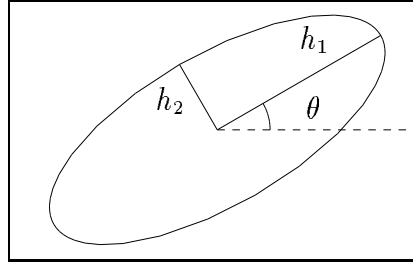


FIG. 4 - Cercle unité, cas anisotrope.

la première est  $h_1 = 1/\sqrt{\lambda}$  et pour la deuxième,  $h_2 = 1/\sqrt{\mu}$ , la fonction d'interpolation, dans le cas d'une progression arithmétique (pour la taille), est définie par

$$\mathcal{M}(t) = \frac{1}{(h_1 + t(h_2 - h_1))^2} I_2 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (9),$$

avec  $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}(1) = \mathcal{M}_2$ .

On peut aussi considérer d'autres types de progressions, géométrique, sinusoidale, etc.

Dans le cas anisotrope plusieurs approches sont possibles qui sont exposées maintenant.

**Interpolation suivant une puissance des matrices.** On se réfère au cas isotrope où une métrique s'écrit dans le cas général  $\mathcal{M} = \frac{1}{h^2} I_2$ ; on en déduit alors que les variations de  $h$  sont "équivalentes" aux variations de  $\mathcal{M}^{-1/2}$ . Ainsi on obtient l'interpolation suivante

$$\mathcal{M}(t) = \left( (1-t)\mathcal{M}_1^{-1/2} + t\mathcal{M}_2^{-1/2} \right)^{-2} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (10).$$

Le calcul de  $\mathcal{M}^{-1/2}$  oblige à évaluer les valeurs propres de  $\mathcal{M}$ . Pour s'en passer on peut considérer l'interpolation

$$\mathcal{M}(t) = \left( (1-t)\mathcal{M}_1^{-1} + t\mathcal{M}_2^{-1} \right)^{-1} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (11),$$

en notant que cette dernière privilégie les tailles les plus petites.

Le schéma d'interpolation suivant une puissance des métriques est bien défini, en effet

- si  $\mathcal{M}$  est une métrique alors  $t\mathcal{M}^\alpha$  est une métrique, où  $t > 0$  et  $\alpha$  sont deux réels quelconques;
- si  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont deux métriques,  $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$  est une métrique.

Il suffit de constater que, dans les deux cas, la matrice résultante est symétrique définie positive.

Ces schémas ne sont pas tout à fait satisfaisant dans la mesure où les variations en  $h$  ne sont pas contrôlées explicitement. La solution suivante permet de contrôler ces  $h$  selon deux directions.

**Réduction simultanée des matrices.** On considère la réduction simultanée des deux métriques (qui sont des formes quadratiques), et on se ramène au cas isotrope. En effet la réduction simultanée des deux formes fournit une base dans laquelle ces deux formes sont définies par des matrices diagonales.

Soient  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  deux métriques quelconques. Considérons la matrice  $\mathcal{N} = \mathcal{M}_1^{-1}\mathcal{M}_2$ . Cette matrice est  $\mathcal{M}_1$ -symétrique, donc diagonalisable dans  $R^2$ . Soient  $(e_1, e_2)$  les vecteurs propres de  $\mathcal{N}$  définissant une base de  $R^2$ , alors

$${}^t e_1 \mathcal{M}_1 e_2 = {}^t e_1 \mathcal{M}_2 e_2 = 0.$$

Soit  $X = x_1 e_1 + x_2 e_2$  un vecteur quelconque de  $R^2$  muni de la base  $(e_1, e_2)$ ; posons  $(\lambda_i = {}^t e_i \mathcal{M}_1 e_i)_{1 \leq i \leq 2}$  et  $(\mu_i = {}^t e_i \mathcal{M}_2 e_i)_{1 \leq i \leq 2}$ ; par définition pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq 2$ ,  $\lambda_i > 0$ ,  $\mu_i > 0$  et on a

$${}^t X \mathcal{M}_1 X = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \quad \text{et} \quad {}^t X \mathcal{M}_2 X = \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2.$$

Soient  $(h_{1,i} = 1/\sqrt{\lambda_i})_{1 \leq i \leq 2}$  et  $(h_{2,i} = 1/\sqrt{\mu_i})_{1 \leq i \leq 2}$ . La valeur  $h_{1,i}$  (resp.  $h_{2,i}$ ) représente la longueur unité dans la métrique  $\mathcal{M}_1$  (resp.  $\mathcal{M}_2$ ) suivant l'axe  $e_i$ . L'interpolation des métriques entre  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  est définie par

$$\mathcal{M}(t) = {}^t \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} 1/h_1^2(t) & 0 \\ 0 & 1/h_2^2(t) \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (12),$$

où  $\mathcal{P}$  est la matrice formée par les vecteurs colonnes  $(e_1, e_2)$  et  $(h_1(t), h_2(t))$  sont des fonctions monotones continues telles que  $h_i(0) = h_{1,i}$  et  $h_i(1) = h_{2,i}$  pour  $1 \leq i \leq 2$ . Dans la pratique on peut considérer les deux fonctions d'interpolation

- $h_i(t) = h_{1,i} + t(h_{2,i} - h_{1,i})$  (progression arithmétique),
- $h_i(t) = h_{1,i}(h_{2,i}/h_{1,i})^t$  (progression géométrique).

Remarquons que cette interpolation est contrôlée uniquement suivant les axes  $(e_1, e_2)$ . Pour illustrer ce procédé, on considère l'exemple montré sur les figures 5 et 6 (resp. 7 et 8) montrant les deux métriques initiales, les métriques interpolées et les courbes d'interpolation en terme de  $h$ , dans le cas d'une progression arithmétique (resp. géométrique), suivant des différentes droites y compris les axes  $e_1$  et  $e_2$ .

### 6.1.3 Interpolation dans un triangle

Pour interpoler sur un triangle, il suffit de généraliser les schémas d'interpolation sur un segment. Soient  $X$  un point appartenant à un triangle  $K = [P_1, P_2, P_3]$  et  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq 3}$  les coordonnées barycentriques de  $X$  dans  $K$ . On obtient, par exemple dans le cas anisotrope avec le schéma d'interpolation  $\mathcal{M}^{-1/2}$ ,

$$\mathcal{M}(X) = \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathcal{M}(P_i)^{-1/2} \right)^{-2}.$$

Pour le schéma d'interpolation par réduction simultannée des matrices, il n'y a pas associativité. Pour lever cette difficulté, on considère un ordre global pour les points du maillage, on ordonne les sommets de  $K$  suivant cet ordre et on applique le schéma suivant cet ordre. Supposons que les sommets de  $K$  soient déjà ordonnés, c'est-à-dire  $P_1 < P_2 < P_3$ , où  $<$  représente l'ordre. Il existent deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  et un point  $P_3^*$  tels que

$$P_3^* = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2 \quad \text{et} \quad X = (1 - \beta)P_3^* + \beta P_3;$$

le schéma est appliqué d'abord sur le segment  $[P_1, P_2]$  pour interpoler la métrique en  $P_3^*$ , puis il est appliqué sur le segment  $[P_3^*, P_3]$  pour interpoler la métrique en  $X$ .

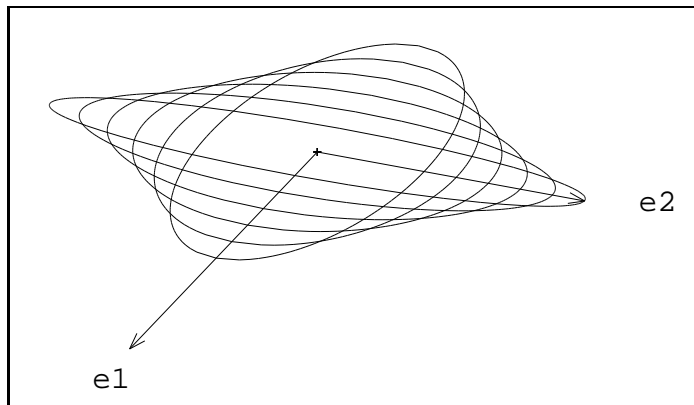


FIG. 5 - Interpolation arithmétique.

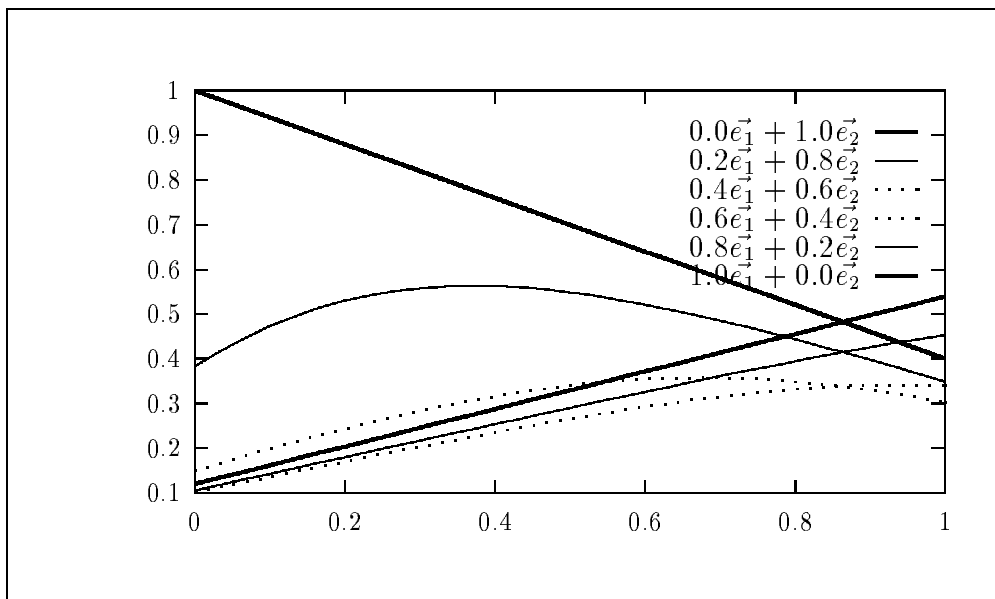
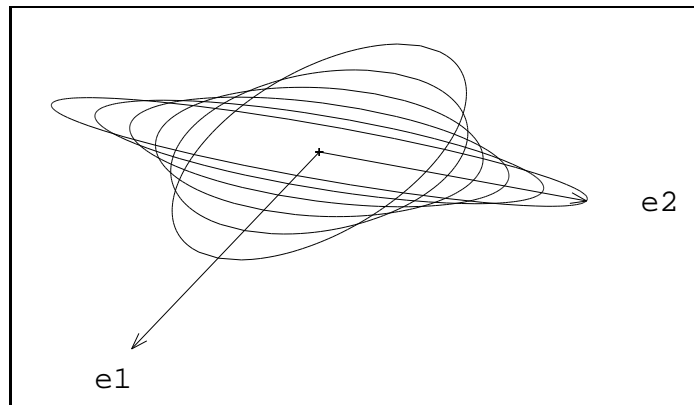
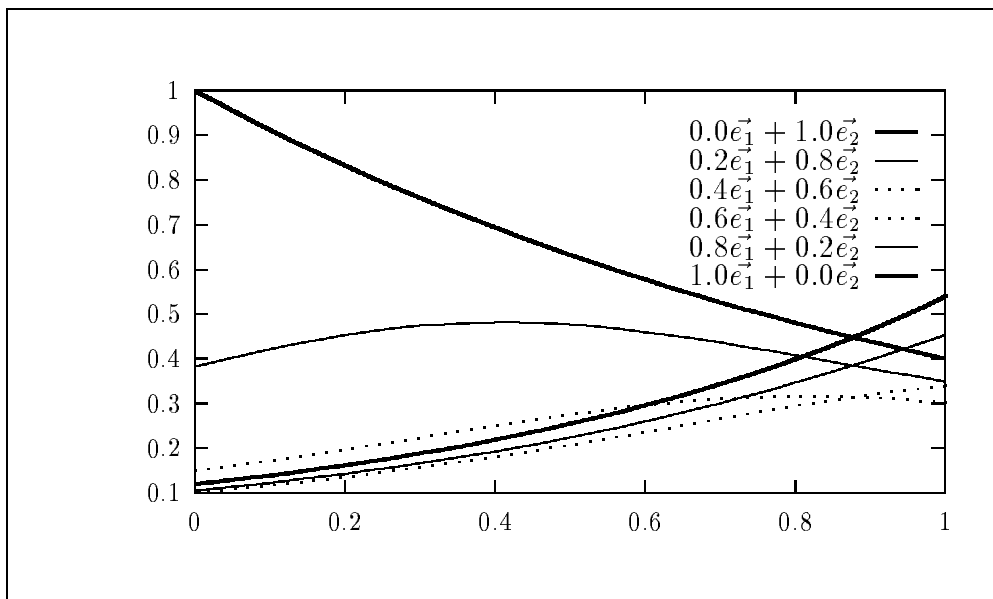


FIG. 6 - Courbes d'interpolation (arithmétique),  $h(t)$ .



FIG. 7 - *Interpolation géométrique.*FIG. 8 - *Courbes d'interpolation (géométrique),  $h(t)$ .*

#### 6.1.4 Intersection de métriques

Ce qui précède définit entièrement l'espace de contrôle et par suite l'ensemble des outils nécessaires à la création des points internes. Dans le cas où plusieurs cartes de métriques (adaptation multicritères) sont spécifiées, on propose une méthode de fusionnement de ces cartes permettant de retrouver le cas avec une seule carte.

Supposons donc qu'en un point donné soient définies deux métriques différentes, on veut déterminer une métrique unique en ce point, cohérente avec les deux métriques données.

Considérons les cercles unités (qui sont des ellipses) associés aux deux métriques initiales. La solution de notre problème est alors la métrique associée à l'intersection de ces deux cercles. Mais comme cette dernière n'est pas en général une ellipse, on considère la plus grande ellipse qui lui est incluse. Celle-ci définit une métrique que l'on appelle *métrique intersection*.

La réduction simultanée des deux formes quadratiques associées aux deux métriques permet de définir la métrique intersection des deux métriques. En effet, si  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont les deux métriques, les deux cercles unités correspondants s'écrivent dans la base associée à la réduction simultanée des matrices  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$

$${}^tX\mathcal{M}_1X = \lambda_1x_1^2 + \lambda_2x_2^2 = 1 \quad \text{et} \quad {}^tX\mathcal{M}_2X = \mu_1x_1^2 + \mu_2x_2^2 = 1;$$

la métrique intersection  $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$  est alors définie par

$$(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = {}^t\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \max(\lambda_1, \mu_1) & 0 \\ 0 & \max(\lambda_2, \mu_2) \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} \quad (13),$$

où  $\mathcal{P}$  est la matrice de passage de la base canonique à la base associée à la réduction simultanée des deux métriques.

La figure 9 montre la métrique intersection de deux métriques données.

Dans le cas où plusieurs métriques  $(\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq q}$  sont spécifiées en un point, leur intersection peut être définie par

$$(\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_q) = ((\dots((\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2), \mathcal{M}_3), \dots), \mathcal{M}_q) \quad (14).$$

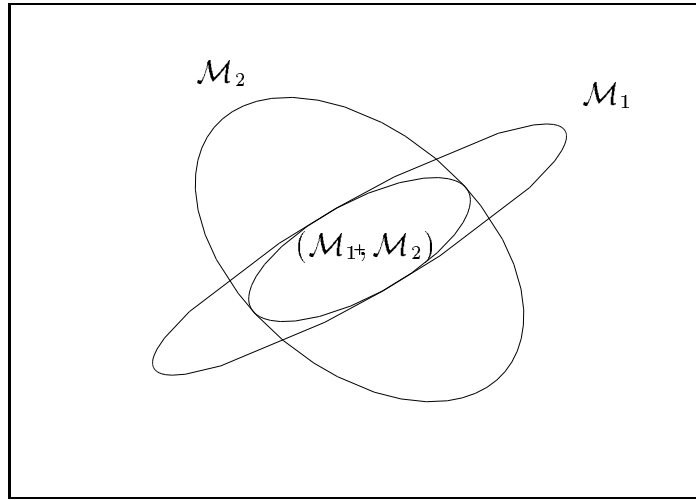


FIG. 9 - Intersection de deux métriques.

## 6.2 Calcul de la longueur d'une arête

Chaque arête du maillage actuel est plongée dans le maillage de fond (en pratique ce maillage est complété par son complémentaire dans le rectangle englobant). L'arête examinée est alors divisée en segments définis par son intersection avec les arêtes des éléments du maillage de fond (figure 10). Cette subdivision est bien définie car le rectangle englobant le maillage de fond englobe également le maillage actuel et que chacun de ces segments est inclus dans un triangle du maillage de fond.

L'ensemble des points d'intersection résultant représente la *spécification discrète* de métriques sur l'arête. À partir de cette spécification de métriques, on évalue la longueur de l'arête.

Soient donc  $[P, Q]$  une arête du maillage courant et  $(A_j)_{1 \leq j \leq p}$  les points d'intersection de cette arête avec les triangles du maillage de fond. Soient  $(t_j)_{1 \leq j \leq p}$  vérifiant  $A_j = P + t_j \overrightarrow{PQ}$ , posant  $A_0 = P$  et  $A_{p+1} = Q$ , la longueur de l'arête

$[P, Q]$  est

$$l(P, Q) = \sum_{j=0}^p l(A_j, A_{j+1}),$$

et la longueur de chaque segment  $[A_j, A_{j+1}]$  est calculée en considérant des interpolations de métriques sur  $[A_j, A_{j+1}]$  (cf. section 6.1.2).

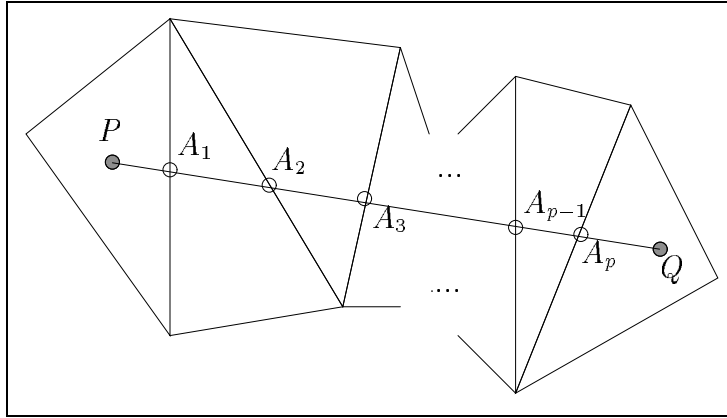


FIG. 10 - *Longueur d'une arête.*

Les métriques aux points  $P$  et  $Q$  sont connues. Au départ ces points sont uniquement des points de la frontière tandis que par la suite ce sont des points internes générés auparavant donc connus. Les métriques aux points d'intersection avec le maillage de fond,  $A_i$ , sont interpolées via ce maillage. En effet chaque point d'intersection appartient

- soit à une arête du maillage de fond,
- soit à une arête du complémentaire de ce maillage dans le rectangle englobant.

Dans le premier cas, la métrique du point intersection est interpolée à partir des métriques des extrémités de l'arête qui le contient. Dans le deuxième cas, l'une des extrémités de l'arête qui contient le point intersection est un sommet

du rectangle englobant et sa métrique n'est pas définie, on peut donc ignorer ce point intersection.

On peut proposer maintenant une méthode numérique pour évaluer la longueur de chaque segment de la subdivision.

Dans le cas isotrope on peut calculer d'une manière exacte la longueur d'un segment connaissant les métriques aux extrémités, en prenant en compte l'interpolation de métrique sur le segment [4].

Dans le cas anisotrope, la longueur d'un segment  $[A_j, A_{j+1}]$  est donnée par

$$l(A_j, A_{j+1}) = \int_0^1 \sqrt{\overrightarrow{A_j A_{j+1}} \mathcal{M}(A_j + t \overrightarrow{A_j A_{j+1}}) \overrightarrow{A_j A_{j+1}}} dt$$

Pour évaluer cette intégrale, on considère un calcul approximatif de la longueur que l'on note par  $l_a$ .

$$\text{– Soit } L = \frac{\sqrt{\overrightarrow{A_j A_{j+1}} \mathcal{M}(A_j) \overrightarrow{A_j A_{j+1}}} + \sqrt{\overrightarrow{A_j A_{j+1}} \mathcal{M}(A_{j+1}) \overrightarrow{A_j A_{j+1}}}}{2};$$

– si  $L < L_0$  ( $L_0 < 1$ ) alors  $l_a(A_j, A_{j+1}) = L$ ; sinon, si  $M$  est le milieu du segment  $[A_j, A_{j+1}]$ , alors  $l_a(A_j, A_{j+1}) = l_a(A_j, M) + l_a(M, A_{j+1})$ .

Cette procédure est récursive. L'approximation dans le calcul de l'intégrale est jugée satisfaisante si le calcul approximatif de la longueur est inférieur à  $L_0$  (dans la pratique, il suffit de prendre  $L_0 = 0.5$ ). Ce procédé subdivise aussi le segment en des segments de longueur plus petite que  $L_0$ . Le calcul proposé fournit ainsi des points  $(S_i^j)_{1 \leq i \leq r_j}$  sur le segment  $[A_j, A_{j+1}]$  tels que

$$\begin{cases} l(A_j, S_1^j) < L_0 \\ l(S_i^j, S_{i+1}^j) < L_0 & 1 < i < r_j \\ l(S_{r_j}, A_{j+1}) < L_0 \end{cases} \quad (15).$$

### 6.3 Génération de points sur les arêtes

La longueur des arêtes internes étant connue, des points sont générés sur chacune de telle manière qu'ils la subdivisent en segments de longueur unité. Rappelons que le but de cette génération de points internes est d'obtenir un

maillage parfait où la longueur de chaque arête du maillage final est égale à un dans l'espace de contrôle.

En évaluant (cf. ci-dessus) la longueur d'une arête, on lui a associée une subdivision en segments de longueur inférieure à  $L_0$ . A partir de cette subdivision, on déduit le redécoupage de l'arête en segments de longueur un. Reprenons la figure 10; on a

$$[P, Q] = \bigcup_{j=0}^p [A_j, A_{j+1}];$$

pour chaque segment  $[A_j, A_{j+1}]$  est définie la subdivision  $(S_i^j)_{0 \leq i \leq r_j+1}$  telle que  $S_0^j = A_j$ ,  $S_{r_j+1}^j = A_{j+1}$  et  $l(S_i^j, S_{i+1}^j) < L_0$  pour  $0 \leq i \leq r_j$  et on a

$$l(P, Q) = \sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^{r_j} l(S_i^j, S_{i+1}^j).$$

Soit l'entier  $m$  vérifiant  $m \leq l(P, Q) < m + 1$ . Le procédé consiste à subdiviser l'arête  $[P, Q]$  en  $m$  ou  $m + 1$  segments suivant que

$$\frac{m}{l(P, Q)} > \frac{l(P, Q)}{m + 1} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{l(P, Q)} < \frac{l(P, Q)}{m + 1}.$$

Pour fixer les idées considérons le premier cas. L'arête doit être subdivisée en  $m$  segments de longueur  $\delta = l(P, Q)/m$ . Soient  $(C_k = P + k\delta)_{1 \leq k < m}$  les points définissant cette subdivision. Pour un  $k$  fixé, ils existent  $j_\alpha$  et  $i_\beta$  tels que

$$l(P, S_{i_\beta}^{j_\alpha}) \leq k\delta < l(P, S_{i_\beta+1}^{j_\alpha}) \quad (16);$$

on en déduit que  $C_k \in [S_{i_\beta}^{j_\alpha}, S_{i_\beta+1}^{j_\alpha}]$  et que

$$C_k = S_{i_\beta}^{j_\alpha} + \frac{k\delta - l(P, S_{i_\beta}^{j_\alpha})}{l(S_{i_\beta}^{j_\alpha}, S_{i_\beta+1}^{j_\alpha})} (S_{i_\beta+1}^{j_\alpha} - S_{i_\beta}^{j_\alpha}) \quad (17).$$

Comme le point  $C_k$  appartient au segment  $[A_{j_\alpha}, A_{j_\alpha+1}]$ , sa métrique est définie par une interpolation de métriques sur ce segment.

Remarquons que  $\delta$  varie entre  $\delta_{min} = 1/\sqrt{2}$  et  $\delta_{max} = \sqrt{2}$ , ces deux valeurs représentant les seuils de tolérance pour la longueur unité souhaitée.

Les figures 11, 12 et 13 (resp. 14, 15 et 16) montrent la subdivision d'une arête en des segments de longueur unité avec des spécifications de métriques isotropes (resp. anisotropes) en des points internes ainsi qu'aux extrémités. Dans le cas anisotrope on montre aussi les métriques interpolées aux points définissant la subdivision. Pour chacun des cas isotrope et anisotrope, deux interpolations de métriques ont été choisies, arithmétique et géométrique.

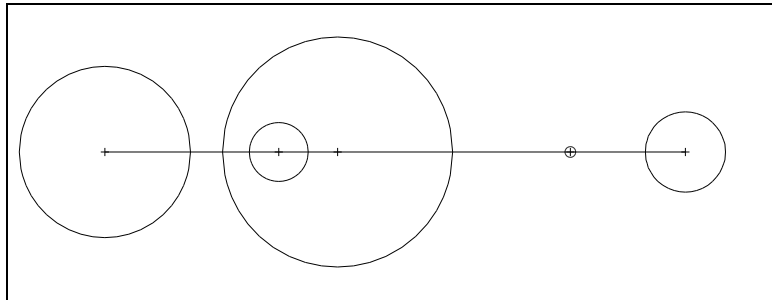


FIG. 11 - *Spécification isotrope.*

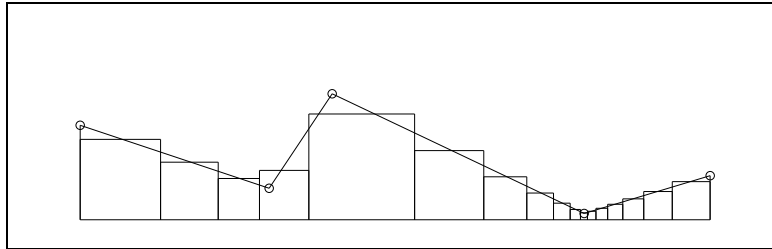


FIG. 12 - *Répartition arithmétique (isotrope).*

## 6.4 Filtrage des points générés

Une fois les points internes générés sur toutes les arêtes, on applique d'une manière séquentielle, un procédé de filtrage pour éliminer les points qui sont

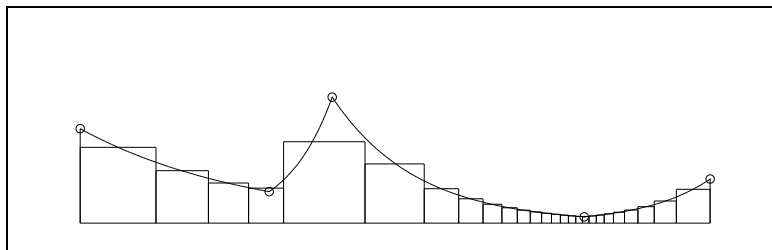


FIG. 13 - Répartition géométrique (isotrope).

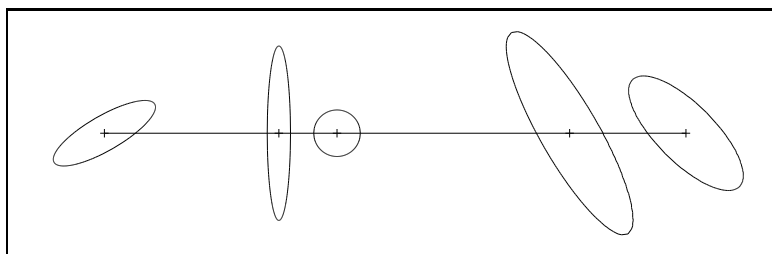


FIG. 14 - Spécification anisotrope.

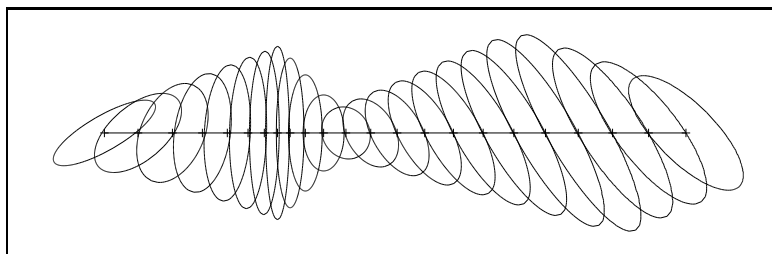


FIG. 15 - Répartition arithmétique (anisotrope).



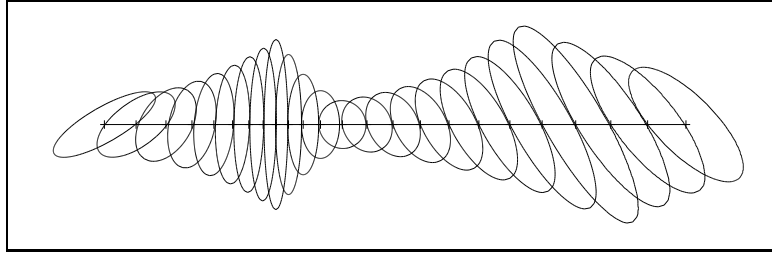


FIG. 16 - Répartition géométrique (anisotrope).

à une distance inférieure à  $\delta_{min}$  d'un point déjà retenu pour l'insertion. Le filtrage est utile car la génération des points est contrôlée uniquement sur chaque arête et non pas pour l'ensemble de toutes les arêtes du maillage. Pour cela on introduit une grille de contrôle, définie par un ensemble de rectangles uniformes, de côtés parallèles aux axes de coordonnées, que l'on appellera cases.

A chaque case on associe d'une part les points déjà insérés dans la triangulation et d'autre part les points retenus pour l'insertion. Une case  $c$  est identifiée par un couple  $(c_1, c_2)$  d'entiers. L'ensemble  $E_k(c)$  des cases voisines de degré  $k$  de  $c$  est défini par

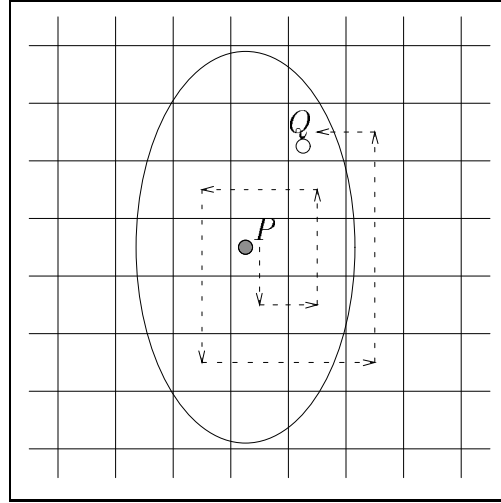
$$E_k(c) = \{c' \text{ case}; \exists \alpha, 1 \leq \alpha \leq 2; |c'_\alpha - c_\alpha| = k\}$$

Pour décider si le point  $P$  doit être retenu ou non, il suffit alors d'exploiter la case contenant  $P$ , ainsi que les cases voisines intersectant le disque unité associé à  $P$ , dans l'ordre croissant du degré, ces cases constituant la *zone d'influence* de  $P$  (figure 17). Si par ce procédé, un point  $Q$  est trouvé et que  $l^P(P, Q) < \delta_{min}$  et  $l^Q(P, Q) < \delta_{min}$ , alors le point  $P$  n'est pas retenu.

Remarquons que ce calcul est approximatif et que la solution exacte serait de savoir s'il existe un point  $Q$  vérifiant  $l(P, Q) < \delta_{min}$ , ce qui conduirait à un calcul plus coûteux.

## 6.5 Insertion des points retenus

Les points retenus après le filtrage sont insérés dans la triangulation en utilisant le noyau de Delaunay généralisé dans sa version contrainte.

FIG. 17 - Recherche d'un point dans la zone d'influence de  $P$ .

## 7 Optimisation

Le maillage obtenu après insertion des points internes peut être optimisé afin d'améliorer la qualité de ses éléments. On considère pour cela deux procédures, la bascule des arêtes et le bougé de points. La qualité optimale visée est celle d'un triangle équilatéral pour l'espace de contrôle. La procédure d'optimisation consiste à appliquer d'une manière itérative des bascules d'arêtes suivies de bougés de points.

### 7.1 Qualité d'un triangle

Soit  $K = [P_1, P_2, P_3]$  un triangle, dans l'espace euclidien habituel, une des définitions [13] possibles de la qualité de  $K$  est

$$\gamma(K) = c \frac{|\text{Det}(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3})|}{\sum_{1 \leq j < k \leq 3} \|\overrightarrow{P_jP_k}\|^2},$$

où  $Det(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3})$  est le déterminant de la matrice formée des vecteurs colonnes  $\overrightarrow{P_1P_2}$  et  $\overrightarrow{P_1P_3}$ , représentant le double de la surface du triangle  $K$ ,  $\|\overrightarrow{P_jP_k}\|$  étant la longueur de l'arête  $[P_j, P_k]$  de  $K$  et  $c = 2\sqrt{3}$  étant un coefficient de normalisation tel que pour un triangle équilatéral, la qualité soit égale à 1. En considérant cette définition bien adaptée à notre propos, on remarque que  $0 \leq \gamma(K) \leq 1$  et qu'un bon triangle a une qualité proche de 1 tandis qu'un mauvais triangle a une qualité proche de 0.

Dans le cas d'un espace riemannien, la qualité d'un triangle  $K$  peut être définie par

$$\Gamma(K) = \min_{1 \leq i \leq 3} \gamma^i(K) \quad (18),$$

où  $\gamma^i(K)$  est la qualité du triangle dans l'espace euclidien associé à la métrique spécifiée au sommet  $P_i$  de  $K$ . Pour évaluer la qualité  $\gamma^i(K)$  de  $K$ , il suffit de transformer l'espace euclidien associé à la métrique spécifiée au sommet  $P_i$  en l'espace euclidien habituel, puis de considérer la qualité du triangle transformé  $K^i$  de  $K$ , c'est-à-dire que

$$\gamma^i(K) = \gamma(K^i).$$

Soient  $(\mathcal{M}_i)_{1 \leq i \leq 3}$  les métriques spécifiées aux sommets  $(P_i)_{1 \leq i \leq 3}$  de  $K$ . On a les relations

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{P}_i \Lambda_i \mathcal{P}_i^{-1} \quad 1 \leq i \leq 3,$$

où  $\mathcal{P}_i$  est la matrice de passage de la base canonique à la base associée aux vecteurs propres de  $(\mathcal{M}_i)$  et  $\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_{i,1} & 0 \\ 0 & \lambda_{i,2} \end{pmatrix}$  est la matrice diagonale formée

par les valeurs propres de  $\mathcal{M}_i$ . Soient  $(h_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq 2}$  tels que  $h_{i,j} = 1/\sqrt{\lambda_{i,j}}$ ; les quantités  $h_{i,j}$  représentent la longueur unité dans la direction du vecteur propre associée à la valeur propre  $\lambda_{i,j}$  de  $\mathcal{M}_i$ . La matrice  $\mathcal{T}_i$  de la transformation de l'espace euclidien associé à  $\mathcal{M}_i$  en l'espace euclidien habituel est définie par

$$\mathcal{T}_i = \mathcal{H}_i \mathcal{P}_i,$$

où  $\mathcal{H}_i$  est la matrice diagonale  $\begin{pmatrix} 1/h_{i,1} & 0 \\ 0 & 1/h_{i,2} \end{pmatrix}$ . On en déduit que

$$K^i = [\mathcal{H}_i \mathcal{P}_i P_1, \mathcal{H}_i \mathcal{P}_i P_2, \mathcal{H}_i \mathcal{P}_i P_3]$$

et

$$\gamma(K^i) = c \frac{|Det(\mathcal{H}_i \overrightarrow{P_1 P_2}, \mathcal{H}_i \overrightarrow{P_1 P_3})|}{\sum_{1 \leq j < k \leq 3} \|\mathcal{H}_i \overrightarrow{P_j P_k}\|^2};$$

mais

$$Det(\mathcal{P}_i) = 1,$$

$$Det(\mathcal{H}_i) = \sqrt{\lambda_{i,1} \lambda_{i,2}} = \sqrt{Det(\mathcal{M}_i)}$$

et

$$\|\mathcal{H}_i \overrightarrow{P_j P_k}\|^2 = (l^{P_i}(P_j, P_k))^2 = {}^t \overrightarrow{P_j P_k} \mathcal{M}_i \overrightarrow{P_j P_k};$$

on obtient donc

$$\gamma^i(K) = c \frac{|\sqrt{Det(\mathcal{M}_i)} Det(\overrightarrow{P_1 P_2}, \overrightarrow{P_1 P_3})|}{\sum_{1 \leq j < k \leq 3} {}^t \overrightarrow{P_j P_k} \mathcal{M}_i \overrightarrow{P_j P_k}} \quad (19).$$

## 7.2 Bascule des arêtes

On se propose de modifier localement la topologie de la triangulation pour améliorer la qualité des éléments. En particulier on considère les modifications qui permettent de supprimer une arête quelconque dans la mesure du possible.

Soit  $f$  une arête quelconque du maillage. On appelle *coquille* de  $f$ , l'ensemble des deux triangles contenant  $f$ . La qualité d'une coquille est la qualité de son plus mauvais élément. La bascule est alors appliquée si la qualité du remaillage de la coquille est meilleure que celle de la coquille initiale. À chaque arête  $f$  on associe la quantité  $g_f$  qui représente le gain en facteur de qualité en appliquant la bascule à  $f$ .

Pour optimiser le maillage on applique un schéma itératif. Les bascules sont appliquées dans l'ordre décroissant de gain en facteur de qualité. Initialement on fixe le gain en facteur de qualité à une valeur donnée  $\omega > 1$  (dans la pratique il suffit de prendre  $\omega = 2$ ) et puis on fait décroître  $\omega$  vers 1. Ce schéma permet d'appliquer en premier, les bascules les plus significatives en terme de gain en qualité.

### 7.3 Bougé de points

Soit  $P$  un point interne du maillage et  $(K_i)$  l'ensemble des triangles contenant  $P$  comme sommet (i.e. la boule associée à  $P$ ). Le bougé de  $P$  consiste à déplacer  $P$  pour augmenter la qualité pire des triangles  $(K_i)$ . Pour cela on considère deux procédés possibles, bougé à longueur unité et bougé à triangle optimal. L'une ou l'autre des procédures est appliquée pour tous les points internes du maillage.

#### 7.3.1 Bougé à longueur unité

Soient  $(P_i)$  l'ensemble des sommets de  $(K_i)$  différents de  $P$ . A chaque point  $P_i$  on associe le point optimal  $(P_i^*)$  tel que

$$\overrightarrow{P_i P_i^*} = \overrightarrow{P_i P} / l(P_i, P) \quad (20).$$

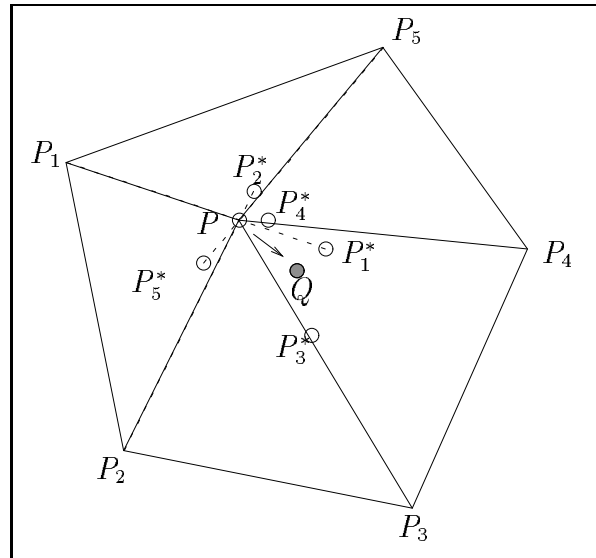


FIG. 18 - *Bougé à longueur unité.*

Ainsi on a  $l(P_i, P_i^*) = 1$ . Le bougé de  $P$  consiste à déplacer le point  $P$  “pas à pas” vers le barycentre  $Q$  des points  $(P_i^*)$  si la qualité la plus mauvaise des triangles  $(K_i)$  est améliorée (figure 18). Ce procédé [6] rétablit les longueurs unités pour les arêtes issues de  $P$ .

### 7.3.2 Bougé à triangle optimal

Soient  $(f_i)$  les arêtes opposées au sommet  $P$  des triangles  $(K_i)$  ( $K_i = [P, f_i]$ ). A chaque arête  $f_i$ , on associe le point optimal  $P_i^*$  tel que le triangle  $K_i^* = [P_i^*, f_i]$  vérifie

$$\Gamma(K_i^*) = \max_Q \Gamma([Q, f_i]),$$

où  $Q$  est un point quelconque situé du même côté que  $P$  par rapport à l’arête  $f_i$ . De même le bougé de  $P$  consiste à déplacer le point  $P$  “pas à pas” vers le barycentre  $Q$  des points  $(P_i^*)$  si la qualité la plus mauvaise des triangles  $(K_i)$  est améliorée (figure 19).

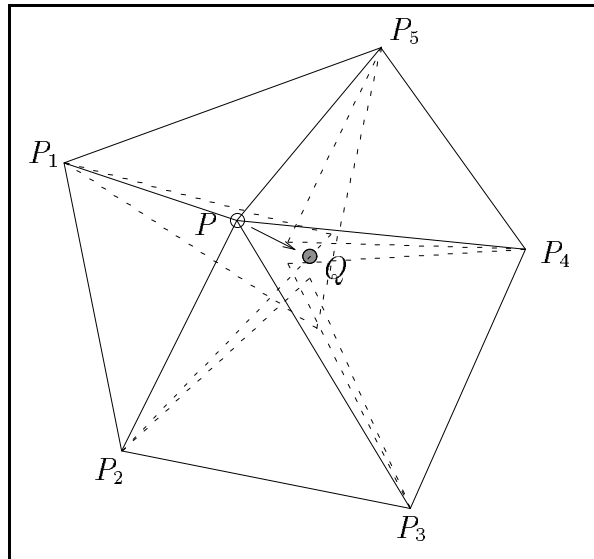


FIG. 19 - *Bougé à triangle optimal.*

Ce procédé rétablit des triangles de qualité optimale dans la boule associée à  $P$ . Pour évaluer le point  $P_i^*$  on peut considérer le barycentre des points optimaux associés à  $f_i$ , chacun calculé dans une structure euclidienne associée à une métrique égale à celle spécifiée en un sommet de  $K_i$ .

Pour fixer les idées, considérons une arête quelconque  $f_i = [P_i, P_{i+1}]$  ( $K_i = [P, f_i]$ ) et calculons le point optimal  $P_i^*$  pour  $f_i$  dans une structure euclidienne associée à une métrique quelconque  $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ . Le point  $P_i^*$  est situé du même côté que  $P$  par rapport à  $f_i$  et est défini de telle manière que le triangle  $K_i^* = [P_i^*, f_i]$  soit équilatéral dans la structure euclidienne associée à  $\mathcal{M}$ .

Si  $\mathcal{P}$  est la matrice de passage de la base canonique à la base associée aux vecteurs propres de  $\mathcal{M}$ , et  $\Lambda$ , la matrice diagonale formée des valeurs propres de  $\mathcal{M}$ , le point optimal  $P_i^*$  est défini par

$$P_i^* = P_i + \mathcal{P}\Lambda^{-1/2}\mathcal{R}(\pi/3)\Lambda^{1/2}\mathcal{P}^{-1}\overrightarrow{P_i P_{i+1}};$$

comme  $\mathcal{M} = \mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}$  et que  $\mathcal{P}$  est une matrice de rotation, on obtient

$$P_i^* = P_i + \mathcal{M}^{-1/2}\mathcal{R}(\pi/3)\mathcal{M}^{1/2}\overrightarrow{P_i P_{i+1}},$$

ou encore

$$P_i^* = P_i + \frac{1}{2d} \begin{pmatrix} d-b & -c \\ a & d+b \end{pmatrix} \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \quad (21),$$

où  $d = \sqrt{(ac - b^2)/3}$ .

## 8 Conclusions

Dans ce papier on a rappelé les grandes lignes d'un mailleur classique de Delaunay en insistant plus particulièrement sur le processus incrémental d'insertion de point, ou noyau de Delaunay, et la manière de créer les points internes avec les arêtes comme support.

On a proposé ensuite le schéma d'un mailleur de Delaunay dans le cas d'un problème d'adaptation en indiquant qu'en se plaçant dans un espace riemannien on retrouvait formellement le cadre classique.

Le noyau de Delaunay a alors été reformulé tout comme le processus de création des points internes. Pour ce faire, la notion d'espace de contrôle a été explicitée avec en particulier les problèmes de définition de longueurs.

Les exemples d'application en deux dimensions sont présentés dans la partie II de ce papier. Ces exemples portent soit sur des cas académiques soit sur des applications en mécanique des fluides.

L'extension à la trois dimensions ne semble pas poser de grosses difficultés. Le processus de création des points internes, s'appuyant sur les arêtes, reste valide. Le noyau de Delaunay s'étend formellement sous réserve de vérifier la propriété d'étoilement. Les seuls points délicats résident dans la définition adéquate de l'ensemble  $Supp_{geom}$ , support de la géométrie du domaine et dans le problème du remaillage adapté de la surface de ce domaine par rapport à la carte de spécifications donnée.

## Références

- [1] M.J. BERGER, A. JAMESON, Automatic adaptive grid refinement for Euler equations, *AIAA J.*, vol 23, n 4, pp. 561–568, 1985.
- [2] H. BOROUCAKI AND P.L. GEORGE, Aspects of 2D Delaunay Mesh Generation, à paraître.
- [3] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE AND S.H. LO, Optimal Delaunay point insertion, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, à paraître.
- [4] H. BOROUCAKI, P. LAUG, Maillage de courbes gouverné par une carte de métriques, *Rapport de recherche INRIA*, à paraître.
- [5] A. BOWYER, Computing Dirichlet tessellations, *Comput. J.*, vol 24, pp. 162–166, 1981.
- [6] E. BRIERE DE L'ISLE, P.L. GEORGE, Optimization of tetrahedral meshes, *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, ed. I. Babuska, W.D. Henshaw, J.E. Olinger, J.E. Flaherty, J.E. Hopcroft and T. Tezduyar, vol 75, pp. 97-128, 1995.



- 
- [7] M.O. BRISTEAU, J. PERIAUX, Finite element methods for the calculation of compressible viscous flows using self-adaptive refinement, *VKI lecture notes on CFD*, 1986.
- [8] C. CHERFILS AND F. HERMELINE, Diagonal swap procedures and characterizations of 2D-Delaunay triangulations, *M<sup>2</sup>AN*, vol 24, n<sup>o</sup> 5, pp. 613–625, 1990.
- [9] P.L. GEORGE, *Génération automatique de maillage. Applications aux méthodes d'éléments finis*, Masson, *RMA* n<sup>o</sup> 16, Paris, 1991. Also as *Automatic mesh generation. Applications to finite element methods*, Wiley, 1991.
- [10] F. HERMELINE, Triangulation automatique d'un polyèdre en dimension  $N$ , *R.A.I.R.O. Analyse num.*, vol 16, n<sup>o</sup> 3, pp. 211–242, 1982.
- [11] C. L. LAWSON, Properties of n-dimensional triangulations, *Comput. Aided Geom. Design*, vol 3, pp. 231–246, 1986.
- [12] C.K. LEE AND S.H. LO, An automatic adaptive refinement finite element procedure for 2D elastostatic analysis, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 35, pp. 1967–1989, 1992.
- [13] S.H. LO, Automatic mesh generation and adaptation by using contours, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 31, pp. 689–707, 1991.
- [14] R. LOHNER, Adaptive remeshing for transient problems, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol 75, pp. 195–214, 1989.
- [15] D.J. MAVRIPLIS, Adaptive mesh generation for viscous flows using Delaunay triangulation, *Jour. of Comput. Phys.*, vol 90, n 2, 1990.
- [16] J. PERAIRE, M. VAHDATI, K. MORGAN, O.C. ZIENKIEWICZ, Adaptive remeshing for compressible flow computations, *Jour. of Comput. Phys.*, vol 72, pp 449-466, 1987.
- [17] F. P. PREPARATA AND M. I. SHAMOS, Computational geometry, an introduction, Springer-Verlag, 1985.

- [18] M. G. VALLET, Génération de maillages éléments finis anisotropes et adaptatifs, Thèse Université Paris 6, 1992.
- [19] D. F. WATSON, Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes, *Comput. J.*, vol 24, pp. 167–172, 1981.
- [20] N.P. WEATHERILL, M.J. MARCHANT, O. HASSAN AND D.L. MARCUM, Grid adaptation using a distribution of sources applied to inviscid compressible flow simulations, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 19, pp. 739–764, 1994.



---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue Félix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

Éditeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399