



**HAL**  
open science

## Gestion de systèmes d'assemblage multi-produits avec approvisionnement aléatoire

Alexandre Dolgui, Marie-Claude Portmann, Jean-Marie Proth

► **To cite this version:**

Alexandre Dolgui, Marie-Claude Portmann, Jean-Marie Proth. Gestion de systèmes d'assemblage multi-produits avec approvisionnement aléatoire. [Rapport de recherche] RR-2755, INRIA. 1995, pp.35. inria-00073937

**HAL Id: inria-00073937**

**<https://inria.hal.science/inria-00073937>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Gestion de systèmes d'assemblage  
multi-produits avec approvisionnement aléatoire*

Alexandre Dolgui - Marie-Claude Portmann  
Jean-Marie Proth

N° 2755  
Décembre 1995

PROGRAMME 5

*R*apport  
de recherche

Les rapports de recherche de l'INRIA  
sont disponibles en format postscript sous  
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

si vous n'avez pas d'accès ftp  
la forme papier peut être commandée par mail :  
e-mail : dif.gesdif@inria.fr  
(n'oubliez pas de mentionner votre adresse postale).

par courrier :  
Centre de Diffusion  
INRIA  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

INRIA research reports  
are available in postscript format  
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

if you haven't access by ftp  
we recommend ordering them by e-mail :  
e-mail : dif.gesdif@inria.fr  
(don't forget to mention your postal address).

by mail :  
Centre de Diffusion  
INRIA  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

# **GESTION DE SYSTEMES D'ASSEMBLAGE MULTI-PRODUITS AVEC APPROVISIONNEMENT ALEATOIRE**

**Alexandre DOLGUI \***  
**Marie-Claude PORTMANN \*\***  
**Jean-Marie PROTH \*\*\***

\* LASPI - IUT de Roanne, 12 avenue de Paris, 42334 Roanne Cedex, France  
& Université d'Etat Biélorusse d'Informatique et de Radio Electronique  
6 rue P. Brovki, Minsk, 220600 Bélarus

\*\* CRIN -Ecole des Mines de Nancy, Parc de Saurupt 54042 Nancy Cedex, France

\*\*\* INRIA-Lorraine, Projet SAGEP, CESCO  
4 rue Marconi, Technopôle Metz 2000, 57070 Metz, France

## Gestion de systèmes d'assemblage multi-produits avec approvisionnement aléatoire

Alexandre DOLGUI \*, Marie-Claude PORTMANN \*\*, Jean-Marie PROTH \*\*\*

**Résumé.** Nous nous intéressons à l'optimisation de la planification d'un système d'assemblage multi-produits. Les composants sont commandés chez des fournisseurs extérieurs avec des délais de livraisons non négligeables. Un même type de composant peut être utilisé pour l'assemblage de plusieurs types de produits. L'assemblage d'un produit demande un ou plusieurs composants de différents types. Nous étudions le fonctionnement du système en régime permanent. Nous supposons que la demande de chaque produit est identique à chaque période de temps, mais que les dates de livraisons des composants subissent des déviations aléatoires suivant des lois de distribution de probabilités quelconques mais connues. La capacité de production est supposée illimitée et les seuls coûts qui interviennent dans le critère à optimiser sont des coûts de stockage de composants et des coûts de rupture de produits finis. Pour résoudre ce problème, nous utilisons une technique d'horizon glissant en croisant un modèle de programmation linéaire, des calculs de prévisions et des méthodes de simulation. Nous présentons les caractéristiques fondamentales des modèles utilisés, des expérimentations numériques et une méthodologie d'utilisation pratique.

**Mots clés :** systèmes d'assemblage multi-produits, approvisionnement aléatoire, planification à moyen terme, gestion des stocks, programmation linéaire, simulation.

## Management of Assembly Systems with Random Ordering Times

Alexandre DOLGUI \*, Marie-Claude PORTMANN \*\*, Jean-Marie PROTH \*\*\*

**Abstract.** We are interested in the management of an assembly system. Some components can be used for assembling different products. Each product need several components of various types to be manufactured. Components are ordered to companies which usually cannot guarantee a fix delivery time. In other words, the delivery times are random. The costs to be taken into account are the inventory costs of the components and the backlogging costs of the products. The production capacity is not bounded. A rolling horizon approach, which involves a linear programming model, forecasting and simulation, is used.

**Key words:** Assembly system, Random delivery, Medium-term planning, Inventory management, Linear programming, Simulation.

\* LASPI - IUT de Roanne, 12 avenue de Paris, 42334 Roanne Cedex, France  
& Université d'Etat Biélorusse d'Informatique et de Radio Electronique, 6 rue P. Brovki, Minsk, 220600  
Bélarus

\*\* CRIN -Ecole des Mines de Nancy, Parc de Saurupt 54042 Nancy Cedex, France

\*\*\* INRIA-Lorraine, Projet SAGEP, 4 rue Marconi, Technopôle Metz 2000, 57070 Metz, France

## INTRODUCTION

Nous nous intéressons à un système de production qui utilise des composants commandés à l'extérieur pour assembler des produits finis. Nous étudions le régime permanent de fonctionnement du système où l'échelle de temps peut être divisée en périodes élémentaires de la manière suivante :

- toutes les périodes ont la même durée ;
- les demandes de produits finis au cours de chaque période sont connues et ne dépendent pas du numéro de la période (elles sont constantes) ;
- les commandes pour le réapprovisionnement en composants se font au début de chaque période et sont égales aux besoins moyens en composants par période.

La capacité du système d'assemblage est telle qu'il est possible d'effectuer l'assemblage de n'importe quelle quantité de produits à condition qu'il y ait suffisamment de composants ce qui permet l'assemblage "juste à temps" sans créer de stocks de produits finis.

Les capacités de stockage des composants ne sont pas limitées. Un coût de stockage par période est associé à chaque composant. Nous étudions la gestion de ce système dans le cas où les délais de livraisons de composants ont des déviations aléatoires ce qui provoque tantôt des ruptures de stocks, tantôt un surstockage de composants.

Les demandes de produits doivent être satisfaites durant la période correspondante, sinon il s'agira d'une rupture en produits finis. Les demandes non satisfaites sont différées et cela induit un coût proportionnel à la durée de la rupture et à la quantité manquante.

Il s'agit donc de minimiser le coût de production moyen par période égal à la somme du coût moyen de stockage des composants et du coût moyen de rupture en produits finis.

Dans cet article nous proposons un modèle, une analyse de ses caractéristiques et une méthodologie de son utilisation pour la gestion des systèmes de ce type. Une version anglaise de ce papier (8 pages) contenant une partie de ces résultats doit paraître dans [1]. D'autres méthodes de gestion de systèmes d'assemblage multi-produits avec approvisionnement aléatoire peuvent également être trouvées dans les travaux [2,3].

## 1 APPROCHE GENERALE

### 1.1 Modélisation stochastique sur un horizon infini

Nous définissons le régime permanent considéré ici en utilisant les notations suivantes :

- $t_i$  est l'instant de début de la période élémentaire  $i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, \infty$ , avec  $t_i \geq t_0$  où  $t_0$  est le début du régime permanent ;
- $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  est le vecteur des demandes en produits finis, qui est le même pour toutes les périodes ;
- $r(t_i) = (r_1(t_i), r_2(t_i), \dots, r_n(t_i))$  est le vecteur des demandes différées à l'instant  $t_i$  (la différence entre la quantité de produits finis de chaque type qui a été commandée et celle qui a été livrée avant  $t_i$ ) ;
- $s(t_i) = (s_1(t_i), s_2(t_i), \dots, s_d(t_i))$  est le vecteur des niveaux des stocks de composants à l'instant  $t_i$  ;
- $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  est le vecteur des coûts de demandes différées des produits (par unité de produit pour une période de retard) ;
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$  est le vecteur des coûts de stockage de composants (par composant pour une période) ;
- $x(t_i) = (x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i))$  est le vecteur des quantités de produits de chaque type effectivement assemblés durant la période  $i$  (à optimiser en tenant compte des niveaux de stocks de composants et des coûts de production énumérés ci-dessus) ;
- $q = (q_1, q_2, \dots, q_d)$  est le vecteur des quantités de composants de chaque type commandés au début de chaque période ;
- $g = (g_1, g_2, \dots, g_d)$  est le vecteur des délais prévus de livraisons de composants (ces derniers sont déterministes tandis que les délais réels sont aléatoires et sont égaux à la somme des délais prévus et des éventuels retards aléatoires de livraisons) ;
- $p(\tau) = (p_1(\tau), p_2(\tau), \dots, p_d(\tau))$  est le vecteur des lois discrètes de distribution de probabilité des retards de livraisons des composants par rapport aux délais prévus, i.e. au moment où on commande des composants  $j$  la probabilité que le délai de leur livraison soit égal à  $g_j + m$  périodes est  $p_j(m)$  ;
- $N$  est la matrice des nomenclatures des produits où  $N_z^j$  est le nombre de composants de type  $j$  nécessaire pour l'assemblage d'une unité de produit de type  $z$ ,  $1 \leq z \leq n$ ,  $1 \leq j \leq d$ .

$$N = \begin{bmatrix} N_1^1 & N_2^1 & \dots & N_n^1 \\ N_1^2 & N_2^2 & \dots & N_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_1^d & N_2^d & \dots & N_n^d \end{bmatrix}$$

Sur les  $h$  premières périodes élémentaires du régime permanent, le coût de stockage de composants (coût accumulé des stockages de composants qui sont en stocks au début de la période correspondante et qui ne sont pas utilisés pour l'assemblage pendant cette période) est le suivant :

$$CR_1(h) = \sum_{k=0}^{h-1} \sum_{j=1}^d \alpha_j \left( s_j(t_k) - \sum_{z=1}^n (x_z(t_k) N_z^j) \right) \quad (1)$$

Le coût de rupture de production (coût accumulé des demandes différées de produits finis) vaut :

$$CR_2(h) = \sum_{k=0}^{h-1} \sum_{z=1}^n \beta_z (r_z(t_k) + y_z - x_z(t_k)) \quad (2)$$

La quantité de demandes différées de produits finis à l'instant  $t_k$  est égale à celle du début de la période précédente  $t_{k-1}$  plus le nombre de nouvelles demandes différées (pour tous les  $z$  où  $y_z > x_z(t_{k-1})$ ) et moins le nombre de demandes différées qui ont été satisfaites (pour tous les  $z$  où  $y_z < x_z(t_{k-1})$ ) :

$$r_z(t_k) = r_z(t_{k-1}) + y_z - x_z(t_{k-1}), \quad 1 \leq z \leq n \quad (3)$$

Les stocks de composants au début d'une période sont obtenus à partir des variations de stocks de la période précédente : stock en début de période moins le nombre de composants effectivement utilisés, plus le nombre de composants qui sont arrivés en stock :

$$s_j(t_k) = s_j(t_{k-1}) - \sum_{z=1}^n x_z(t_{k-1}) N_z^j + \sum_{u=0}^{k-1} q_j \delta_{u,k-1}^j, \quad 1 \leq j \leq d \quad (4)$$

$$\text{où } \delta_{u,k-1}^j = \begin{cases} 1 & \text{si les composants de type } j \text{ commandés à l'instant } t_u \\ & \text{arrivent durant la période } k-1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5)$$

$$q_j = \sum_{z=1}^n y_z N_z^j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, d, \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (6)$$

Les variables décisionnelles du problème sont donc de deux types : les décisions successives concernant le nombre de produits effectivement assemblés durant chaque période  $x(t_i)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$  et le vecteur des stocks initiaux  $s(t_0)$ .

Il s'agit ici d'un modèle abstrait puisque les valeurs  $\delta_{u,k}^j$  ne sont pas connues a priori : on ne connaît que leur loi de probabilité. On passera du modèle abstrait à des modèles concrets

approchés en remplaçant ces valeurs inconnues par des estimations probabilistes. Nous recherchons donc les réalisations des variables décisionnelles du problème  $x(t_i)$ ,  $i=0,1,2, \dots$  et  $s(t_0)$  qui permettent d'optimiser en moyenne le coût de production.

Le critère à minimiser en horizon infini est donc :

$$CR = \lim_{h \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{h} [CR_1(h) + CR_2(h)] \right\} \quad (7)$$

Dans les paragraphes suivants nous donnerons l'analyse qualitative de l'influence des variables décisionnelles  $s(t_0)$  et  $x(t_i)$ ,  $i=0,1,2, \dots$  sur le coût de production et quelques estimations quantitatives avant de présenter dans la section suivante les méthodes d'optimisation proposées.

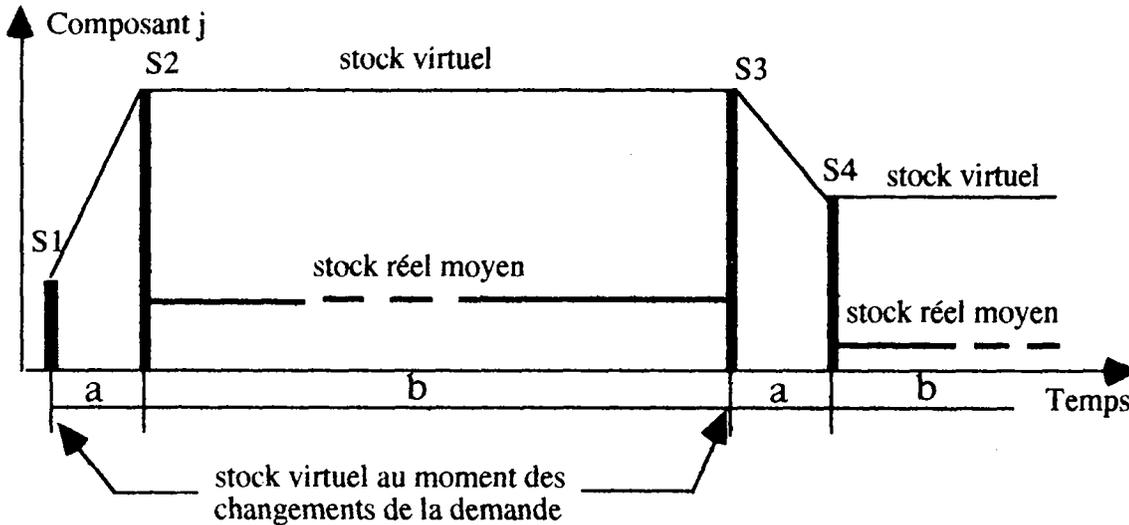
## 1.2 Stocks virtuels de composants en régime permanent

Les systèmes qui nous intéressent sont ceux pour lesquels les demandes en produits finis sont relativement stables, il existe donc, pour ce type de systèmes, des intervalles de fonctionnement en régime permanent assez longs pour pouvoir utiliser le modèle (1)-(7). Rappelons que le *régime permanent* est défini ici à travers le même vecteur  $y$  de demandes de produits finis et le même vecteur  $q$  de commandes de composants, pour toutes les périodes élémentaires appartenant à l'intervalle de temps correspondant.

Le modèle à horizon infini (1)-(7) considère que le système modélisé ne fonctionne qu'en régime permanent et que  $s(t_0)$  sont les stocks des composants au début de ce régime. En réalité, du moment où la nouvelle demande en produits finis est connue au début du régime permanent correspondant il y a un régime transitoire caractérisé par l'évolution des commandes de composants et des niveaux moyens de stocks. Par conséquent, à l'instant  $t_0$  de début du régime permanent, il peut exister des composants commandés pendant le fonctionnement en régime transitoire, mais qui ne sont pas livrés avant  $t_0$ . Dans le cas général, les stocks initiaux  $s(t_0)$  du modèle (1)-(7) sont donc les valeurs *des stocks virtuels* au début de régime permanent, i.e. les valeurs des stocks virtuels à atteindre avant de passer au fonctionnement en régime permanent (commandes de composants constantes au début de chaque période). *Le stock virtuel* d'un composant est égal au *stock réel* plus la *quantité de composants* de ce type qui a été *commandée mais pas encore livrée* et moins la *quantité de composants nécessaire pour satisfaire les demandes différées* en produits finis.

L'évolution schématique du stock virtuel de composant de type  $j$ ,  $\forall j$  pendant un cycle de fonctionnement d'un système de ce type est représentée dans la figure 1, où  $S_1$ ,  $S_3$  sont les stocks virtuels au moment d'un changement de la demande en produits finis,  $S_2$  et  $S_4$  sont les stocks

virtuels au début du régime permanent correspondant. Les niveaux  $S_2$  et  $S_3$  sont égaux car en régime permanent les stocks virtuels ne changent pas. Des traits pointillés représentent les niveaux moyens du stock réel en début de période. Pendant le régime *transitoire* (a) le stock virtuel est géré de manière à atteindre le niveau nécessaire au bon fonctionnement du régime *permanent* (b) suivant.

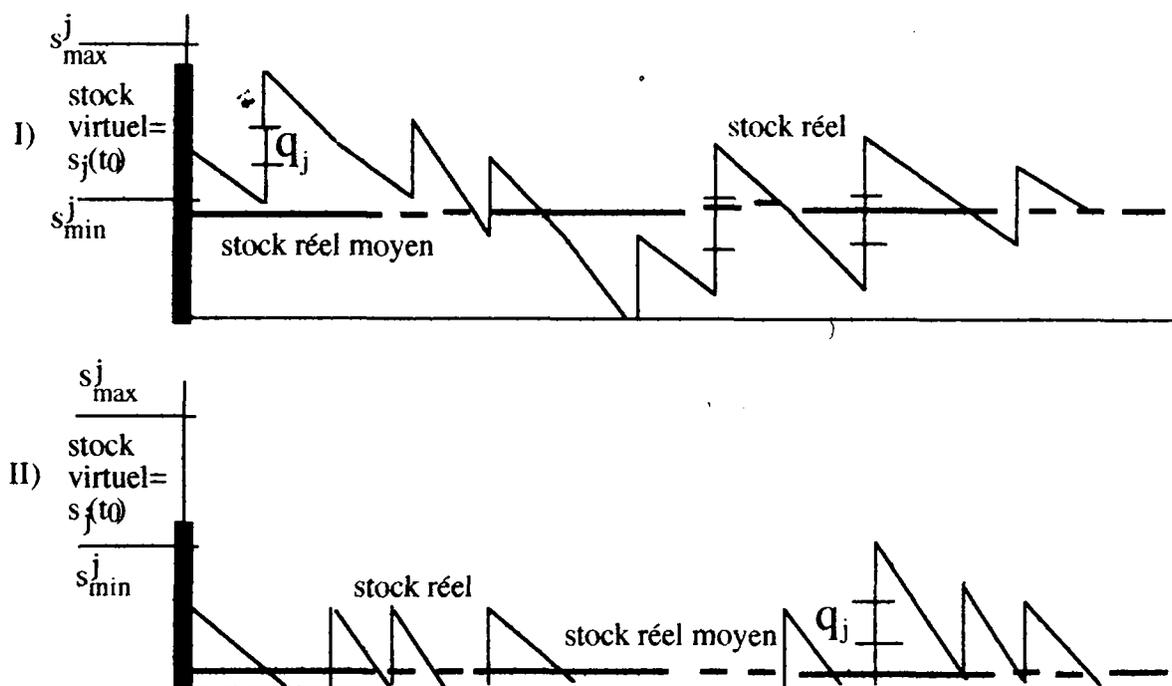


**Figure 1 :** (a) est un régime transitoire ; (b) est un régime permanent

Nous ne présentons pas ici la façon de faire évoluer les stocks virtuels pendant le régime transitoire, car notre étude est consacré au *régime permanent*. Par contre, comme montre le modèle (1)-(7) le choix des niveaux de stocks  $s(t_0)$  est important, parce qu'il définit le moment de début et les conditions initiales (fréquences de ruptures de stocks de composants, coût de stockage de composants etc.), pour la gestion de l'assemblage en régime permanent.

L'influence des niveaux de stocks  $s(t_0)$  est illustrée par la figure 2. Les calculs de leurs majorant et minorant sont évidents :  $s_{min}^j = q_j (g_j + \tau_{min})$  ;  $s_{max}^j = q_j (g_j + \tau_{max})$  où  $\tau_{max}$  ,  $\tau_{min}$  sont les retards de livraisons limites tels que  $\tau > \tau_{max}$  ou  $\tau < \tau_{min}$  entraîne  $p_j(\tau)$  égal à 0 (il n'y a donc aucun sens de choisir ces stocks au delà de l'intervalle  $[s_{min}^j, s_{max}^j]$ ).

La figure 2 montre que si l'on choisit les stocks virtuels assez grands (proches de leur majorant), il n'y aura presque pas de ruptures de stocks, en conséquence le coût de demandes différées de produits finis sera petit, mais le coût de stockage de composants sera grand. Par contre, si ces stocks sont petits (proches des minorants), alors les ruptures de stocks sont fréquentes, en conséquence le coût de demandes différées de produits finis devient dominant, tandis que le coût de stockage de composants diminue. Il existe donc un vecteur de stocks  $s^*(t_0)$  qui donne les *conditions initiales* de gestion en régime permanent les *meilleures*.



**Figure 2 :** I) le stock est grand, les ruptures sont rares ; II) le stock est petit, les ruptures sont fréquentes

Un algorithme approché de calcul de  $s^*(t_0)$  sera présenté dans le paragraphe 2.4. Nous rechercherons donc les valeurs des stocks  $s^*(t_0)$  et nous passerons en régime permanent de fonctionnement du système (commander le nombre constant des composants au début de chaque période) dès le moment où les stocks virtuels des composants atteignent ces valeurs.

### 1.3 Gestion de l'assemblage en régime permanent

#### 1.3.1 Optimisation locale

Au début de chaque période nous connaissons les quantités de composants qui sont réellement en stock, ainsi que les volumes de demandes de produits finis (demandes différées antérieures corrigées par la demande de la période courante). Si la quantité des composants en stock est insuffisante pour satisfaire toutes les demandes, il faut choisir *quels produits et en quelles quantités* seront assemblés de sorte que *les augmentations du coût de production soient minimales*.

Comme les systèmes d'assemblage que nous étudions sont multi-produits et que le même type de composant peut être utilisé pour l'assemblage de différents types de produit, ce choix doit tenir compte *des nomenclatures des produits*. Par exemple, nous supposons que le composant  $j$  est le seul qui pose problème. La quantité en stock de ce composant, égale à 10, peut être utilisée

pendant la période courante pour l'assemblage des produits  $k$  (5 composants par produit) ou  $m$  (8 composants par produit). Supposons que les coûts de rupture de production des produits  $k$  et  $m$  soient respectivement 200 et 350 et que la demande, pour ces deux produits, est supérieure à 2. Dans cet exemple, même si le coût de rupture du produit  $k$  est inférieur à celui du produit  $m$ , c'est le premier type de produit qui doit être choisi pour l'assemblage, car le niveau actuel de stock du composant  $j$  permet d'assembler deux unités au lieu d'une seule, pour le produit  $m$ . Ici, il n'y a qu'un seul conflit entre deux produits utilisant le même composant et on ne considère qu'une seule période. Les calculs sont beaucoup moins évidents dans le cas de plusieurs produits et plusieurs composants, même si l'on ne considère que la période courante.

La solution optimale pour la période courante  $i$ , sans tenir compte des périodes suivantes, est obtenue en utilisant le modèle de programmation linéaire suivant :

$$\sum_{z=1}^n (r_z(t_i) + y_z - x_z(t_i)) \beta_z + \sum_{j=1}^d \left( s_j(t_i) - \sum_{z=1}^n x_z(t_i) N_z^j \right) \alpha_j \rightarrow \min \quad (8)$$

$$\begin{cases} \sum_{z=1}^n x_z(t_i) N_z^j \leq s_j(t_i) \\ x_z(t_i) \leq y_z + r_z(t_i) \\ x_z(t_i) \geq 0 \\ \forall j = 1, 2, \dots, d, \quad \forall z = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (9)$$

Cette politique d'optimisation locale, période par période, sans tenir compte d'éventuels futurs retards de livraisons ni du coût de stockage des composants pour les périodes suivantes, ne donne pas en général le coût moyen optimal sur plusieurs périodes. Nous le montrons par un exemple numérique où nous étudions le fonctionnement du système sur deux périodes consécutives.

La matrice des nomenclatures est donnée par  $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Le vecteur des demandes en produits finis par période est  $\mathbf{y} = (2, 2)$ , les stocks au début de la période 1 sont  $\mathbf{s}(\mathbf{t}_1) = (3, 4)$ , le vecteur des demandes en produits finis différées  $\mathbf{r}(\mathbf{t}_1) = (0, 0)$ , le vecteur des coûts de stockage de composants est  $\alpha = (10, 20)$ , le vecteur des coûts de rupture de production est  $\beta = (30, 1000)$ , le vecteur des délais prévus de livraisons de composants  $j$  est  $\mathbf{g}_j = (1, 1)$ , la probabilité de livraison à terme des composants  $j$   $\mathbf{p}_j(\mathbf{0}) = 0.5$  et la probabilité de livraisons avec une période de retard  $\mathbf{p}_j(\mathbf{1}) = 0.5$ ,  $\forall j = 1, 2$ , supposons qu'à l'instant  $t_j$  il n'y a pas de livraisons de composants en retard (tous les composants commandés pour cette date ont été livrés à terme).

i) optimisation locale (période par période)

Période 1 ( $r(t_1)=(0,0)$ ,  $s(t_1)=(3,4)$ ) : la solution optimale concernant le nombre de produits à assembler durant cette période est  $x(t_1)=(2,2)$ . Pour cette solution, le coût de production égal à  $C(1)=10+0=10$ , où 10 est le coût de stockage d'un composant de type 1 qui reste en stock et comme il n'y a pas de ruptures de production le deuxième élément de la somme est égal à 0.

Période 2 ( $r(t_2)=(0,0)$ ). En ce qui concerne les stocks de composants il y a quatre possibilités :

1. Avec la probabilité  $P1=p_1(1) \times p_2(1)=0,25$  tous les composants commandés pour la période 2 n'arrivent pas à terme (i.e. en cours de période 1) :  $s(t_2)=(1,0)$ , alors  $x(t_2)=(0,0) \Rightarrow C^1(2)=10+2060=2070$ .

2. Avec la probabilité  $P2=p_1(1) \times p_2(0)=0,25$  les composants de type 1 n'arrivent pas à terme, par contre les composants de type 2 sont livrés durant la période 1 :  $s(t_2)=(1,4)$ , alors  $x(t_2)=(0,1) \Rightarrow C^2(2)=60+1060=1120$ .

3. Avec la probabilité  $P3=p_1(0) \times p_2(1)=0,25$  les composants de type 1 sont livrés durant la période 1, mais les composants de type 2 n'arrivent pas pendant cette période :  $s(t_2)=(3,0)$ , alors  $x(t_2)=(0,0) \Rightarrow C^3(2)=30+2060=2090$ .

4. Avec la probabilité  $P4=p_1(0) \times p_2(0)=0,25$  tous les composants commandés arrivent à terme :  $s(t_2)=(3,4)$ , alors  $x(t_2)=(2,2) \Rightarrow C^4(2)=10+0=10$ .

L'espérance mathématique du coût de production, pour la période 2 :

$$E[C(2)]=2070 \times 0,25 + 1120 \times 0,25 + 2090 \times 0,25 + 10 \times 0,25 = 1322,5.$$

L'espérance mathématique du coût par période, pour cette méthode est égale à  $E(C)=(C(1)+E[C(2)])/2=(10+1322,5)/2=666,25$ .

ii) autre solution sur deux périodes

Période 1 ( $r(t_1)=(0,0)$ ,  $s(t_1)=(3,4)$ ) : la solution concernant le nombre de produits à assembler durant cette période est  $x(t_1)=(1,2)$ . Pour cette solution, le coût de production est égal à  $C(1)=30+30=60$ , où 30 est le coût de stockage d'un composant de chaque type qui restent en stock et 30 le coût d'une demande différée de produit de type 1.

Période 2 ( $r(t_2)=(1,0)$ ). Il existe les mêmes quatre possibilités de livraisons de composants :

1. Avec la probabilité  $P1=0,25$  :  $s(t_2)=(1,1)$ , alors  $x(t_2)=(0,1) \Rightarrow C^1(2)=10+1060=1070$ .

2. Avec la probabilité  $P2=0,25$  :  $s(t_2)=(1,5)$ , alors  $x(t_2)=(0,1) \Rightarrow C^2(2)=80+1060=1140$ .

3. Avec la probabilité  $P3=0,25$  :  $s(t_2)=(3,1)$ , alors  $x(t_2)=(0,1) \Rightarrow C^3(2)=20+1060=1080$ .

4. Avec la probabilité  $P4 = 0,25$  :  $s(t_2) = (3,5)$ , alors  $x(t_2) = (2,2) \Rightarrow C^4(2)=30+0=30$ .

L'espérance mathématique du coût de production, pour la période 2 :  $E[C(2)] = 1070 \times 0,25 + 1140 \times 0,25 + 1080 \times 0,25 + 30 \times 0,25 = 830$ .

L'espérance mathématique du coût par période, pour cette méthode est égal à  $E(C) = (C(1) + E[C(2)]) / 2 = (60 + 830) / 2 = 445$ .

Cet exemple montre qu'en partant de la solution où l'on cherche systématiquement le coût optimal de production pour la période courante, on peut obtenir un coût moyen supérieur à celui obtenu en travaillant sur plusieurs périodes. Dans ce dernier cas, l'amélioration du coût moyen est obtenue en acceptant de différer des demandes en produits finis dont le coût est relativement faible de façon à garder des composants qui sont susceptibles d'être en rupture de stocks et qui seront utilisés ultérieurement dans l'assemblage de produits dont le coût est plus important. Le problème est de savoir optimiser la production sur plusieurs périodes quand les livraisons pour les futures périodes ne sont connues qu'en probabilité, ce que nous développons au paragraphe suivant.

### 1.3.2 Optimisation en avenir incertain avec un horizon glissant

Les données du problème ne sont que partiellement connues. Seules les données de la période courante sont définitives, le reste est calculé en utilisant les lois de distribution de probabilité de délais de livraisons corrigées par les retards réels constatés de livraisons de composants. Pour montrer comment les données du problème (estimations de stocks et lois de probabilité de délais de livraisons) peuvent changer durant le fonctionnement du système, donnons un exemple numérique.

Dans l'exemple,  $\hat{s}_j(t_k)$  est l'espérance mathématique du niveau potentiel (sans prélèvement de composants pour assemblage) du stock de composants  $j$ , les probabilités  $p_j(t_k | t_i)$  forment des lois conditionnelles de distribution de délais de livraisons de composants (sachant qu'à l'instant  $t_i$  la livraison correspondante n'a pas eu lieu,  $t_k > t_i$ ), rappelons que pour les commandes dont une des dates possibles de livraison  $t_i$  est dépassée sans que la livraison ait eu lieu, les probabilités de futures livraisons calculées a posteriori sont :

$$p_j(t_k | t_i) = \frac{p_j(t_k)}{1 - p_j(t_i)}, \quad (10)$$

où  $p_j(t_i)$  est la probabilité de livraison à la date courante  $t_i$  (pendant la période  $i-1$ ) calculée a priori,  $i=0,1,2, \dots$ . Les numéros des périodes pour lesquelles on fait des calculs sont encadrés dans les tableaux par une double ligne. Les colonnes de tableaux représentent les périodes de fonctionnement, les lignes des commandes de composants. La date où la commande a été faite est marquée par un "x" dans la colonne correspondante.  $\square$  signifie que la livraison correspondante

n'a pas eu lieu.

Supposons que l'on commande toujours  $q_j=10$  unités de composants de type  $j$ , que le délai prévu de livraison  $g_j$  soit égal à 3 périodes à partir de la date de la commande correspondante, et que la loi de distribution de probabilité des retards de livraisons soit la suivante :  $p_j=(p_j(0)=0,5 ; p_j(1)=0,25 ; p_j(2)=0,25)$ , où  $p_j(m)$  est la probabilité que le retard de livraisons soit égal à  $m$  périodes ( $m=0$  signifiant l'absence de retard de livraison). Supposons que le stock de composants  $j$  à l'instant  $t_i$  soit égal à 5 unités et qu'il n'y ait pas de retards de livraison de composants. Nous étudions trois périodes consécutives  $i, i+1, i+2$  avec à chaque fois le calcul de prévisions sur les 3 prochaines périodes.

Les données du problème à l'instant  $t_i$  sont donc les suivantes :

Instants de commandes de composants $j$			Probabilités des dates de futures livraisons des composants : $p_j(t_k \forall i), k=i+1, i+2, \dots$				
i-2	i-1	i	i+1	i+2	i+3	i+4	i+5
		x			0,5	0,25	0,25
	x			0,5	0,25	0,25	
x			0,5	0,25	0,25		

$$s_j(t_i)=5, \hat{s}_j(t_{i+1})=5+0,5 \times 10=10, \hat{s}_j(t_{i+2})=10+0,25 \times 10+0,5 \times 10=22,5.$$

Les mêmes données à l'instant  $t_{i+1}$ , sachant que les composants commandés n'ont pas été livrés durant la période  $i$ , et que pendant la période  $i$  nous avons utilisé 4 composants  $j$ , sont :

Instants de commandes de composants $j$				Probabilités des dates de futures livraisons des composants : $p_j(t_k \forall i+1), k=i+2, i+3, \dots$			
i-2	i-1	i	i+1	i+2	i+3	i+4	i+5
			x			0,5	0,25
		x			0,5	0,25	0,25
	x			0,5	0,25	0,25	
x			0	0,5	0,5		

$$s_j(t_{i+1})=1,$$

$$\hat{s}_j(t_{i+2})=1+0,5 \times 10+0,5 \times 10=11, \hat{s}_j(t_{i+3})=11+0,5 \times 10+0,25 \times 10+0,5 \times 10=23,5.$$

Et enfin, à l'instant  $t_{i+2}$ , si l'on sait que la livraison n'a pas eu lieu non plus durant la période  $i+1$ , et que nous avons utilisé, pendant cette période, le dernier composant qui était en stock.

Instants des commandes de composants $j$					Probabilités des dates de futures livraisons des composants : $p_j(t_k   t_{i+2})$		
i-2	i-1	i	i+1	i+2	i+3	i+4	i+5
				x			0,5
			x			0,5	0,25
		x			0,5	0,25	0,25
	x			0	0,5	0,5	
x			0	0	1		

$$s_j(t_{i+2})=0, \hat{s}_j(t_{i+3})=0+1 \times 10+2 \times 0,5 \times 10=20, \hat{s}_j(t_{i+4})=20+2 \times 0,5 \times 10+0,25 \times 10=32,5.$$

Cet exemple montre qu'au moment du calcul pour  $h$  prochaines périodes, les stocks de composants sont certains pour la période courante, par contre les stocks pour les  $h-1$  périodes suivantes ne sont que des estimations basées sur l'information concernant les lois de distribution des délais de livraison. Aussi, quand le temps progresse et que nous arrivons au début de la prochaine période, les données peuvent avoir changé : les pronostics, pour la nouvelle période courante, sont remplacés par les stocks réels, les lois conditionnelles de distribution de délais de livraisons de composants sont recalculées en tenant compte de tout ce qui s'est passé durant la période écoulée (la consommation des composants, les livraisons de composants d'un type et les retards de livraisons de composants d'autres types).

Pour l'optimisation de la gestion d'assemblage (variables décisionnelles  $x_j(t_i)$  du modèle (1)-(7)), nous allons donc utiliser la technique de l'horizon glissant qui est illustrée par la figure 3.

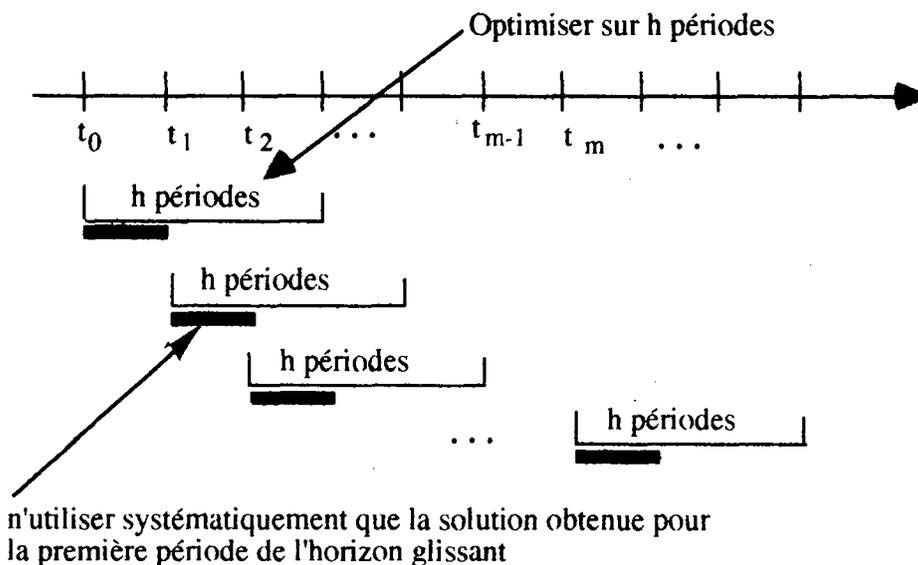


Figure 3 : optimisation avec horizon glissant

Cette technique consiste en l'application de la démarche suivante : quand il faut décider le nombre de produits de chaque type à assembler, on applique un modèle d'optimisation sur un horizon de  $h$  périodes (optimisation de l'utilisation des composants pour les  $h$  prochaines périodes) et *on n'utilise que les solutions concernant la première période* (période courante) réalisables sûrement. On itérera les mêmes calculs à la période suivante, etc.

Nous donnerons ci-dessous quelques commentaires concernant les paramètres du modèle qui sont : la valeur de  $h$  et la *méthode choisie  $M_p$  de calcul* des prévisions sur les futurs stocks réels de composants.

Dans le précédent exemple,  $h=3$  et la méthode  $M_p$  utilisée a été *l'estimation en espérance mathématique de stocks*. Nous verrons plus loin d'autres méthodes pour estimer les futures variations de stocks ainsi que comment choisir  $h$ . L'existence d'une valeur de  $h < \infty$  pour laquelle la solution du modèle sur *l'horizon glissant* est quasiment équivalente à la solution optimale du modèle sur *un horizon infini* peut être expliquée de la manière suivante :

- Les niveaux de stocks en début de période, à cause du caractère stochastique des délais de livraisons de composants, descendent de temps en temps en dessous des besoins moyens en composants par période, puis remontent au dessus de ce niveau (s'ils ne remontent plus le système se dégrade en accumulant les coûts de rupture de production). La concurrence entre les produits demandant une éventuelle réservation d'une partie des composants en stocks pour mieux les utiliser pendant les périodes futures apparaît quand le stock correspondant a tendance à décroître. Cette répartition des composants n'a de sens que jusqu'à la première période où le stock passera à nouveau au dessus du niveau des besoins moyens, cette fois en remontant. Ce dernier intervalle est forcément limitée. Notons que plus les ruptures de stocks de composants sont fréquentes et plus elles sont de courte durée, plus  $h$  pourra être choisi petit.
- Nous n'avons que des prévisions des futures livraisons, plus  $h$  est petit plus nos prévisions sont sûres (voir au paragraphe 2.3.2 le calcul de la valeur limite de  $h$  pour certaines méthodes de prévisions).
- Le coût de répartition des composants comprend le coût de stockage (par exemple, si l'on a besoin de garder un composant qui est en stock à l'instant  $t_i$  pour l'utiliser pendant la  $(i+10)$ -ème période, il faut payer son stockage durant 10 périodes), le coût de stockage de composants contrebalance donc la diminution éventuelle des coûts de rupture de production et limite la valeur effective de  $h$ .

En tenant compte du coût de stockage de composants, nous pouvons calculer une première valeur majorante pour la longueur de l'horizon :

$$h' = \max_j [\max_z (\beta_z / N_z^j) / \alpha_j], \quad \forall z = 1, 2, \dots, n, \quad \forall j = 1, 2, \dots, d, \quad N_z^j \neq 0 \quad (11)$$

Nous allons chercher par simulation une valeur effective pour  $h$  avec  $h \leq h'$  qui tient compte de tous les facteurs explicités ci-dessus.

### 1.3.3 Modèle générique

Nous parlons d'un modèle générique, car il s'agit d'un modèle paramétré dont les paramètres dépendent des données numériques du système d'assemblage étudié et des méthodes de résolution utilisées. Nous désignons ce modèle de la façon suivante :

$$MG(s(t_0), h, M_p).$$

Les paramètres sont les niveaux de stocks initiaux  $s(t_0)$ , le nombre de périodes  $h$  utilisées dans la technique de programmation linéaire avec horizon glissant et la méthode de prévisions choisie  $M_p$ . L'influence de ces trois paramètres n'est pas de la même nature : des stocks initiaux plus grands diminuent la probabilité de rupture de stocks de composants, tandis que la longueur  $h$  de l'horizon et la méthode de calcul de prévisions  $M_p$  bien choisies permettent d'améliorer l'efficacité de fonctionnement du système si des ruptures de stocks apparaissent.

Pour chaque système modélisé et pour chaque niveau de demandes en produits finis, de bonnes valeurs pour les paramètres sont recherchés par simulation. Une fois les paramètres obtenus, il est possible d'utiliser ce modèle pour la gestion du système correspondant.

Les paragraphes suivants donnent la formulation des divers constituants du modèle et les méthodes de simulation utilisées pour l'"optimisation" de ces paramètres.

## 2 MODELES ET METHODES DE RESOLUTION

### 2.1 Modèle de simulation

Le modèle de simulation utilise les formulations du modèle abstrait (1)-(7) en remplaçant les valeurs inconnues  $\delta_{d,k}^j$  par des valeurs  $\tilde{\delta}_{d,k}^j$  générées selon les lois de distributions de probabilité de ces inconnues. Ainsi, les simulations sur un grand nombre de périodes permettent de tester le comportement du système en régime permanent pour toute valeur fixée des paramètres  $s(t_0)$ ,  $h$ ,  $M_p$  et de trouver les paramètres optimisant son fonctionnement.

L'algorithme élémentaire  $MG_i(s(t_0), h, M_p)$  associé à la période  $i$  de la simulation est le suivant.

Algorithme 1 :

1. Commander les composants.
2. Calculer les lois conditionnelles de distribution de probabilité des délais de livraisons de composants qui ne sont pas arrivés avant la date courante.
3. Calculer les prévisions des futures livraisons de composants selon la méthode de prévisions  $M_p$  choisie.
4. Calculer avec un modèle de programmation linéaire sur  $h$  périodes, les volumes de produits qui doivent effectivement être assemblés durant la période courante.
5. Calculer le coût de production.
6. Simuler l'arrivée de composants pendant la période courante.
7. Corriger les stocks de composant à la fin de la période.

L'application de cet algorithme de manière cyclique donne le modèle de simulation. Les principaux constituants de ce modèle sont les prévisions stochastiques des futures livraisons de composants et un modèle de programmation linéaire expliqué dans le paragraphe suivant.

## 2.2 Formulation mathématique du modèle de programmation linéaire

Le noyau de  $MG_i(s(t_0), h, M_p)$  est un modèle de programmation linéaire. La forme canonique de ce dernier (dans l'annexe 1 nous donnons sa démonstration) est la suivante :

### Critère retenu

$$\sum_{k=i}^{i+h-1} \sum_{z=1}^n (h-k) x_z(t_k) \left( \beta_z + \sum_{j=1}^d N_z^j \alpha_j \right) \rightarrow \max \quad (12)$$

### Contraintes

$$\begin{cases} \sum_{z=1}^n x_z(t_i) N_z^j \leq s_j(t_i) \\ \sum_{z=1}^n x_z(t_i) N_z^j + \sum_{z=1}^n x_z(t_{i+1}) N_z^j \leq s_j(t_i) + \hat{L}_j[t_i, t_{i+1}] \\ \dots \\ \sum_{z=1}^n x_z(t_i) N_z^j + \sum_{z=1}^n x_z(t_{i+1}) N_z^j + \dots + \sum_{z=1}^n x_z(t_{i+h-1}) N_z^j \leq s_j(t_i) + \hat{L}_j[t_i, t_{i+h-1}] \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} x_z(t_i) \leq y_z + r_z(t_i) \\ x_z(t_i) + x_z(t_{i+1}) \leq 2y_z + r_z(t_i) \\ \dots \\ \sum_{k=i}^{h-1} x_z(t_k) \leq h y_z + r_z(t_i), \quad \forall z = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (14)$$

$$x_z(t_k) \geq 0, \quad \forall z = 1, 2, \dots, n \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots, h-1 \quad (15)$$

où  $\hat{L}_j[t_i, t_{i+m}]$  sont les prévisions, faites d'après la méthode choisie  $M_p$ , concernant la quantité de composants de type  $j$  qui serait arrivée dans l'intervalle de temps entre  $t_i$  et  $t_{i+m}$ .

### 2.3 Méthodes de prévisions de livraisons de composants

Nous proposons deux types de méthodes : les prévisions de stocks en espérance mathématique et les prévisions sur un échantillon.

#### 2.3.1 Prévisions en espérance mathématique (Méthode M1)

Les prévisions des futures volumes de livraisons de composants en espérance mathématique sont obtenues par la formule suivante :

$$\hat{L}_j[t_i, t_{i+m}] = \sum_{k=i}^{i+m-1} \sum_{d \in \theta_j(t_i)} q_j \left\{ p_j(k-d-g_j) / \left( 1 - \sum_{v=1}^{i-d} p_j(v-g_j) \right) \right\} \quad (16)$$

où  $\theta_j(t_i)$  est l'ensemble des numéros de périodes précédant la période  $i$ , dont les commandes de composants  $j$  ne sont pas encore arrivées à l'instant  $t_i$ .

Rappelons ici que par définition,  $p_j(\tau)$  est la probabilité, connue a priori (au moment de la commande), que le délai de livraison de composants  $j$  soit égal à  $\tau + g_j$  périodes où  $g_j$  est le délai prévu de la livraison, i.e.  $p_j(\tau)$  est la probabilité d'un retard de livraison de  $\tau$  périodes. L'expression entre les accolades donne donc la probabilité conditionnelle que les composants  $j$  commandés à l'instant  $t_d$  arrivent pendant la période  $k$ , quand on sait qu'ils ne sont pas arrivés avant  $t_i$ .

#### 2.3.2 Prévisions sur un échantillon (Méthode M2 et M3)

La seconde famille de méthodes de prévisions se basent sur le choix d'un échantillon des délais de livraisons de composants. Le principe est le suivant : en utilisant les probabilités

conditionnelles (les lois conditionnelles de distributions de probabilités) des délais de livraisons, choisir une réalisation possible pour les futurs livraisons et l'utiliser dans les calculs des prévisions des stocks. Nous avons testé plusieurs façons d'obtenir cet échantillon. Ce qui nous a donné en particulier les méthodes suivantes.

### Méthode M2

Une méthode classique consiste à utiliser comme échantillon une génération aléatoire des délais de livraisons. Cette méthode est appelée ici méthode *des prévisions randomisées* :

$$\hat{L}_j[t_i, t_{i+m}] = \sum_{k=i}^{i+m-1} \sum_{d \in \theta_j(t_i)} q_j \tilde{\delta}_{d,k}^j \quad (17)$$

$$\text{où } \tilde{\delta}_{d,k}^j = \begin{cases} 1 & \text{si dans l'échantillon aléatoire les composants de type } j \text{ commandés} \\ & \text{à l'instant } t_d \text{ arrivent durant la période } k ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (18)$$

Notons que les valeurs  $\tilde{\delta}_{d,k}^j$  utilisées dans ce modèle remplacent, pour le calcul des prévisions, les valeurs inconnues  $\delta_{d,k}^j$  du modèle abstrait (1)-(7) (dans les simulations faites pour trouver les paramètres de  $MG(s(t_0), h, Mp)$  elles remplacent les valeurs  $\tilde{\delta}_{d,k}^j$  "supposées inconnues"). Ces deux ensembles de valeurs aléatoires se caractérisent par les mêmes lois de distributions de probabilité.

On peut proposer d'autres méthodes se basant sur des échantillons particuliers non randomisés. Par exemple, sur ceux utilisant la valeur la plus probable des délais (plus grand mode des lois de distribution) ou encore la valeur qui se trouve à la même distance du délai maximum et du délai minimum possibles (médiane des lois de distribution) etc. L'efficacité de ces méthodes dépendent des formes des lois de distribution de probabilités de délais de livraisons. Dans ce travail nous avons testé la méthode présentée ci-dessous qui se base sur l'échantillon choisi suivant les délais moyens de livraisons de composants.

### Méthode M3

Cette méthode utilise la valeur moyenne des délais de livraison, les prévisions de futures livraisons de composants seront donc calculées d'après la formule suivante :

$$\hat{L}_j[t_i, t_{i+m}] = \sum_{k=i}^{i+m-1} \sum_{d \in \theta_j(t_i)} q_j \hat{\delta}_{d,k}^j \quad (19)$$

$$\text{où } \hat{\delta}_{d,k}^j = \begin{cases} 1 & \text{si } k - d \text{ est l'entier le plus proche de la valeur moyenne} \\ & \text{des délais de livraison des composant de type } j \\ & \text{commandés à l'instant } t_d ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (20)$$

Les valeurs  $\hat{\delta}_{d,k}^j$  remplacent les valeurs inconnues  $\delta_{d,k}^j$  du modèle abstrait ou les valeurs  $\bar{\delta}_{d,k}^j$  "supposées inconnues" du modèle de simulation. Notons ici que pour cette méthode de prévisions ainsi que pour la méthode  $M_1$  la longueur de l'horizon glissant  $h$  est limitée par  $h = \tau_{max}$  où  $\tau_{max}$  est le retard maximum possible de livraisons de composants. Cela s'explique par le fait que, pour les périodes plus éloignées, ces méthodes donnent toujours comme prévisions de futures livraisons la valeur  $q_j$  (quantité commandée au début de chaque période égale aux besoins moyens en composants par période).

### 2.3.3 Prévisions à cent pour cent ("Méthode" $M_0$ )

L'idée de cette "méthode" est d'utiliser, dans les calculs des prévisions de chaque simulation les valeurs  $\bar{\delta}_{d,k}^j$  qui gèrent l'arrivée de composants pour cette simulation. Nous supposons donc que nous connaissons parfaitement à l'avance les dates d'arrivée des composants.

Cette technique nous permet d'éliminer des résultats les augmentations de coût dues aux erreurs de prévisions et nous fournit donc un "coût idéal" qui servira de base de comparaison pour les diverses expérimentations. Cette méthode permet également de trouver une estimation de l'horizon  $h$ , car la valeur de  $h$  pour les autres méthodes de prévisions ne sera jamais supérieure à celle qui peut être trouvée avec les prévisions à cent pour cent.

## 2.4 Méthodes d'optimisation des stocks initiaux

### 2.4.1 Algorithme de simulation

Nous proposons de calculer les stocks optimaux  $s^*(t_0)$  en utilisant l'algorithme ci-dessous dont nous détaillerons ensuite les différentes phases.

#### Algorithme 2 :

1. Initialiser le modèle générique  $MG(s(t_0), h, M_p)$  avec des valeurs de stocks initiaux générées de manière aléatoire dans l'intervalle  $[s_{min}^j, s_{max}^j] \forall j=1,2, \dots, d$  et avec les paramètres  $h$  et  $M_p$  choisis ; initialiser  $k$  à 1.
2. Simuler  $MG(s(t_0), h, M_p)$  pendant  $M$  périodes et calculer au fur et à mesure de

l'avancement de la simulation les dérivées partielles du coût de production par rapport aux stocks initiaux de chaque composant  $j, j=1,2, \dots, d, \gamma_j^k = \partial CR / \partial s_j(t_0)$  ainsi que les quantités en surplus  $SP^k_j$  et en manque  $MN^k_j$  du composant  $j$  en moyenne par période.

3. Calculer le vecteur des corrections des stocks initiaux  $w^k = f(\gamma^k, SP^k, MN^k, w^{k-1})$ .
4. Si  $\|w^k\| = 0$ , alors  $s^*(t_0) = s^k(t_0)$ , fin de l'algorithme ; sinon  $s^{k+1}(t_0) = s^k(t_0) + w^k$ ,  $k = k+1$ , aller en 2.

Dans les paragraphes qui suivent nous expliquons les principales étapes de cet algorithme.

#### 2.4.2 Calcul des dérivées partielles

Les dérivées partielles du coût de production par rapport au niveau de stock initial de chaque composant  $j, j=1,2,3 \dots, d$  sont calculées d'après la formule suivante :

$$\gamma_j = \frac{1}{M} \left( \sum_{i=0}^{M-1} (\alpha_j \zeta_j^i) - \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{z=1}^n (\beta_z \psi_{z,j}^i / N_z^j) \right) \quad (21)$$

où  $M$  est le nombre de périodes de chaque simulation,  $i = 0, 1, 2, \dots, M-1$ .

Le principe est de calculer la valeur du changement du coût moyen de production qui va se produire si "on bouge" légèrement les stocks. La valeur absolue de  $\gamma_j$  montre la *diminution potentielle du coût de production* par l'adjonction ou la suppression d'une petite quantité de composants de type  $j$ . Si  $\gamma_j < 0$ , cette diminution peut être obtenue en augmentant le stock initial, si  $\gamma_j > 0$ , en diminuant le stock initial.

Dans (21) nous utilisons les variables d'état du modèle de simulation  $\zeta_j^i$  et  $\psi_{z,j}^i$ . La variable  $\zeta_j^i$  montre s'il y a ou non des composants  $j$  en stock à l'instant  $t_i$  qui ne seront pas utilisés pendant la période  $i$ . La variable  $\psi_{z,j}^i$  montre si le produit  $z$  a été retardé ou non à cause d'un manque de composant  $j$ . Pour calculer la valeur de  $\zeta_j^i$  nous utilisons la formule suivante :

$$\zeta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta_j(t_i) > 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{où } \Delta_j(t_i) = s_j(t_i) - \sum_{z=1}^n x_z(t_i) N_z^j \quad (23)$$

Pour calculer la valeur de  $\psi_{z,j}^i$  nous rangeons préalablement les produits par l'ordre de priorité selon leur coût relatif de rupture : soit  $D_z^j$  l'ensemble des numéros de produits dont le coût relatif de rupture de production est supérieur au coût relatif de rupture de production du produit  $z$ ,

$z=1,2, \dots, n$ , alors  $K \in D_z^j$ , si  $\beta_K / N_K^j > \beta_z / N_z^j$ . Le nombre de composants  $j$  qui sont en stock et qui resteraient disponibles après avoir "réserver" les composants nécessaires pour satisfaire les demandes différées des produits "plus prioritaires" que  $z$  est donné par la formule suivante :

$$\Delta_j^z(t_i) = \left[ \Delta_j(t_i) - \sum_{f \in D_z^j} N_f^j r_f(t_{i+1}) \right]^+ \quad (24)$$

Alors,

$$\psi_{z,j}^i = \begin{cases} 1 & \text{si } r_z(t_{i+1}) > 0 \text{ et } \Delta_j^z(t_i) < N_z^j r_z(t_{i+1}); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (25)$$

La variable  $\psi_{z,j}^i$  est donc égal à 1, si à la fin de la période  $i$ , il reste de demandes différées du produit  $z$  et si le nombre de composants  $j$  qui sont "disponibles" pour les produits de ce type, après d'avoir déduit ceux qui pourraient être utilisés dans les produits "plus chers", est inférieur aux besoins.

#### 2.4.3 Calcul des corrections des stocks initiaux

Le principe de recherche de valeurs optimales de stocks est présenté dans la figure 4. Nous recherchons les stocks pour lesquels  $\gamma_j = 0, \forall j = 1, 2, \dots, d$ . La courbe de variation du coût de production pour chaque composant est approchée par sa tangente aux alentours du stock initial courant. Le signe de l'angle de la tangente par rapport à l'axe du stock (la dérivée  $\gamma_j$ ) donne la direction de correction du stock. L'intervalle  $w$ , dans lequel nous supposons la courbe de coût linéaire sera la valeur absolue de cette correction (les  $w$  sont choisis très grands sur le schéma pour mieux illustrer la méthode).

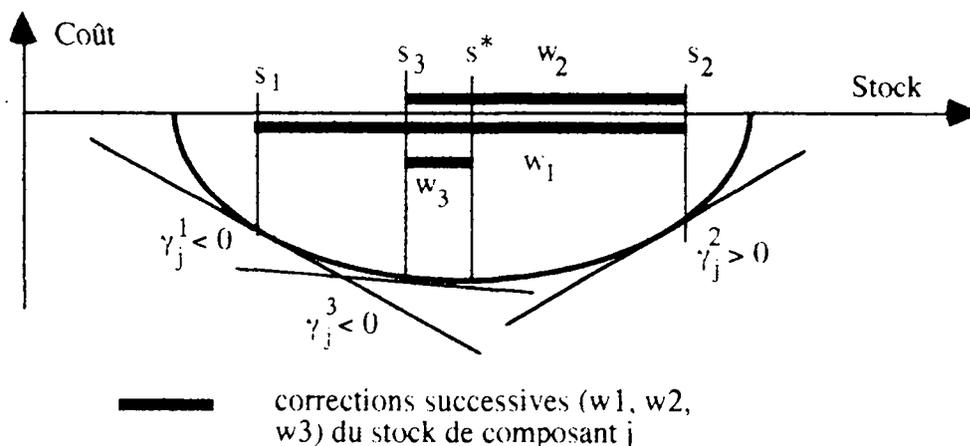


Figure 4 : corrections successives d'un stock de composants

L'algorithme de calcul de cet intervalle  $w$  utilise les deux valeurs suivantes calculées, elles aussi, pendant la simulation :

la valeur moyenne de composants  $j$  en surplus

$$SP_j = 1/M \sum_{i=0}^{M-1} \left[ \Delta_j(t_i) - \sum_{z=1}^n (r_z(t_{i+1}) N_z^j) \right]^+ \quad (26)$$

et la valeur moyenne de composants  $j$  manquant

$$MN_j = 1/M \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{z=1}^n (r_z(t_{i+1}) N_z^j - \Delta_j^-(t_i)) \psi_{z,j}^i \quad (27)$$

Quand  $\gamma_j$  change de signe (de négatif à positif ou inversement), la correction du stock initial de composants  $j$  est le minimum de deux valeurs : la moitié de la valeur de correction du même stock à l'itération précédente et la valeur de correction "suggérée" par la simulation ( $SP_j$  ou  $MN_j$ ).

Les variantes possibles de calcul de corrections de stocks à l'itération  $k$ , pour tout  $j=1,2,\dots, d$ , et pour toute valeur de  $\gamma_j^k$  et  $w_j^{k-1}$  est donné dans l'algorithme 3 (on initialise avant la première étape de la façon suivante  $k=0, w_j^0=0, \rho_j^1=1$ ). Le coefficient  $\rho_j^k$  augmente à chaque fois que nous ne pouvons plus changer le niveau du stock initial de la composante  $j$ . Cela veut dire que l'optimum est proche et, en conséquence, il faut "ralentir les pas de correction".

Algorithme 3 :

1.  $k=k+1$ .
2. Si  $\gamma_j^k > 0$  et  $w_j^{k-1} > 0$ , alors  $w_j^k = -\min(0.5w_j^{k-1}, SP_j^k/\rho_j^k)$ .
3. Si  $\gamma_j^k > 0$  et  $w_j^{k-1} < 0$ , alors  $w_j^k = -\min(|w_j^{k-1}|, SP_j^k/\rho_j^k)$ .
4. Si  $\gamma_j^k > 0$  et  $w_j^{k-1} = 0$ , alors  $w_j^k = -SP_j^k/\rho_j^k$ .
5. Si  $\gamma_j^k < 0$  et  $w_j^{k-1} < 0$ , alors  $w_j^k = \min(0.5|w_j^{k-1}|, MN_j^k/\rho_j^k)$ .
6. Si  $\gamma_j^k < 0$  et  $w_j^{k-1} > 0$ , alors  $w_j^k = \min(w_j^{k-1}, MN_j^k/\rho_j^k)$ .
7. Si  $\gamma_j^k < 0$  et  $w_j^{k-1} = 0$ , alors  $w_j^k = \min(MN_j^k/\rho_j^k)$ .
8. Si  $w_j^k = 0$ , alors  $\rho_j^{k+1} = \rho_j^k + 1$ .
9. Corriger les stocks initiaux :  $s_j(t_0) = s_j(t_0) + w_j^k$  ; si  $s_j(t_0) > s_j^{max}$ , alors  $s_j(t_0) = s_j^{max}$  ; si  $s_j(t_0) < s_j^{min}$ , alors  $s_j(t_0) = s_j^{min}$ .

Dans l'annexe 2 nous donnons un exemple de test de cette méthode. Dans l'annexe 3 nous faisons un rappel de la méthode de Monte Carlo dont les résultats seront comparés avec ceux de notre

méthode dans le paragraphe 3.2.5.

## 2.5. Méthodologie d'utilisation du modèle

L'analyse des caractéristiques du modèle générique que nous avons fait, nous a conduit à proposer plusieurs étapes pour son utilisation pratique. Ces étapes sont présentées dans l'algorithme 4.

### Algorithme 4 :

1. Rechercher les stocks optimaux  $s^*(t_0)$  en utilisant l'algorithme 2 appliqué au modèle générique avec  $h=1$ .
2. Calculer la valeur  $h'$  d'après la formule (11).
3. Trouver  $h_{max}$  qui minimise le coût en étudiant les résultats de  $MG(s^*(t_0), h_{max}, M_0)$ , pour  $h_{max} = h_1, h_2, \dots$  ( $h_1 = h'$ ,  $h_i > h_{i+1}$ ,  $h_i \geq 1$ ).
4. Si  $h_{max} = 1$ , alors  $h^* = 1$  et aller en 7.
5. Étudier les modèles  $MG(s^*(t_0), h, M_i)$ , pour toutes les méthodes de prévisions  $M_i$  possibles ( $i \neq 0$ ) et  $h = h_1, h_2, \dots$ , où  $h_1 = \min(h_{max}, h'')$ ,  $h_i > h_{i+1}$ ,  $h_i \geq 1$ , choisir la méthode  $M_{i^*}$  et  $h^*$  qui donnent le meilleur coût moyen de production  $CR(s^*(t_0), h^*, M_{i^*})$ .
6. Si  $CR(s^*(t_0), h^*, M_{i^*}) \geq CR(s^*(t_0), 1)$ , alors  $h^* = 1$ .
7. Utiliser le modèle choisi  $MG(s^*(t_0), h^*, M_{i^*})$ , pour la planification de production du système d'assemblage correspondant.

Les résultats des expérimentations numériques permettant d'évaluer l'influence de différents paramètres du modèle et illustrant les principales étapes de l'algorithme 4 sont donnés dans la section suivante.

## 3. EXPERIMENTATIONS NUMERIQUES

### 3.1 Mise en place du plan d'expériences

#### 3.1.1 Programme de simulation

Nous avons développé un programme en C sous Unix qui permet d'expérimenter les modèles décrits ci-dessus. Dans son état actuel le programme peut traiter des exemples avec au maximum 100 produits, 300 composantes et 100 périodes de prévisions possibles.

Le programme utilise pour la résolution du problème de programmation linéaire, le logiciel OSL d'IBM. Il peut être utilisé pour l'analyse d'autres algorithmes de gestion des systèmes d'assemblage de ce type proposés dans la littérature [3], pour cela il suffit de remplacer les

fonctions écrites sous OSL par celles qui réalisent le choix de produits effectivement assemblés et, si nécessaire, de changer la fonction de calcul des volumes de composants à commander qui, dans notre cas, renvoie des valeurs constantes.

### 3.1.2 Exemples numériques

Pour étudier l'influence des différents paramètres du modèle, nous avons choisi cinq exemples présentés ci-dessous. La matrice des nomenclatures  $N$ , pour chaque exemple, a été générée de manière aléatoire, en utilisant la distribution uniforme dans l'intervalle  $[0,10]$ . Ce qui nous a permis d'avoir des compositions différentes d'un produit à l'autre utilisant des composants identiques.

exemple 1	exemple 2	exemple 3	exemple 4	exemple 5																																																												
<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td>4</td><td>8</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>9</td></tr><tr><td>0</td><td>6</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>1</td></tr></table>	4	8	4	4	3	9	0	6	2	4	7	1	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td>0</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>8</td><td>6</td><td>1</td></tr><tr><td>7</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	0	5	3	3	2	0	8	6	1	7	1	2	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td>9</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>7</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	9	2	2	5	6	6	3	4	3	7	3	1	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td>4</td><td>9</td><td>9</td></tr><tr><td>7</td><td>8</td><td>0</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td><td>8</td></tr><tr><td>3</td><td>10</td><td>3</td></tr></table>	4	9	9	7	8	0	5	5	8	3	10	3	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse;"><tr><td>7</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>0</td><td>8</td></tr><tr><td>1</td><td>7</td><td>3</td></tr></table>	7	0	4	6	1	4	6	0	8	1	7	3
4	8	4																																																														
4	3	9																																																														
0	6	2																																																														
4	7	1																																																														
0	5	3																																																														
3	2	0																																																														
8	6	1																																																														
7	1	2																																																														
9	2	2																																																														
5	6	6																																																														
3	4	3																																																														
7	3	1																																																														
4	9	9																																																														
7	8	0																																																														
5	5	8																																																														
3	10	3																																																														
7	0	4																																																														
6	1	4																																																														
6	0	8																																																														
1	7	3																																																														

Le vecteur de demandes de produits finis par période est  $y=(10,10,10)$ . Les délais prévus de livraison de composants ainsi que les lois de distribution de probabilité des retards de livraison sont les mêmes pour tous les composants :  $g=(1,1,1,1)$  ;  $p=(p(0)=0.333, p(1)=0.333, p(2)=0.334)$ . Le vecteur des coûts de stockage des composants est  $\alpha=(10,10,10,10)$ . Le vecteur des coûts de rupture de production est  $\beta=(10,100,1000)$ . Ce sont les données de base, dans les expériences présentées plus loin nous changeons parfois quelques unes de ces données, pour créer des jeux de données particuliers.

Pour la plupart des expériences, nous avons utilisé les stocks initiaux égaux à leur minorant, sauf pour les exemples où nous étudions l'influence des stocks initiaux (voir tableaux 5 et 6). Le *modèle de base*, qui permet d'évaluer l'intérêt de l'optimisation sur plusieurs périodes, est le *modèle d'optimisation locale* ( $h^*=1$ ).

### 3.1.3 Plan d'expériences

Nous avons utilisé notre programme pour étudier l'influence des différents paramètres du modèle et trouver leurs champs d'application. Nous avons commencé par montrer les limites de la méthode générale en donnant des exemples où l'utilisation du *modèle de base* se révèle aussi intéressante (voir paragraphe 3.2.1).

Nous avons comparé ensuite l'efficacité des méthodes de prévision en espérance mathématique et

sur un échantillon (paragraphe 3.2.2) en considérant deux méthodes de prévisions sur échantillon : échantillon randomisé et échantillon utilisant la moyenne de distribution de probabilité des délais de livraisons.

L'intérêt des bornes maximales pour la longueur de l'horizon  $h^*$  (voir le paragraphe 1.3.2) est vérifié dans le paragraphe 3.2.3. La sensibilité des méthodes de prévisions aux niveaux de stocks initiaux est étudiée dans le paragraphe 3.2.4. Et enfin, les résultats de la recherche des stocks optimaux pour le début du régime permanent que nous avons faite sont présentés dans le paragraphe 3.2.5.

## 3.2 Résultats des expériences

### 3.2.1 Importance des variations des coûts de rupture de production

Le tableau 1 présente les résultats dans le cas où les coûts de rupture de production sont les mêmes pour tous les produits :  $\beta = (100, 100, 100)$ . La première colonne du tableau 1 contient la valeur (notée  $C_b$ ) du critère considéré (coût moyen de production par période) pour les expériences réalisées en utilisant le modèle de base. La deuxième colonne contient les résultats relatifs à l'utilisation de la méthode  $M_0$  : prévisions à 100% (cas idéal, inaccessible en pratique). La première sous-colonne contient la valeur (notée  $C_{100}$ ) du critère, c'est un minorant du coût que l'on peut espérer obtenir avec n'importe quelle autre approche. La deuxième sous-colonne (%1) mesure le pourcentage de gain obtenu par  $M_0$  par rapport au modèle de base, c'est-à-dire  $(C_b - C_{100})/C_b * 100$ .

La troisième et la quatrième colonnes du tableau 1 contiennent respectivement les résultats obtenus en utilisant les méthodes de prévisions  $M_1$  ou  $M_2$ . La première sous-colonne contient la valeur ( $C_m$ ) du critère coût. La deuxième sous-colonne mesure le pourcentage de gain obtenu pour la méthode correspondante par rapport au modèle de base, c'est-à-dire  $(C_b - C_m)/C_b * 100$ . La troisième sous-colonne (%3 ou %5) contient ce que nous appellerons pour simplifier la "proportion de gain" obtenue, il s'agit du ratio du gain obtenu par la méthode utilisée divisé par la valeur du gain potentiel obtenue par la méthode idéale, le tout exprimé en pourcentage, c'est-à-dire  $(C_b - C_m)/(C_b - C_{100}) * 100$ .

Les résultats montrent que, dans le meilleur des cas, la méthode idéale  $M_0$  fait gagner au plus 8% par rapport au modèle de base et que dans ce cas, l'utilisation des prévisions sur un horizon  $h > 1$  permet d'obtenir un gain égal seulement à 2 ou 3% de ce gain potentiel de 8% (au plus 0,2% par rapport au modèle de base). Cela veut dire que, pour la gestion de ce système il suffit d'utiliser le modèle de base beaucoup plus simple et plus rapide.

Tableau 1

	modèle de base	prévisions à 100/100		prévisions avec la méthode M <sub>1</sub>			prévisions avec la méthode M <sub>2</sub>		
		Coût	%1	Coût	%2	%3	Coût	%4	%5
exemple 1	6677	6249	6,4	6677	0,0	0,0	6677	0,0	0,0
exemple 2	5542	5336	3,7	5538	0,1	1,9	5542	0,0	0,0
exemple 3	7273	6750	7,2	7259	0,2	2,7	7273	0,0	0,0
exemple 4	7773	7430	4,4	7773	0,0	0,0	7773	0,0	0,0
exemple 5	6367	5860	8,0	6355	0,2	2,4	6367	0,0	0,0

Ces résultats confirment notre hypothèse que l'utilisation des modèles plus sophistiqués avec l'horizon de prévisions des livraisons de composants  $h > l$  n'a de sens que si nous pouvons garder les composants en stock pour assembler ultérieurement des produits dont le coût de rupture est beaucoup plus important (il existe une différence significative de coût de rupture de production).

### 3.2.2 Comparaison des méthodes de prévisions

Dans le tableau 2 est présenté les résultats pour les mêmes exemples, mais dans le cas où le vecteur de coût de rupture de production est le suivant :  $\beta = (10, 100, 1000)$ . On a aussi ajouté cette fois la méthode de prévisions  $M_3$  qui est a priori très intéressante étant données les lois de distribution de probabilité de délais de livraisons, pour les exemples choisis.

Le pourcentage de gain obtenu avec les prévisions à cent pour cent varie de 21% à 43% par rapport au modèle de base. La proportion de ce gain réalisée par le modèle avec la méthode de prévisions en espérance mathématique ( $M_1$ ) varie de 1 à 11 % (soit 0,3 à 3,2 % de gain par rapport au modèle de base), celle réalisée avec les prévisions sur un échantillon randomisé ( $M_2$ ) varie de 10 à 40 % (soit 3 à 17 % de gain par rapport au modèle de base) et celle réalisée avec la méthode de prévisions sur l'échantillon obtenu en utilisant les délais moyens de livraison ( $M_3$ ) varie de 45 à 64% (soit 11 à 27 % de gain par rapport au modèle de base).

Tableau 2

N°	modèle de base	prévisions à 100/100		méthode de prévisions M <sub>1</sub>			méthode de prévisions M <sub>2</sub>			méthode de prévisions M <sub>3</sub>		
		Coût	%1	Coût	%2	%3	Coût	%4	%5	Coût	%6	%7
1	8874	6173	30,4	8588	3,2	10,6	8205	8,13	26,7	7538	15,1	49,4
2	7198	4091	43,2	7016	2,5	5,9	5965	17,1	39,7	5195	27,8	64,4
3	7815	5761	26,8	7792	0,3	1,1	7336	6,1	23,3	6792	13,1	49,8
4	10009	7925	20,8	9794	2,2	10,3	9718	2,9	14,0	9009	11,1	53,3
5	7409	4741	36,0	7354	0,7	2,1	6883	7,1	19,7	6208	16,2	45,0

Les méthodes  $M_2$  et  $M_3$  donnent de meilleurs résultats que  $M_1$ . La qualité moins bonne des résultats pour  $M_1$  peut être expliquée par le fait, qu'en réalité, la livraison de composants se fait par lots. La méthode  $M_1$  donne donc des valeurs qui sont les espérances mathématiques des niveaux de stocks et qui ne seront jamais réalisées : soit les composants commandés arrivent, soit ils n'arrivent pas ; soit il y a un supplément de stock égal au nombre de composants commandés, soit aucun supplément de stock. Néanmoins, il nous semble utile de noter ici que la méthode  $M_1$  donne des résultats qui montrent la tendance d'évolution du stock correspondant. Il ne faut donc pas l'éliminer des études, car elle peut être intéressante pour les systèmes dont les lois de distributions de retards de livraisons ont des écarts types relativement grands (les ruptures de stock sont longues).

La méthode  $M_3$  a permis de gagner jusqu'à 28% sur le coût de production. Cette méthode réalise, pour les exemples étudiés, environ 50 % du gain obtenu par le modèle idéal avec les prévisions à cent pour cent. Ces résultats s'expliquent par les lois des retards de livraisons de composants (uniformes sur seulement trois périodes) dont la valeur moyenne, utilisée dans les calculs de la méthode  $M_3$ , est égale au mode et à la médiane de la loi de distribution de probabilité. Ces résultats montrent qu'en choisissant bien les techniques de calculs des échantillons, on peut, pour les systèmes particuliers, améliorer sensiblement les prévisions. La méthode  $M_2$  a donné aussi des résultats satisfaisants, ce qui montre que dans le cas où on serait en difficulté de trouver une méthode particulière de recherche des échantillons adaptés aux données numériques du système étudié, l'utilisation des échantillons randomisés est une solution qui est assez intéressante.

### 3.2.3 Importance de la longueur de l'horizon de prévisions

Pour les exemples donnés, la valeur approximative  $h'$  calculée avec la formule (11) est de l'ordre 20 périodes. Pour les méthodes de prévisions  $M_1$  et  $M_3$ , la valeur de  $h''$  est égale à 3. Pour choisir le paramètre  $h^*$  de notre modèle nous compléterons ces calculs par des expériences de simulation. Nous utilisons dans les simulations les prévisions à cent pour cent ( $M_0$ ). Dans ce cas idéal, la valeur de  $h$  obtenue ne dépend que des caractéristiques de l'évolution réelle des stocks. Prendre dans le modèle un horizon plus long que celui retenu pour  $M_0$  n'aurait pas grand sens puisqu'on ajouterait des périodes que  $M_0$  n'a pas pu utiliser pour minimiser le coût et qu'en outre la connaissance des stocks n'est que prévisionnelle sur ces périodes et d'autant plus incertaine que l'horizon  $h$  est grand. Si, accidentellement pour une méthode de prévisions, il est possible qu'une plus grande valeur de  $h$  donne un meilleur choix pour la première période  $i$  d'un horizon glissant, il est tout aussi probable que cela en donne un plus mauvais et en moyenne on ne gagne rien, comme le montre les expériences.

Dans le tableau 3, nous présentons les résultats obtenus pour les différentes valeurs de  $h$ . Les résultats de la simulation confirment notre hypothèse concernant les facteurs qui limitent cette

valeur. Les valeur en gras correspondent aux meilleurs valeurs obtenues en faisant varier  $h$  et sont celles reportées dans le tableau 2.

Tableau 3

	H Prévisions	1	2	3	4	5	6	7	14
	à 100/100	8874	7322	6295	6233	6189	<b>6173</b>	6173	6173
<b>exemple 1</b>	<b>M<sub>1</sub></b>	8874	<b>8588</b>	8589	8589	8589	8589	8589	8590
	<b>M<sub>2</sub></b>	8874	8534	8219	8220	8214	<b>8205</b>	8205	8205
	à 100/100	7198	4424	4118	<b>4091</b>	4092	4092	4092	4092
<b>exemple 2</b>	<b>M<sub>1</sub></b>	7198	<b>7016</b>	7049	7049	7049	7049	7049	7050
	<b>M<sub>2</sub></b>	7198	<b>5965</b>	5989	5974	5974	5974	5973	5973
	à 100/100	7815	5856	5773	5767	<b>5761</b>	5763	5762	5762
<b>exemple 3</b>	<b>M<sub>1</sub></b>	7815	<b>7792</b>	7805	7805	7805	7792	7792	7806
	<b>M<sub>2</sub></b>	7815	7369	7342	<b>7336</b>	7353	7339	7339	7347
	à 100/100	10009	8706	8218	7990	7943	7927	<b>7925</b>	7926
<b>exemple 4</b>	<b>M<sub>1</sub></b>	10009	9808	<b>9794</b>	9796	9795	9795	9795	9795
	<b>M<sub>2</sub></b>	10009	9816	9776	9737	<b>9718</b>	9731	9718	9718
	à 100/100	7408	5271	4748	<b>4741</b>	4741	4741	4741	4741
<b>exemple 5</b>	<b>M<sub>1</sub></b>	7408	<b>7354</b>	7354	7354	7354	7356	7354	7354
	<b>M<sub>2</sub></b>	7408	<b>6883</b>	6890	6883	6883	6883	6883	6883

Les résultats montrent que pour  $M_0$  en augmentant  $h$ , on arrive d'abord à obtenir un gain significatif de coût, puis après  $h = 3$  l'amélioration du coût due aux prévisions se ralentit et enfin pour les valeurs de  $h$  supérieures à 7 le coût se stabilise. On constate pour les 5 exemples que les meilleurs valeurs de  $h$  obtenues pour  $M_1$  et  $M_2$  sont toujours inférieures ou égales à celles obtenues pour  $M_0$ . Pour la méthode  $M_1$  la valeur de  $h$  est égale à 2, ce qui confirme nos calculs de  $h^*=3$  qui est une borne supérieure de  $h$  pour cette méthode de prévisions.

### 3.2.4 Sensibilité des méthodes aux niveaux de stocks initiaux

Nous avons étudié l'influence de l'augmentation des stocks initiaux sur le coût de production. Dans les tableaux 4 et 5 sont présentés les résultats obtenus pour des stocks initiaux deux fois plus grands que leurs valeurs minorantes utilisées dans les expériences précédentes.

Tableau 4

	modèle de base	prévisions à 100/100		Méthode de prévisions M <sub>1</sub>			Méthode de prévisions M <sub>2</sub>		
		Coût	%1	Coût	%2	%3	Coût	%4	%5
exemple 1	6497	4293	33,9	6495	0,03	0,09	5928	8,7	25,8
exemple 2	4852	2718	44,0	4852	0,00	0,00	4140	14,7	33,4
exemple 3	6013	4191	30,3	6011	0,03	0,11	5316	11,6	38,3
exemple 4	7219	5981	17,2	7218	0,01	0,08	7117	1,4	8,2
exemple 5	5856	3440	41,6	5856	0,00	0,00	5198	11,2	27,2

Tableau 5

	H Prévisions	1	2	3	4	5	6	7	14
exemple 1	à 100/100	6497	4480	4316	<b>4293</b>	4295	4295	4295	4295
	<b>M<sub>1</sub></b>	6497	<b>6495</b>	6495	6495	6495	6495	6495	6495
	<b>M<sub>2</sub></b>	6497	5968	<b>5928</b>	5942	5942	5942	5942	5942
exemple 2	à 100/100	4852	2724	<b>2719</b>	2719	2719	2719	2723	2723
	<b>M<sub>1</sub></b>	<b>4852</b>	4852	4852	4852	4852	4852	4852	4852
	<b>M<sub>2</sub></b>	4852	4153	<b>4140</b>	4140	4140	4140	4140	4140
exemple 3	à 100/100	6013	4195	4192	<b>4191</b>	4192	4191	4192	4191
	<b>M<sub>1</sub></b>	6013	<b>6011</b>	6011	6011	6011	6011	6011	6011
	<b>M<sub>2</sub></b>	6013	<b>5316</b>	5328	2328	5329	5330	5329	5329
exemple 4	à 100/100	7219	6058	5994	<b>5981</b>	5982	5981	5982	5982
	<b>M<sub>1</sub></b>	7219	<b>7218</b>	7218	7218	7218	7218	7218	7218
	<b>M<sub>2</sub></b>	7219	<b>7117</b>	7138	7141	7141	7142	7141	7141
exemple 5	à 100/100	5856	3494	<b>3440</b>	3440	3440	3440	3440	3440
	<b>M<sub>1</sub></b>	5856	<b>5856</b>	5856	5856	5856	5856	5856	5856
	<b>M<sub>2</sub></b>	5856	5283	<b>5198</b>	5198	5198	5198	5198	5198

Il est intéressant de comparer les résultats des tableaux 2 et 3 avec ceux des tableaux 4 et 5. L'horizon  $h$  maximal pour la méthode  $M_0$  est diminué ( $h \approx 4$ ). Le pourcentage de gain maximal du coût de production reste presque le même, ainsi que la proportion (5%) de gain réalisé par la méthode de prévisions  $M_2$ . Dans le cas idéal ( $M_0$ ), l'utilisation d'un horizon de prévision glissant  $h > 1$  peut diminuer le coût de production de 17 à 44 %. La méthode  $M_2$  (prévisions sur un échantillon randomisé) atteint la proportion de gain 30% de la méthode  $M_0$ , ce qui peut être considéré comme de bons résultats. Par contre, la méthode de prévisions en espérance mathématique de stocks  $M_1$  ne donne plus que des améliorations négligeables (les résultats sont presque les mêmes que pour le modèle de base).

Il est également intéressant de noter que le coût de production pour le modèle de base a diminué par rapport aux précédentes expériences d'environ 30% grâce au doublement du niveau des stocks initiaux.

### 3.2.5 Recherche des stocks optimaux

Dans le tableau 6, nous présentons les résultats de recherche des stocks optimaux. Nous les avons obtenus de deux façons, soit par une exploration totalement aléatoire de type Monte Carlo (voir l'annexe 3), soit par la méthode proposée au paragraphe 2.4, dans tous les expériences  $h=1$ . La colonne (%) contient le pourcentage de gain obtenu par la méthode d'optimisation de stocks proposée par rapport aux résultats de simulations avec les stocks égaux à leur minorant (stocks calculés avec l'hypothèse qu'il n'y a pas de retard de livraisons).

Tableau 6

	Résultats obtenus par la méthode Monté Carlo			Résultats obtenus par l'algorithme proposé				Stocks minimaux	
	Stocks obtenus	Coût	Nombre itérations	Stocks obtenus	Coût	Nombre itérations	(%)	Stocks	Coût
<b>exemple 1</b>	404	4531	400	360	<b>4193</b>	264	52,75	160	8874
	434			404				160	
	200			180				80	
	281			250				120	
<b>exemple 2</b>	211	2999	400	190	<b>2761</b>	75	61,64	80	7198
	144			100				50	
	333			310				150	
	240			228				100	
<b>exemple 3</b>	299	4308	400	280	<b>4028</b>	143	48,46	130	7815
	433			407				170	
	286			230				100	
	242			230				110	
<b>exemple 4</b>	560	<b>6107</b>	400	442	6288	59	37,18	220	10009
	362			150				150	
	452			356				180	
	377			342				160	
<b>exemple 5</b>	280	3810	400	261	<b>3660</b>	126	50,59	110	7408
	266			269				110	
	352			360				140	
	259			258				110	

Nous pouvons constater, qu'en optimisant les stocks initiaux, nous avons pu diminuer le coût de production de 31 à 61,6 %. Les stocks obtenus sont à peu près 2 fois plus grands que les stocks minorants.

Les résultats des calculs montrent aussi que la méthode de Monte Carlo peut donner de bons résultats sur un nombre relativement petit d'itérations. De plus, pour l'exemple 4, la méthode de Monte Carlo a trouvé (avec un nombre d'itérations 7 fois plus grand) des stocks initiaux meilleurs que la méthode proposée. Cela veut dire que notre méthode s'arrête parfois sans trouver l'optimum. La grande différence de niveaux de stocks obtenues par ces deux méthodes fait penser que la fonction coût de production n'est pas concave et que notre méthode a trouvé un optimum local. Il faut donc, pour améliorer ses performances, la relancer plusieurs fois, les stocks de départ pour les calculs étant générés aléatoirement, nous pourrions alors retenir le meilleur optimum local obtenu.

#### 4. CONCLUSION

Nous avons proposé un modèle générique de planification des systèmes d'assemblage avec les délais de livraisons des composants aléatoires. Une étape d'études préalables est nécessaire, pour la recherche de ses paramètres qui dépendent des données numériques du système d'assemblage étudié. Une fois les paramètres du modèle trouvés nous pouvons l'utiliser pour la gestion du système d'assemblage correspondant.

Nous avons effectué l'analyse des caractéristiques du modèle sur des exemples simples pour analyser les dépendances possibles des paramètres et les performances des méthodes utilisées. Les expériences ont montré qu'il est possible d'améliorer sensiblement les performances de systèmes d'assemblage en utilisant le modèle proposé.

Le modèle est bien adapté pour la planification de systèmes pour lesquelles les demandes en produits finis varient peu au cours du temps.

Les futures recherches seront consacrées à l'extension du modèle aux cas où les demandes en produits finis suivent des lois connues. La modélisation de ce type de systèmes demande l'adaptation des commandes de composants aux changements de demandes en produits finis. D'autres extensions pourraient être étudiées, comme par exemple la planification à capacité d'assemblage limitée qui demande l'introduction dans le modèle du stockage des produits finis et du coût correspondant.

#### 5. BIBLIOGRAPHIE

- [1]. Dolgui A., Portmann M.-C. and Proth J.-M. (1995) A Control Model for Assembly Manufacturing Systems, in Proc. 17th IFIP TC7 Conference on *Systems Modelling and Optimisation*, July 10-14, 1995, Prague, Chapman&Hall.
- [2]. Chu C., Proth J.-M. and Xie X. (1992) Supply management in assembly systems : the basic problem, *Naval Research Logistic*, 39, 265-283.
- [3]. Chu C., Proth J.-M. Wardi Y. and Xie X. (1994) Supply management in assembly systems : the Case of Random Lead Times, in Proc. 11th International Conference on *Analysis and Optimisation of Systems*, Sophia-Antipolis, June 15th, 1994, Springer-Verlag.

**Annexe 1 : Forme canonique du modèle de programmation linéaire (12) - (15)**

Le critère retenu dans le modèle abstrait peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{h-1} \Phi_k \rightarrow \min$$

$$\text{où } \Phi_k = \sum_{z=1}^n (r_z(t_k) - x_z(t_k) + y_z) \beta_z + \sum_{j=1}^d \Delta_j(t_k) \alpha_j$$

$$\Delta_j(t_k) = s_j(t_k) \cdot \sum_{z=1}^n (x_z(t_k) N_z^j)$$

$$s_j(t_k) = \Delta_j(t_{k-1}) + L_j[t_{k-1}, t_k]$$

et  $L_j[t_{k-1}, t_k]$  est le nombre de composants de type  $j$  qui ont été fournis pendant la période  $k-1$ .

Nous recherchons une forme canonique pour ce critère en nous limitant aux  $h$  premières périodes. Développons d'abord les formules  $\Phi_0$  et  $\Phi_k$ .

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \sum_{z=1}^n (r_z(t_0) - x_z(t_0) + y_z) \beta_z + \sum_{j=1}^d \Delta_j(t_0) \alpha_j = \\ &= \sum_{z=1}^n r_z(t_0) \beta_z + \sum_{j=1}^d s_j(t_0) \alpha_j + \sum_{z=1}^n y_z \beta_z - \sum_{z=1}^n x_z(t_0) \beta_z - \sum_{j=1}^d \sum_{z=1}^n x_z(t_0) N_z^j \alpha_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \sum_{z=1}^n r_z(t_k) \beta_z + \sum_{j=1}^d s_j(t_k) \alpha_j + \sum_{z=1}^n y_z \beta_z - \sum_{z=1}^n x_z(t_k) \beta_z - \sum_{j=1}^d \sum_{z=1}^n x_z(t_k) N_z^j \alpha_j = \\ &= \sum_{z=1}^n (r_z(t_{k-1}) + y_z - x_z(t_{k-1})) \beta_z + \sum_{j=1}^d \Delta_j(t_{k-1}) \alpha_j + \\ &\quad + \sum_{z=1}^n y_z \beta_z + \sum_{j=1}^d L_j[t_{k-1}, t_k] \alpha_j - \sum_{z=1}^n x_z(t_k) \beta_z - \sum_{j=1}^d \sum_{z=1}^n x_z(t_k) N_z^j \alpha_j \end{aligned}$$

D'où il s'en suit que :

$$\Phi_k = \Phi_{k-1} + \Delta \Phi_k$$

$$\text{où } \Delta \Phi_k = \sum_{z=1}^n y_z \beta_z + \sum_{j=1}^d L_j[t_{k-1}, t_k] \alpha_j - \sum_{z=1}^n x_z(t_k) \beta_z - \sum_{j=1}^d \sum_{z=1}^n x_z(t_k) N_z^j \alpha_j$$

Alors, 
$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{h-1} \Phi_k &= \frac{1}{h} \left( \Phi_0 + \sum_{k=1}^{h-1} \Phi_k \right) = \\ &= \frac{1}{h} \left( \Phi_0 + \sum_{k=1}^{h-1} \left( \Phi_0 + \sum_{m=1}^k \Delta \Phi_m \right) \right) = \\ &= \Phi_0 + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h-1} \sum_{m=1}^k \Delta \Phi_m \end{aligned}$$

Remplaçons  $\Phi_0$  et  $\Delta \Phi_m$  par les expressions correspondantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{h-1} \Phi_k &= \sum_{z=1}^n r_z(t_0) \beta_z + \sum_{z=1}^n s_j(t_0) \alpha_j + \sum_{z=1}^n y_z \beta_z - \\ &\quad - \sum_{z=1}^n x_z(t_0) \beta_z - \sum_{j=1}^d \sum_{z=1}^n x_z(t_0) N_z^j \alpha_j + \\ &+ \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h-1} \sum_{m=1}^k \left( \sum_{j=1}^d L_j [t_{m-1}, t_m] \alpha_j + \sum_{z=1}^n y_z \beta_z - \sum_{z=1}^n x_z(t_m) \beta_z - \sum_{j=1}^d \sum_{z=1}^n x_z(t_m) N_z^j \alpha_j \right) \end{aligned}$$

On peut remarquer que :

$$\sum_{z=1}^n r_z(t_0) \beta_z + \sum_{j=1}^d s_j(t_0) \alpha_j + \sum_{z=1}^n y_z \beta_z + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h-1} \sum_{m=1}^k \sum_{z=1}^n y_z \beta_z + \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h-1} \sum_{m=1}^k \sum_{j=1}^d L_j [t_{m-1}, t_m] \alpha_j = C$$

où  $C$  est une constante positive. Les autres éléments de la somme sont négatifs, on peut donc supprimer les constantes positives en remplaçant minimiser par maximiser.

Après d'autres transformations, comme par exemple la suivante :

$$\frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h-1} \sum_{m=1}^k \sum_{z=1}^n x_z(t_m) \beta_z = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h-1} (h-k) \sum_{z=1}^n x_z(t_k) \beta_z,$$

et en multipliant tous les éléments de la somme par  $h$ , nous obtenons le critère suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{z=1}^n x_z(t_0) \left( h \beta_z + h \sum_{j=1}^d N_z^j \alpha_j \right) + \sum_{z=1}^n x_z(t_1) \left( (h-1) \beta_z + (h-1) \sum_{j=1}^d N_z^j \alpha_j \right) + \\ + \dots + \sum_{z=1}^n x_z(t_{h-1}) \left( \beta_z + \sum_{j=1}^d N_z^j \alpha_j \right) \rightarrow \max \end{aligned}$$

D'où la formule (12)

$$\sum_{k=0}^{h-1} \sum_{z=1}^n (h-k) x_z(t_k) \left( \beta_z + \sum_{j=1}^d N_z^j \alpha_j \right) \rightarrow \max$$

**Annexe 2** : Un exemple du test de la méthode de recherche des stocks optimaux

matrice N =

1	0	1
0	1	1
1	1	0

Délais prévus de livraisons :  $g=(1,1,1)$ .

Lois de distribution de retards de livraison des composants :  $\forall j, p_j(\tau)=(p_j(0)=0,333, p_j(1)=0,333, p_j(2)=0,334)$ .

Coûts de stockage :  $\alpha=(10,10,10)$ .

Coûts de rupture de production :  $\beta=(10,100,1000)$ .

Demandes en produits finis :  $y=(1,1,1)$ .

Les itérations obtenues

1.	$s_1 = 4$ $\gamma_1 = -49,5$	$s_2 = 5$ $\gamma_2 = -20,5$	$s_3 = 3$ $\gamma_3 = -28,0$	critère : 128,73 $(\omega_1 = 1 \quad \omega_2 = 1 \quad \omega_3 = 2)$
2.	$s_1 = 5$ $\gamma_1 = 5,4$	$s_2 = 6$ $\gamma_2 = 7,8$	$s_3 = 5$ $\gamma_3 = 5,6$	critère : 51,17 $(\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 0 \quad \omega_3 = -1)$
3.	$s_1 = 5$ $\gamma_1 = 6,2$	$s_2 = 6$ $\gamma_2 = 8,2$	$s_3 = 4$ $\gamma_3 = -10,8$	critère : 59,78 $(\omega_1 = -1 \quad \omega_2 = -1 \quad \omega_3 = 1)$
4.	$s_1 = 4$ $\gamma_1 = -117$	$s_2 = 5$ $\gamma_2 = -39,2$	$s_3 = 5$ $\gamma_3 = 2,8$	critère : 178,02 $(\omega_1 = 1 \quad \omega_2 = 1 \quad \omega_3 = 0)$
5.	$s_1 = 5$ $\gamma_1 = 5,6$	$s_2 = 6$ $\gamma_2 = 7,7$	$s_3 = 5$ $\gamma_3 = 5,9$	critère : 51,51 $(\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 0 \quad \omega_3 = -1)$
6.	$s_1 = 5$ $\gamma_1 = 6$	$s_2 = 6$ $\gamma_2 = 8$	$s_3 = 4$ $\gamma_3 = -8,8$	critère : 57,53 $(\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 0 \quad \omega_3 = 1)$
7.	$s_1 = 5$ $\gamma_1 = 5,5$	$s_2 = 6$ $\gamma_2 = 7,7$	$s_3 = 5$ $\gamma_3 = 5,7$	critère : 51,17 $(\omega_1 = 0 \quad \omega_2 = 0 \quad \omega_3 = 0)$

Nombre d'itérations : **7** (1000 périodes de simulation chacune).

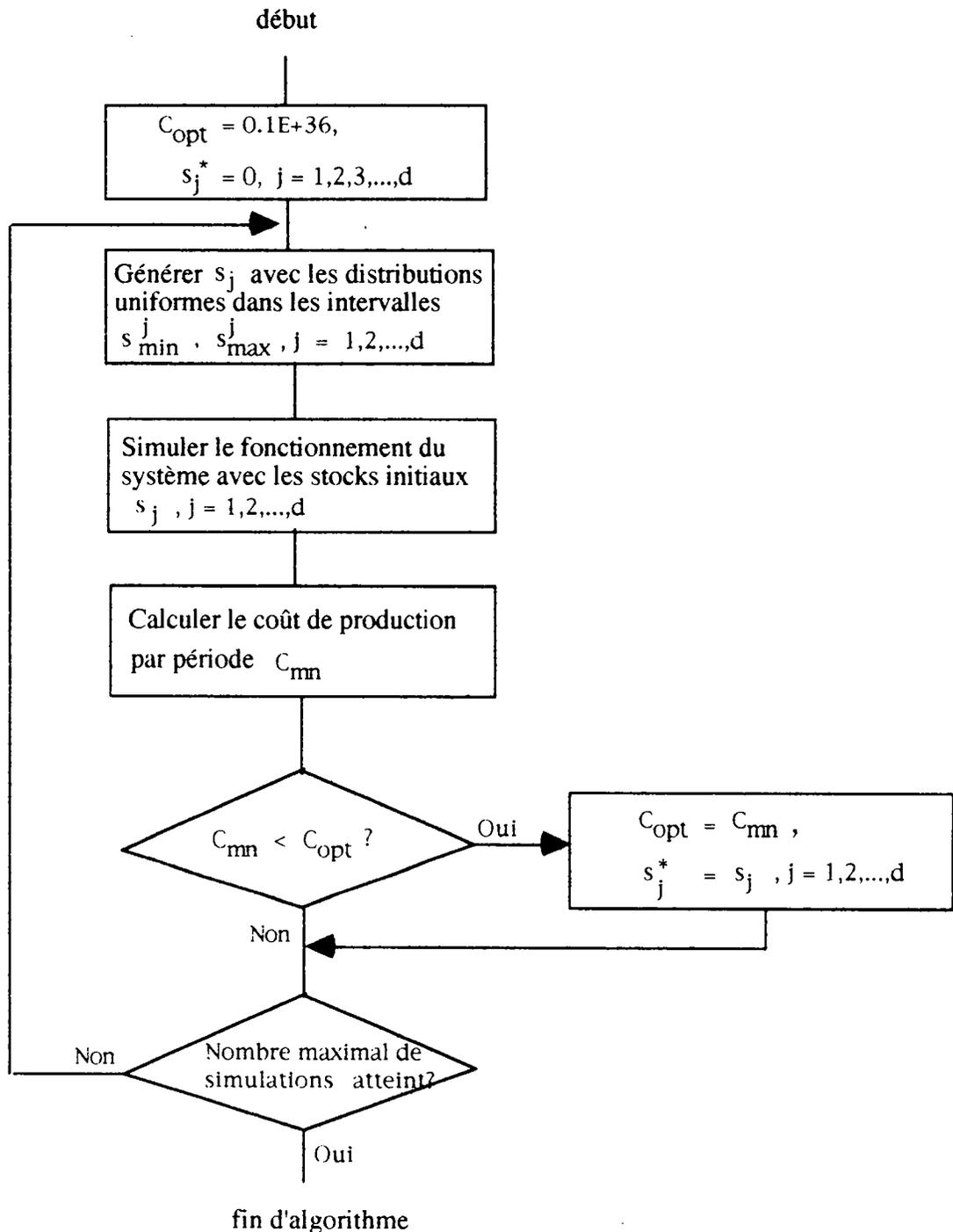
Valeur moyenne du critère pour la solution optimale : **51,17**

Nous avons par ailleurs utilisé une exploration exhaustive de toutes les combinaisons possibles pour vérifier que la solution obtenue ici était bien optimale.

Méthode	Nombre de simulations	Stocks initiaux
toutes les combinaisons	<b>127</b>	$s_1 = 5 \quad s_2 = 6 \quad s_3 = 5$
méthode proposée	<b>7</b>	$s_1 = 5 \quad s_2 = 6 \quad s_3 = 5$

### Annexe 3 : Méthode de Monte Carlo (rappel)

Au début des calculs, choisir au hasard les stocks de composants initiaux  $s_j$ , en utilisant les lois de distribution uniformes sur les intervalles  $[s_{min}^j, s_{max}^j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, d$ . Calculer le coût moyen de production et sauvegarder les valeurs des stocks qui le minimisent. Après un nombre suffisamment grand de simulations, les valeurs de stocks initiaux  $s_j^*$  sont assez proches de l'optimum (la probabilité qu'elles soient optimales tend vers 1 avec l'augmentation du nombre de simulations). Ce principe est expliqué dans la figure suivante :



Cette méthode est utilisée dans le calcul des stocks optimaux au paragraphe 3.2.5.



---

Unité de recherche INRIA Lorraine  
Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes - IRISA, Campus universitaire de Beaulieu 35042 Rennes Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes - 46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble Cedex 1 (France)  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis - 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

