HAL
open science

Maillage de courbes gouverné par une carte de métriques

Patrick Laug, Houman Borouchaki, Paul-Louis George

To cite this version:

Patrick Laug, Houman Borouchaki, Paul-Louis George. Maillage de courbes gouverné par une carte de métriques. [Rapport de recherche] RR-2818, INRIA. 1996. inria-00073874

HAL Id: inria-00073874

https://inria.hal.science/inria-00073874

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Maillage de courbes gouverné par une carte de métriques

Patrick LAUG, Houman BOROUCHAKI

et Paul Louis GEORGE

N° 2818

Mars 1996

THÈME 4

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

Maillage de courbes gouverné par une carte de métriques

Patrick LAUG *, Houman BOROUCHAKI
et Paul Louis GEORGE

Thème 4 — Simulation
et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 2818 — Mars 1996 — 52 pages

Résumé : Dans ce rapport, nous proposons des méthodes et des algorithmes pour mailler ou remailler la frontière Γ d'un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$, au sein d'un processus adaptatif. Un maillage initial de Γ est supposé donné. Il est lissé par des splines cubiques, afin de définir un support géométrique de la frontière. Ensuite, à chaque itération de la boucle d'adaptation, ce support est discrétisé en fonction d'une carte de métriques isotropes ou anisotropes donnée.

Mots-clé : maillage de courbes, maillage adaptatif, maillage isotrope, maillage anisotrope, métrique riemannienne.

(Abstract: pto)

Nous remercions Frédéric Hecht et Éric Saltel pour leurs nombreuses remarques et suggestions.

*. E-mail : Patrick.Laug@inria.fr .

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

Curves discretization governed by a metric map

Abstract: This paper discusses some methods and algorithms that make the discretization of the boundary Γ of a domain Ω in $\mathbb{R}^2$, within an adaptive process, possible. An initial mesh of Γ is entered as data. It is smoothed by the use of cubic splines, in order to define the geometric support of the boundary. Then, at each iteration of adaption, this support is discretized according to a given metric map.

Key-words: curves discretization, mesh adaption, isotropic mesh, anisotropic mesh, riemannian metric.

Table des matières

1 Introduction **5**

2 Contexte de cette étude **6**

3 Support géométrique **9**
3.1 Rappels sur les splines 9
3.2 Splines de Catmull-Rom 9
3.3 Définition analytique d'un morceau cubique 11
3.4 Calcul du morceau cubique horizontal 12
3.5 Exemples de morceaux cubiques 14
3.6 Détection d'une boucle 14
3.7 Définition et construction du segment polygonal 16

4 Maillage de courbes - cas général (anisotrope) **20**
4.1 Schéma de l'algorithme 20
4.2 Définitions fondamentales 21
4.2.1 Métrique en un point 21
4.2.2 Longueur d'un segment dans une métrique variable . . . 22
4.2.3 Cas particulier : longueur usuelle d'un segment 23
4.3 Interpolation des métriques 24
4.3.1 Interprétation géométrique des métriques 24
4.3.2 Interpolation entre deux métriques 25
4.3.3 Interpolation sur la totalité d'un segment courbe 27
4.3.4 Intersections de métriques 27
4.4 Calcul de la longueur totale 31
4.5 Calcul du nombre de sous-segments 32
4.6 Découpage en sous-segments 33

5 Maillage de courbes - cas particulier (isotrope) **34**
5.1 Interpolation des métriques et calcul des longueurs 34
5.2 Calcul de la longueur totale 35
5.3 Découpage en sous-segments 36
5.4 Calculs formels 37
5.4.1 Interpolation linéaire 37

5.4.2 Interpolation géométrique 38
5.4.3 Interpolation sinusoïdale 38

6 Exemples **39**
6.1 Maillage isotrope 40
6.2 Maillage anisotrope d'un segment droit 43
6.3 Maillage anisotrope d'un segment courbe 45
6.4 Maillage éléments finis 48

7 Conclusion **51**

1 Introduction

Un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ est en général défini par sa frontière Γ, qui est elle-même constituée d'un ensemble de segments courbes. Il existe essentiellement deux manières de définir un segment courbe :

1. par une fonction analytique (c'est en particulier l'approche utilisée, de façon interne, par les systèmes de CAO).

2. par un maillage suffisamment fin du segment courbe.

Nous nous plaçons dans le contexte du maillage d'un domaine Ω. Rappelons que ceci consiste, dans un premier temps, à discrétiser sa frontière Γ. Cette discrétisation dépend de la "taille" souhaitée en chaque point de Γ. Dans la pratique, et dans la plupart des cas, la taille est fixée en un nombre fini de points sur Γ. En interpolant la taille partout où elle n'est pas définie, on obtient une fonction continue $h(s)$ des tailles souhaitées sur chaque segment courbe (s désignant l'abscisse curviligne).

En considérant une normalisation à 1 des tailles souhaitées, la discrétisation d'un segment courbe revient à le partitionner en n sous-segments, n étant un entier voisin de la longueur normalisée par rapport à $h(s)$,

$$n \approx \int_0^l \frac{1}{h(s)}\, ds \quad ,$$

où l est la longueur (usuelle) du segment courbe [8].

Les abscisses curvilignes $\{s_i\}_{i=1..n+1}$ des points du partitionnement sont alors définies de telle manière que

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{h(s)}\, ds = 1 \quad .$$

Pour une courbe quelconque, le calcul exact de ces intégrales est délicat (le terme ds peut rendre le calcul impossible ou exagérément complexe, ou encore être dépendant d'un système particulier de CAO). Nous avons donc choisi la deuxième approche, où la frontière Γ est spécifiée par un maillage. Celui-ci est lissé pour respecter au mieux la continuité C^1 de la courbe, définissant ainsi un support géométrique pour tous les maillages ultérieurs.

Par ailleurs, on généralise la notion de taille en considérant des tailles différentes selon les directions, grâce à l'emploi de *métriques*.

2 Contexte de cette étude

Dans ce rapport, nous nous plaçons dans le contexte d'un processus d'adaptation de maillage, qui se traduit par les étapes décrites ci-dessous.

1. Nous disposons initialement d'un *maillage de définition géométrique*, noté $\mathcal{T}_{géom}$, qui est la discrétisation de la frontière d'un domaine. Ce maillage est donc avant tout un ensemble de segments polygonaux (FIG. 1).

2. Chaque segment polygonal du maillage $\mathcal{T}_{géom}$ est "lissé", c'est-à-dire remplacé par un segment courbe de continuité C^1 ou plus généralement G^1. Pour mieux définir ce segment courbe, on peut aussi spécifier les tangentes en ses deux extrémités. L'ensemble de ces segments courbes forme un *support géométrique*, noté $\mathcal{S}_{géom}$ (FIG. 2).

3. L'utilisateur fournit une carte de métriques, définie au moins aux extrémités des segments de $\mathcal{S}_{géom}$. Une métrique représente le pas de la discrétisation souhaité selon toutes les directions.

4. La carte de métriques gouverne la discrétisation du support géométrique $\mathcal{S}_{géom}$, et le maillage de courbes obtenu sert de base au *maillage initial* $\mathcal{T}_0$ du domaine (FIG. 3).

5. Le maillage précédent est utilisé pour un calcul par éléments finis.

6. Un programme (estimateur) analyse la précision des résultats obtenus. Si celle-ci n'est pas satisfaisante, il crée une nouvelle carte de métriques, et le processus recommence à l'étape 4, créant ainsi des *maillages adaptés* $\{\mathcal{T}_i\}_{i\geq 1}$ (FIG. 4).

Dans la suite de ce rapport, nous présentons des méthodes et des algorithmes pour construire un support géométrique $\mathcal{S}_{géom}$ (section 3) et des maillages $\{\mathcal{T}_i\}_{i\geq 0}$ (sections 4 et 5). Enfin, nous donnons quelques exemples d'application (section 6) et nous proposons une conclusion (section 7).

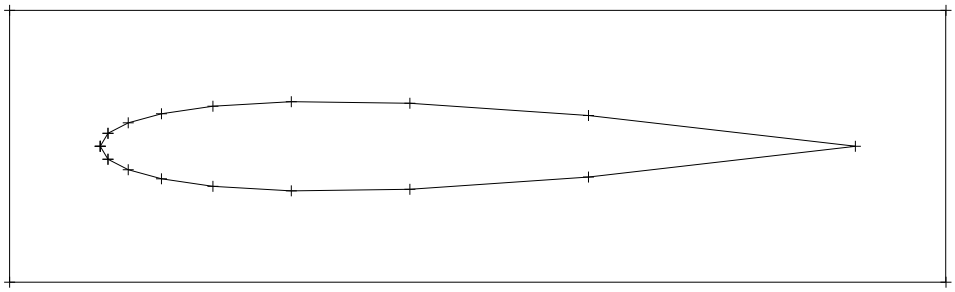

FIG. 1 - $\mathcal{T}_{géom}$ *: maillage de définition géométrique.*

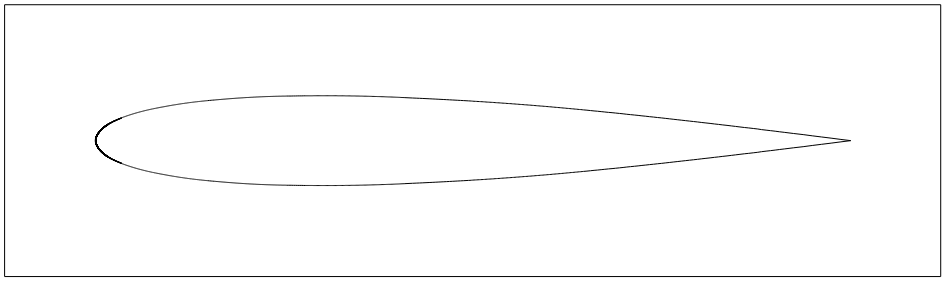

FIG. 2 - $\mathcal{S}_{géom}$ *: support géométrique.*

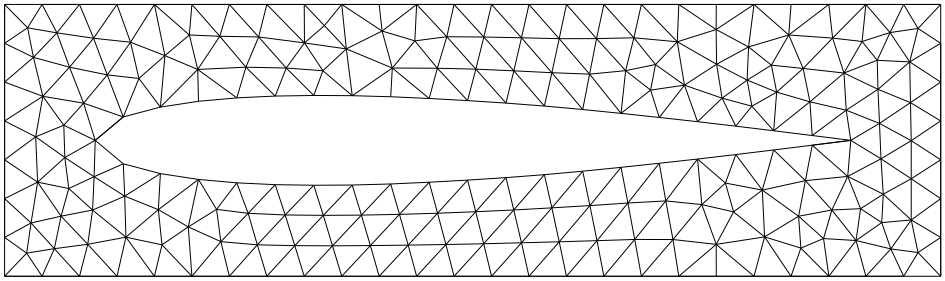

FIG. 3 - $\mathcal{T}_0$ *: maillage initial pour un calcul par éléments finis.*

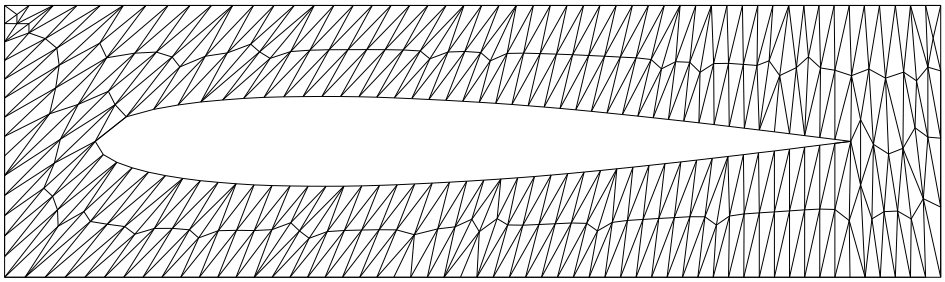

FIG. 4 - $\mathcal{T}_{i\geq 1}$ *: maillage adapté (exemple "académique").*

3 Support géométrique

Dans cette section, nous proposons une méthode de construction du support géométrique $\mathcal{S}_{géom}$ (cf. section 2). Chaque segment polygonal de $\mathcal{T}_{géom}$ est lissé en un segment courbe (spline de Catmull-Rom). Cependant, cette forme de support n'est pas directement utilisable pour un remaillage. Nous sommes donc amenés à remplacer chaque segment courbe $\widehat{C}$ obtenu par un segment polygonal $\widehat{C}$ approchant. C'est en fait l'ensemble de ces segments polygonaux qui constitue notre support géométrique $\mathcal{S}_{géom}$.

3.1 Rappels sur les splines

Si $\mathcal{E}$ est un espace métrique quelconque, un *segment courbe* de $\mathcal{E}$ est la donnée $([a,b],\ f)$ d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$) et d'une application continue $f\ :\ [a,b] \mapsto \mathcal{E}$ [1]. On appelle $f(a)$ l'*origine* et $f(b)$ l'*extrémité* (ou encore *extrémités 1 et 2*). Une *spline* est un cas particulier de segment courbe adapté à la CAO. L'espace métrique $\mathcal{E}$ est alors l'espace $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni de la distance usuelle, et f est une fonction facilement représentable et calculable sur ordinateur. Plusieurs modèles sont largement utilisés, notamment celui des courbes polynomiales standard, des courbes de Ferguson, des courbes de Bézier, des courbes B-spline uniformes, des courbes B-spline non uniformes (NUB) et des courbes B-spline rationnelles non uniformes (NURBS) [7, 9].

Dans l'espace $\mathbb{R}^2$, les courbes sont parfois définies sous une forme explicite ($y = f(x)$) ou sous une forme implicite ($f(x,y) = 0$). Cependant, la forme paramétrique évoquée dans la section précédente ($(x,y) = f(t),\ t \in [a,b]$) est en général plus commode.

3.2 Splines de Catmull-Rom

Une spline de Catmull-Rom [5] est définie par un polygone de contrôle de sommets $\{P_i\}_{i=1..n}$. La spline passe par les points $\{P_i\}_{i=2..n-1}$ et, en chacun

d'eux, les tangentes[1] aux deux morceaux de spline $\overset{\frown}{P_{i-1}P_i}$ et $\overset{\frown}{P_iP_{i+1}}$ sont égales à $\frac{1}{2}\overrightarrow{P_{i-1}P_{i+1}}$, ce qui assure une continuité C^1 de la courbe.

Par exemple (FIG. 5), le polygone de contrôle $P_1..P_6$ définit la spline $\overset{\frown}{P_2..P_5}$. La tangente en P_2 au morceau $\overset{\frown}{P_2P_3}$ est égale à $\frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_3}$, et la tangente en P_3 est égale à $\frac{1}{2}\overrightarrow{P_2P_4}$. Les tangentes aux deux autres morceaux $\overset{\frown}{P_3P_4}$ et $\overset{\frown}{P_4P_5}$ sont définies de manière analogue.

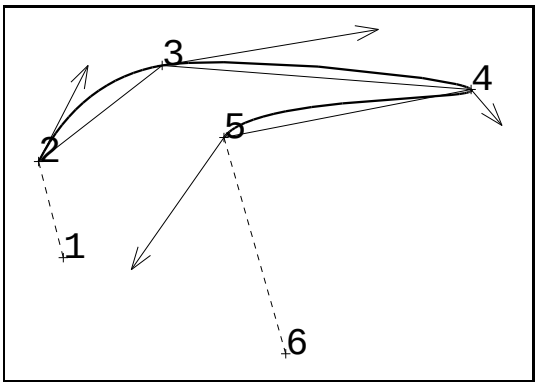

FIG. 5 - *Une spline et son polygone de contrôle.*

Il est commode d'utiliser cette technique pour définir le support géométrique $\mathcal{S}_{géom}$ (cf. section 2). En effet, tout segment polygonal de $\mathcal{T}_{géom}$ définit les sommets $\{P_i\}_{i=2..n-1}$ d'un polygone de contrôle. Les points de contrôle externes P_1 et P_n peuvent être définis additionnellement par l'utilisateur, voire même rester indéfinis. Dans ce dernier cas, la tangente au point correspondant est considérée comme libre.

La définition analytique de chaque morceau de spline est précisée ci-dessous.

1. On appelle ici "tangente" la dérivée première $\frac{df(t)}{dt}$ de l'équation paramétrique d'un morceau de spline.

3.3 Définition analytique d'un morceau cubique

Chaque morceau de spline est "cubique" (ou "bicubique"), c'est-à-dire que son équation paramétrique est de la forme

$$f(t) = \sum_{k=0}^{3} a_k\, t^k = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3 \quad , \quad a_{i=0..3} \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad t \in [0,1] \quad ,$$

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} f_x(t) \\ f_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{x,0} & a_{x,1} & a_{x,2} & a_{x,3} \\ a_{y,0} & a_{y,1} & a_{y,2} & a_{y,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \quad .$$

Soient A, B, C, D quatre sommets consécutifs du polygone de contrôle. Le morceau cubique $\overset{\frown}{BC}$ (FIG. 6) est défini par les coordonnées de ses extrémités (B et C) et les tangentes en ses extrémités ($B' = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$ et $C' = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BD}$). Le problème est de trouver les coefficients $\{a_i\}_{i=0..3}$ connaissant B, C, B' et C'.

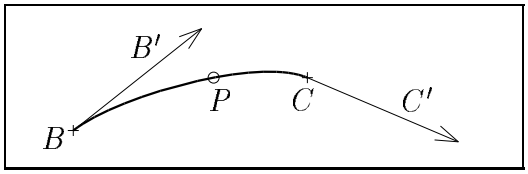

FIG. 6 - *Morceau cubique BC.*

En tout point P du morceau cubique BC, la tangente P' est la dérivée de f par rapport à t :

$$P' = f'(t) = a_1 + 2\, a_2\, t + 3\, a_3\, t^2 \qquad t \in [0,1] \quad .$$

Ainsi, si les deux tangentes B' et C' sont fixées, les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 sont définis par le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lllll} B & = & f\,(0) & = & a_0 \\ C & = & f\,(1) & = & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ B' & = & f'(0) & = & a_1 \\ C' & = & f'(1) & = & a_1 + 2\,a_2 + 3\,a_3 \end{array}\right. ,$$

d'où

$$\begin{array}{ll} a_0 = B & a_2 = 3\,(C - B) - 2\,B' - C' \\ a_1 = B' & a_3 = -2\,(C - B) + B' + C' \end{array} .$$

Si les tangentes B' et C' ne sont pas toutes deux fixées, il suffit de modifier le système d'équations comme indiqué ci-dessous :

– Si B' est fixée et C' libre, on force $a_3 = 0$ et on obtient

$$\begin{array}{ll} a_0 = B & a_2 = C - B - B' \\ a_1 = B' & a_3 = 0 \end{array} .$$

– Si B' est libre et C' fixée, on force aussi $a_3 = 0$ on obtient

$$\begin{array}{ll} a_0 = B & a_2 = -(C - B) + C' \\ a_1 = 2\,(C - B) - C' & a_3 = 0 \end{array} .$$

– Si B' et C' sont toutes deux libres, on force $a_2 = a_3 = 0$ et on obtient

$$\begin{array}{ll} a_0 = B & a_2 = 0 \\ a_1 = C - B & a_3 = 0 \end{array} .$$

En résumé, si les tangentes sont toutes deux fixées, le morceau est cubique (degré ≤ 3). Si une seule tangente est fixée, le morceau est parabolique (degré ≤ 2). Enfin, si aucune tangente n'est fixée, le morceau est linéaire (degré ≤ 1).

3.4 Calcul du morceau cubique horizontal

Il est parfois nécessaire de "rendre horizontal" un morceau cubique (FIG. 7). Cette transformation est notamment utilisée dans les sections 3.5 et 3.7 ci-après.

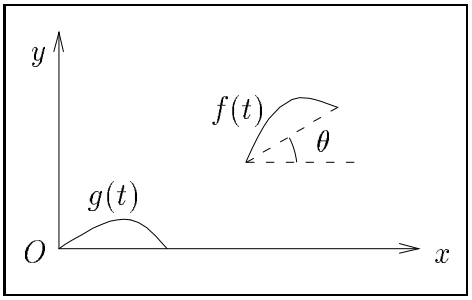

FIG. 7 - *Morceau $f(t)$ et morceau horizontal $g(t)$.*

Plus précisément, soit un morceau cubique

$$f(t) = \sum_{k=0}^{3} a_k\, t^k = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3 \qquad t \in [a, b] \quad .$$

Le problème est de trouver les coefficients du morceau horizontal

$$g(t) = \sum_{k=0}^{3} b_k\, t^k = b_0 + b_1\, t + b_2\, t^2 + b_3\, t^3 \qquad t \in [a, b]$$

qui vérifie notamment

$$g(a) = O \quad \text{et} \quad g(b) = \begin{pmatrix} \|f(b) - f(a)\| \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne usuelle.

Remarquons que $f(t)$ est l'image de $g(t)$ par une rotation (O, θ) et une translation (τ), avec :

- θ : angle entre l'axe Ox et le vecteur $f(b) - f(a)$, défini par

$$\cos\theta = \frac{f_x(b) - f_x(a)}{\|f(b) - f(a)\|} = c \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{f_y(b) - f_y(a)}{\|f(b) - f(a)\|} = s \quad (c \text{ et } s \text{ connus}).$$

- $\tau = f(a)$.

Inversement, $g(t)$ est l'image de $f(t)$ par une translation $(-\tau)$ et une rotation $(O, -\theta)$, d'où l'égalité

$$\begin{pmatrix} b_{x,0} + b_{x,1}\, t + b_{x,2}\, t^2 + b_{x,3}\, t^3 \\ b_{y,0} + b_{y,1}\, t + b_{y,2}\, t^2 + b_{y,3}\, t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{x,0} + a_{x,1}\, t + a_{x,2}\, t^2 + a_{x,3}\, t^3 - \tau_x \\ a_{y,0} + a_{y,1}\, t + a_{y,2}\, t^2 + a_{y,3}\, t^3 - \tau_y \end{pmatrix} \qquad t \in [a, b] \quad ,$$

ce qui donne

$$\begin{cases} b_{x,0} & = & c\,(a_{x,0} - \tau_x) + s\,(a_{y,0} - \tau_y) \\ b_{x,k} & = & c\, a_{x,k} + s\, a_{y,k} \qquad {\scriptstyle k=1,2,3} \\ b_{y,0} & = & -s\,(a_{x,0} - \tau_x) + c\,(a_{y,0} - \tau_y) \\ b_{y,k} & = & -s\, a_{x,k} + c\, a_{y,k} \qquad {\scriptstyle k=1,2,3} \quad . \end{cases}$$

3.5 Exemples de morceaux cubiques

Quelques allures de morceaux cubiques sont représentées (FIG. 8). Notons $g(t)$ l'équation paramétrique du morceau horizontal (cf. section 3.4).

Dans la pratique, le cas des morceaux **a** ou **b** ($g_x(t)$ croissant sur l'intervalle $[a, b]$) est le plus courant. Le cas des morceaux **d** ou **e** (dérivée de $g_x(t)$ s'annulant sur l'intervalle $[a, b]$) peut être dû à une erreur dans les points de contrôle. Enfin, le cas des morceaux **c** ou **f** (présence d'une boucle) doit être signalé comme une erreur si le segment courbe fait partie de la frontière d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ (cf. section 3.6).

3.6 Détection d'une boucle

Cherchons à caractériser la présence d'une boucle sur un morceau cubique

$$f(t) = \sum_{k=0}^{3} a_k\, t^k = a_0 + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3 \qquad t \in [a, b]$$

(FIG. 8, morceau **c** ou **f**). Il existe alors deux paramètres t_1 et t_2 tels que

$$f(t_1) = f(t_2) \qquad t_1, t_2 \in [a, b] \qquad t_1 \neq t_2 \quad ,$$

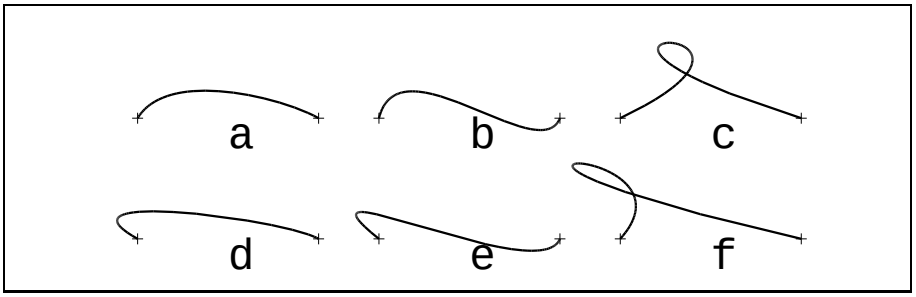

FIG. 8 - *Quelques allures de morceaux cubiques.*

d'où l'égalité

$$a_1\,(t_1 - t_2) + a_2\,(t_1^2 - t_2^2) + a_3\,(t_1^3 - t_2^3) = 0 \quad ,$$

et, en divisant par $(t_1 - t_2) \neq 0$,

$$a_1 + a_2\,(t_1 + t_2) + a_3\,(t_1^2 + t_1\,t_2 + t_2^2) = 0 \quad .$$

Dans $\mathbb{R}$, il s'agit de deux équations du second degré en t_1 et t_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{x,1} + a_{x,2}\,(t_1 + t_2) + a_{x,3}\,(t_1^2 + t_1\,t_2 + t_2^2) = 0 \\ a_{y,1} + a_{y,2}\,(t_1 + t_2) + a_{y,3}\,(t_1^2 + t_1\,t_2 + t_2^2) = 0 \end{array} \right. \quad .$$

Pour résoudre ce système d'équations, cherchons la somme $S = t_1 + t_2$ et le produit $P = t_1\,t_2$.

Si $a_{x,3}\,a_{y,2} - a_{x,2}\,a_{y,3} = 0$, le système d'équations est indéterminé. Sinon, on obtient

$$S = \frac{a_{x,1}\,a_{y,3} - a_{x,3}\,a_{y,1}}{a_{x,3}\,a_{y,2} - a_{x,2}\,a_{y,3}} \quad .$$

Le produit P s'obtient en remarquant que

$$t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2\,t_1\,t_2 = S^2 - 2\,P \quad .$$

Si $a_{x,3} = a_{y,3} = 0$, le système est indéterminé. Sinon, on a par exemple $a_{x,3} \neq 0$ et on obtient

$$a_{x,1} + a_{x,2}\,S + a_{x,3}\,(S^2 - P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{a_{x,1} + a_{x,2}\,S + a_{x,3}\,S^2}{a_{x,3}} \quad .$$

Connaissant la somme $S = t_1 + t_2$ et le produit $P = t_1\, t_2$, les paramètres cherchés t_1 et t_2 sont les solutions de l'équation du second degré en t :

$$(t - t_1)\,(t - t_2) = t^2 - S\,t + P = 0 \quad .$$

Il ne reste plus qu'à vérifier l'existence de solutions dans l'intervalle $[a, b]$.

3.7 Définition et construction du segment polygonal

Pour construire le support géométrique $\mathcal{S}_{géom}$ (cf. section 2), chaque segment polygonal de $\mathcal{T}_{géom}$ est lissé en un segment courbe cubique par morceau. Cependant, cette forme de support n'est pas directement utilisable pour un maillage. Nous sommes donc amenés à remplacer chaque segment courbe $\widehat{C}$ par un segment polygonal $\widehat{C}$ approchant (FIG. 9).

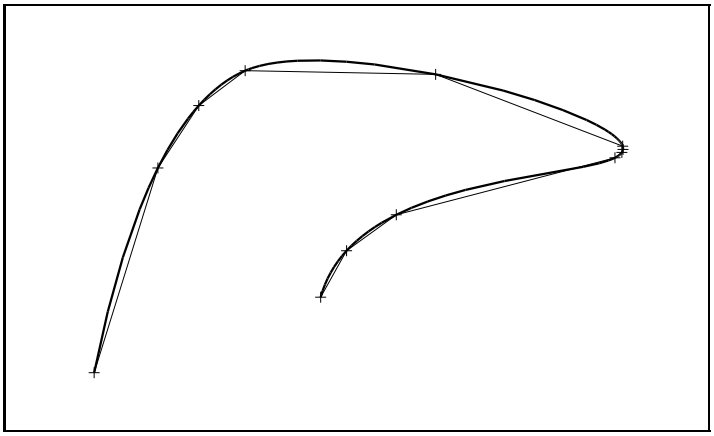

FIG. 9 - *Segment polygonal (tolérance exagérée ε = 0.08).*

Il existe essentiellement deux types de méthodes pour obtenir les sommets de ce segment polygonal. Elles consistent à

- répartir les sommets régulièrement sur la courbe, en nombre arbitrairement grand, ou à
- calculer les sommets en nombre plus restreint, tout en garantissant une certaine tolérance absolue ou relative.

Nous avons choisi la dernière approche avec tolérance relative, qui a l'avantage de bien respecter les zones à fortes courbures. Considérons une arête du segment polygonal $\widehat{C}$ et l'arc du segment courbe $\widehat{C}$ ayant les mêmes extrémités (FIG. 10).

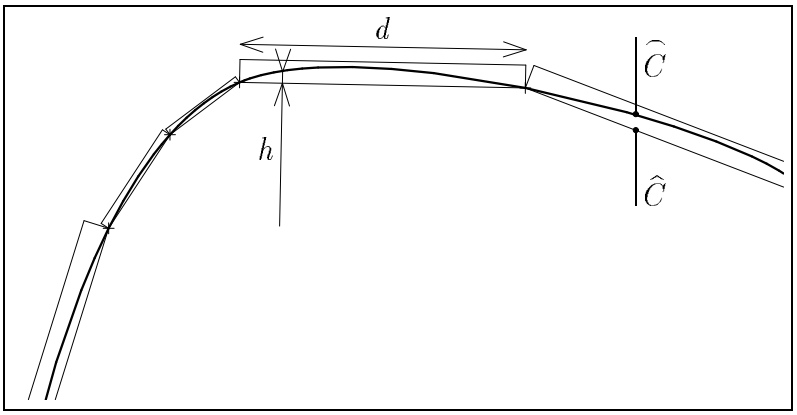

FIG. 10 - *Détail du segment polygonal (tolérance exagérée ε = 0.08).*

Nous voulons que tout point de l'arc satisfasse la relation $\dfrac{h}{d} < \varepsilon$, où
- h est la distance du point à l'arête,
- d est la longueur de l'arête,
- ε est une tolérance relative fixée a priori, par exemple $\varepsilon = 0.01$.

Il est possible de garantir cette inégalité pour chaque morceau de spline cubique, de la façon suivante :

1. Chercher l'extremum du morceau, ou ses deux extrema, soient $\{E_i\}$.

2. Si la tolérance relative n'est pas dépassée en $\{E_i\}$, le morceau est correct. Sinon, subdiviser le morceau en $\{E_i\}$ et recommencer récursivement pour chaque morceau obtenu.

Cette procédure s'écrit en pseudo-code :

Procédure *subdiviser*(a, b)
Calculer la taille de l'arête : $d = \|f(b) - f(a)\|$.
Calculer le morceau horizontal $g(t)$, $t \in [a, b]$ (cf. section 3.4).
Résoudre l'équation du deuxième degré à une inconnue t : $g'_y(t) = 0$.
Soit n le nombre de racines strictement comprises entre a et b.
Si $n = 1$:
Soit t_1 la solution et $h_1 = |g(t_1)|$.
Si $h_1 > \varepsilon\, d$:
subdiviser(a, t_1) ; *ajouter*(t_1) ; *subdiviser*(t_1, b)
Si $n = 2$:
Soient t_1 et t_2 les solutions, $h_1 = |g(t_1)|$ et $h_2 = |g(t_2)|$.
Si $h_1 + h_2 > \varepsilon\, d$:
subdiviser(a, t_1) ; *ajouter*(t_1) ; *subdiviser*(t_1, t_2) ;
ajouter(t_2) ; *subdiviser*(t_2, b)
Sinon :
Ne rien faire (le morceau est droit).
Fin de la procédure *subdiviser*

L'algorithme précédent fournit par exemple le résultat ci-dessous (FIG. 11).

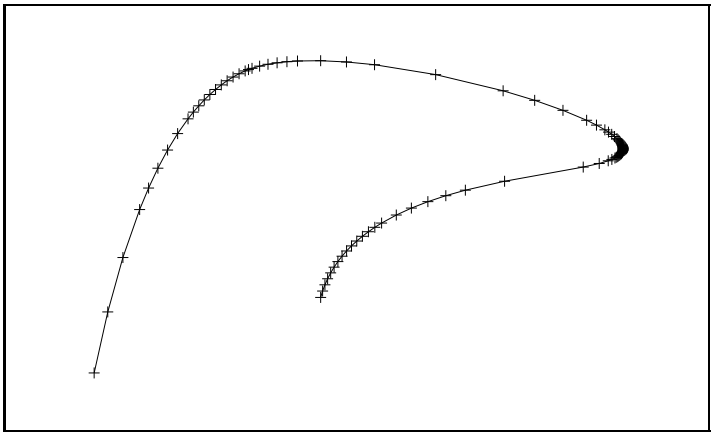

FIG. 11 - *Segment polygonal (tolérance ε = 0.01).*

Finalement, l'ensemble des segments polygonaux constitue un support géométrique $\mathcal{S}_{géom}$ (cf. section 2) commun à tous les maillages $\{\mathcal{T}_i\}_{i\geq 0}$ qui seront créés.

4 Maillage de courbes - cas général (anisotrope)

4.1 Schéma de l'algorithme

Dans le but de discrétiser un segment polygonal $\widehat{C}$ du support géométrique $\mathcal{S}_{géom}$ (cf. section 2), les données du mailleur sont les suivantes (FIG. 12) :

- Les coordonnées des sommets $\{P_i\}_{i=1..p+1}$ de $\widehat{C}$, où p est le nombre d'arêtes.
- Le maillage de $\widehat{C}$ à l'itération précédente, ou *maillage de fond*, de sommets $\{Q_i\}_{i=1..q+1}$. En pratique, il suffit de connaître les abscisses curvilignes de ces points. Pour que le mailleur soit général, on considère que ces données existent dès la première itération, même si les sommets $\{Q_i\}$ peuvent alors se réduire aux deux extrémités de $\widehat{C}$.
- Une carte de métriques $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1..q+1}$ définies aux points $\{Q_i\}_{i=1..q+1}$.

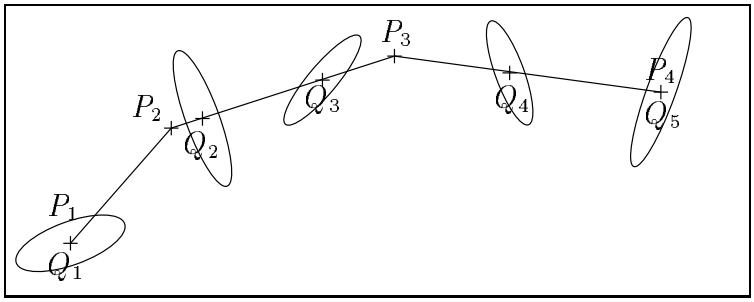

FIG. 12 - *Données du mailleur de courbes.*

En *interpolant* les métriques $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1..q+1}$ le long du segment polygonal $\widehat{C}$, on définit un *espace de contrôle*. Un maillage *parfait* de $\widehat{C}$ est tel que chaque sous-segment soit de longueur unité dans cet espace. Pour réaliser ce maillage, nous proposons un algorithme dont le schéma général est donné ci-dessous :

1. Trouver une interpolation $\mathcal{M}(s)$ des métriques $\{\mathcal{M}_i\}$ le long de $\widehat{C}$.
2. Calculer la longueur totale l de $\widehat{C}$ dans la métrique $\mathcal{M}(s)$: $l = \text{long}_{\mathcal{M}(s)}(\widehat{C})$.
3. Calculer un entier n "proche" du réel l.
4. Découper $\widehat{C}$ en n sous-segments courbes de même longueur $u = \dfrac{l}{n}$ (donc proche de l'unité) dans la métrique $\mathcal{M}(s)$.

(A)

Après le rappel de quelques définitions fondamentales, nous détaillons ci-dessous les quatre étapes principales de l'algorithme (A) : l'interpolation des métriques sur un segment courbe, le calcul de la longueur totale l, le calcul du nombre de sous-segments n, et le découpage en n sous-segments.

4.2 Définitions fondamentales

Dans cette section, nous rappelons la définition d'une métrique (notion propre aux espaces riemanniens), ainsi que la définition de la longueur d'un segment dans un espace riemannien, ces notions étant à la base des algorithmes proposés.

4.2.1 Métrique en un point

La métrique ou le tenseur métrique en tout point X d'un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ est la donnée en X d'une matrice symétrique définie positive

$$\mathcal{M}(X) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a > 0, \quad c > 0, \quad a\,c - b^2 > 0 \quad .$$

Le champ des métriques $\{\mathcal{M}(X)\}_{X\in\Omega}$ définit une structure riemannienne sur Ω. Ce dernier muni de cette structure est désigné par $\big(\Omega, \{\mathcal{M}(X)\}_{X\in\Omega}\big)$. Dans le cas particulier où, pour tout point X du domaine, la métrique est identique, la structure riemannienne est une structure euclidienne ; dans ce cas, Ω muni de cette structure est désigné par $(\Omega, \mathcal{M})$. Enfin, si la métrique

$\mathcal{M}$ est égale à la matrice identité d'ordre 2, soit $\mathcal{I}$, on obtient l'espace euclidien usuel $(\Omega, \mathcal{I})$.

4.2.2 Longueur d'un segment dans une métrique variable

Soit un segment courbe $\widehat{C}$ d'équation paramétrique

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{t \in [t_1, t_2]} \quad .$$

Soit $\mathcal{M}(t)$ une métrique définie en tout point du segment courbe $\widehat{C}$:

$$\mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}_{t \in [t_1, t_2]} \quad .$$

La *longueur* du segment courbe $\widehat{C}$ dans la métrique $\mathcal{M}(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{long}_{\mathcal{M}(t)}(\widehat{C}) &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \mathcal{M}(t) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a(t)\,(dx)^2 + 2\,b(t)\,(dx)\,(dy) + c(t)\,(dy)^2} \quad . \end{aligned}$$

En posant $X'(t) = \dfrac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{long}_{\mathcal{M}(t)}(\widehat{C}) &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{a(t)\,x'(t)^2 + 2\,b(t)\,x'(t)\,y'(t) + c(t)\,y'(t)^2}\; dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{{}^t X'(t)\,\mathcal{M}(t)\,X'(t)}\; dt \quad . \end{aligned}$$

Nous appellerons *$\mathcal{M}$-abscisse curviligne* d'un point X de $\widehat{C}$, la longueur du sous-segment courbe $\widehat{OX}$ dans la métrique $\mathcal{M}(t)$, où O est l'origine de $\widehat{C}$. Elle sera notée $l_X = \mathrm{long}_{\mathcal{M}(t)}(\widehat{OX})$.

Si l'on considère le segment droit $[P,Q]$ d'équation paramétrique $X(t) = (P + t\,\overrightarrow{PQ})_{t\in[0,1]}$, la dérivée $X'(t)$ est constante et égale à $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. La longueur du segment droit $[P,Q]$ dans la métrique $\mathcal{M}(t)$ est

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{long}_{\mathcal{M}(t)}(P,Q) &= \int_0^1 \sqrt{{}^t\overrightarrow{PQ}\,\mathcal{M}(t)\,\overrightarrow{PQ}}\,dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{a(t)\,\alpha^2 + 2\,b(t)\,\alpha\,\beta + c(t)\,\beta^2}\,dt \quad . \end{aligned}}$$

Enfin, dans le cas où la métrique est constante, on obtient

$$\mathrm{long}_{\mathcal{M}}(P,Q) = \sqrt{{}^t\overrightarrow{PQ}\,\mathcal{M}\,\overrightarrow{PQ}} = \sqrt{a\,\alpha^2 + 2\,b\,\alpha\,\beta + c\,\beta^2} \quad .$$

4.2.3 Cas particulier : longueur usuelle d'un segment

Considérons à présent le cas particulier où l'espace métrique $(\Omega, \mathcal{M})$ est l'espace euclidien usuel $(\Omega, \mathcal{I})$, où $\mathcal{I}$ est la matrice identité d'ordre 2.

La *longueur usuelle* d'un segment courbe $\widehat{C}$ d'équation paramétrique $X(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, est définie par

$$\mathrm{long}_{\mathcal{I}}(\widehat{C}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{{}^tX'(t)\,X'(t)}\,dt \quad .$$

Nous appellerons *abscisse curviligne* (ou *$\mathcal{I}$-abscisse curviligne* pour éviter toute ambiguïté) d'un point X de $\widehat{C}$, la longueur usuelle du sous-segment courbe $\overset{\frown}{OX}$, où O est l'origine de $\widehat{C}$. Elle sera notée $s_X = \mathrm{long}_{\mathcal{I}}(\overset{\frown}{OX})$.

Si l'on considère le segment droit $[P,Q]$ d'équation paramétrique $X(t) = (P + t\,\overrightarrow{PQ})_{t\in[0,1]}$ avec $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, on retrouve la formule habituelle de la longueur d'un segment droit :

$$\mathrm{long}_{\mathcal{I}}(P,Q) = \sqrt{{}^t\overrightarrow{PQ}\,\overrightarrow{PQ}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad .$$

4.3 Interpolation des métriques

Dans cette section, nous détaillons l'étape 1 de l'algorithme (A) (cf. section 4.1). La carte de métriques $\{\mathcal{M}_i\}$ est un ensemble fini de matrices définies positives d'ordre 2. Ces matrices déterminent localement la taille souhaitée des éléments. Pour justifier notre choix d'interpolation de métriques, nous donnons tout d'abord une interprétation géométrique des métriques. Nous proposons ensuite une méthode d'interpolation entre deux métriques, puis sur la totalité du segment polygonal $\widehat{C}$.

4.3.1 Interprétation géométrique des métriques

Soit une métrique

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad .$$

Le "cercle unité" associé à cette métrique, dans le plan euclidien habituel, est une ellipse définie par l'équation

$$\phi(X) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a\, x_1^2 + 2\, b\, x_1\, x_2 + c\, x_2^2 = 1 \quad .$$

Cette équation s'écrit dans la base associée aux axes principaux de l'ellipse

$$\phi'(Y) = \frac{y_1^2}{h_1^2} + \frac{y_2^2}{h_2^2} = 1 \quad .$$

En effet, la matrice $\mathcal{M}$ est symétrique définie positive, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\mathcal{M} = \mathcal{P}\, \Lambda\, \mathcal{P}^{-1} \quad ,$$

où $\mathcal{P}$ (dite matrice de passage) est une matrice orthogonale ($\mathcal{P}^{-1} = {}^t\mathcal{P}$) dont chaque colonne est un vecteur propre de $\mathcal{M}$ et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad ,$$

où (λ_1, λ_2) sont les valeurs propres de $\mathcal{M}$. Si θ est l'angle compris entre l'axe des abscisses et l'axe principal de l'ellipse associé à la valeur propre λ_1, alors

$\mathcal{P}$ est la matrice de rotation $\mathcal{R}(\theta)$ d'angle θ et on a

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad .$$

En substituant X par $\mathcal{P}Y$ dans $\phi(X)$, on obtient

$$\phi(X) = {}^tX\mathcal{M}X = {}^tY{}^t\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{P}Y = {}^tY\Lambda Y = \phi'(Y) \quad .$$

La dernière égalité résulte du fait que les deux valeurs propres (λ_1, λ_2) sont positives et qu'il existe des réels positifs (h_1, h_2) tels que $\lambda_1 = \dfrac{1}{h_1^2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1}{h_2^2}$.

Remarquons que la valeur h_1 (resp. h_2), dans la métrique euclidienne habituelle, représente la longueur unité dans la métrique $\mathcal{M}$ suivant l'axe du vecteur propre associé à λ_1 (resp. λ_2). La figure 13 montre le "cercle unité" associé à la métrique correspondant à $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $h_1 = 2.5$ et $h_2 = 1$, d'où la matrice de passage $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

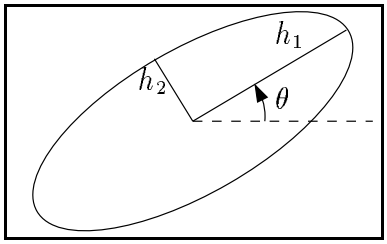

FIG. 13 - *"Cercle unité" dans une métrique anisotrope.*

4.3.2 Interpolation entre deux métriques

On se pose le problème suivant : comment interpoler la métrique sur un segment droit, connaissant les métriques aux extrémités. Ou encore : *ayant deux ellipses $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, définir une fonction qui permet de passer de l'une à l'autre d'une manière continue et monotone en terme de tailles.*

Pour cela, on considère la *réduction simultanée* des deux métriques (qui sont des formes quadratiques). En effet, la réduction simultanée des deux formes fournit une base dans laquelle ces deux formes sont définies par des matrices diagonales.

Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux métriques quelconques. Considérons la matrice $\mathcal{N} = \mathcal{M}_1^{-1}\mathcal{M}_2$. Cette matrice est $\mathcal{M}_1$-symétrique, donc diagonalisable dans $\mathbb{R}^2$. Soient (e_1, e_2) les vecteurs propres de $\mathcal{N}$ définissant une base de $\mathbb{R}^2$, alors

$$ {}^t e_1 \mathcal{M}_1 e_2 = {}^t e_1 \mathcal{M}_2 e_2 = 0 \quad . $$

Soit $X = x_1 e_1 + x_2 e_2$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$ muni de la base (e_1, e_2) ; posons $(\lambda_i = {}^t e_i \mathcal{M}_1 e_i)_{i=1,2}$ et $(\mu_i = {}^t e_i \mathcal{M}_2 e_i)_{i=1,2}$; par définition, pour tout $i = 1, 2$, $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$, on a

$$ {}^t X \mathcal{M}_1 X = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \quad \text{et} \quad {}^t X \mathcal{M}_2 X = \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 \quad . $$

Soient $(h_{1,i} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}})_{i=1,2}$ et $(h_{2,i} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_i}})_{i=1,2}$. La valeur $h_{1,i}$ (resp. $h_{2,i}$) représente la longueur unité dans la métrique $\mathcal{M}_1$ (resp. $\mathcal{M}_2$) suivant l'axe e_i. L'interpolation des métriques entre $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ est définie par

$$ \mathcal{M}(t) = {}^t\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{H_1^2(t)} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{H_2^2(t)} \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} \qquad t \in [0,1] \quad , $$

où $\mathcal{P}$ est la matrice formée par les vecteurs colonnes (e_1, e_2), et $(H_1(t), H_2(t))$ sont des fonctions monotones continues telles que $H_i(0) = h_{1,i}$ et $H_i(1) = h_{2,i}$ pour $i = 1, 2$. Dans la pratique, on peut considérer des fonctions d'interpolation

– linéaires : $\quad H_i(t) = h_{1,i} + t\,(h_{2,i} - h_{1,i}) \quad ,$

– géométriques : $\quad H_i(t) = h_{1,i} \left(\dfrac{h_{2,i}}{h_{1,i}}\right)^t \quad$ ou

– sinusoïdales : $\quad H_i(t) = \frac{1}{2}\Big(h_{1,i} + h_{2,i} + (h_{1,i} - h_{2,i})\cos(\pi\, t)\Big) \quad .$

Remarquons que cette interpolation est contrôlée uniquement suivant les axes e_1 et e_2. À titre d'exemple, les figures 14 et 15 (resp. 16 et 17) montrent deux métriques initiales, les métriques interpolées, et les courbes d'interpolation suivant certains axes, dans le cas d'une fonction linéaire (resp. géométrique). Il apparaît clairement que les courbes sont monotones suivant les axes e_1 et e_2, mais pas nécessairement le long d'autres axes.

4.3.3 Interpolation sur la totalité d'un segment courbe

Rappelons qu'un segment courbe $\widehat{C}$ est représenté par un segment polygonal approchant $\widehat{C}$ (cf. section 4.1). Soient Q_i et Q_{i+1} deux points consécutifs du maillage de fond, d'abscisses curvilignes s_i et s_{i+1}, où sont définies des métriques $\mathcal{M}_i$ et $\mathcal{M}_{i+1}$. Quel que soit $i = 1..q$, la méthode précédente s'applique par morceau, avec le paramètre

$$t = \frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i} \quad \in [0,1] \quad .$$

Nous avons ainsi défini une métrique interpolée, notée $\mathcal{M}(s)$, le long du segment polygonal $\widehat{C}$.

4.3.4 Intersections de métriques

Ce qui précède définit entièrement l'espace de contrôle, et par suite l'ensemble des outils nécessaires à la création des points internes. Dans le cas où plusieurs cartes de métriques (adaptation "multicritères") sont spécifiées, on propose une méthode de fusionnement de ces cartes permettant de retrouver le cas avec une seule carte.

Supposons donc qu'en un point donné soient définies deux métriques différentes ; on veut déterminer une métrique unique en ce point, cohérente avec les deux métriques données.

Considérons les "cercles unités" (qui sont des ellipses) associés aux deux métriques initiales. La solution de notre problème est alors la métrique associée à l'intersection de ces deux ellipses. Mais comme cette dernière n'est pas en général une ellipse, on considère la plus grande ellipse qui lui est incluse. Celle-ci définit une métrique que l'on appelle *métrique intersection*.

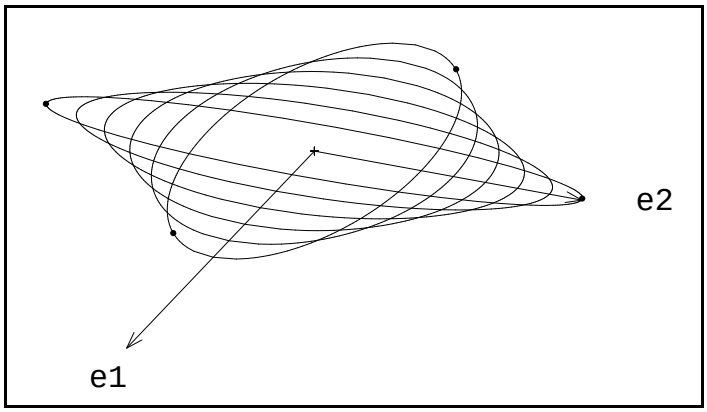

FIG. 14 - *Interpolation linéaire : métriques.*

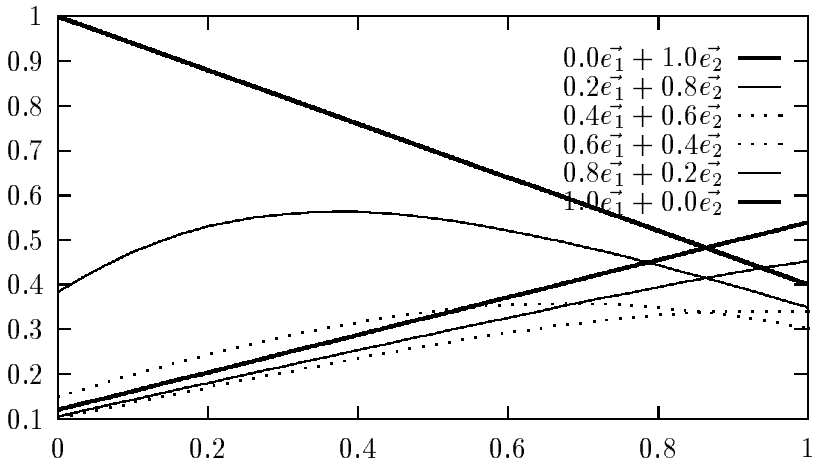

FIG. 15 - *Interpolation linéaire : courbes $H(t)$.*

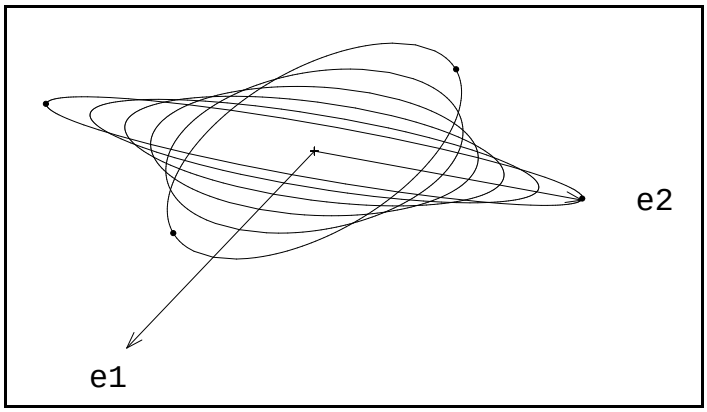

FIG. 16 - *Interpolation géométrique : métriques.*

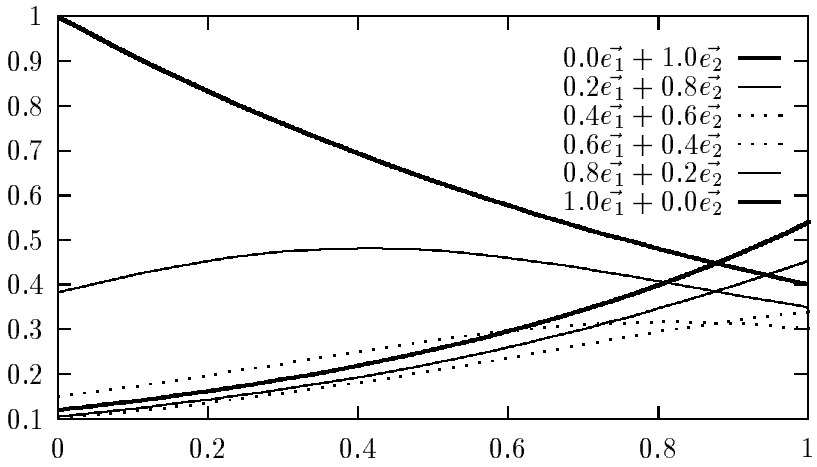

FIG. 17 - *Interpolation géométrique : courbes $H(t)$.*

La réduction simultanée des deux formes quadratiques associées aux deux métriques permet de définir la métrique intersection des deux métriques. En effet, si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont les deux métriques, les deux ellipses correspondantes s'écrivent dans la base associée à la réduction simultanée des matrices $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$

$$ {}^tX\mathcal{M}_1X = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1 \quad \text{et} \quad {}^tX\mathcal{M}_2X = \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 = 1 \quad . $$

La métrique intersection $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ est alors définie par

$$ (\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = {}^t\mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \max(\lambda_1, \mu_1) & 0 \\ 0 & \max(\lambda_2, \mu_2) \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} \quad , $$

où $\mathcal{P}$ est la matrice de passage de la base canonique à la base associée à la réduction simultanée des deux métriques.

La figure 18 montre la métrique intersection de deux métriques données.

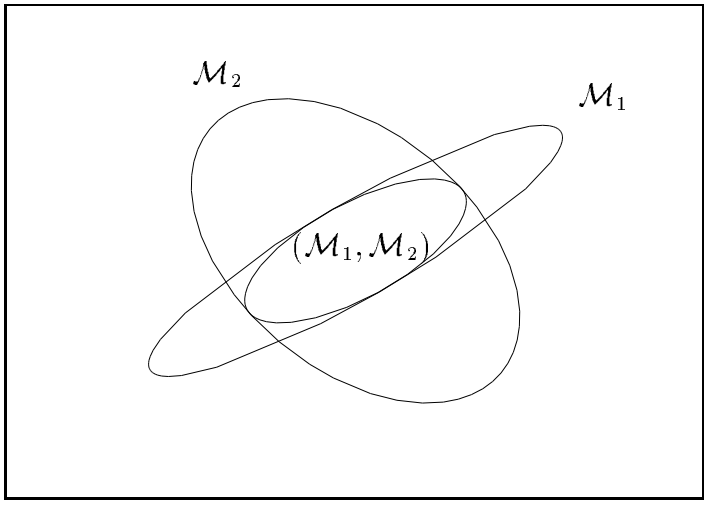

FIG. 18 - *Intersection de deux métriques.*

Dans le cas où plusieurs métriques $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1..n}$ sont spécifiées en un point, leur intersection peut être définie par

$$ (\mathcal{M}_1, \cdots, \mathcal{M}_n) = ((...((\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2), \mathcal{M}_3), ...), \mathcal{M}_n) \quad . $$

4.4 Calcul de la longueur totale

Dans cette section, nous détaillons l'étape 2 de l'algorithme (A) (cf. section 4.1). Il s'agit de calculer la longueur totale l du segment polygonal $\widehat{C}$ dans la métrique interpolée $\mathcal{M}(s)$. Cette longueur est calculée comme la somme des longueurs des arêtes de $\widehat{C}$. Sur une telle arête $[P_i, P_{i+1}]$, des métriques sont définies en plusieurs points :

- en ses deux extrémités P_i et P_{i+1} (métriques obtenues par interpolation),
- éventuellement, en des sommets $\{Q_j\}_{j=j_1..j_2}$ du maillage de fond.

La longueur de l'arête $[P_i, P_{i+1}]$ est calculée comme la somme des longueurs des sous-segments $[P_i, Q_{j_1}]$, $[Q_{j_1}, Q_{j_1+1}]$, ..., $[Q_{j_2}, P_{i+1}]$. Pour simplifier, appelons cette arête $[A, B]$ et l'un de ces sous-segments $[P, Q]$ (FIG. 19).

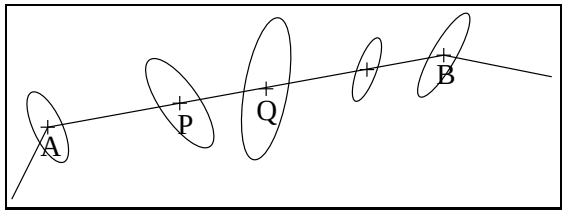

FIG. 19 - *Arête $[A, B]$ et sous-segment $[P, Q]$.*

Nous supposons que nous connaissons les composantes (α, β) du vecteur $\overrightarrow{AB}$, ainsi que les abscisses curvilignes notées s_A, s_B, s_P et s_Q. En reprenant la formule de la longueur d'un segment droit (cf. section 4.2.2, encadré), et en changeant la variable $t \in [0, 1]$ par la variable $s = s_P + t\,(s_Q - s_P) \in [s_P, s_Q]$, on obtient

$$\mathrm{long}_{\mathcal{M}(s)}(P, Q) = \int_{s_P}^{s_Q} \sqrt{{}^t\overrightarrow{PQ}\,\mathcal{M}(s)\,\overrightarrow{PQ}}\;\frac{dt}{ds}\,ds$$

avec

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{s_Q - s_P}{s_B - s_A}\,\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{s_Q - s_P} \quad ,$$

d'où

$$\mathrm{long}_{\mathcal{M}(s)}(P, Q) = \frac{1}{s_B - s_A} \int_{s_P}^{s_Q} \sqrt{a(s)\,\alpha^2 + 2\,b(s)\,\alpha\,\beta + c(s)\,\beta^2}\;ds \quad .$$

En général, le calcul formel de l'intégrale est trop complexe, mais nous proposons la méthode ci-après, adaptée de la "méthode des trapèzes". En appelant $f(s)$ la fonction à intégrer, on a

$$\frac{1}{s_B - s_A} \int_{s_P}^{s_Q} f(s)\, ds \approx \frac{s_Q - s_P}{s_B - s_A} \frac{f(s_P) + f(s_Q)}{2} \quad .$$

Si la valeur obtenue est inférieure à un certain seuil $\bar{l}$, alors le résultat est jugé satisfaisant. Sinon, on subdivise le segment $\overrightarrow{PQ}$ en deux segments de tailles égales (dans la métrique usuelle) et on recommence récursivement le processus. Dans la pratique, le seuil $\bar{l} = 0.5$ est suffisant.

En résumé, la longueur cherchée est approximativement égale à $long(s_P, s_Q)$, où $long$ est une fonction qui s'écrit en pseudo-code

Fonction $long(s_P, s_Q)$

$$long = \frac{s_Q - s_P}{s_B - s_A} \frac{f(s_P) + f(s_Q)}{2} \quad .$$

Si $long \leq \bar{l}$ alors le résultat est jugé satisfaisant.

Sinon $long = long\left(s_P, \frac{s_P + s_Q}{2}\right) + long\left(\frac{s_P + s_Q}{2}, s_Q\right) \quad .$

Fin de la fonction $long$

Cette fonction peut être optimisée en évitant de calculer plusieurs fois les mêmes valeurs de $f(s)$. En outre, certains résultats obtenus aux points intermédiaires sont utilisés ultérieurement (cf. section 4.6).

4.5 Calcul du nombre de sous-segments

Dans cette section, nous détaillons l'étape 3 de l'algorithme (A) (cf. section 4.1). Rappelons que l désigne la longueur totale du segment polygonal $\widehat{C}$ dans une métrique donnée $\mathcal{M}(s)$. L'entier n est le nombre de sous-segments à créer, "proche" du réel l. Nous présentons ici deux méthodes pour calculer n. Les notations sont les suivantes :

- $\text{int}(l)$ = partie entière (*integer*) de l.
- $\text{nint}(l)$ = entier le plus proche (*nearest integer*) de l.
  Puisque l est positif, $\text{nint}(l) = \text{int}(l + 0.5)$.

La première méthode consiste à prendre l'entier non nul le plus proche :

$$n = \max(\mathrm{nint}(l), 1) \quad .$$

La deuxième méthode est basée sur un calcul d'erreur relative. Supposons que la valeur de l soit 1.4. Nous allons choisir entre $n = \mathrm{int}(l) = 1$ et $n = \mathrm{int}(l)+1 = 2$. Le choix $n = 1$ donnerait un seul sous-segment de longueur 1.4. L'erreur relative par rapport à la longueur unité serait $1/1.4 \approx 0.714$. Le choix $n = 2$ donnerait deux éléments de même longueur 0.7. L'erreur relative serait $0.7 < 0.714$, et donc le choix $n = 2$ est préférable.

De façon plus générale, la comparaison des erreurs relatives s'écrit en pseudo-code :

$$n = \max(\mathrm{int}(l), 1) \ ;$$
$$\text{si } n\,(n+1) < l^2 \text{ alors } n = n+1 \quad .$$

4.6 Découpage en sous-segments

Dans cette section, nous détaillons la dernière étape (4) de l'algorithme (A) (cf. section 4.1). Le problème est de découper le segment polygonal $\widehat{C}$ en n sous-segments de même longueur u (proche de l'unité) dans la métrique $\mathcal{M}(s)$. Il s'agit donc, connaissant la $\mathcal{M}$-abscisse curviligne l d'un point,

$$l = (j-1)\,u \qquad j = 1\,..\,n+1 \quad ,$$

de trouver son $\mathcal{I}$-abscisse curviligne s.

Or, au cours du calcul de la longueur totale (cf. section 4.4), nous avons divisé $\widehat{C}$ en sous-segments de longueurs inférieures à un certain seuil $\overline{l}$ (en pratique $\overline{l} = 0.5$). Les extrémités de ces sous-segments définissent une "graduation" de la courbe, c'est-à-dire un ensemble de points dont on connaît à la fois la $\mathcal{I}$-abscisse curviligne s_i et la $\mathcal{M}$-abscisse curviligne l_i.

Il suffit donc de chercher un intervalle i tel que $l_i \leq l \leq l_{i+1}$, puis de calculer la valeur cherchée s par interpolation linéaire :

$$\frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i} = \frac{l - l_i}{l_{i+1} - l_i} \quad .$$

5 Maillage de courbes - cas particulier (isotrope)

Le cas isotrope est un cas particulier (mais fréquemment rencontré en pratique) où chaque métrique est de la forme $\mathcal{M}_i = \lambda_i \mathcal{I}$, où $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{I}$ est la matrice identité d'ordre 2.

Toutes les méthodes déjà présentées dans le cas anisotrope (cf. section 4) restent évidemment applicables. Cependant, le cas isotrope permet le calcul exact des intégrales nécessaires aux calculs des longueurs. Dans cette section, nous présentons les particularités du cas isotrope.

5.1 Interpolation des métriques et calcul des longueurs

Le "cercle unité" associé à une métrique $\mathcal{M} = \lambda \mathcal{I}$, dans le plan euclidien habituel, est un cercle de rayon h défini par l'équation

$$\phi(X) = \lambda\,(x^2 + y^2) = \frac{1}{h^2}\,(x^2 + y^2) = 1 \qquad (\text{avec} \quad h = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}).$$

La longueur d'un segment droit dans une telle métrique est indépendante de sa direction (ce qui est la définition même de l'isotropie). Ainsi, les directions des arêtes du segment polygonal $\widehat{C}$ n'interviennent pas, et il devient inutile de considérer ses sommets $\{P_i\}$. Pour cette raison, dans toute cette section, le segment polygonal $\widehat{C}$ sera supposé droit.

Pour interpoler deux métriques $\mathcal{M}_1 = \dfrac{1}{h_1^2}\mathcal{I}$ et $\mathcal{M}_2 = \dfrac{1}{h_2^2}\mathcal{I}$, la méthode est analogue au cas anisotrope, mais la réduction simultanée devient évidemment inutile. Les rayons h_1 et h_2 sont interpolés par une fonction monotone continue, notée $H(t)$, définie sur l'intervalle $[0,1]$ et telle que $H(0) = h_1$ et $H(1) = h_2$. Dans la pratique, on peut à nouveau considérer des fonctions d'interpolation linéaires, géométriques ou sinusoïdales.

Nous pouvons ainsi définir, par morceau, une métrique interpolée $\mathcal{M}(s)$ sur la totalité d'un segment. Cette métrique est de la forme $\dfrac{1}{h^2(s)}\mathcal{I}$, où s désigne l'abscisse curviligne.

Cherchons la longueur d'un sous-segment $[P,Q]$ dans la métrique $\mathcal{M}(s)$, connaissant les abscisses curvilignes s_P et s_Q. En reprenant la formule de la

longueur d'un segment droit (cf. section 4.2.2, encadré), et en changeant la variable $t \in [0,1]$ par la variable $s = s_P + t\,(s_Q - s_P) \in [s_P, s_Q]$, on obtient

$$\mathrm{long}_{\mathcal{M}(s)}(P,Q) = \int_{s_P}^{s_Q} \sqrt{{}^t\overrightarrow{PQ}\,\mathcal{M}(s)\,\overrightarrow{PQ}}\;\frac{dt}{ds}\,ds = \int_{s_P}^{s_Q} \frac{1}{h(s)}\,ds \quad .$$

5.2 Calcul de la longueur totale

Cherchons la longueur totale l du segment $\widehat{C}$, supposé droit, dans la métrique interpolée $\mathcal{M}(s)$. Cette longueur est la somme des longueurs de morceaux $[Q_i, Q_{i+1}]$, Q_i et Q_{i+1} étant deux points consécutifs où des métriques sont définies. Posons $i = 1$ pour simplifier ce qui suit. Sur le morceau $[s_1, s_2]$, la fonction $h(s)$ est égale à une fonction d'interpolation $H(S)$, avec $S = \dfrac{s - s_1}{s_2 - s_1}$ $\in [0,1]$, d'où la longueur

$$\mathrm{long}_{\mathcal{M}(s)}(Q_1,Q_2) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{h(s)}\,ds = \int_0^1 \frac{1}{H(S)}\,\frac{ds}{dS}\,dS = (s_2 - s_1)\int_0^1 \frac{1}{H(S)}\,dS.$$

Dans la plupart des cas, il est possible de donner une expression analytique $I(S)$ de l'intégrale à calculer. Par exemple, si la fonction d'interpolation est géométrique, nous avons

$$H(S) = h_1\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^S \quad ,$$

$$I(S) = \int \frac{1}{H(S)}\,dS = \frac{-1}{h_1\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^S \mathrm{Log}(\frac{h_2}{h_1})} + C \quad ,$$

$$[I(S)]_0^1 = \int_0^1 \frac{1}{H(S)}\,dS = \frac{h_2 - h_1}{h_1\,h_2\,\mathrm{Log}(\frac{h_2}{h_1})} \quad .$$

Si h_1 est voisin de h_2, la formule précédente est indéterminée, mais un développement limité donne

$$[I(S)]_0^1 = \frac{2-\varepsilon}{2\,h_1} + o(\varepsilon^2) \qquad \text{où } \varepsilon \text{ est tel que } h_2 = h_1\,(1+\varepsilon) \quad .$$

5.3 Découpage en sous-segments

Le problème est de découper le segment $\widehat{C}$, supposé droit, en n sous-segments de même longueur u (proche de l'unité) dans la métrique $\mathcal{M}(s)$. Il s'agit donc, connaissant la $\mathcal{M}$-abscisse curviligne l_X d'un point X,

$$l_X = (j-1)\,u \qquad j = 1\,..\,n+1 \quad ,$$

de trouver son $\mathcal{I}$-abscisse curviligne s_X.

Au cours du calcul de la longueur totale de $\widehat{C}$ (cf. section 5.2), nous pouvons conserver la $\mathcal{I}$-abscisse curviligne s_i et la $\mathcal{M}$-abscisse curviligne l_i de chaque point Q_i où sont définies les métriques. Cherchons alors un morceau i tel que $l_i \leq l_X \leq l_{i+1}$, et supposons que nous trouvions $i = 1$ pour simplifier ce qui suit. Nous avons donc

$$l_X - l_1 = \mathrm{long}_{\mathcal{M}(s)}(Q_1, X) = \int_{s_1}^{s_X} \frac{1}{h(s)}\, ds \quad .$$

Sur le morceau $[s_1, s_2]$, la fonction $h(s)$ est égale à une fonction d'interpolation $H(S)$, avec $S = \dfrac{s - s_1}{s_2 - s_1} \in [0,1]$. Nous cherchons donc à présent la valeur $S_X = \dfrac{s_X - s_1}{s_2 - s_1} \in [0,1]$ telle que

$$l_X - l_1 = \int_0^{S_X} \frac{1}{H(S)}\,\frac{ds}{dS}\, dS = (s_2 - s_1)\int_0^{S_X} \frac{1}{H(S)}\, dS \quad .$$

La résolution directe de l'équation précédente donne une expression de S_X relativement longue. En pratique, il est préférable d'utiliser la valeur de $l_2 - l_1$ déjà calculée, ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} l_X - l_1 & = & (s_2 - s_1)\,[I(S)]_0^{S_X} \\ \\ l_2 - l_1 & = & (s_2 - s_1)\,[I(S)]_0^{1} \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \frac{[I(S)]_0^{S_X}}{[I(S)]_0^{1}} = \frac{l_X - l_1}{l_2 - l_1} = L_X \in [0,1] \quad \text{connu.}$$

Par exemple, si la fonction d'interpolation est géométrique, on obtient en développant l'expression de $I(S)$ calculée précédemment

$$S_X = \frac{\mathrm{Log}\left(\dfrac{h_2}{h_2 - L_X\,(h_2 - h_1)}\right)}{\mathrm{Log}\left(\dfrac{h_2}{h_1}\right)} \quad .$$

Si h_1 est voisin de h_2, la formule précédente est de nouveau indéterminée (cf. section 5.2), mais un développement limité donne

$$S_X = \frac{L_X\,(2 - \varepsilon + \varepsilon\, L_X)}{2} + o(\varepsilon^2) \qquad \text{où } \varepsilon \text{ est tel que } h_2 = h_1\,(1+\varepsilon) \quad .$$

5.4 Calculs formels

Nous venons d'expliciter l'algorithme (A) (cf. section 4.1) dans le cas d'une interpolation géométrique des tailles $\{h_i\}$. La méthode est analogue avec d'autres fonctions d'interpolation. Nous présentons ci-dessous les expressions correspondant à des fonctions linéaires, géométriques ou sinusoïdales. Toutes ces expressions ont été obtenues ou vérifiées à l'aide du système de calcul formel Maple [6].

5.4.1 Interpolation linéaire

$$\begin{aligned}
H(S) &= h_1 + S\,(h_2 - h_1) \\
I(S) &= \frac{\mathrm{Log}(h_1 + S\,(h_2 - h_1))}{h_2 - h_1} + C \\
[I(S)]_0^1 &= \mathrm{Log}(\frac{h_2}{h_1})\,(h_2 - h_1)^{-1} \\
&= \frac{2-\varepsilon}{2\,h_1} + o(\varepsilon^2) \\
S_X &= h_1 \left(\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{L_X} - 1\right)(h_2 - h_1)^{-1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{L_X\ (2-\varepsilon+\varepsilon\, L_X)}{2} + o(\varepsilon^2)$$

5.4.2 Interpolation géométrique

$$\begin{aligned}
H(S) &= h_1 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^S \\
I(S) &= -\left(\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^S\right)^{-1} \left(\mathrm{Log}(\frac{h_2}{h_1})\right)^{-1} {h_1}^{-1} + C \\
[I(S)]_0^1 &= (h_2-h_1)\, {h_1}^{-1} {h_2}^{-1} \left(\mathrm{Log}(\frac{h_2}{h_1})\right)^{-1} \\
&= \frac{2-\varepsilon}{2\, h_1} + o(\varepsilon^2) \\
S_X &= \mathrm{Log}(\frac{h_2}{h_2 + L_X\ (h_1-h_2)}) \left(\mathrm{Log}(\frac{h_2}{h_1})\right)^{-1} \\
&= \frac{L_X\ (2-\varepsilon+\varepsilon\, L_X)}{2} + o(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

5.4.3 Interpolation sinusoïdale

$$\begin{aligned}
H(S) &= \frac{h_1+h_2+(h_1-h_2)\cos(\pi\, S)}{2} \\
I(S) &= 2\,\mathrm{Arc\ tg}(\frac{h_2\,\mathrm{tg}(\frac{\pi\, S}{2})}{\sqrt{h_1\, h_2}})\frac{1}{\sqrt{h_1\, h_2}}\pi^{-1} + C \\
[I(S)]_0^1 &= \frac{1}{\sqrt{h_1\, h_2}} \\
S_X &= 2\,\mathrm{Arc\ tg}(\frac{\mathrm{tg}(\frac{L_X\,\pi}{2})\sqrt{h_1\, h_2}}{h_2})\pi^{-1}
\end{aligned}$$

6 Exemples

Les méthodes et les algorithmes précédents ont été implémentés dans le logiciel BL2D [2], qui est disponible sur le site

ftp://ftp.inria.fr/INRIA/Projects/Gamma/bl2d.tar.gz .

Ce logiciel permet de réaliser une boucle d'adaptation (cf. section 2). Les courbes sont décrites par des splines Catmull-Rom. En fonction d'une carte de métriques, elles sont ensuite maillées en un ensemble d'arêtes. Ces dernières définissent généralement la frontière d'un domaine de $\mathbb{R}^2$, qui est à son tour maillé en triangles. Ce maillage peut être utilisé par un code de calcul par éléments finis, puis par un estimateur qui calcule une nouvelle carte de métriques, et ainsi de suite.

Pour structurer les principales données nécessaires, nous avons spécifié des formats de fichiers : le maillage de définition géométrique $\mathcal{T}_{géom}$ est dans le format G, le support géométrique $\mathcal{S}_{géom}$ dans le format SMOOTH, chaque maillage $\mathcal{T}_{i\geq 0}$ dans le format C (courbes) et MS (domaines), et chaque carte de métriques $\{\mathcal{M}_i\}$ dans le format H. Le programme `blsmooth` convertit un fichier G en fichier SMOOTH. Les mailleur de courbes `blmc` crée un fichier C, qui sert de base au mailleur de domaines `blms`.

Quelques exemples de maillages obtenus par le logiciel BL2D sont présentés ci-dessous, avec des spécifications de métriques isotropes ou anisotropes, et des fonctions d'interpolation linéaires, géométriques ou sinusoïdales.

Détails d'implémentation

La plupart des calculs sont effectués en double précision (17 chiffres significatifs). Les développements limités sont utilisés si $|\varepsilon| \leq 10^{-10}$ (cf. section 5.4).

Pour le calcul du nombre de sous-segments, la deuxième méthode de la section 4.5 est utilisée (calcul d'erreur relative).

6.1 Maillage isotrope

Dans le cas isotrope, il suffit de considérer l'exemple d'un segment droit (cf. section 5.1). Le tableau ci-dessous donne, pour chaque point Q_i, son abscisse s_i et la taille souhaitée h_i. Les "cercles unité" des métriques correspondantes sont représentées graphiquement (FIG. 20).

Q_i	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
s_i	0.0	3.0	4.0	8.0	10.0
h_i	1.5	0.5	2.0	0.1	0.7

Trois fonctions d'interpolation des tailles (linéaires, géométriques et sinusoïdales) sont présentées (FIG. 21, 22 et 23). Chaque figure montre les points $\{Q_i\}$ définis ci-dessus, la fonction d'interpolation $h(s)$, et le maillage obtenu $\{R_i\}$. L'histogramme est formé de carrés dont l'un des côtés est une arête $[R_i, R_{i+1}]$. Les intersections de la courbe $h(s)$ avec l'histogramme montrent que les tailles obtenues sont conformes aux tailles souhaitées. Plus précisément, si le maillage est *parfait* (la longueur de chaque arête dans la métrique est exactement égale à l'unité, cf. section 4.1), on démontre le théorème suivant :

Théorème. Si un carré de l'histogramme est délimité par les abscisses s_1 et s_2, la courbe $h(s)$ coupe ce carré en un point d'abscisse $s_0 \in [s_1, s_2]$. Ce point est tel que $\dfrac{1}{h(s_0)}$ est la valeur moyenne de la fonction $\dfrac{1}{h(s)}$ sur l'intervalle $[s_1, s_2]$.

Démonstration. En appliquant le théorème de la moyenne à la fonction $\dfrac{1}{h(s)}$, on a

$$\exists s_0 \in [s_1, s_2] \ : \quad \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{h(s)}\, ds = (s_2 - s_1)\, \frac{1}{h(s_0)} \quad .$$

Si le maillage est *parfait*, $\displaystyle\int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{h(s)}\, ds = 1$, d'où $h(s_0) = s_2 - s_1$, qui est égal à la hauteur du carré.

Remarques

Les temps d'exécution sont très faibles (environ 1 ms sur une station Sun SS10/30).

Le nombre d'arêtes créées est variable (respectivement 17, 26 et 21).

L'interpolation géométrique est généralement préférée car elle privilégie les tailles souhaitées petites (voir notamment les arêtes créées au voisinage de l'avant-dernier point Q_4).

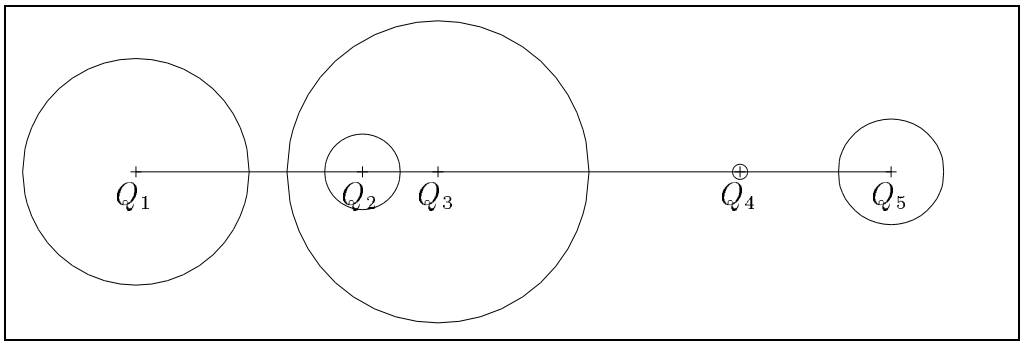

FIG. 20 - *Spécification des tailles.*

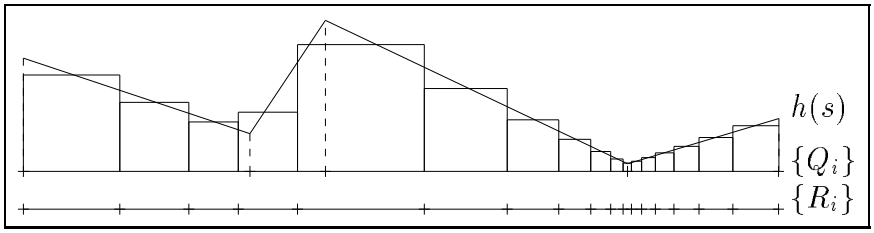

FIG. 21 - *Interpolation linéaire.*

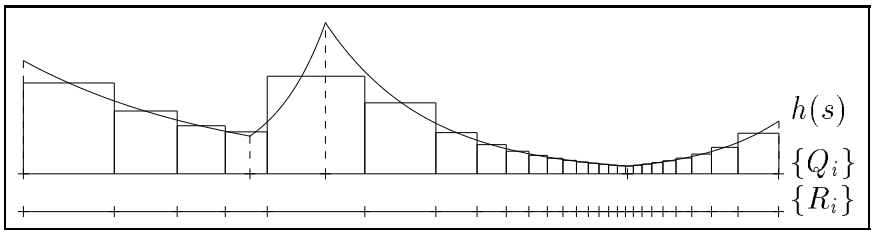

FIG. 22 - *Interpolation géométrique.*

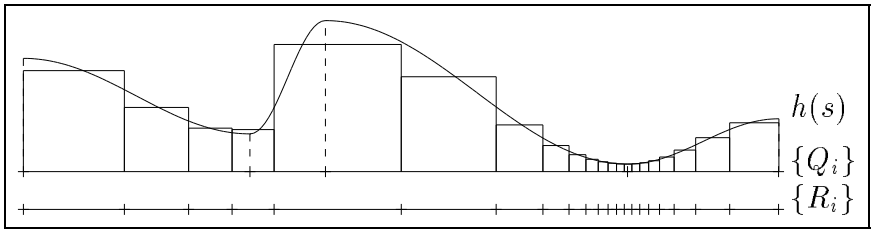

FIG. 23 - *Interpolation sinusoïdale.*

6.2 Maillage anisotrope d'un segment droit

Le tableau ci-dessous donne, pour chaque point Q_i, son abscisse s_i et la métrique souhaitée, qui est définie par un triplet $(\theta_i, h_{1,i}, h_{2,i})$ (cf. section 4.3.1).

Q_i	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
s_i	0.0	2.0	3.0	6.0	7.5
θ_i	30°	90°	0°	−60°	−45°
$h_{1,i}$	0.70	1.10	0.30	1.50	1.00
$h_{2,i}$	0.25	0.15	0.30	0.40	0.35

Nous présentons ci-dessous les "cercles unité" des métriques (FIG. 24) et les maillages obtenus avec des fonctions d'interpolation linéaires, géométriques et sinusoïdales (FIG. 25, 26 et 27). La visualisation des métriques interpolées montre la concordance entre les métriques souhaitées et les maillages obtenus.

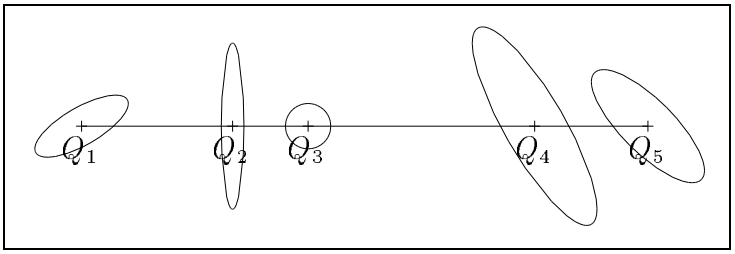

FIG. 24 - *Spécification des tailles.*

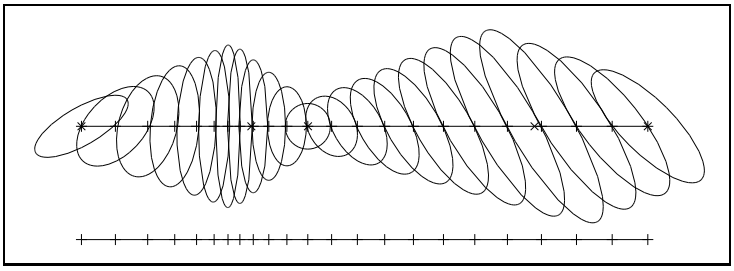

FIG. 25 - *Interpolation linéaire.*

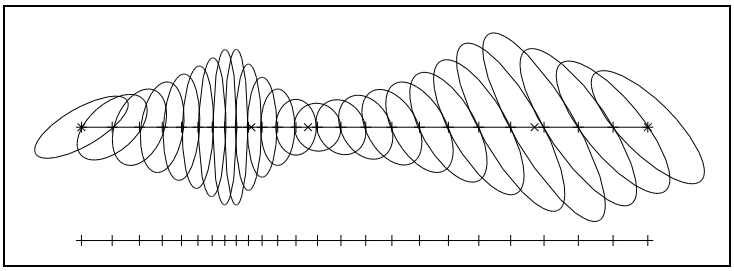

FIG. 26 - *Interpolation géométrique.*

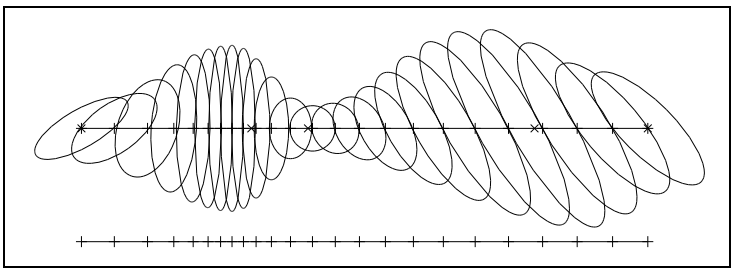

FIG. 27 - *Interpolation sinusoïdale.*

6.3 Maillage anisotrope d'un segment courbe

Nous présentons ci-dessous les métriques souhaitées sur un segment courbe (FIG. 28) et les maillages obtenus avec des fonctions d'interpolation linéaires, géométriques et sinusoïdales (FIG. 29, 30 et 31). Le deuxième maillage définit la frontière d'un domaine de $\mathbb{R}^2$, qui est lui-même maillé en triangles (interpolation géométrique) (FIG. 32). À nouveau, la visualisation des métriques interpolées montre la concordance entre les métriques souhaitées et les maillages obtenus.

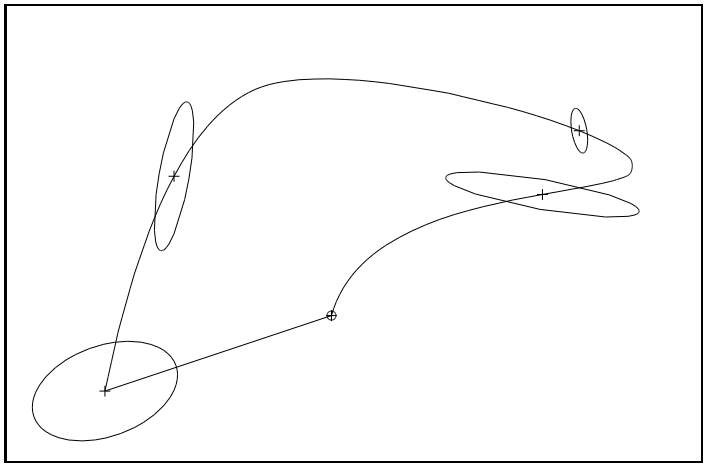

FIG. 28 - *Spécification des tailles.*

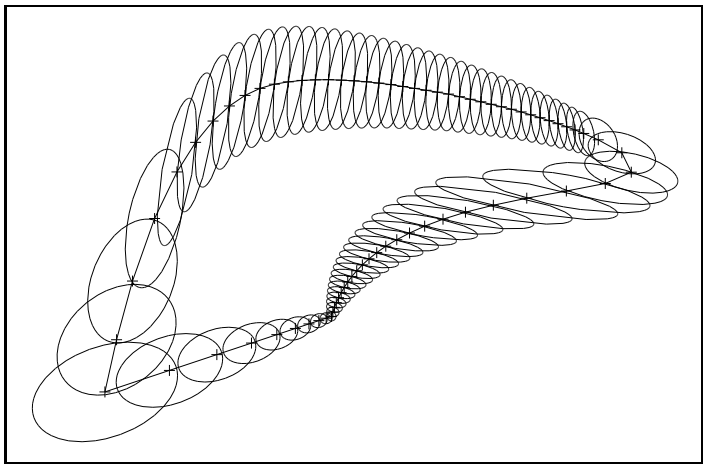

FIG. 29 - *Interpolation linéaire.*

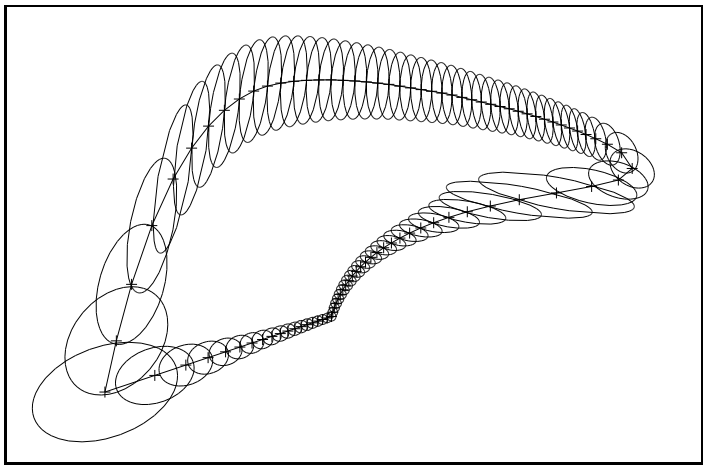

FIG. 30 - *Interpolation géométrique.*

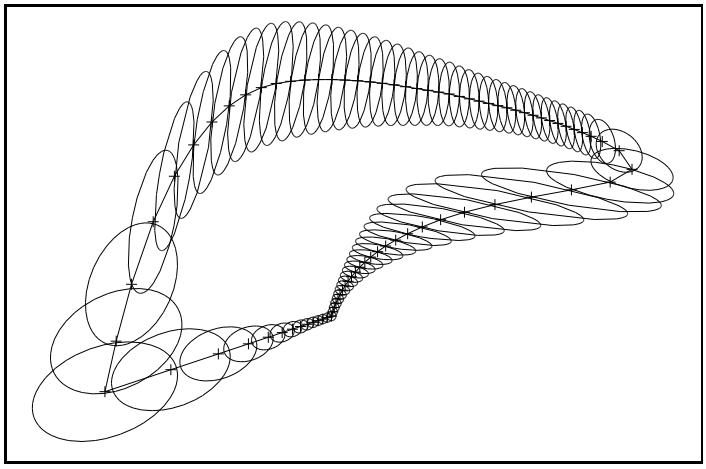

FIG. 31 - *Interpolation sinusoïdale.*

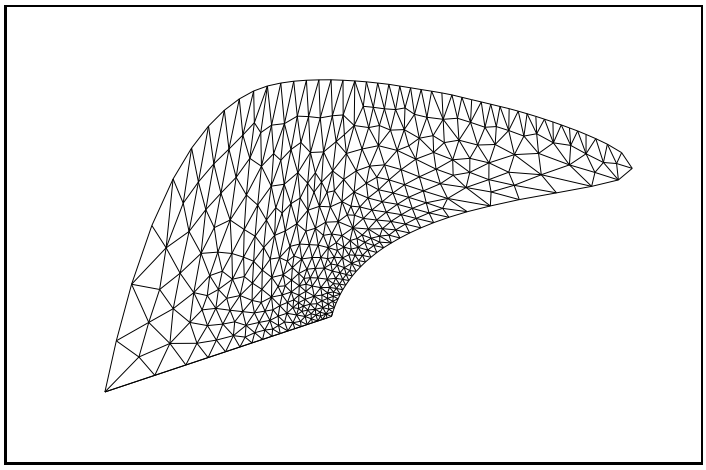

FIG. 32 - *Maillage d'un domaine défini par sa frontière maillée (interpolation géométrique).*

6.4 Maillage éléments finis

On trouvera dans [3] et [4] des exemples utilisant des techniques de maillage de courbes décrites dans ce rapport. Néanmoins, dans cette section, nous présentons un nouvel exemple qui illustre plus particulièrement notre méthode. Il s'agit d'un cas classique en mécanique des fluides, où l'on utilise les équations d'Euler pour simuler un écoulement transsonique autour d'un profil d'aile NACA0012, à Mach 0.8 et un angle d'attaque de 1.25°.

La boucle d'adaptation de maillage comprend trois itérations, et les maillages correspondants sont adaptés à la physique du problème, en particulier pour bien capter les deux chocs sur l'extrados et sur l'intrados. Notons que les maillages sont anisotropes et que le nombre de triangles est relativement faible (de l'ordre de 2000), ce qui favorise la rapidité des calculs.

Le tableau ci-dessous montre l'évolution du maillage au cours de l'adaptation, i étant le numéro d'itération, n_Γ le nombre de points définissant la discrétisation de Γ, n_Ω le nombre total de points du maillage, et $\frac{h_2}{h_1}$ l'étirement maximal de la carte de métriques estimée.

i	n_Γ	n_Ω	$\frac{h_2}{h_1}$
0	129	1344	1.0
1	161	2099	3.4
2	168	2117	6.8
3	181	2223	8.5

Les figures 33 et 34 montrent les maillages et les isodensités correspondant à la boucle d'adaptation.

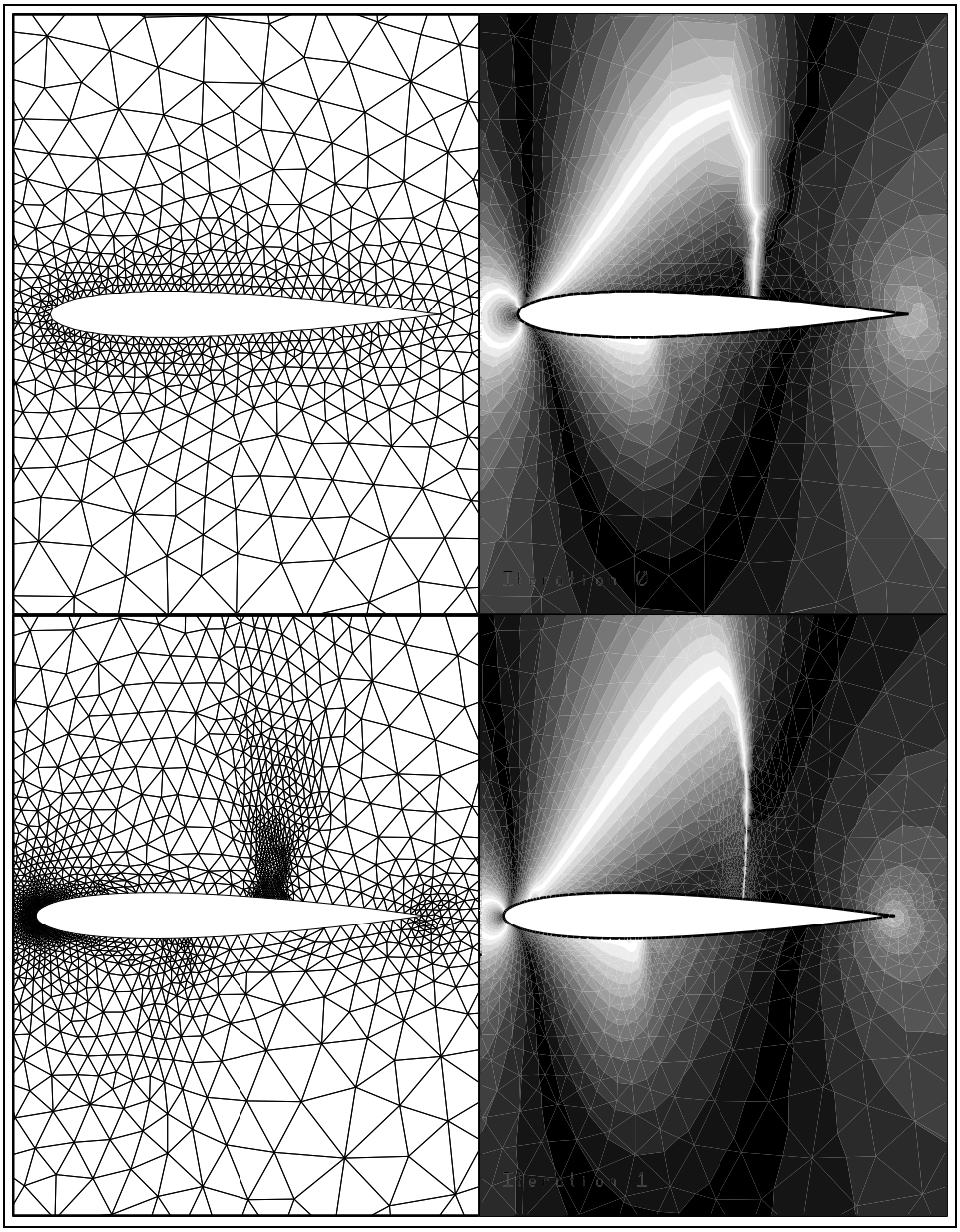

FIG. 33 - *Maillages et isodensités aux itérations 0 et 1.*

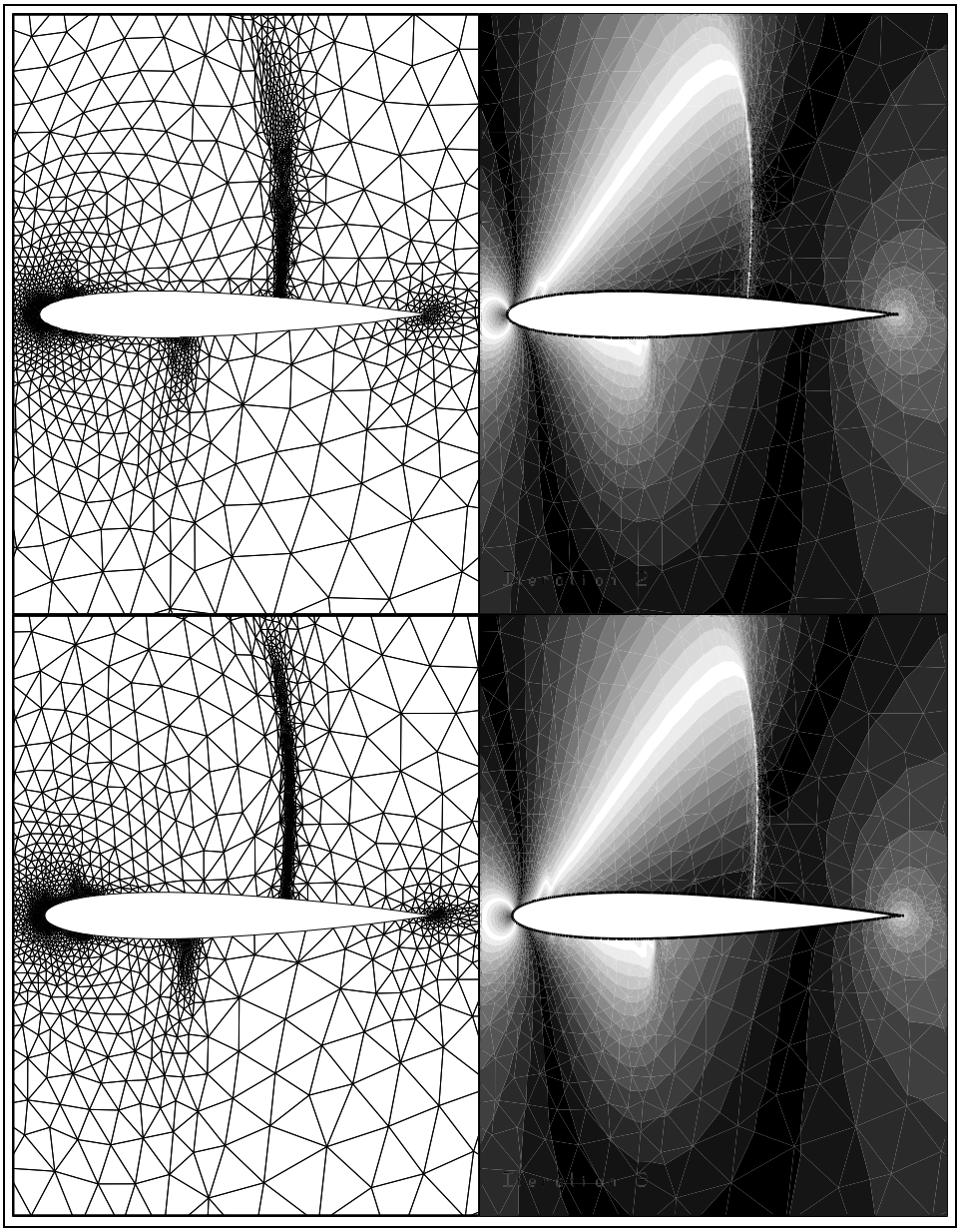

FIG. 34 - *Maillages et isodensités aux itérations 2 et 3.*

7 Conclusion

Étant donné un maillage de la frontière Γ d'un domaine Ω, nous avons montré comment définir un support géométrique $\mathcal{S}_{géom}$. Ce support peut alors être remaillé plusieurs fois au cours d'une boucle d'adaptation. À chaque itération de la boucle, le nouveau maillage est gouverné par une carte de métriques définie sur un maillage de fond. Les métriques peuvent dépendre des directions (cas anisotrope) ou non (cas isotrope). Tous les algorithmes présentés dans ce rapport ont été validés et expérimentés en dimension 2 dans le logiciel BL2D [2].

L'extension en dimension 3 concerne avant tout la discrétisation des courbes dans $\mathbb{R}^3$, notamment les frontières de surfaces. Un autre axe de recherche envisagé est la généralisation de ces méthodes au remaillage de surfaces dans $\mathbb{R}^3$.

Références

[1] M. Berger, *Géométrie*, tome 1, Éditions Nathan, 1990, ISBN 209 191 730-3.

[2] H. Borouchaki et P. Laug, *Le mailleur adaptatif bidimensionnel BL2D : manuel d'utilisation et documentation*, Rapport Technique INRIA RT-0185, décembre 1995.

[3] H. Borouchaki, P.L. George, F. Hecht, P. Laug et E. Saltel, *Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie I : Algorithmes*, Rapport de Recherche INRIA RR-2741, décembre 1995.

[4] H. Borouchaki, P.L. George, F. Hecht, P. Laug, B. Mohammadi et E. Saltel, *Mailleur bidimensionnel de Delaunay gouverné par une carte de métriques. Partie II : Applications*, Rapport de Recherche INRIA RR-2760, décembre 1995.

[5] E. Catmull, *A Subdivision Algorithm for Computer Display of curved Surfaces*, Univ. Utah Comp. Sci. Dept. UTEC-CSC-74-133, 1974.

[6] B.W. Char, K.O. Geddes, G.H. Gonnet et al., *First leaves : a tutorial introduction to MAPLE V*, Springer, 1992.

[7] B.K. Choi, *Surface Modeling for CAD/CAM*, Elsevier, 1991.

[8] W.H. Frey, *Selective refinement: a new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes*, Int. Jour. Num. Meth. Eng., vol. 24, 2183-2200, 1987.

[9] J.C. Léon, *Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO*, Éditions Hermès, 1991.

Unit´e de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit´e de recherche INRIA Rhône-Alpes, 46 avenue F´elix Viallet, 38031 GRENOBLE Cedex 1
Unit´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399