



HAL
open science

Maillage de surfaces paramétriques. Partie II: Exemples d'applications

Houman Borouchaki, Paul-Louis George

► **To cite this version:**

Houman Borouchaki, Paul-Louis George. Maillage de surfaces paramétriques. Partie II: Exemples d'applications. [Rapport de recherche] RR-2944, INRIA. 1996. inria-00073755

HAL Id: inria-00073755

<https://inria.hal.science/inria-00073755>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Maillage de surfaces paramétriques.
Partie II: Exemples d'applications*

Houman Borouchaki - Paul Louis George

N° 2944
Juillet 1996

THÈME 4

*R*apport
de recherche

Les rapports de recherche de l'INRIA
sont disponibles en format postscript sous
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

si vous n'avez pas d'accès ftp
la forme papier peut être commandée par mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(n'oubliez pas de mentionner votre adresse postale).

par courrier :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

INRIA research reports
are available in postscript format
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

if you haven't access by ftp
we recommend ordering them by e-mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(don't forget to mention your postal address).

by mail :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)



Maillage de surfaces paramétriques. Partie II: Exemples d'applications

Houman BOROUCHEKI et Paul Louis GEORGE*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 2944 — 23 juillet 1996 — 40 pages

Résumé : Ce papier présente quelques exemples de maillages surfaciques, ainsi que des maillages surfaciques cylindriques, obtenus par une approche de Delaunay anisotrope. Il constitue la partie II de l'étude, la partie I décrivant les aspects théoriques et algorithmiques de la méthode de maillage.

Mots-clé : Triangulation de Delaunay, maillage anisotrope, maillage de surface, maillage adaptatif.

(Abstract: plo)

* E-mail: Paul-Louis.George@inria.fr

Parametric Surfaces Meshing. Part II: Application Examples

Abstract: This paper gives some application examples of parametric and cylindrical surface meshes obtained by an anisotropic Delaunay mesh generation method. The paper illustrates part II of a study whose theoretical and algorithmical aspects are describing in a report referred to as part I.

Key-words: Delaunay triangulation, Anisotropic mesh generation, Surface meshing, Mesh adaption.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Définition de quelques champs de métriques	5
2.1	Maillages uniformes	6
2.2	Maillages géométriques	6
2.2.1	Métrique isotrope du rayon de courbure minimal	6
2.2.2	Métrique anisotropes des rayons de courbure principaux	7
2.3	Maillages gouvernés géométriques	7
3	Un exemple analytique	8
3.1	Maillages uniformes	9
3.2	Maillages géométriques	12
3.3	Maillages gouvernés	12
3.4	Maillages gouvernés géométriques	14
4	Maillage de surfaces cylindriques	16
4.1	Maillage d'un cylindre	16
4.1.1	Une méthode triviale	18
4.1.2	Une transformation adéquate	18
4.2	Un exemple analytique	20
4.2.1	Maillages uniformes	20
4.2.2	Maillages géométriques	21
5	Maillage d'un objet numérisé	24
5.1	Exemples	26
5.1.1	Maillage du buste de Hugo	26
5.1.2	Maillage du buste de Voltaire	34
6	Conclusions	40

1 Introduction

Nous avons proposé dans [1] une méthode de génération de maillage concernant les surfaces paramétriques. La méthode consiste à générer le maillage dans le domaine des paramètres, et puis à reporter ce dernier sur la surface.

La génération du maillage surfacique peut être gouvernée par un champ continu de *métriques* défini dans R^3 . Le champ sera défini de telle manière que le maillage souhaité soit un maillage *unité* (dont toutes les arêtes ont une longueur unité) dans R^3 muni de la structure riemannienne définie par ce champ. Par suite, si l'on souhaite avoir en un point P , des tailles de mesure $h_1(P)$, $h_2(P)$ et $h_3(P)$ suivant les vecteurs définissant une base quelconque $\mathcal{B}(P)$ de R^3 , il suffit de spécifier, en P , la métrique

$$\mathcal{M}_3(P) = {}^t\mathcal{B}(P) \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2(P)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2(P)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_3^2(P)} \end{pmatrix} \mathcal{B}(P). \quad (1)$$

Par ailleurs, avec cette spécification de métriques, on ne peut que contrôler les tailles suivant trois directions différentes, deux à deux orthogonales. Cette restriction nous a permis de définir une métrique répondant à la spécification, et de proposer un algorithme de construction de maillage basé sur la méthode de Delaunay appliquée dans un contexte riemannien.

Une fois que le champ de métriques est spécifié, on reporte celui-ci dans l'espace des paramètres moyennant une transformation, dépendant des propriétés intrinsèques de la surface, qui conserve la spécification souhaitée dans l'espace des paramètres. Le champ induit est alors défini par les deux premières lignes et les deux premières colonnes de la matrice

$${}^t\Pi(P)\mathcal{M}_3(P)\Pi(P) \quad (2)$$

où $\Pi(P)$ est la matrice de passage de la base canonique de R^3 à la base locale $\mathcal{B}_l(P)$ (le plan tangent et la normale) en P . Par construction, ce champ a les propriétés voulues (champ riemannien) et définit à son tour une structure riemannienne dans l'espace des paramètres. Ainsi le problème se ramène à générer

un maillage unité d'un domaine de R^2 muni d'une structure riemannienne. Un algorithme, décrit dans [2], est proposé à cette fin.

Le maillage résultant sera conforme au champ spécifié, mais ne donne pas, en général, une approximation satisfaisante de la surface. Par suite, un champ, appelé champ *géométrique*, est défini qui permet de gouverner la génération d'un maillage qui approche la surface d'une manière satisfaisante. Le champ initial est alors modifié au regard de ce dernier champ, permettant ainsi de gouverner la génération d'un maillage géométrique conforme au champ initial.

En section 2, on rappelle quelques champs naturels de métriques et en particulier le champ géométrique. On montre ensuite comment on peut adapter le champ initialement spécifié pour respecter la géométrie. Section 3, on montre des différents types de maillage d'une surface analytique. Dans la section 4, on propose une application au cas du maillage des surfaces cylindriques. Section 5, on montre que l'on peut aussi appliquer les résultats de la section précédente pour mailler un objet "numérisé". Enfin, la dernière section est l'objet d'une rapide conclusion.

2 Définition de quelques champs de métriques

Dans cette section on rappelle la définition de quelques champs de métriques servant à gouverner la génération de maillages de différentes natures, par exemple, des maillages

- isotropes de taille constante,
- isotropes gouvernés par le rayon de courbure minimal,
- anisotropes contrôlés par les rayons de courbure principaux,
- gouvernés géométriques.

Le premier champ permet de gouverner la construction d'un maillage uniforme dont les éléments sont tous de taille fixe donnée. Ce champ ne garantit pas, en général, le respect de la géométrie (sauf si la taille est suffisamment petite). Le deuxième et le troisième champ sont propres à la géométrie de la surface et permettent de gouverner la génération d'un maillage correspondant

à une approximation au second ordre de la surface. Pour le quatrième champ, la construction du maillage est gouvernée à la fois par la géométrie et la spécification voulue. Pour préciser ces différents points, on rappelle l'expression analytique de ces divers champs.

2.1 Maillages uniformes

Un maillage *uniforme* ou à h constant d'une surface est un maillage dont les éléments sont tous de taille fixe h . Le champ de métriques pour gouverner la génération un tel maillage est de la forme (en chaque point P),

$$\mathcal{M}_3(P, h) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

2.2 Maillages géométriques

Un maillage *géométrique* d'une surface est un maillage qui approche au mieux la surface. L'approximation considérée ici est du second ordre et le champ de métriques permettant de gouverner la génération d'un tel maillage est défini à partir des rayons de courbure principaux et des directions principales. Deux types de champ sont proposés. Le premier est isotrope et le deuxième est anisotrope.

2.2.1 Métrique isotrope du rayon de courbure minimal

Soit $\rho(P)$ le plus petit des rayons de courbure principaux. Le champ de métriques (en chaque point P)

$$\mathcal{M}_3(P, \rho) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^2(P)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2(P)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2(P)} \end{pmatrix} \quad (4)$$

appelé *champ isotrope du rayon de courbure minimale* permet de gouverner la génération d'un maillage isotrope géométrique.

2.2.2 Métrique anisotropes des rayons de courbure principaux

Soient $\rho_1(P)$ et $\rho_2(P)$ les deux rayons de courbure principaux et soient $W_1(P)$, $W_2(P)$ les deux vecteurs unitaires suivant les directions principales correspondantes. Supposons que $\rho_1(P) \leq \rho_2(P)$ et désignons par

$$\mathcal{B}_p(P) = \left(W_1(P), W_2(P), W_1(P) \times W_2(P) \right) \quad (5)$$

la base locale principale en P , où \times désigne le produit vectoriel. Le champ de métriques (en tout point P)

$$\mathcal{M}_3(P, \rho_1, \rho_2) = {}^t \mathcal{B}_p(P) \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho_1^2(P)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_2^2(P)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \mathcal{B}_p(P) \quad (6)$$

appelé *champ anisotrope des rayons de courbure principaux*, où λ est un scalaire quelconque et

$$\rho'_2(P) = \rho_2(P) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\rho_1(P)}{\rho_2(P)}\right)^2}, \quad (7)$$

permet de gouverner la génération d'un maillage anisotrope géométrique.

2.3 Maillages gouvernés géométriques

Soit un champ quelconque $\mathcal{M}_3(P)$. Ce champ n'est pas nécessairement *conforme* à la définition géométrique de la surface. Pour respecter au mieux ce champ et générer un maillage géométrique on considère alors l'intersection de ce champ avec le champ anisotrope des rayons de courbure principaux $\mathcal{M}_3(P, \rho_1, \rho_2)$. Celle-ci peut se définir de deux manières différentes

- soit en conservant la forme de la métrique initiale,

– soit en approchant aux mieux les deux métriques.

La première solution consiste à définir un scalaire α de telle manière que la boule unité correspondant à la métrique intersection

$$\alpha \mathcal{M}_3(P) \tag{8}$$

soit la plus grande incluse dans la boule unité correspondant à la métrique $\mathcal{M}_3(P, \rho_1, \rho_2)$.

Quant à la deuxième solution, elle revient à construire la plus grande boule unité incluse à la fois dans la boule unité de $\mathcal{M}_3(P)$ et dans celle de $\mathcal{M}_3(P, \rho_1, \rho_2)$, puis de considérer la métrique correspondante.

3 Un exemple analytique

On considère la surface définie par l'équation analytique

$$(x, y, z = 3 \sin(2x) \cos(2y)) \tag{9}$$

où le domaine des paramètres est un cercle d'origine $O = (0, 0)$ et de rayon 3 dans le plan XY .

Dans un premier temps, le domaine des paramètres est maillé d'une manière isotrope uniforme et les éléments sont presque tous de taille $h = 0.2$ (figure 1, en haut à gauche). Ce maillage comprend 876 points et 1746 triangles. En reportant ce maillage sur la surface (figure 1, en haut à droite) on obtient un maillage quelconque de la surface, ce maillage est a priori non conforme avec la géométrie.

Par suite, on va montrer des différents types de maillage de la surface, tous obtenus par une spécification d'un champ de métriques de la forme

$$\mathcal{M}_3(P) = \begin{pmatrix} a(P) & b(P) & c(P) \\ b(P) & d(P) & e(P) \\ c(P) & e(P) & f(P) \end{pmatrix} \tag{10}$$

avec $a(P) > 0$, $a(P)d(P) - b^2(P) > 0$ et $\text{Det}(\mathcal{M}_3(P)) > 0$, dans R^3 . Pour chaque type, on donne deux maillages, le premier est le maillage du domaine

des paramètres et le deuxième, le même maillage reporté sur la surface. Rappelons que le champ $\mathcal{M}_2(X)$ induit dans le domaine des paramètres, permettant ainsi de gouverner la génération du maillage, est défini par

$$\mathcal{M}_2(X) = \left({}^t\Pi(P)\mathcal{M}_3(P)\Pi(P) \right)_{2 \times 2} \quad (11)$$

où $\Pi(P)$ est la matrice de passage de la base canonique de R^3 à la base locale $\mathcal{B}_l(P)$ en P . Pour $P = (x, y, 3 \sin(2x) \cos(2y))$, on a

$$\Pi(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\alpha(P)}{\sqrt{\alpha^2(P) + \beta^2(P) + 1}} \\ 0 & 1 & -\frac{\beta(P)}{\sqrt{\alpha^2(P) + \beta^2(P) + 1}} \\ \alpha(P) & \beta(P) & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

où $\alpha(P) = 6 \cos(2x) \cos(2y)$ et $\beta(P) = -6 \sin(2x) \sin(2y)$. On en déduit que

$$\mathcal{M}_2(X) = \begin{pmatrix} a'(P) & b'(P) \\ b'(P) & c'(P) \end{pmatrix} \quad (13)$$

avec

$$\begin{aligned} a'(P) &= a(P) + 2c(P)\alpha(P) + f(P)\alpha^2(P), \\ b'(P) &= b(P) + e(P)\alpha(P) + c(P)\beta(P) + f(P)\alpha(P)\beta(P), \\ c'(P) &= d(P) + 2e(P)\beta(P) + f(P)\beta^2(P). \end{aligned} \quad (14)$$

3.1 Maillages uniformes

On spécifie les champs isotropes uniformes $\mathcal{M}_3(P, 0.4)$, $\mathcal{M}_3(P, 0.2)$ et enfin $\mathcal{M}_3(P, 0.1)$ et on obtient respectivement les maillages des figures 1 (en bas) et 2. Les caractéristiques de ces maillages sont résumées dans le tableau 1 où np est le nombre de points, nt le nombre de triangles, t_{CPU} le temps CPU (HP735/99Mhz) nécessaire à la génération du maillage et e est l'étirement maximal spécifié (qui correspond au rapport de la plus grande taille spécifiée sur la plus petite suivant toutes les directions) dans le domaine des paramètres.

Ces maillages ne sont pas conformes à la géométrie, mais respectent la spécification de métriques donnée comme on le voit sur les figures.

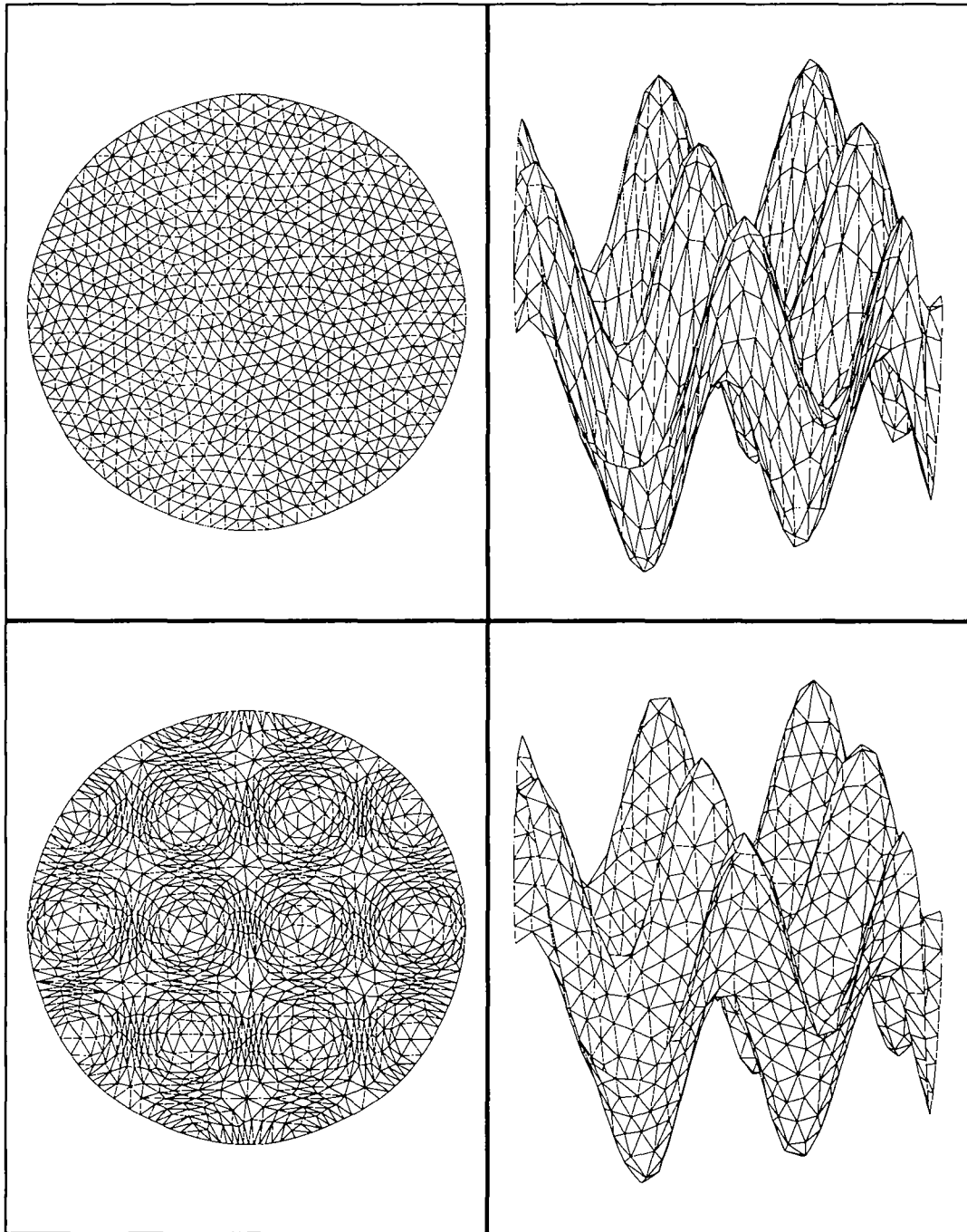


FIG. 1 - *Maillage initial et maillage uniforme ($h = 0.4$).*

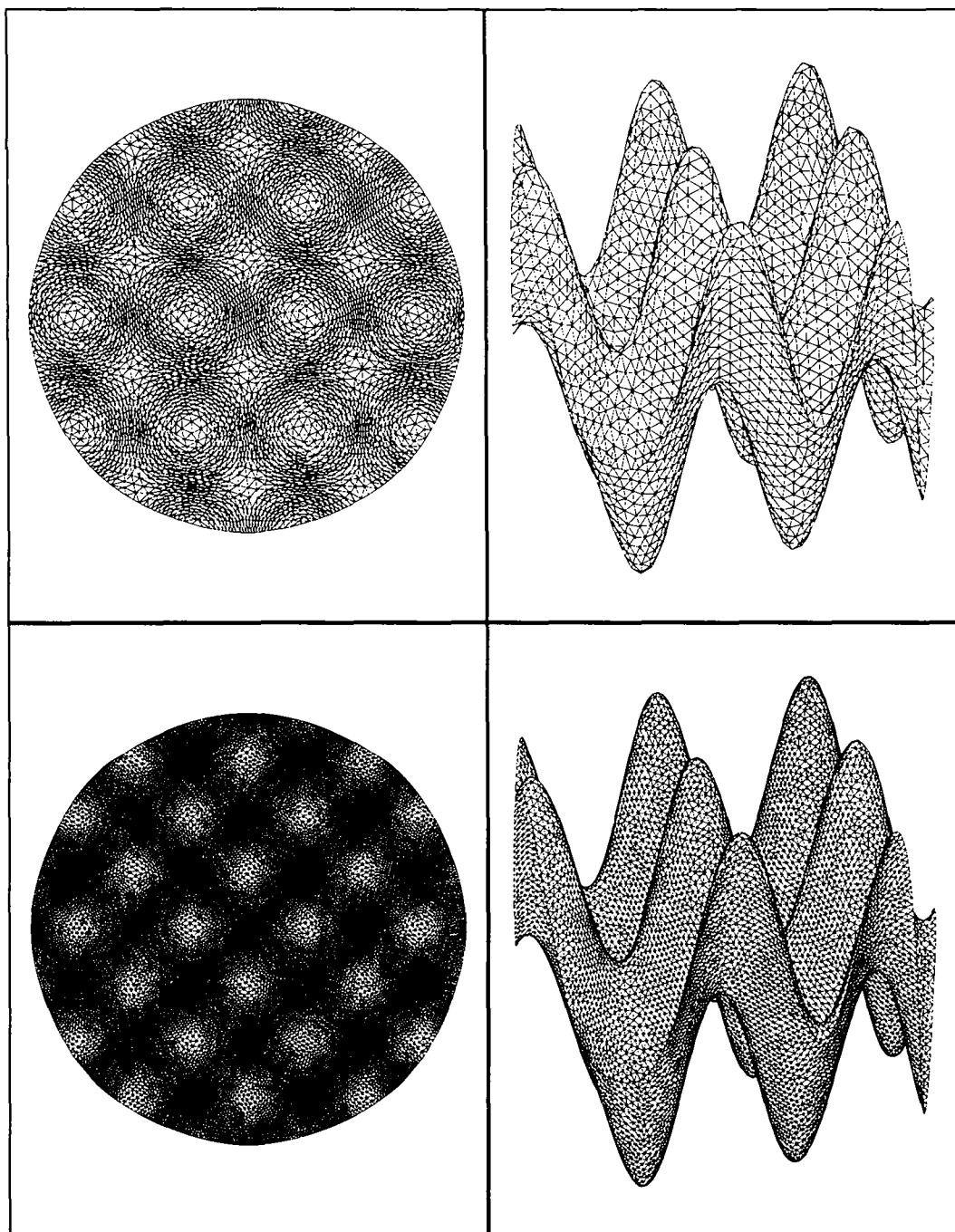


FIG. 2 - Maillages uniformes ($h = 0.2$ et $h = 0.1$).

Champ	np	nt	t_{CPU}	e
$\mathcal{M}_3(P, 0.4)$	1098	2190	1.4	6.
$\mathcal{M}_3(P, 0.2)$	3905	7804	4.	6.
$\mathcal{M}_3(P, 0.1)$	14839	29672	12.	6.

TAB. 1 - *Statistiques relatives aux champs uniformes.*

3.2 Maillages géométriques

On considère les deux champs de métriques géométriques isotrope $\mathcal{M}_3(P, \rho)$ et anisotrope $\mathcal{M}_3(P, \rho_1, \rho_2)$, tout deux évalués avec la contrainte

$$\rho_{min}(= 0.05) \leq \rho(P) \leq \rho_{max}(= 2.0) \quad (15)$$

pour éviter une dégénérescence éventuelle de la taille des éléments. Les maillages résultants sont montrés sur les figures 3 et les statistiques correspondantes sont reportées dans le tableau 2. Par définition, ces maillages sont conformes à la géométrie et représentent une approximation à l'ordre deux de la surface.

Champ	np	nt	t_{CPU}	e
$\mathcal{M}_3(P, \rho)$	15464	30922	12.	6.
$\mathcal{M}_3(P, \rho_1, \rho_2)$	2243	4480	2.	8.

TAB. 2 - *Statistiques relatives aux champs géométriques.*

3.3 Maillages gouvernés

On considère deux champs de métriques dont le premier $\mathcal{M}_3(P, iso)$ est isotrope et est défini par

$$\mathcal{M}_3(P, iso) = \begin{pmatrix} \frac{1}{f^2(r)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2(r)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f^2(r)} \end{pmatrix} \quad (16)$$

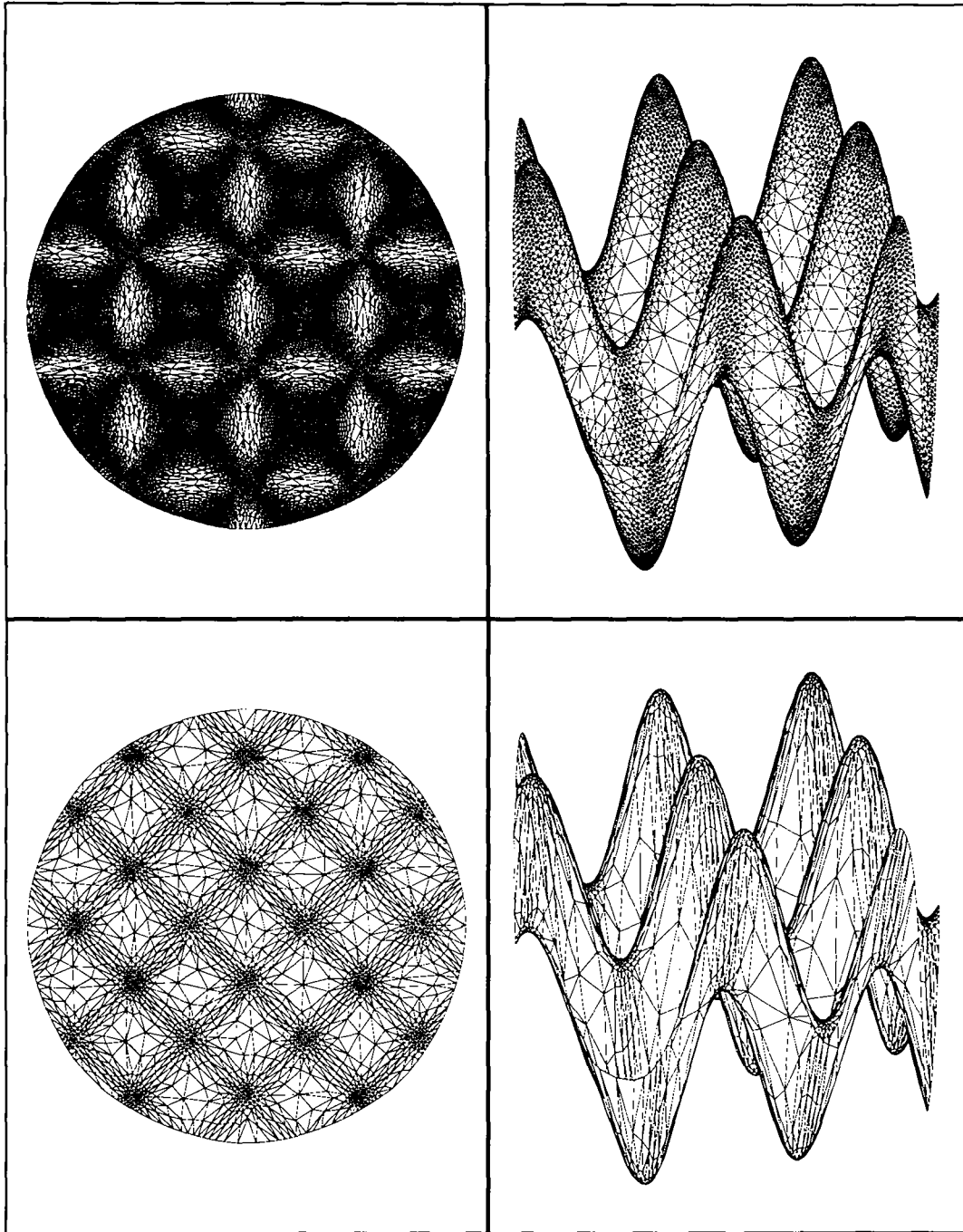


FIG. 3 - Maillages géométriques isotropes et anisotropes.

où $f(r) = 0.05(1 + r^2)$ avec $r^2 = x^2 + y^2$, et le deuxième $\mathcal{M}_3(P, \text{aniso})$, anisotrope, est défini par

$$\mathcal{M}_3(P, \text{aniso}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{0.02^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{0.02^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g^2(z)} \end{pmatrix} \quad (17)$$

où $g(z) = 0.1|z^2 - 2.25| + 0.01$.

Le premier champ indique une croissance quadratique en taille par rapport à x et y , il correspond à la demande d'une taille de plus en plus grande quand on s'éloigne de l'origine. Par ailleurs, une taille minimale de 0.05 est imposée. Quant au deuxième champ, il traduit la demande d'éléments de plus en plus étirés lorsque l'on s'approche des deux plans $z = 1.5$ et $z = -0.5$, avec un étirement maximal de 20. Les figures 4 en haut (resp. 4 en bas) montrent les maillages correspondants au champ $\mathcal{M}_3(P, \text{iso})$ (resp. $\mathcal{M}_3(P, \text{aniso})$) et le tableau 3 donne les statistiques correspondantes. Dans les deux cas, les maillages résultants ne sont pas conformes à la géométrie mais respectent les champs spécifiés.

Champ	np	nt	t_{CPU}	e
$\mathcal{M}_3(P, \text{iso})$	6065	12124	6.	6.
$\mathcal{M}_3(P, \text{aniso})$	9279	18552	17.	95.

TAB. 3 - Statistiques relatives aux champs donnés.

3.4 Maillages gouvernés géométriques

On reconsidère les deux champs $\mathcal{M}_3(P, \text{iso})$, $\mathcal{M}_3(P, \text{aniso})$ qui vont être modifiés respectivement au regard des champs $\mathcal{M}_3(P, \rho)$ et $\mathcal{M}_3(P, \rho_1, \rho_2)$ pour mieux respecter la géométrie. Ainsi le premier, $\mathcal{M}_3(P, \text{iso}, \text{géom})$, est déduit de $\mathcal{M}_3(P, \text{iso})$ en remplaçant $f(r)$ par $\min(f(r), \rho(P))$ où $P = (x, y, z)$ avec $z = 3 \sin(2x) \cos(2y)$ et $\rho(P)$ est le rayon de courbure minimal en P . Quant au deuxième, $\mathcal{M}_3(P, \text{aniso}, \text{géom})$, il est obtenu par un procédé d'intersection du

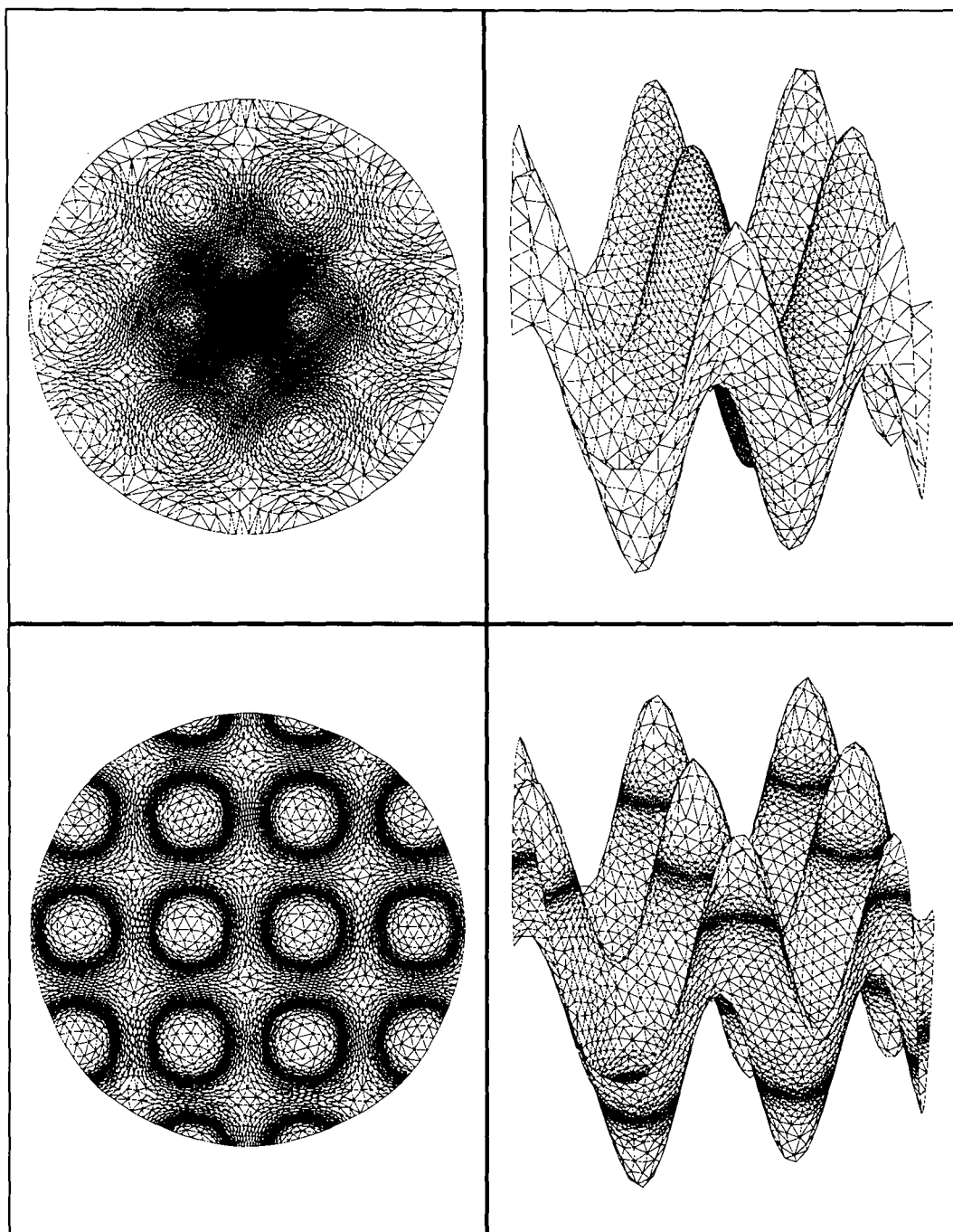


FIG. 4 - Maillages gouvernés.

champ initial $\mathcal{M}_3(P, \text{aniso})$ avec le champ anisotrope des rayons de courbure $\mathcal{M}_3(P, \rho_1, \rho_2)$.

Les figures 5 montrent les maillages résultants. Les statistiques sur ces maillages sont données dans le tableau 4. On constate que la spécification n'est pas respectée par endroit à cause des contraintes géométriques.

Champ	np	nt	t_{CPU}	e
$\mathcal{M}_3(\text{iso}, \text{géom})$	17192	34378	14.	6.
$\mathcal{M}_3(\text{aniso}, \text{géom})$	32212	64418	45.	97.

TAB. 4 - Statistiques relatives aux champs gouvernés géométriques.

4 Maillage de surfaces cylindriques

Une surface est appelée *cylindrique* s'il existe un difféomorphisme de classe C^2 entre la surface et un cylindre. Le problème du maillage d'une telle surface se ramène au problème du maillage d'un cylindre grâce au difféomorphisme mettant en relation ces deux surfaces. Par suite, on propose deux méthodes pour le maillage d'un cylindre et on donne un exemple simple de maillages d'une surface cylindrique.

4.1 Maillage d'un cylindre

Un cylindre d'axe OZ et de "rayon" r peut s'écrire sous la forme paramétrique

$$\begin{aligned} x &= f_1(\theta, z) = r \cos(\theta), \\ y &= f_2(\theta, z) = r \sin(\theta), \\ z &= f_3(\theta, z) = z \end{aligned} \tag{18}$$

où $\theta \in R$ et z ($0 \leq z \leq d$) constituent les paramètres. Le maillage de ce cylindre via cet espace de paramètres pose un problème dans la mesure où cet espace est périodique et ne constitue pas un domaine de R^2 . En effet les points de coordonnées (θ, z) et $(\theta + 2\pi, z)$ sont identiques. Pour se faire, on propose deux méthodes dont

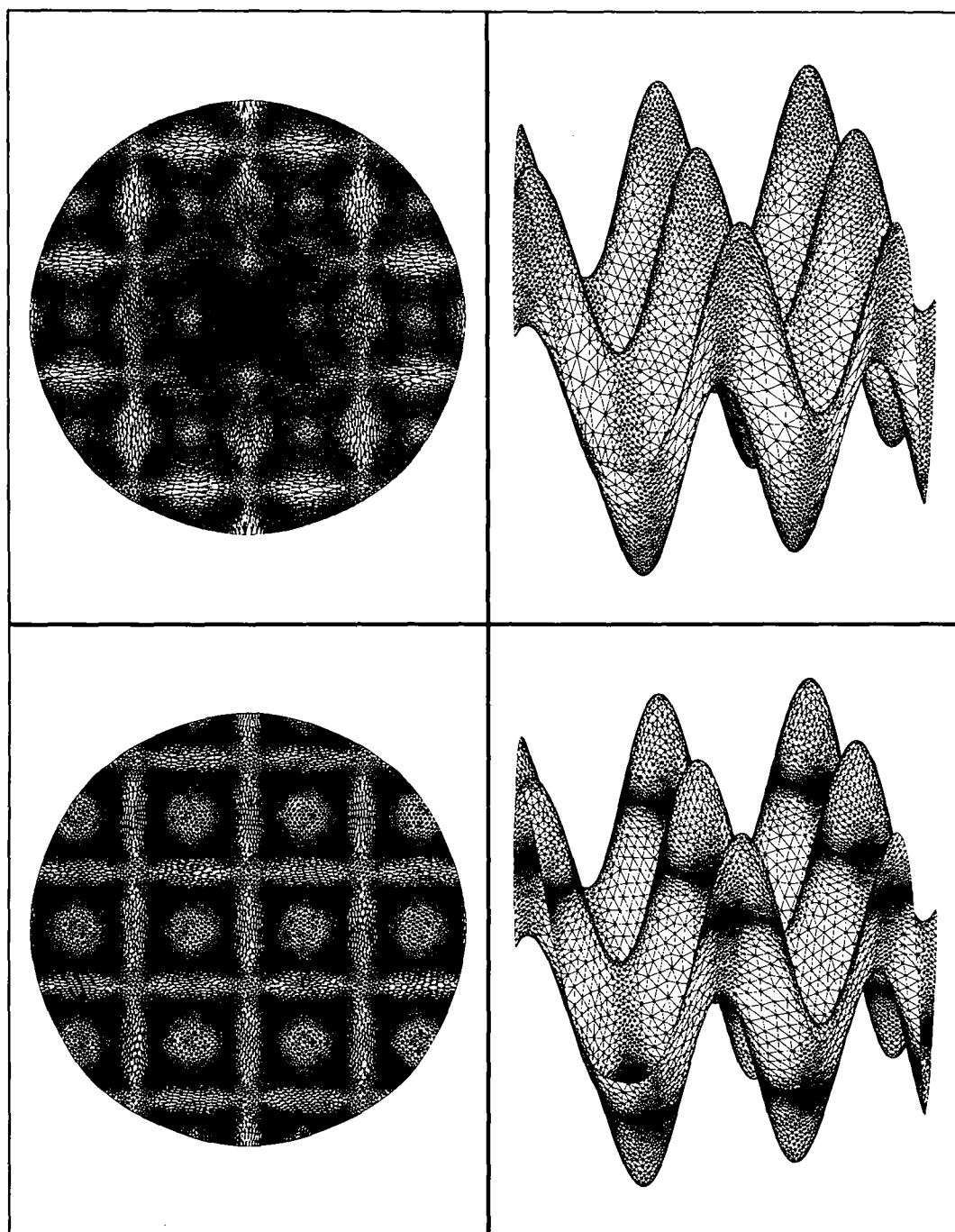


FIG. 5 - Maillages gouvernés géométriques.

- la première consiste à forcer une contrainte, traduisant la périodicité et
- la deuxième, à changer l'espace des paramètres pour prendre en compte automatiquement la périodicité,

qui vont être détaillées par la suite.

4.1.1 Une méthode triviale

La méthode consiste à restreindre l'espace des paramètres au rectangle défini par

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 \leq z \leq d \end{aligned} \tag{19}$$

et à s'assurer que la discrétisation du contour de ce rectangle soit identique sur les côtés $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$. Ceci revient à imposer une ligne contrainte tracée sur l'objet. Le domaine des paramètres étant bien défini, on peut appliquer la méthode de maillage dans l'espace des paramètres avant de le reporter sur la surface.

4.1.2 Une transformation adéquate

Une méthode plus élégante est de redéfinir l'espace des paramètres pour "casser" la périodicité présente dans la définition des paramètres. En effet, on peut définir le nouvel espace par projection stéréographique d'un point $Q = (0, 0, L)$, où $L > d$ sur le plan $z = 0$ (figure 6). Les nouveaux paramètres sont alors définis par

$$\begin{aligned} x' &= \frac{Lr}{L-z} \cos(\theta), \\ y' &= \frac{Lr}{L-z} \sin(\theta). \end{aligned} \tag{20}$$

Le nouveau domaine des paramètres est une couronne définie par les deux cercles de centres O et de rayons respectivement r et $\frac{Lr}{L-d}$ et le cylindre est

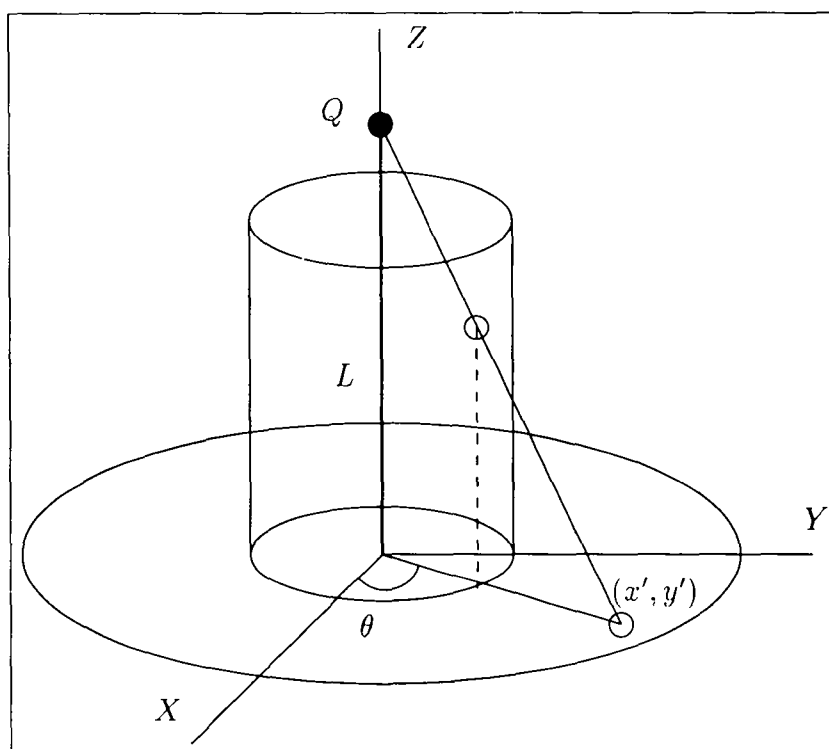


FIG. 6 - Projection sur le plan $z = 0$.

défini via ce domaine par

$$\begin{aligned} x &= r \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ y &= r \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ z &= L \left(1 - \frac{r}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

4.2 Un exemple analytique

Dans cette section, on montre des différents types de maillage d'une surface cylindrique (un vase) obtenue par rotation d'un segment courbe de R^3 autour de l'axe des Z . Pour simplifier, le segment courbe est défini de telle manière que sa projection orthogonale sur l'axe des Z soit bijective. Ainsi cette surface est décrite par les équations

$$\begin{aligned} x &= \delta(z) \cos(\theta), \\ y &= \delta(z) \sin(\theta), \\ z &= z, \end{aligned} \quad (22)$$

où $\delta(z)$ est la fonction définissant le segment courbe tandis que $\theta \in R$ et z ($0 \leq z \leq d$) constituent les paramètres.

En projetant la surface par rapport à l'axe des Z sur un cylindre de rayon r quelconque et d'axe OZ , le problème du maillage de la surface se ramène au problème du maillage du cylindre. Par la suite on va montrer des différents types de maillage de cette surface obtenus en utilisant les deux méthodes décrites ci-dessus. On applique la première méthode pour la construction des maillages uniformes et la deuxième, pour la construction des maillages géométriques.

4.2.1 Maillages uniformes

D'après la première méthode il suffit de considérer pour le domaine des paramètres, le rectangle

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq 2\pi, \\ 0 &\leq z \leq d \end{aligned} \quad (23)$$

et de reporter la spécification de métriques correspondant au côté $\theta = 0$, sur le côté $\theta = 2\pi$ du rectangle.

En discrétisant ce rectangle, à pas constant, respectivement suivant l'axe des θ et l'axe des z , on obtient un maillage régulier (figure 7 à gauche) dans le domaine des paramètres, dont le report sur la surface (figure 8 en haut à gauche) est un maillage a priori quelconque. Le reste des figures 7 montrent des maillages gouvernés du domaine des paramètres dont les reports sur la surface (le reste des figures 8) sont des maillages uniformes avec des différentes tailles spécifiées. Les statistiques correspondantes à ces maillages sont reportées dans le tableau 5.

Champ	np	nt	t_{CPU}	e
uniforme h	1214	2325	1.	20.
uniforme $\frac{h}{2}$	4736	9265	4.	20.
uniforme $\frac{h}{4}$	18703	36996	13.	20.

TAB. 5 - Statistiques relatives aux maillages uniformes du vase.

4.2.2 Maillages géométriques

D'après la deuxième méthode, il suffit de coupler les équations (22) avec les équations

$$\theta = \arctan\left(\frac{y'}{x'}\right),$$

$$z = L\left(1 - \frac{r}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right),$$
(24)

et de mailler le domaine des paramètres (x', y') décrivant une couronne définie par deux cercles de centre O et de rayons respectivement r et $\frac{Lr}{L-d}$ (la transformation (24) est la projection par rapport au point $(0, 0, L)$ sur le plan $z = 0$ du cylindre).

Les figures 9 montrent les maillages de la couronne, ainsi que leurs reports sur la surface, respectivement dans les cas géométriques isotropes et géométriques anisotropes. Les statistiques correspondantes sont reportées dans le tableau 6.

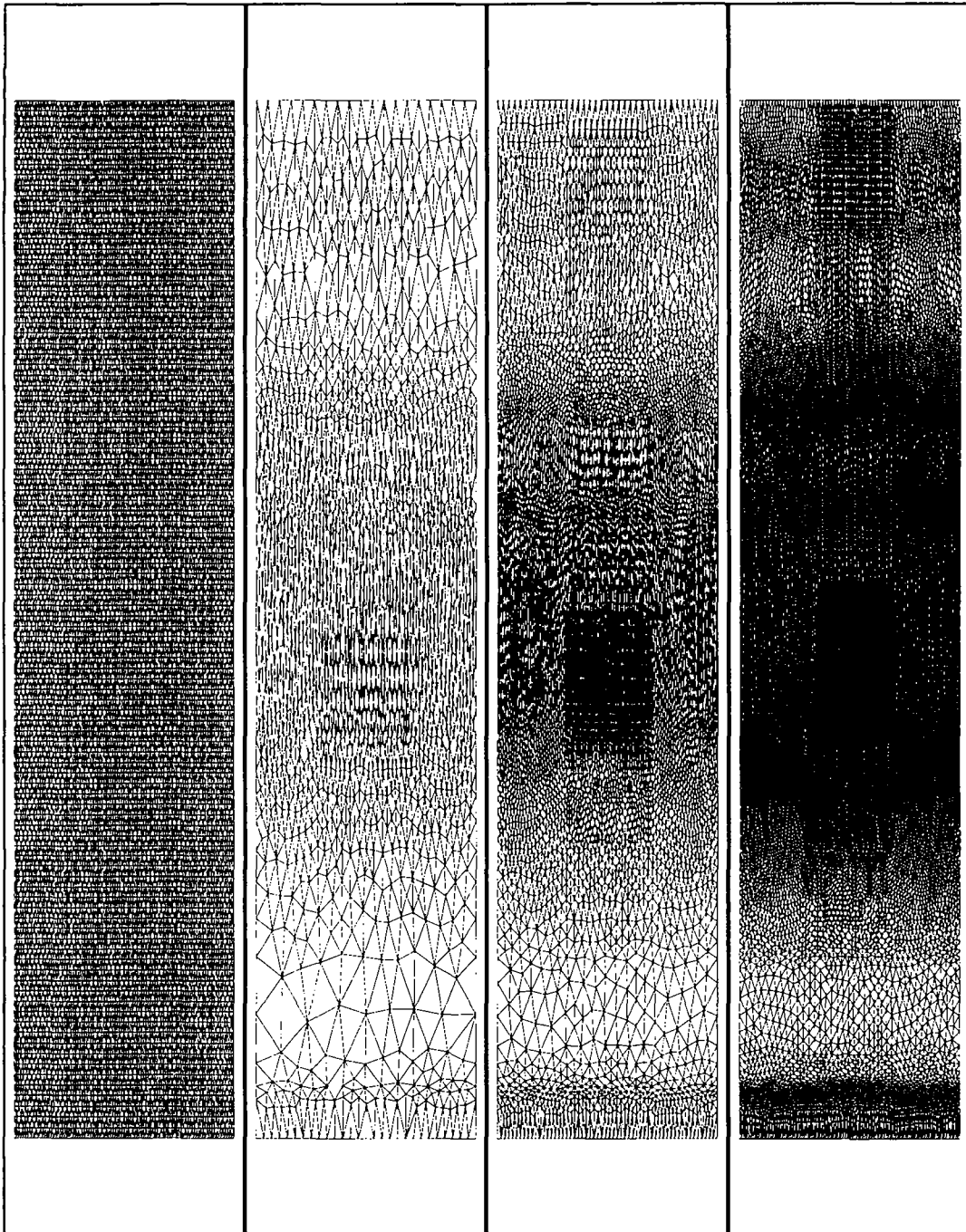


FIG. 7 - Maillage régulier et maillages gouvernés du rectangle.

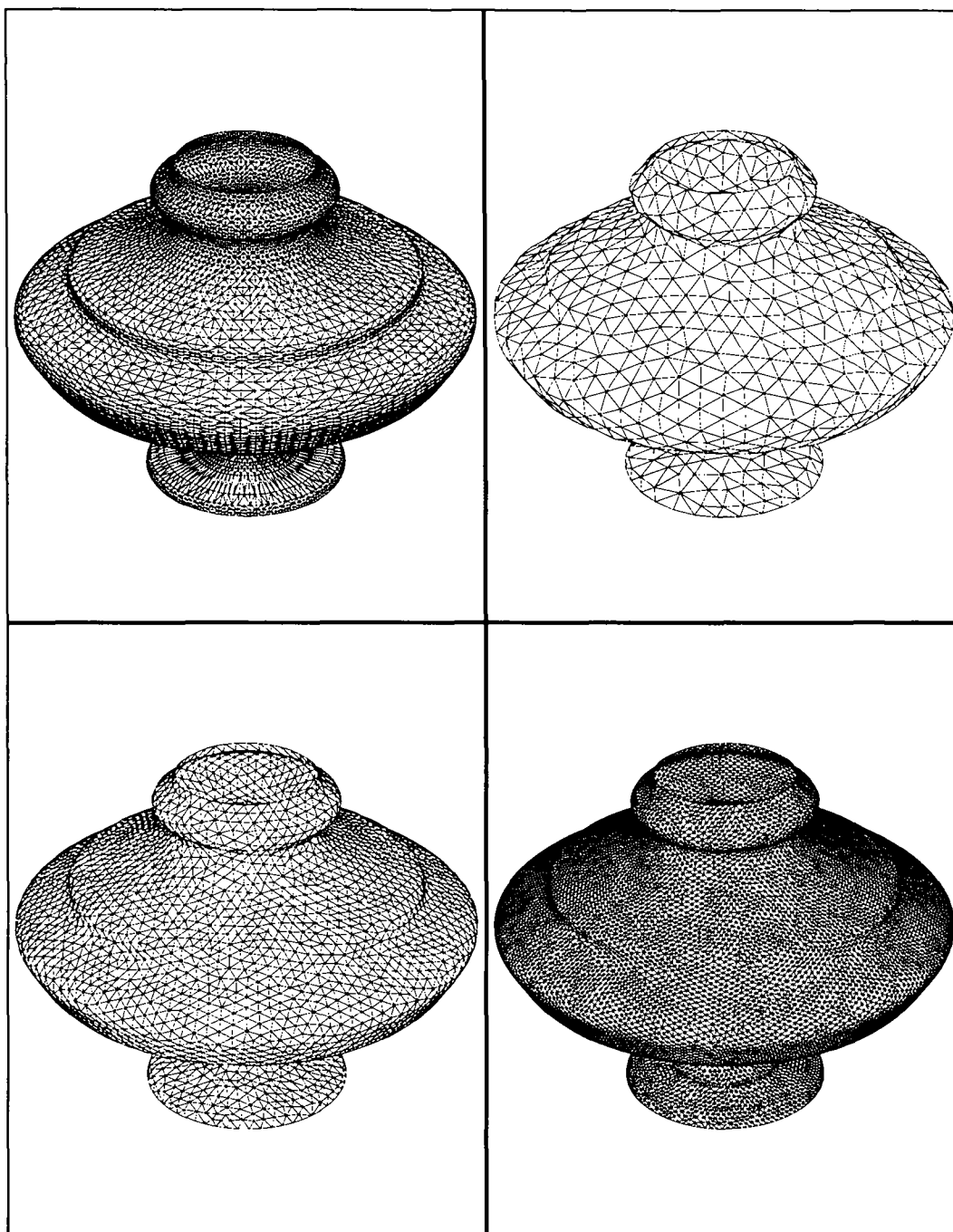


FIG. 8 - Maillage quelconque et maillages uniformes du vase.

RR n° 2944

Champ	np	nt	t_{CPU}	e
géométrique isotrope	19133	38050	16.	33.
géométrique anisotrope	2300	4386	3.	150.

TAB. 6 - *Statistiques relatives aux maillages géométriques du vase.*

On constate qu'en utilisant la deuxième méthode, les étirements maximaux imposés sont plus importants que ceux imposés par rapport à la première méthode. Ceci est dû au fait que la projection stéréographique transforme les métriques initiales en des métriques beaucoup plus allongées.

Remarquons que le nombre d'éléments pour les maillages géométriques dépend des valeurs de tailles minimales et maximales imposées et qu'en modifiant celles-ci on peut éventuellement générer un maillage ayant un nombre d'éléments moins important mais ceci a pour conséquence la dégradation de la qualité des éléments.

5 Maillage d'un objet numérisé

On s'intéresse au problème de maillage de la surface d'un objet réel, à partir d'un ensemble de points échantillonnés, obtenues par le système de numérisation tridimensionnelle "3D Videolaser" ([3]). Par son principe de fonctionnement, les données possèdent une topologie rectangulaire, c'est-à-dire, que les points échantillonnés sont répartis sur un réseau de méridiens et de parallèles de la surface de l'objet. En particulier, pour les objets ayant une géométrie cylindrique, les données (points échantillonnés sur la surface) ont une structure matricielle dont les colonnes et les lignes correspondent respectivement aux méridiens et aux parallèles et la valeur associée à un élément (point) de cette matrice représente la distance de ce point à l'axe de rotation de l'objet.

Ainsi ce système permet de définir une surface cylindrique, "d'une manière discrète", par les équations

$$\begin{aligned} x &= r(\theta, z) \cos(\theta), \\ y &= r(\theta, z) \sin(\theta), \\ z &= z \end{aligned} \tag{25}$$

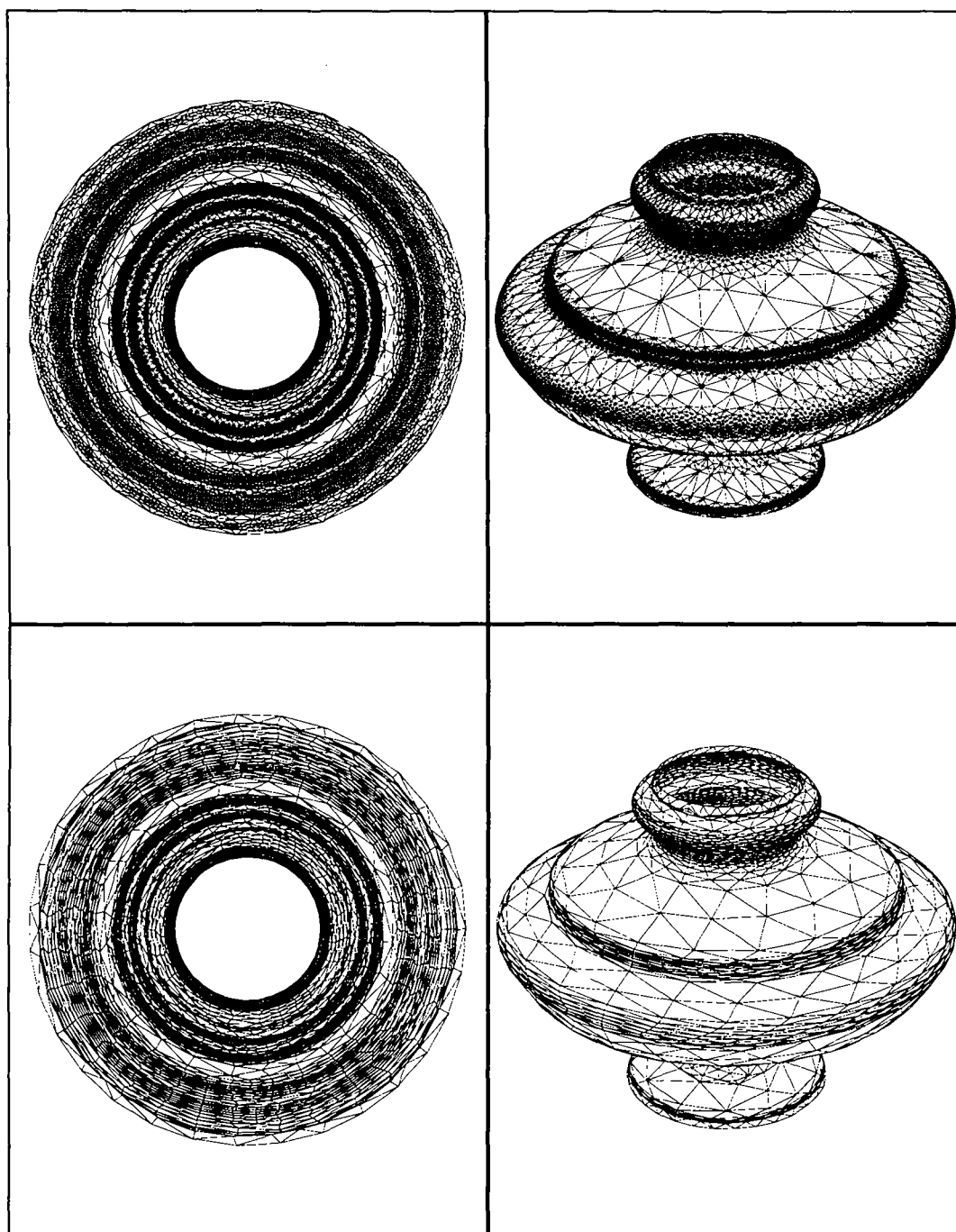


FIG. 9 - Maillages géométriques du vase.

où le domaine des paramètres est le rectangle

$$0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq d. \quad (26)$$

En effet, la fonction $r(\theta, z)$ est connue uniquement en un nombre fini de points du rectangle, plus précisément sur la grille régulière

$$\begin{aligned} \theta_j &= j \Delta\theta & 0 \leq i \leq nc \\ z_i &= i \Delta z & 0 \leq j \leq nl \end{aligned} \quad (27)$$

où nc (resp. nl) est le nombre de colonnes (resp. lignes) de la grille et $\Delta\theta$ (resp. Δz) est le pas d'échantillonnage suivant les θ (resp. z).

Le maillage d'une telle surface par l'une ou l'autre méthode demande de connaître en chaque sommet de la grille les quantités $r'_\theta(\theta, z)$, $r'_z(\theta, z)$, $r''_{\theta^2}(\theta, z)$, $r''_{z^2}(\theta, z)$ et $r''_{\theta z}(\theta, z)$. Ces dernières sont évaluées d'une manière triviale par une méthode de différences finies.

5.1 Exemples

On considère deux exemples de surfaces échantillonnées par le système décrit plus haut. La première, le buste de Hugo, comprend (120×69) échantillons, quant à la deuxième, le buste de Voltaire, (180×144) échantillons. Par la suite, on montre des différents types de maillage de ces objets en utilisant les techniques de maillage de surfaces cylindriques décrites plus haut.

5.1.1 Maillage du buste de Hugo

On utilise la première méthode. La figure 10 montre un maillage régulier de la grille Hugo ainsi que son report sur la surface, servant d'espace de contrôle pour les autres maillages gouvernés de l'objet. Les figures 11, 12, 13 et 14 montrent des maillages uniformes avec des pas proportionnels. Les figure 15 et 16 montrent des maillages géométriques. Les étirements imposés, dans le domaine des paramètres, ne sont pas cohérents avec les maillages illustrés. En effet, pour que ces maillages soient plus visibles, un facteur d'échelle est introduit suivant l'axe horizontal (en fait cet axe représente les θ en degré, et non pas en radian). Les statistiques relatives à ces maillages sont reportées dans le tableau 7.

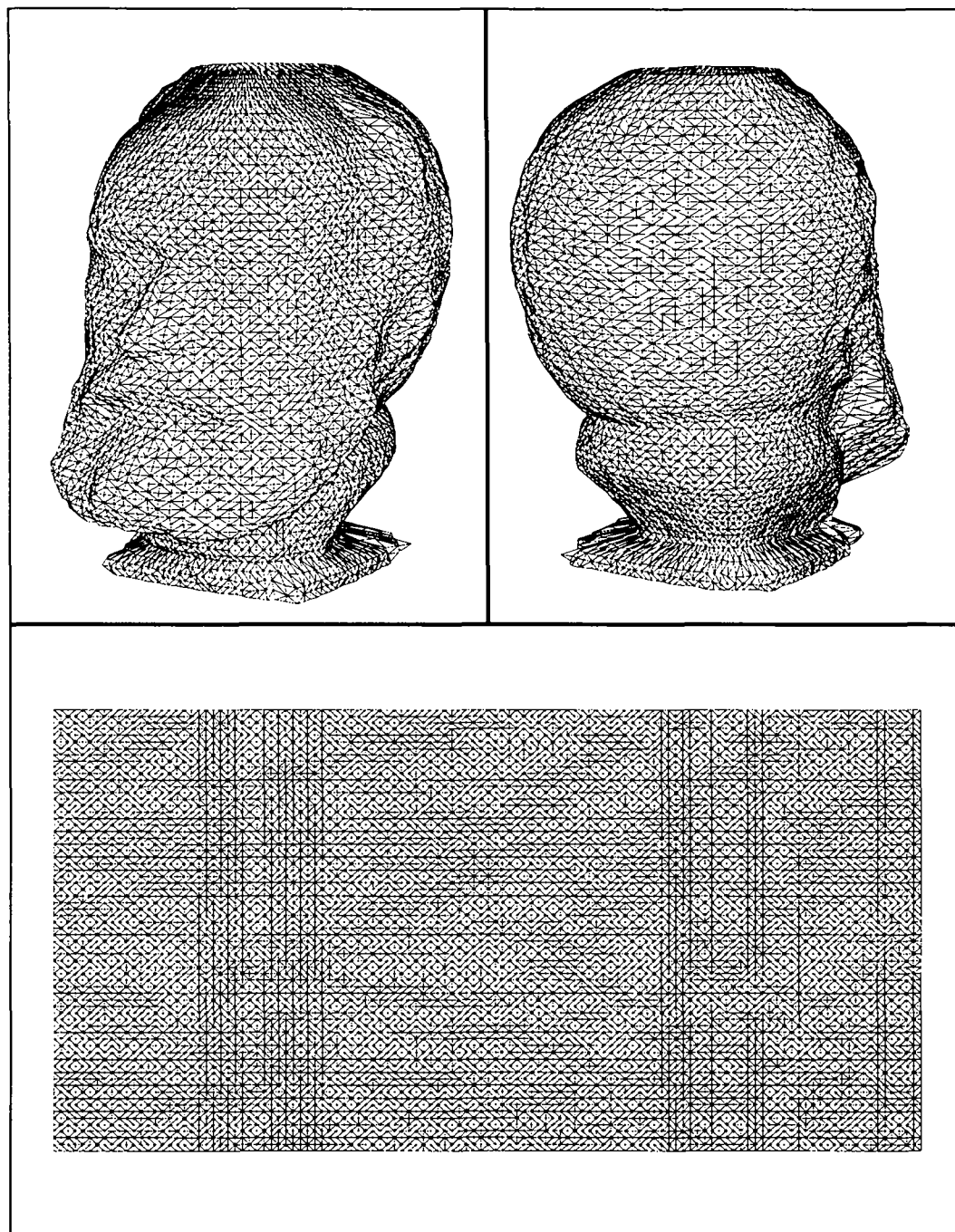
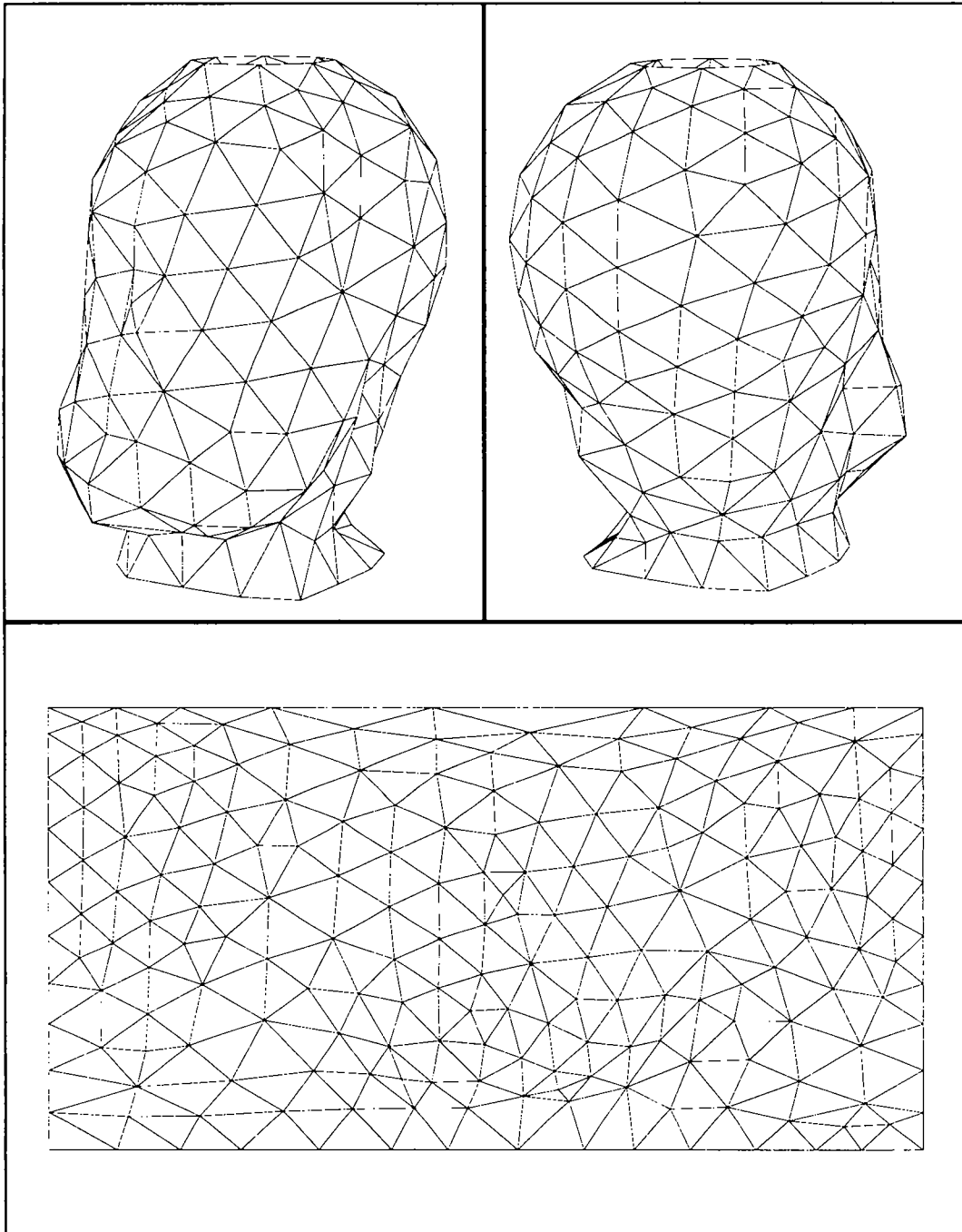


FIG. 10 - *Maillage régulier (Hugo).*

FIG. 11 - *Maillage uniforme h (Hugo).*

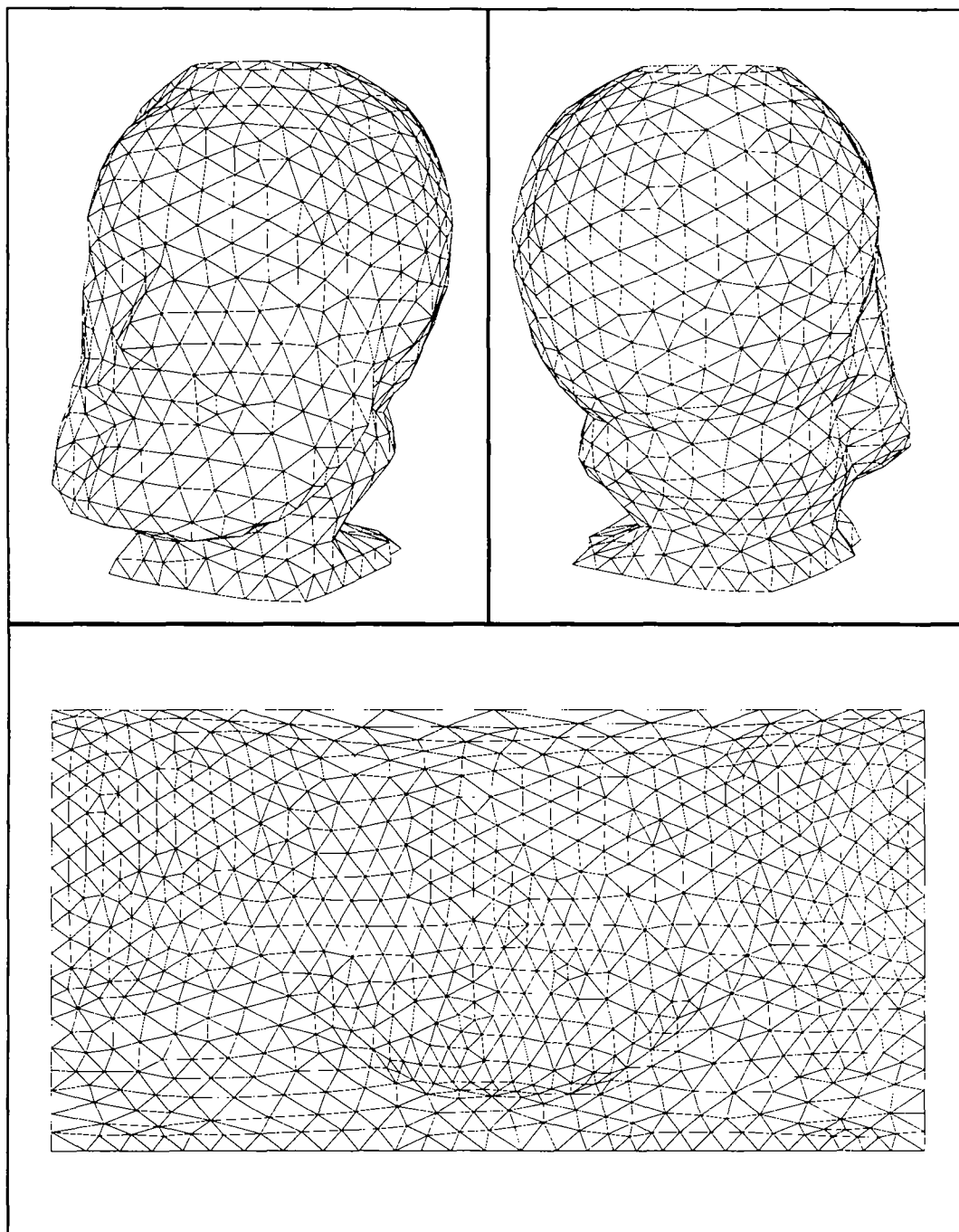


FIG. 12 - Maillage uniforme $\frac{h}{2}$ (Hugo).

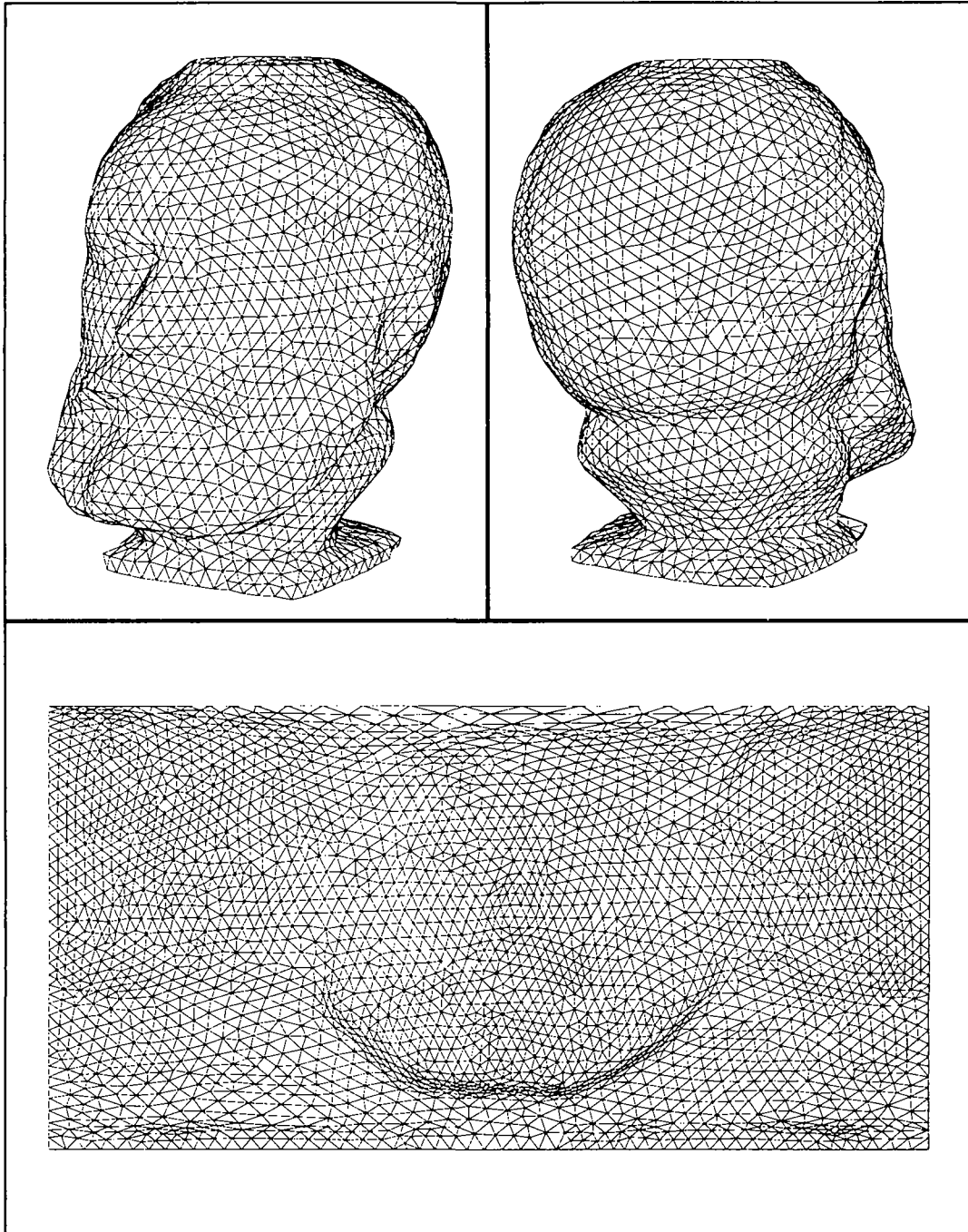


FIG. 13 - *Maillage uniforme $\frac{h}{4}$ (Hugo).*

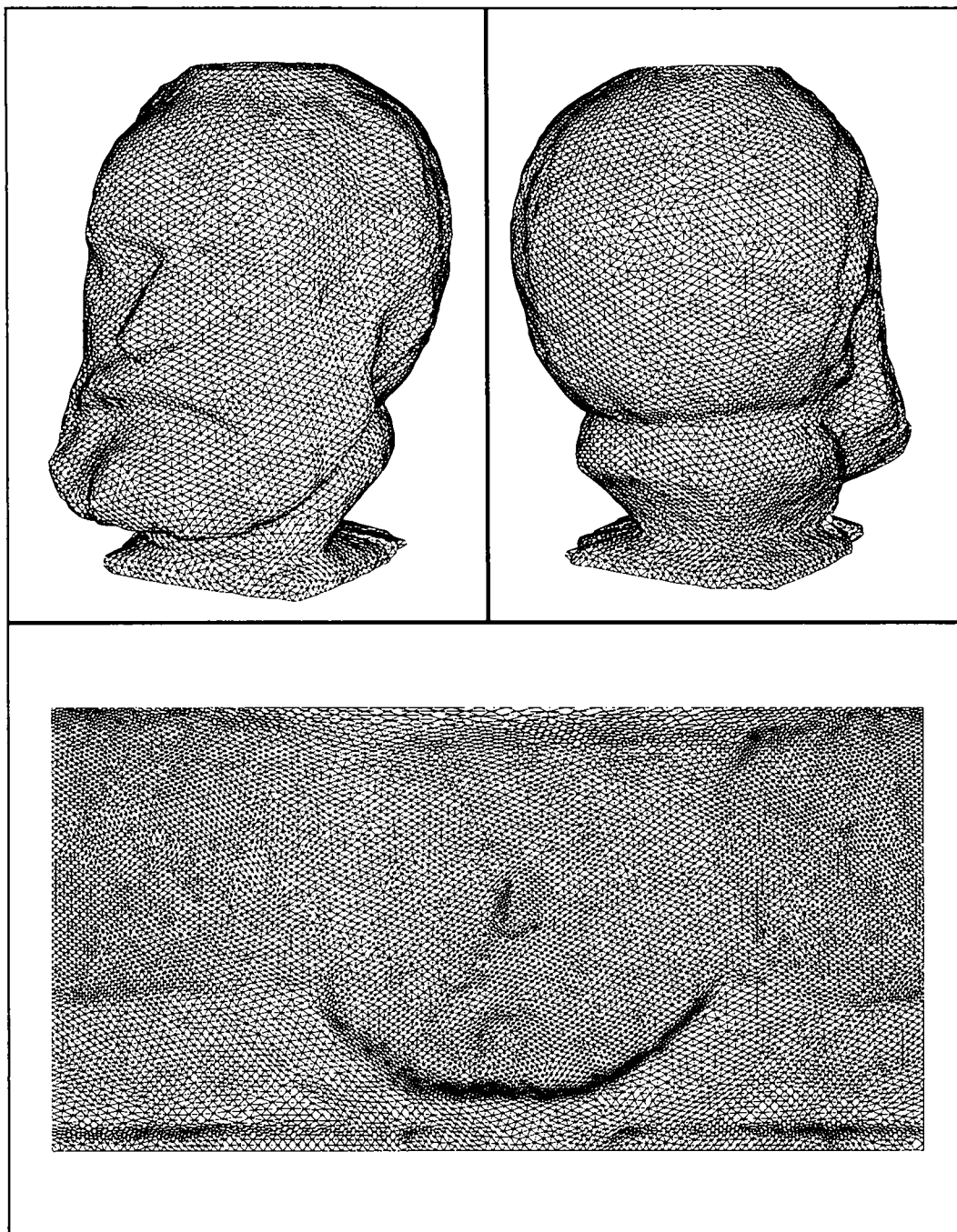


FIG. 14 - Maillage uniforme $\frac{h}{8}$ (Hugo).

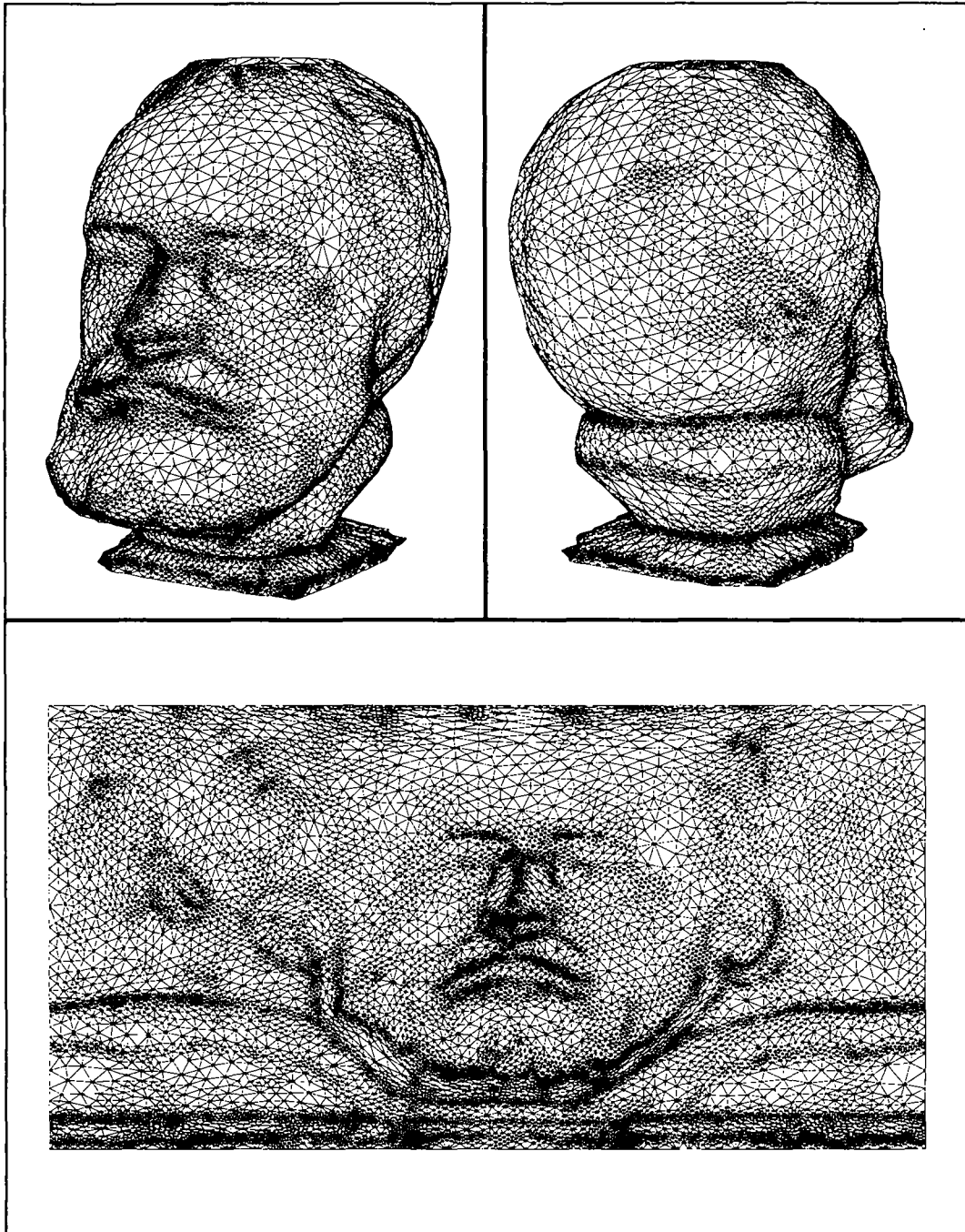


FIG. 15 - *Maillage géométrique isotrope (Hugo).*

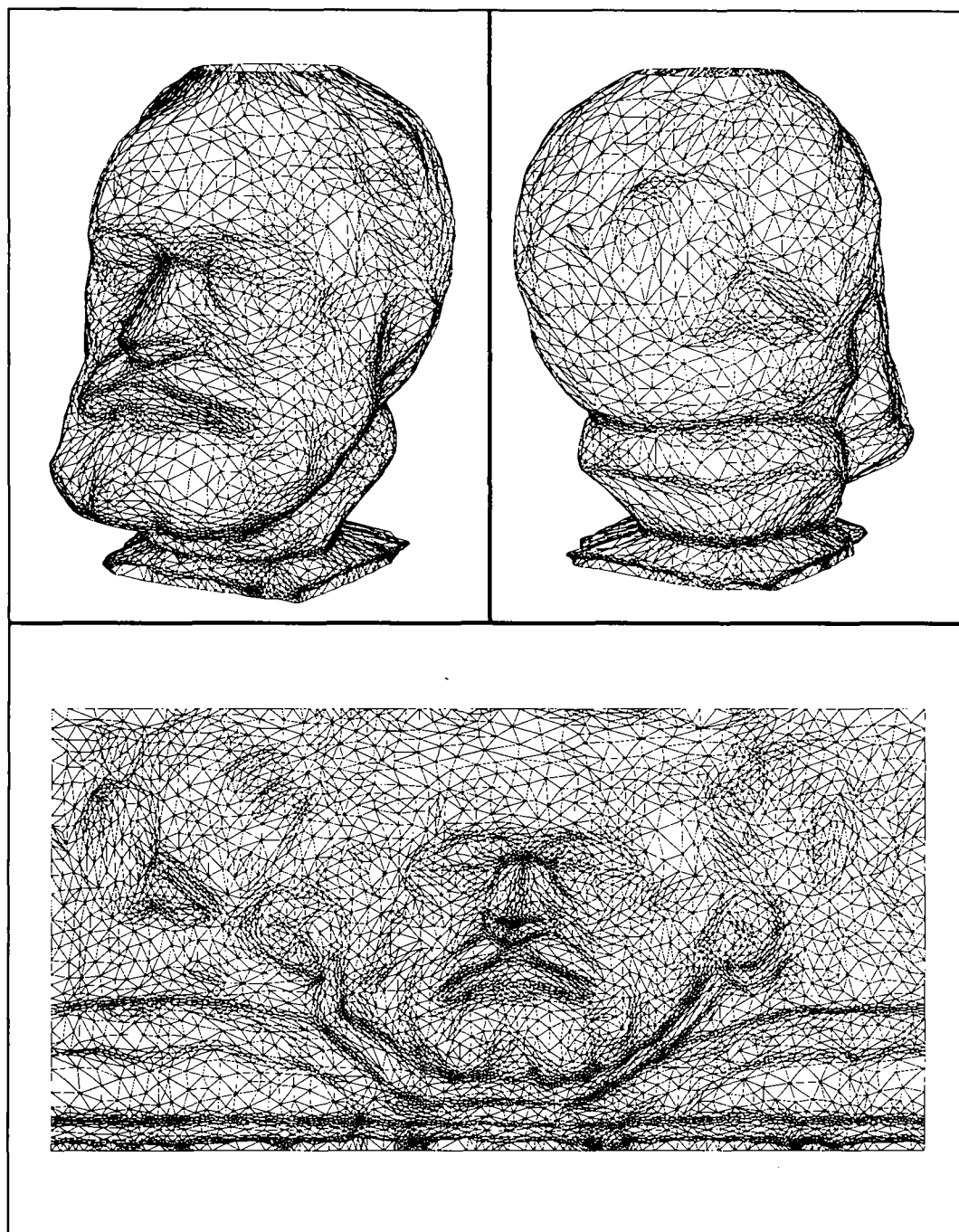


FIG. 16 - Maillage géométrique anisotrope (Hugo).

Champ	np	nt	t_{CPU}	e
uniforme h	203	362	0.3	127.
uniforme $\frac{h}{2}$	755	1427	1.	135.
uniforme $\frac{h}{4}$	2895	5625	2.5	149.
uniforme $\frac{h}{8}$	11505	22681	8.	150.
géométrique isotrope	12569	24847	10.	147.
géométrique anisotrope	5925	11584	7.	1686.

TAB. 7 - *Statistiques relatives aux maillages du buste de Hugo.*

5.1.2 Maillage du buste de Voltaire

On utilise la deuxième méthode. La figure 17 montre un maillage régulier de la couronne Voltaire ainsi que son report sur la surface, servant d'espace de contrôle pour les autres maillages gouvernés de l'objet. Les figures 18 et 19 montrent des maillages uniformes avec des pas proportionnels. Les figures 20 et 21 montrent des maillages géométriques. Les statistiques relatives à ces maillages sont reportées dans le tableau 8.

Champ	np	nt	t_{CPU}	e
uniforme h	3684	7364	2.	360.
uniforme $\frac{h}{2}$	14029	28052	11.	360.
géométrique isotrope	26141	52276	25.	350.
géométrique anisotrope	10190	20374	11.	290.

TAB. 8 - *Statistiques relatives aux maillages du buste de Voltaire.*

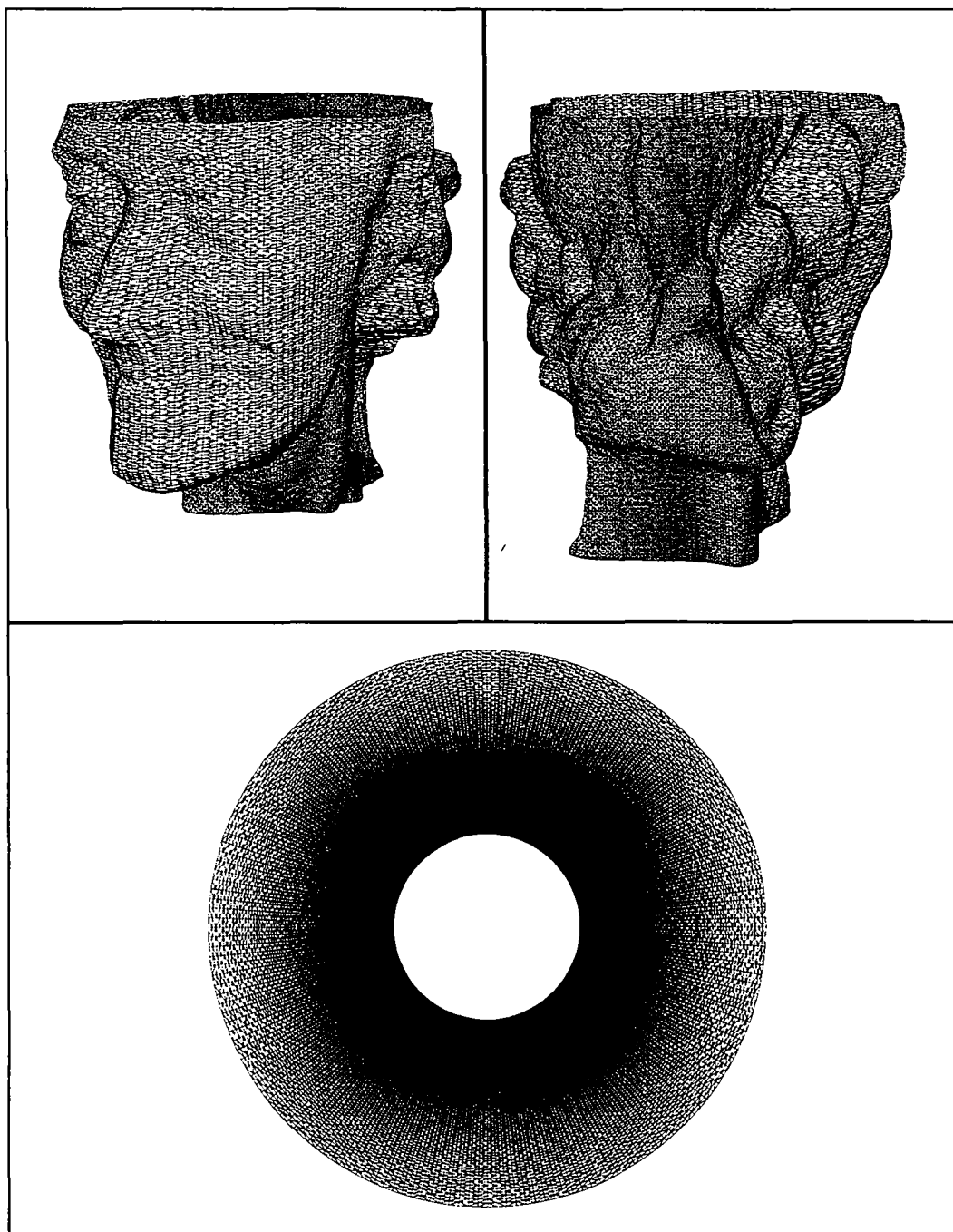


FIG. 17 - *Maillage régulier (Voltaire).*

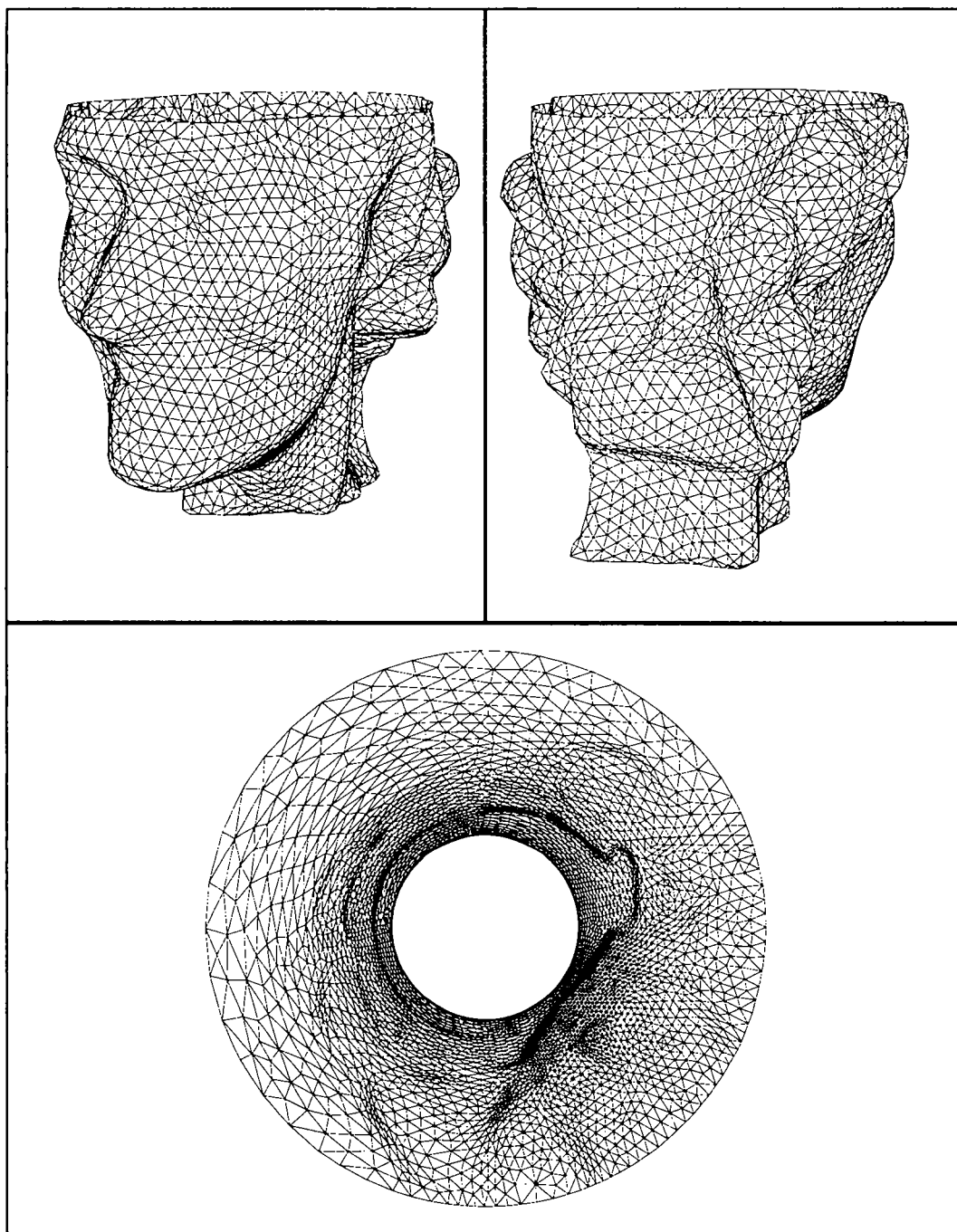


FIG. 18 - *Maillage uniforme h (Voltaire).*

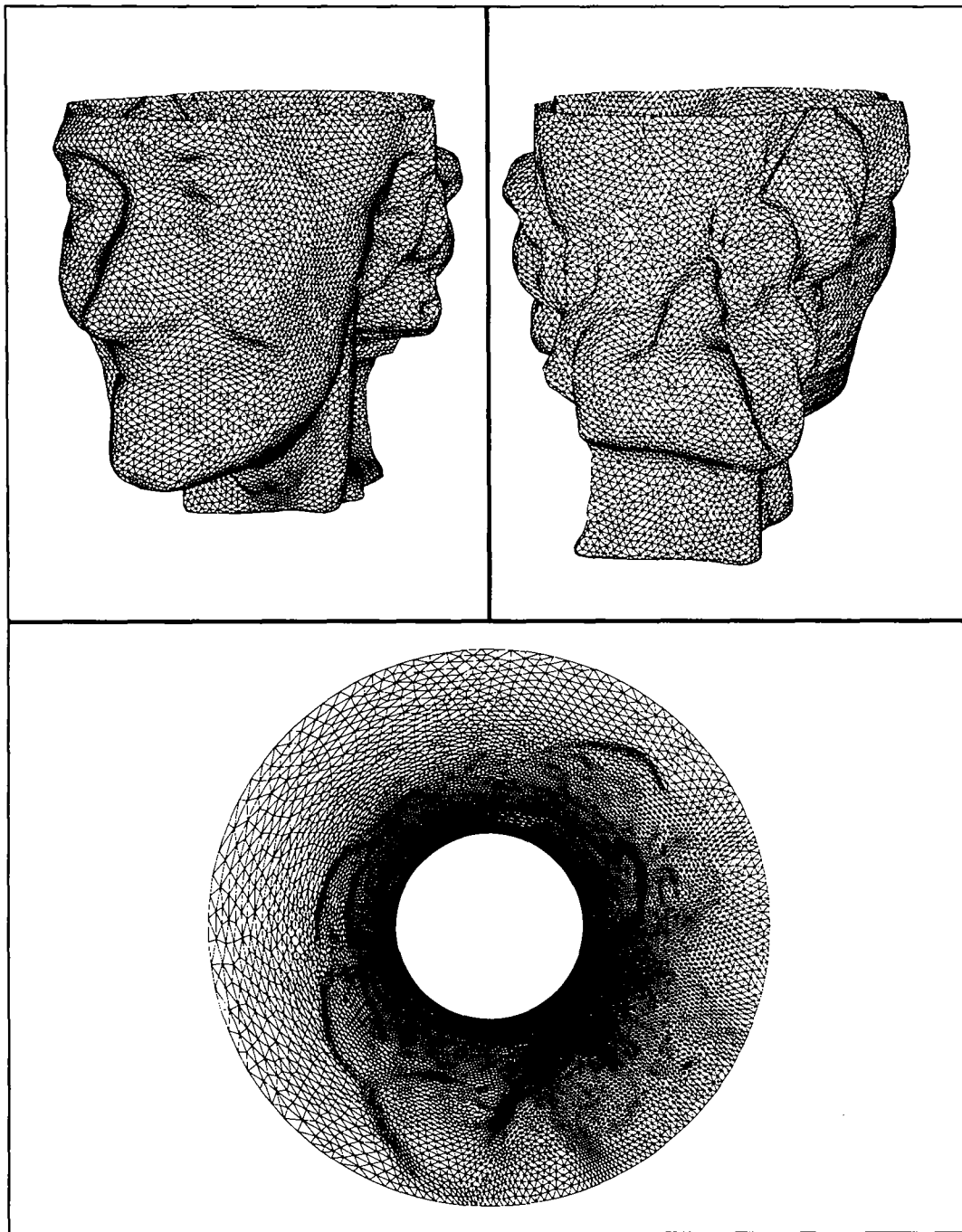


FIG. 19 - Maillage uniforme $\frac{h}{2}$ (Voltaire).

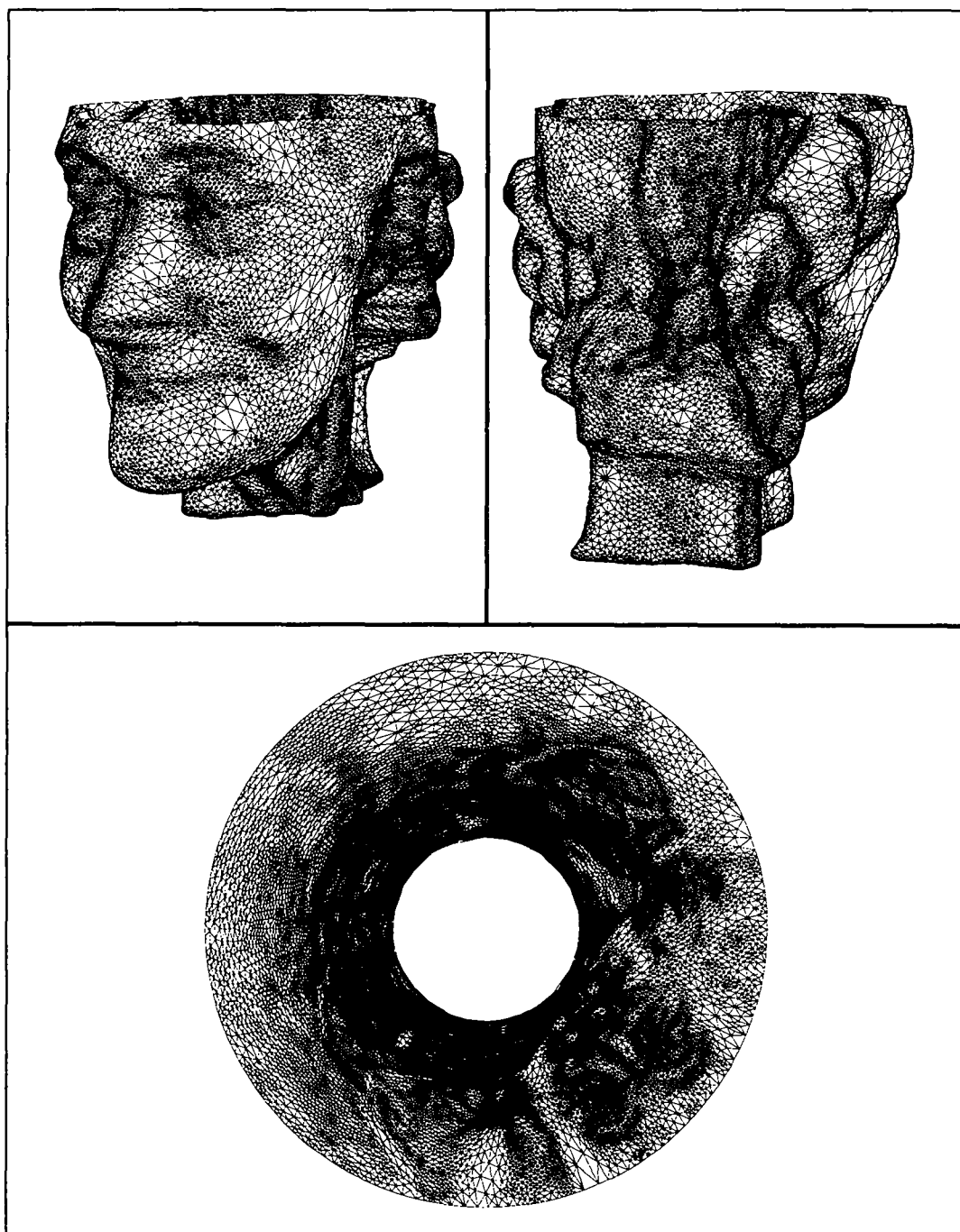


FIG. 20 - *Maillage géométrique isotrope (Voltaire).*

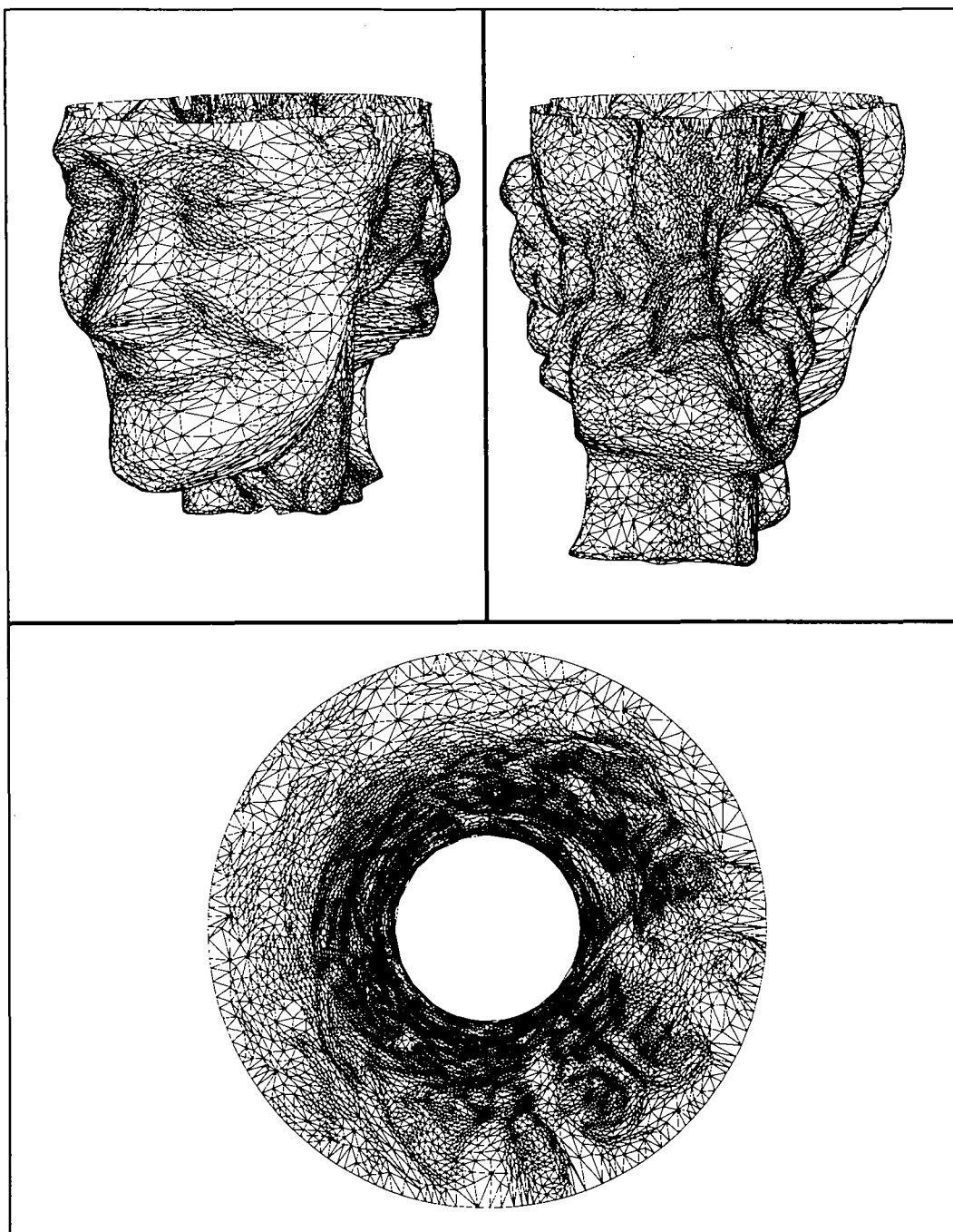


FIG. 21 - *Maillage géométrique anisotrope (Voltaire).*

6 Conclusions

Plusieurs types de maillages de surfaces ont été présentés pour un exemple de surface paramétrique. En particulier, le maillage gouverné géométrique de la surface. Une application de la méthode au maillage de surfaces cylindriques a été donnée. Le même concept a été appliqué au cas du maillage d'un objet cylindrique numérisé, pour lequel plusieurs exemples ont été donnés. Le problème de maillage triangulaire semble être résolu, sa généralisation au cas des maillages par quadrangles fait l'objet de la partie III de ce rapport. Pour conclure, il reste à envisager le problème du maillage d'une surface paramétrique par morceaux, pour lequel le maillage doit comprendre deux étapes, maillage des interfaces et maillages des cartes. Ce travail est en cours de développement.

Références

- [1] H.BOROUCHAKI ET P.L.GEORGE, Maillage de surfaces paramétriques. Partie I: Aspects théoriques, *Rapport de recherche INRIA*, RR-2928, 1996.
- [2] H.BOROUCHAKI, P.L.GEORGE, F.HECHT, P.LAUG AND E.SALTEL, Delaunay Mesh Generation Governed by Metric Specifications. Part I: Algorithms., à paraître dans *Finite Elements in Analysis and Design*.
- [3] F.SCHMITT, H.MAÎTRE, A.CLAINCHARD AND J.LOPEZ-KRAHM, Acquisition and Representation of Real Object Surface Data, *SPIE Proceedings Vol. 602 of Biostereometrics'85 Conference*, Cannes, France, 2-6 December, 1985.



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine - Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes - IRISA, Campus universitaire de Beaulieu 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes - 46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble Cedex 1 (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis - 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

