



HAL
open science

Critères géométriques pour l'évaluation des triangulations de surfaces

Pascal Frey, Houman Borouchaki

► **To cite this version:**

Pascal Frey, Houman Borouchaki. Critères géométriques pour l'évaluation des triangulations de surfaces. [Rapport de recherche] RR-2951, INRIA. 1996. inria-00073747

HAL Id: inria-00073747

<https://inria.hal.science/inria-00073747>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Critères géométriques pour
l'évaluation des triangulations de surfaces*

Pascal J. Frey - Houman Borouchaki

N° 2951

Juillet 1996

THÈME 4

A large, stylized 'R' logo, similar to the INRIA logo, positioned to the left of the text.

*Rapport
de recherche*

Les rapports de recherche de l'INRIA
sont disponibles en format postscript sous
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

si vous n'avez pas d'accès ftp
la forme papier peut être commandée par mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(n'oubliez pas de mentionner votre adresse postale).

par courrier :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

INRIA research reports
are available in postscript format
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

if you haven't access by ftp
we recommend ordering them by e-mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(don't forget to mention your postal address).

by mail :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)



Critères géométriques pour l'évaluation des triangulations de surfaces.

Pascal J. FREY* et Houman BOROUCHEKI

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 2951 — 29 juillet 1996 — 32 pages

Résumé : Ce rapport présente quelques critères destinés à l'évaluation des triangulations de surfaces. Ces critères sont exclusivement basés sur des considérations géométriques. Les structures de données et aspects théoriques sont détaillés et pour chaque critère une interprétation géométrique est donnée. Un exemple d'application illustre la pertinence des critères choisis.

Mots-clé : Maillage surfacique, Qualité d'une triangulation, Polyédrisation d'une surface, Critères géométriques.

(Abstract: pto)

* E-mail : Pascal.Frey@inria.fr

Geometric criteria for surface triangulation assessment.

Abstract: This report presents several criteria for surface triangulation assessment. These criteria are based exclusively on geometric feature analysis. Data structures and theoretical aspects are described and a geometric interpretation of each criterium is provided. An application example illustrates the relevance of the proposed criteria.

Key-words: Surface mesh, Mesh quality, Polyhedral surface approximation, Geometrical criteria

Table des matières

1	Introduction	4
2	Informations constitutives	5
2.1	Représentation du maillage	5
2.2	Validité du maillage	7
3	Définitions préliminaires	8
3.1	Qualité d'un triangle	9
3.2	Normale à la surface en un point	10
3.3	Plan tangent à la surface en un point	12
4	Critères géométriques d'évaluation	13
4.1	Notion de conformité géométrique	14
4.1.1	Définitions	14
4.1.2	Aspect algorithmique	15
4.2	Degré de rugosité	16
4.3	Rayon de courbure minimal	19
4.3.1	Résultats généraux	19
4.3.2	Aspects numériques	20
4.3.3	Calcul du rayon de courbure minimal	20
4.4	Écart à la surface	21
4.5	Signe de courbure au voisinage d'un sommet	23
4.6	Longueurs normalisées des arêtes	24
5	Exemple d'application	27
6	Conclusions	31

1 Introduction

La triangulation des surfaces joue un rôle important dans de nombreuses applications, tant au niveau de la simulation numérique et des problèmes liés à la visualisation des résultats qu'au niveau du maillage en trois dimensions, pour lequel certains algorithmes requièrent des maillages de surfaces comme donnée.

La triangulation des surfaces est un problème réputé difficile pour lequel différentes solutions ont été proposées (voir, par exemple, [15],[7],[13],[14],[9],[3], sur la triangulation de surfaces dans un espace paramétrique), qui ne conduisent pas forcément à un résultat satisfaisant, la triangulation générée n'approchant la surface que de manière grossière ou au prix d'un nombre d'éléments excessif, rendant de ce fait le maillage inexploitable.

La qualité d'une triangulation de surfaces dépend étroitement du contexte d'application. Ainsi, dans le cas des méthodes d'éléments finis, la qualité du maillage de surfaces est un critère important, notamment en raison de son effet sur :

- la précision des solutions numériques et la convergence du calcul,
- la qualité du maillage tridimensionnel liée généralement à la qualité du plus mauvais élément de la triangulation de la surface du domaine considéré.

Plus généralement et d'un point de vue purement géométrique, le problème posé est d'approcher la vraie surface le plus fidèlement possible par une surface plane par morceaux¹, ce qui signifie qu'il faut contrôler l'écart entre la surface et les éléments de la triangulation. Une triangulation n'est donc pas une représentation exacte mais une approximation de la surface. Toutefois, l'analyse des propriétés géométriques d'un maillage donné peut fournir des informations pertinentes sur l'approximation polyédrique, par exemple indiquer les zones où la densité des éléments n'est pas justifiée au regard de la courbure de la surface.

1. chaque morceau pouvant être un triangle.

Pour aider à l'analyse des propriétés géométriques des maillages surfaciques, on propose dans ce rapport quelques critères géométriques d'évaluation de ces triangulations. Dans la section 2, on rappelle une structure de donnée classique pour définir un maillage de surfaces, puis on introduit la notion de validité. La donnée de ses deux formes fondamentales, permettant d'extraire ses propriétés géométriques et en particulier sa courbure minimale, suffit généralement à définir localement une surface. Section 3, on rappelle brièvement les définitions du plan tangent et de la normale à la surface en un point et on donne un algorithme de calcul numérique de ces quantités. La section 4 introduit ensuite les principaux critères géométriques que l'on peut raisonnablement estimer à partir d'une triangulation de surfaces donnée, en particulier, les critères de rayon de courbure minimal, degré de rugosité, position par rapport au plan tangent et décollement de la surface seront discutés. Section 5, les propriétés géométriques d'une triangulation de surfaces donnée sont analysées. Enfin dans la dernière section, quelques extensions possibles de ce travail sont évoquées.

2 Informations constitutives

Le choix d'une organisation pour structurer les valeurs constitutives d'une triangulation de surfaces ne conduit pas à une solution unique. En effet, ce choix est généralement gouverné par l'utilisation ultérieure de la structure. Toutefois, la triangulation doit contenir toutes les informations utiles lors du traitement, et en particulier la description géométrique du domaine de calcul. A défaut d'une structuration unanimement reconnue, nous allons faire l'hypothèse *raisonnable* que le recouvrement du domaine consiste formellement en la liste des éléments de la triangulation, c'est-à-dire la liste des sommets et la liste des faces du polyèdre approchant la surface.

2.1 Représentation du maillage

Une triangulation \mathcal{T} est un ensemble d'entités décrivant un graphe, appelé graphe *d'adjacence*, dont les nœuds sont les triangles et les arêtes représentent les relations de voisinage des paires de triangles adjacents. Tout triangle K de \mathcal{T} est défini par la liste orientée $K = (P_1, P_2, P_3)$ de ses sommets P_i dans le

sens *direct*. Un autre mérite de cette écriture est de définir explicitement les arêtes du triangle K . Ainsi, l'arête $a_i = P_i P_{i+1}$ ($i = 1, 3$) joint les points P_i à P_{i+1} (avec $P_i = P_{i-3}$, si $i > 3$). Par ailleurs, la surface $S(K)$ de K est calculée comme :

$$S(K) = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{P_i P_{i+1}} \times \overrightarrow{P_i P_{i+2}} \right\| . \quad (1)$$

D'un point de vue algorithmique, le graphe d'adjacence définissant la triangulation est représenté par une liste d'entités, appelées *faces*, regroupant les informations nécessaires. Ainsi, chaque face est décrite par un triangle et trois relations de voisinages. Ces relations donnent le *voisinage par arête* et permettent de connaître les faces voisines d'une face donnée K , si elles existent. On obtient la structure suivante :

Structure **face** K

Composantes P_i ($i=1,3$), sommets

F_i ($i=1,3$), références des faces adjacentes

où F_i est la face adjacente à K opposée au sommet P_i . On repère ainsi les sommets et les faces adjacentes à K par leurs indices.

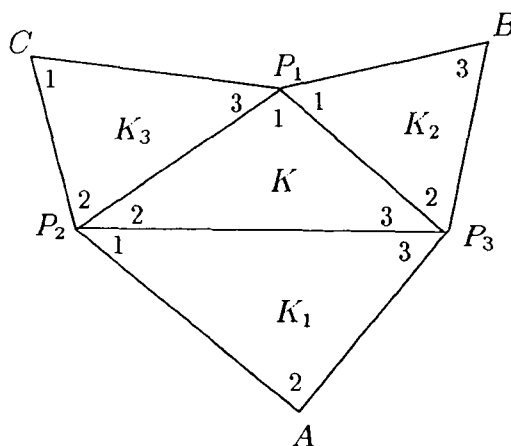


FIG. 1 - Définition de K et relation de voisinage.

Exemple. Soient la face K définie par le triplet de sommets (P_1, P_2, P_3) et ses faces adjacentes K_1, K_2, K_3 , où K_i est opposé au sommet d'indice i de K . Supposons que les

indices des sommets dans K et K_i soient donnés par le schéma suivant (figure 1), où les points $A, B,$ et C complètent les faces adjacentes K_i . On a le tableau des adjacences suivant :

Sommet d'indice	1	2	3
K	P_1	P_2	P_3
K_1	P_2	A	P_3
K_2	P_1	P_3	B
K_3	C	P_2	P_1

Tableau 1: Les sommets de K et ceux des K_i .

Par suite, on va s'intéresser aux propriétés géométriques des triangulations de surfaces valides, au sens géométrique.

2.2 Validité du maillage

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^3 et \mathcal{T} une triangulation de surface de Ω . Si K désigne un élément de \mathcal{T} , alors :

Définition 1 \mathcal{T} est un maillage valide de Ω si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $[C_0]$ \mathcal{T} est un recouvrement par triangles de Ω , conforme au sens usuel des méthodes d'éléments finis, [6],
- $[C_1]$ \mathcal{T} est orientable [2].

Il est important de remarquer que l'orientation explicite des faces de la triangulation induit une orientation de ses arêtes. En d'autres termes, la propriété $[C_1]$ traduit la cohérence des orientations des paires de triangles adjacents (cf. figure 2).

Définition 2 Pour toute paire (K_1, K_2) de faces adjacentes, les orientations de K_1 et de K_2 sont cohérentes si elles induisent sur l'arête commune des orientations opposées.

La triangulation \mathcal{T} est dite *orientable* (propriété $[C_1]$) si toutes les paires de triangles adjacents de \mathcal{T} ont des orientations cohérentes.

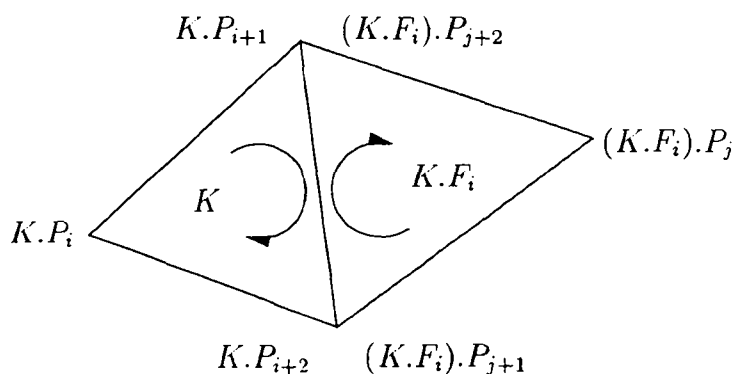


FIG. 2 - Orientations cohérentes de triangles adjacents.

Les propriétés *topologiques* et *géométriques* énoncées sont numériquement traduites en analysant les éléments et les relations de voisinage liant ces éléments. Formellement, la condition $[C_1]$ s'écrit (figure 2) :

$$K.P_{i+1} = (K.F_i).P_{j+2} \quad (2)$$

où $K.P_i$ et $(K.F_i).P_{j+1}$ représentent respectivement les sommets voyeurs de l'arête commune aux faces K et $K.F_i$. On constate que la relation ci-dessus entraîne la relation équivalente suivante :

$$K.P_{i+2} = (K.F_i).P_{j+1} \quad (3)$$

Remarque. Hormis les conditions $[C_0]$ et $[C_1]$, en trois dimensions une triangulation de surfaces \mathcal{T} vérifie une relation d'Euler :

$$s - a + f = 2, \quad (4)$$

qui lie (cf. [1]) le nombre de sommets s , le nombre d'arêtes a et le nombre de faces f de \mathcal{T} .

3 Définitions préliminaires

Supports de calculs, dans le cas par exemple des méthodes d'éléments finis, les maillages de surfaces doivent satisfaire certaines propriétés particulières,

outre celles mentionnées ci-dessus, et notamment avoir une certaine qualité. La qualité $Q_{\mathcal{T}}$ d'un maillage \mathcal{T} est liée à la qualité Q_K de chacun de ses éléments.

Il existe de nombreuses formules possibles [12] pour mesurer la qualité d'un élément, parmi lesquelles on privilégie celle qui est sensible à la fois à la taille et à la forme des éléments.

3.1 Qualité d'un triangle

Dans le contexte des méthodes d'éléments finis, la qualité Q_K d'un triangle K est une valeur numérique qui donne une mesure de sa forme géométrique et intervient, en principe, dans les théorèmes de majoration d'erreur [4] (dépendant de la taille des éléments). Parmi différentes mesures possibles, on retient donc la suivante :

$$Q_K = \alpha \frac{\rho_K}{h_{max}} = \alpha \frac{S(K)}{p_K h_{max}} \quad (5)$$

avec $\alpha = \frac{6}{\sqrt{3}}$ le coefficient de normalisation assurant une valeur de qualité unité dans le cas d'un triangle équilatéral, h_{max} le *diamètre* de K (longueur de son plus grand côté) et ρ_K le rayon de son cercle inscrit² (figure 3). Cette fonction de qualité varie de 0 (triangle plat) à 1 (triangle équilatéral).

La qualité Q_K mesure la forme (aspect) d'un élément indépendamment de sa contribution à la définition de la surface. Par conséquent, la qualité $Q_{\mathcal{T}}$ de la triangulation, qui s'apprécie globalement par une formule du type :

$$Q_{\mathcal{T}} = \min_{K \in \mathcal{T}} Q_K. \quad (6)$$

ne fournit pas d'information sur la fidélité de l'approximation de la surface. On verra par la suite d'autres mesures liées à l'approximation que l'on appelle *géométrique*.

Auparavant, on rappelle les notions de normale et de plan tangent à la surface en un point et on indique comment calculer de manière approchée ces informations.

2. calculé comme le rapport de la surface $S(K)$ par le demi-périmètre p_K .

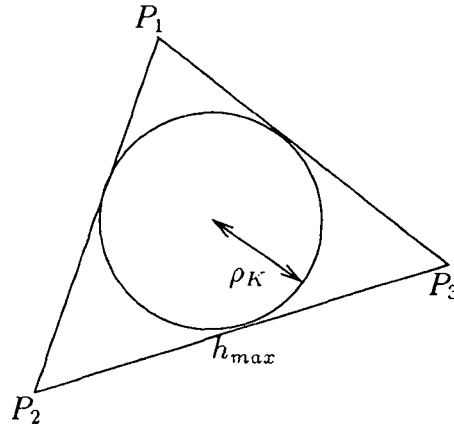


FIG. 3 - Qualité du triangle.

3.2 Normale à la surface en un point

En géométrie différentielle classique, le vecteur unitaire de la normale à la surface en un sommet P d'une triangulation de surface \mathcal{T} joue un rôle essentiel (permettant de définir le plan tangent en ce point). Si ce vecteur n'est pas explicitement connu (par exemple fourni par un système de CAO ou un modèleur géométrique), il est approché à partir des normales aux faces concourantes en P .

Définition 3 La normale à toute face orientée K de sommets P_1 , P_2 , et P_3 est définie par le vecteur unitaire \mathbf{n}_K comme :

$$\mathbf{n}_K = \frac{\mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_i\|} \quad (7)$$

où \mathbf{u}_i et \mathbf{v}_i représentent les deux vecteurs supports des arêtes incidentes en un sommet P_i quelconque de K (figure 4) :

$$\mathbf{u}_i = \frac{\overrightarrow{P_i P_{i+1}}}{\|\overrightarrow{P_i P_{i+1}}\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_i = \frac{\overrightarrow{P_i P_{i+2}}}{\|\overrightarrow{P_i P_{i+2}}\|} \quad (i = 1, 3 \text{ et } i = i - 3 \text{ si } i > 3). \quad (8)$$

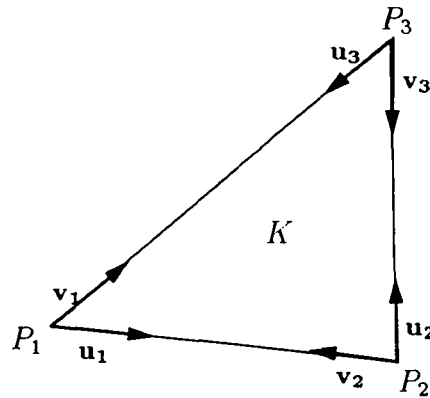


FIG. 4 - Calcul de la normale à K .

On définit alors le vecteur unitaire ν_P de la normale à la surface en P comme une somme vectorielle normalisée des vecteurs unitaires normaux aux faces concourantes en P (i.e. normale discrète) :

$$\nu_P = \frac{\sum \mathbf{n}_{K_i}}{\| \sum \mathbf{n}_{K_i} \|} \quad (9)$$

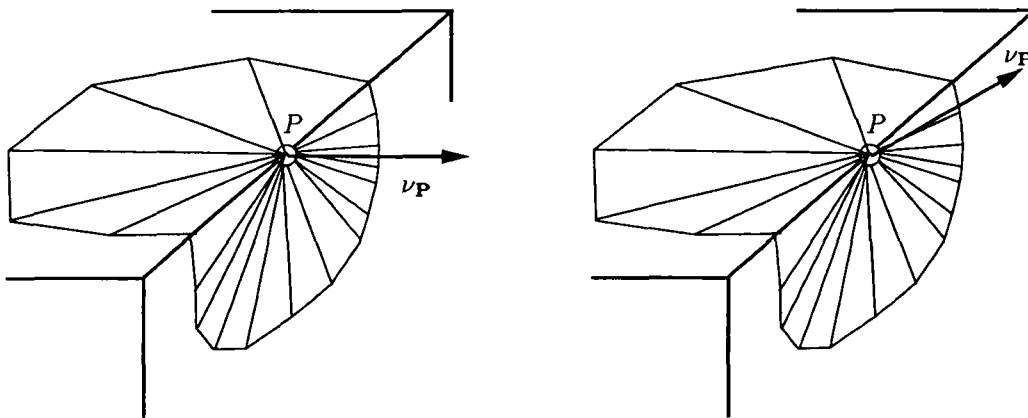


FIG. 5 - Calcul de la normale par deux approches.

Cette approximation n'est pas sans poser quelques problèmes, notamment dans le cas des points singuliers (situés sur une arête vive du modèle géométrique), pour lesquels la direction de la normale résultante est imprédictible car trop liée à la discrétisation. Avec cette approche, chaque triangle de \mathcal{T} apporte la même contribution au calcul de la normale, qui devient ainsi dépendante du nombre de triangles concourants en P (cf. figure 5, à gauche). Pour obtenir un vecteur normal plus lié à la géométrie, on propose une autre approche, couramment utilisée dans les méthodes d'éléments finis. Dans ce cas, le vecteur unitaire ν_P est calculé comme (cf. figure 5, à droite) :

$$\nu_P = \frac{\sum \mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_i}{\left\| \sum \mathbf{u}_i \times \mathbf{v}_i \right\|}. \quad (10)$$

Ce calcul revient à pondérer la somme des normales aux faces par les surfaces des triangles unitaires (*i.e.* construits à partir des vecteurs unitaires \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i supports des arêtes concourantes en P).

3.3 Plan tangent à la surface en un point

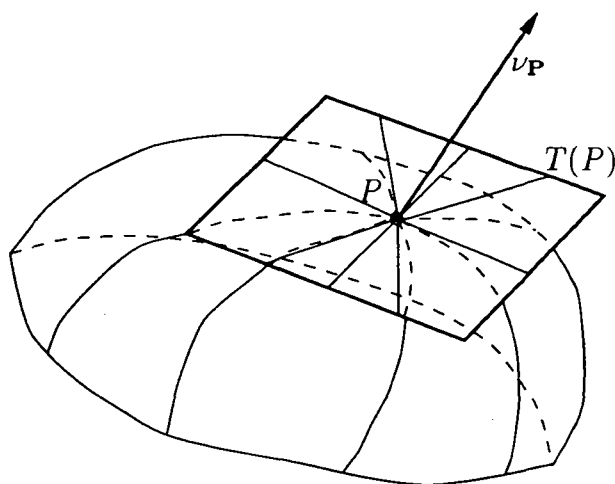
La donnée de la normale ν_P à la surface en P permet de définir le *plan tangent* $T(P)$ à la surface en ce point. En effet, ce plan passe par P et ν_P est un vecteur unitaire normal à ce plan (figure 6). Ce plan peut ne pas exister dans le cas d'un point P singulier. Mais comme numériquement (sans aucune information supplémentaire) en chaque point ν_P est bien définie grâce à l'approche de la section précédente, le plan tangent est ainsi défini pour les points singuliers³.

Remarque. Dans le cas des surfaces paramétriques, on sait que les coefficients de l'équation du plan tangent à la surface en un point P sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale à la surface. Plus précisément, le plan tangent $T(P)$ est dirigé par les deux vecteurs tangents $\tau_u(\mathbf{P})$ et $\tau_v(\mathbf{P})$, où u et v sont les paramètres. Le vecteur unitaire de la normale en P au plan $T(P)$ s'écrit alors :

$$\nu_P = \frac{\tau_u(\mathbf{P}) \times \tau_v(\mathbf{P})}{\left\| \tau_u(\mathbf{P}) \times \tau_v(\mathbf{P}) \right\|}. \quad (11)$$

En résumé, d'un point de vue pratique, le plan tangent $T(P)$ à la surface en un point P est déterminé à partir de la normale discrète en P en utilisant

3. on verra dans la section 4.5 que l'on peut aussi détecter les points singuliers.

FIG. 6 - Plan tangent et normale à la surface en un point P

la propriété d'orthogonalité énoncée ci-dessus. Ces quelques résultats de géométrie différentielle classique étant rappelés, on va maintenant les appliquer à l'étude des propriétés géométriques des triangulations de surfaces.

4 Critères géométriques d'évaluation

La triangulation des surfaces est un problème complexe lié en particulier à la définition même des surfaces [3]. Différentes méthodes ont été proposées et dans certains cas les triangulations générées n'approchent que très grossièrement la vraie surface. Le polyèdre résultant de la triangulation représente donc la surface. On se propose d'analyser cette triangulation en supposant, par défaut et sans autre information, que la surface initiale est assez régulière (surface d'ordre G^1).

Dans cette section, on va d'abord définir la *conformité* (régularité) d'une triangulation de surfaces, pour ensuite définir des critères d'évaluation des propriétés géométriques de la surface liées à la qualité de l'approximation géométrique.

4.1 Notion de conformité géométrique

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 et \mathcal{T} une triangulation de la frontière de Ω . Le problème que l'on se pose est d'identifier les zones de forte torsion sur la surface due à l'approximation polyédrique \mathcal{T} . C'est-à-dire que l'on cherche à mesurer la déformation de la surface par rapport à l'approximation plane par morceaux introduite par la triangulation. Pour cela, on va introduire quelques définitions.

4.1.1 Définitions

L'idée de base consiste à mesurer localement la déformation de la surface dans le plan tangent $T(P)$ à la surface en un point P de \mathcal{T} . Soit $B(P)$ l'ensemble des éléments $K = (P, P_i, P_j)$ de \mathcal{T} ayant P comme sommet. Pour tout sommet P_i de $B(P)$, on note P_i^T sa projection sur $T(P)$. En reportant $B(P)$ sur $T(P)$, on définit ainsi par projection la boule $B^T(P)$ associée à P dans le plan tangent, constituée des triangles $K^T = (P, P_i^T, P_j^T)$. La conformité géométrique de \mathcal{T} est définie par :

Définition 4 \mathcal{T} est un recouvrement géométriquement conforme de Ω si les conditions suivantes sont vérifiées pour tout point P de \mathcal{T} :

- $[C_2]$ tout élément de $B^T(P)$ est d'intérieur non vide;
- $[C_3]$ l'intersection des intérieurs de deux éléments de $B^T(P)$ est vide;
- $[C_4]$ l'intersection de deux éléments de $B^T(P)$ est réduite à un sommet ou une arête.

Cette définition revient à garantir la conformité, au sens usuel des éléments finis, des éléments de $B^T(P)$ dans le plan tangent $T(P)$ de P . En d'autres termes, toute boule $B^T(P)$ associée à tout sommet P de \mathcal{T} doit être un recouvrement par triangles conforme, au sens de la définition 1.

Le lemme suivant permet alors de vérifier numériquement la conformité de la triangulation \mathcal{T} .

Lemme 1 Si pour tout point P de \mathcal{T} , la relation

$$\forall K^T \in B^T(P), \quad S(K^T) > 0, \quad (12)$$

est satisfaite, $S(K^T)$ représentant la surface de K^T , alors \mathcal{T} est géométriquement conforme.

A noter que K^T étant un triangle dans un plan (le plan tangent), la convention sur l'écriture du triplet définissant le triangle K^T donne naturellement un sens au signe de sa surface $S(K^T)$.

Remarque. Si P est un point non conforme de \mathcal{T} , la trace des arêtes frontières de $B^T(P)$ dans $T(P)$ forme un segment polygonal non-simple. La non-conformité de \mathcal{T} au point P peut s'interpréter comme un manque d'information en P (si celle-ci n'est pas volontaire): la discrétisation de la surface au voisinage de P n'est alors pas assez fine.

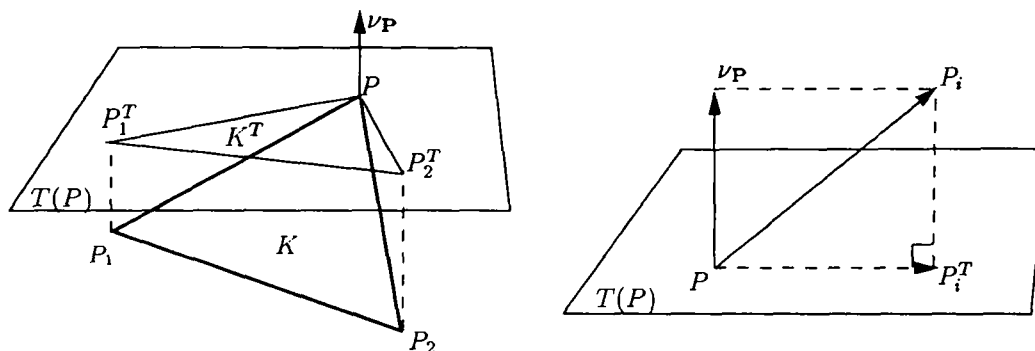


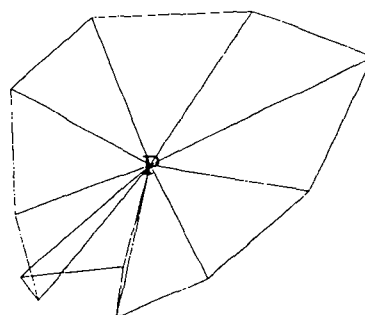
FIG. 7 - Conformité géométrique et évaluation dans le plan tangent $T(P)$.

4.1.2 Aspect algorithmique

Dans la pratique, la conformité d'une triangulation de surfaces donnée \mathcal{T} est évaluée au moyen du lemme 1. Soit P un sommet de \mathcal{T} et $B(P)$ la boule associée à P . Le point P_i^T , projection du point P_i de $B(P)$ sur $T(P)$ est obtenu par la transformation (figure 7) :

$$P_i^T = P + \langle \overrightarrow{PP_i}, \nu_P \rangle \nu_P \quad (13)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de l'espace euclidien de \mathbb{R}^3 .

FIG. 8 - Point P non-conforme.FIG. 9 - $B^T(P)$, report de $B(P)$ par projection sur $T(P)$.

La figure 8 illustre cette notion de non-conformité. La boule du point P contient 11 faces, ce qui est visiblement insuffisant pour rendre compte de la torsion de la vraie surface. La projection des points de la boule sur le plan tangent $T(P)$ montre le recouvrement partiel des triangles (figure 9), la trace des arêtes frontière de $B^T(P)$ est un segment polygonal qui s'auto-intersecte.

Comme on vient de le voir, l'algorithme de vérification de la conformité d'une triangulation est déterministe et identifie les zones de non-conformité. On peut aussi définir un degré pour la non-conformité qui dépend localement du rayon de torsion en chaque sommet.

4.2 Degré de rugosité

Lorsqu'on analyse une triangulation de surfaces, on peut s'intéresser aux continuités géométriques de cette surface. Celles-ci indiquent généralement un changement brutal de direction des normales à la surface, d'un sommet à un sommet voisin (ou entre deux faces adjacentes). Les arêtes vives et points singuliers du modèle sont des exemples typiques de ce type de continuité d'ordre 0 uniquement (figure 10). En revanche, une variation importante de la normale

dans les endroits où la surface est supposée assez lisse⁴ indique que l'approximation polyédrique n'est pas assez fine pour rendre compte des variations locales de la surface.

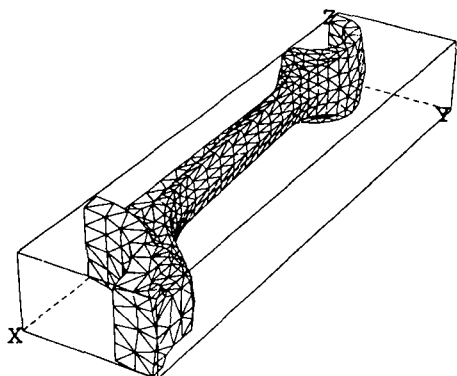


FIG. 10 - Exemple d'objet ayant des arêtes vives et des points singuliers.

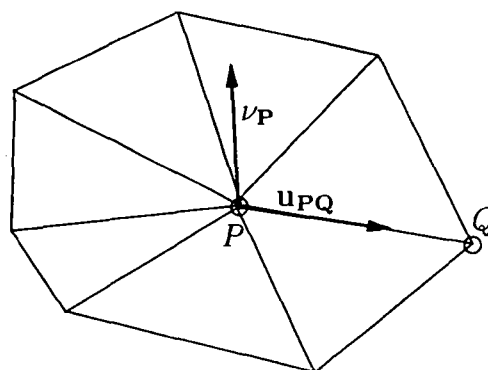


FIG. 11 - Mesure du degré de rugosité de la surface.

Etant donnée une triangulation \mathcal{T} d'une surface, on va définir un *degré de rugosité* de \mathcal{T} au voisinage d'un sommet P . Pour cela, en sachant qu'une arête quelconque PQ , concourante à P , est la discrétisation d'une courbe tracée sur la surface, on va faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 La surface est lisse et l'écart entre l'arête PQ et la surface est assez petit. En d'autres termes, le point Q est assez proche du plan tangent $T(P)$ en P .

Cette hypothèse entraîne que l'angle entre la normale ν_P à la surface et le vecteur directeur unitaire u_{PQ} de l'arête PQ doit être proche de $\frac{\pi}{2}$. En conséquence, plus cet angle est proche de $\frac{\pi}{2}$, meilleure est l'approximation de la surface, au regard des continuités géométriques. Cette hypothèse n'est pas

4. c'est-à-dire continûment différentiable ou C^2 .

vérifiée si l'arête PQ n'est pas assez proche de la surface, ce qui revient à dire que la discrétisation n'est pas assez fine au voisinage de P .

A partir de cette hypothèse, on va définir le degré de rugosité de la surface au point P de la façon suivante :

Définition 5 Le degré de rugosité \mathcal{R}_P de \mathcal{T} au point P est défini comme le minimum des produits scalaires de la normale unitaire à la surface en P et des vecteurs unitaires supports des arêtes concourantes en P , c'est-à-dire (cf. figure 11) :

$$\mathcal{R}_P = \min_{PQ} | \langle \nu_P, \mathbf{u}_{PQ} \rangle |. \quad (14)$$

Par définition, le degré de rugosité est une fonction à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. En un sommet P de \mathcal{T} , si $\mathcal{R}_P = 0$, l'approximation polyédrique est parfaite alors que si $\mathcal{R}_P \geq t$ (par exemple $t = 0.5$), P est probablement un point singulier ou l'approximation au voisinage de P est peu fidèle.

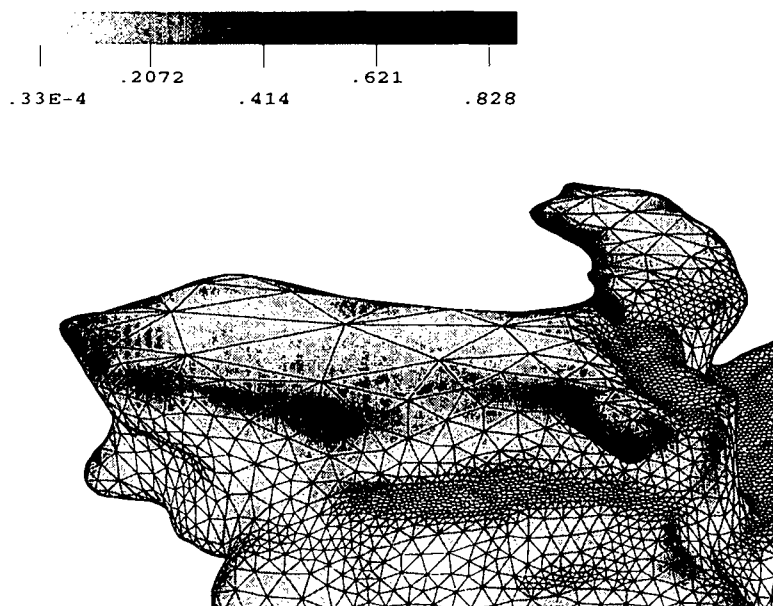


FIG. 12 - Degrés de rugosité d'une surface.

Exemple. La figure 12 illustre, en niveaux de gris, le degré de rugosité d'une surface. Les niveaux varient linéairement (en dégradé) de blanc ($\mathcal{R}_P = 3.e - 05$) à noir ($\mathcal{R}_P = 0.83$).

On identifie ainsi clairement les zones (claires) où l'approximation de la surface est fidèle et les zones (sombres) où celle-ci ne l'est pas.

4.3 Rayon de courbure minimal

Un des éléments qui caractérise la forme d'une courbe dans l'espace est son degré de flexion. Idéalement, il faudrait connaître en chaque point de la surface la mesure exacte des courbures. Généralement, cette information n'est pas disponible, ce qui conduit à établir une formule approchée pour le calcul des rayons de courbure en tout sommet P d'une triangulation de surface \mathcal{T} donnée.

Par suite, on rappelle quelques résultats fondamentaux de géométrie différentielle relatifs à la détermination du rayon de courbure d'une courbe en un point donné, dont on donne ensuite une formule de calcul approchée.

4.3.1 Résultats généraux

Soient $\gamma(s)$ une courbe plane paramétrée par l'abscisse curviligne s et $P = \gamma(s_0)$ un point de cette courbe. On se propose d'étudier le comportement de la courbe au voisinage de P [5].

Lemme 2 *La courbe ayant un contact de second ordre en P avec $\gamma(s)$ est un cercle appelé cercle osculateur, de centre $C_P = P + \rho_P \nu_P$ et de rayon ρ_P , où ν_P est le vecteur normal unitaire principal à la courbe en P et ρ_P le rayon de courbure en P .*

Ce lemme s'établit en considérant un développement limité d'ordre 2 de $\gamma(s)$ en P :

$$\gamma(s_0 + \Delta s) = \gamma(s_0) + \tau_P \Delta s + \frac{1}{2\rho_P} \nu_P \Delta s^2 + \Delta s^2 \varepsilon(\Delta s), \quad (15)$$

où τ_P est le vecteur tangent unitaire à la courbe en P , Δs est un accroissement petit de s et $\varepsilon(\Delta s)$ est un terme qui tend vers 0 si Δs tend vers 0.

Lemme 3 *Soit ρ_P^* le rayon du cercle, appelé cercle osculateur approché, tangent à τ_P en P et passant par le point $Q = P + \tau_P \Delta s + \frac{\nu_P}{2\rho_P} \Delta s^2$, alors $\rho_P^* \approx \rho_P$ pour Δs suffisamment petit.*

Ce lemme permet d'approcher ρ_P par ρ_P^* . Par suite, on va montrer comment calculer numériquement ρ_P^* .

4.3.2 Aspects numériques

Le point Q défini ci-dessus appartient au plan osculateur (contenant le cercle osculateur). Soit C_P^* le centre du cercle osculateur approché. On a (cf. figure 13):

$$\langle \overrightarrow{PQ}, \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} - \rho_P^* \nu_P \rangle = 0, \quad (16)$$

et on obtient alors:

$$\rho_P^* = \frac{1}{2} \frac{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}{\langle \nu_P, \overrightarrow{PQ} \rangle}. \quad (17)$$

En approchant Q par $\gamma(s_0 + \Delta s)$ la formule ci-dessus permet d'obtenir de manière approximative le rayon de courbure en P .

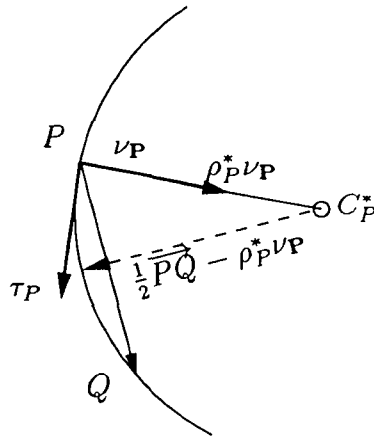


FIG. 13 - Construction du cercle osculateur.

4.3.3 Calcul du rayon de courbure minimal

Dans les sections précédentes, on a montré comment calculer de manière approchée le rayon de courbure en un point P d'une courbe, en connaissant

un point Q voisin de P sur la courbe. Le problème que l'on se pose est de calculer, en un point P de la surface, le plus petit rayon de courbure des courbes tracées sur la surface passant par ce point et appartenant chacune à une section normale. Pour cela, pour un point donné, on considère toutes les arêtes incidentes en ce point, chacune définissant ainsi une discrétisation d'une courbe tracée sur la surface et appartenant à une section normale. D'après les procédés décrits ci-dessus, pour chaque arête (segment courbe) on peut calculer le rayon de courbure correspondant. Le rayon minimal cherché est alors le minimum de ces rayons.

En sachant que le cercle osculateur définit un contact d'ordre 2, la taille des éléments de la triangulation au voisinage d'un sommet doit être proportionnelle au rayon de courbure minimal en ce sommet, pour une surface assez lisse. En chaque sommet, cette taille est définie comme une moyenne des longueurs euclidiennes des arêtes incidentes. Le coefficient de proportionnalité permet, entre autre, de contrôler l'écart entre la surface et la triangulation, comme on le verra ultérieurement (section 4.5).

4.4 Écart à la surface

Nous avons vu dans la section précédente qu'au voisinage d'un point P de la surface, la courbe $\gamma(s)$ passant par ce point et tracée sur la surface peut être approchée par un cercle de rayon ρ_P . Si la surface est suffisamment lisse, la taille des éléments de la triangulation \mathcal{T} au voisinage de P doit être proportionnelle au rayon de courbure minimal en P . En d'autres termes, la spécification de la taille des éléments en P oblige à discrétiser ce cercle avec un pas inférieur à $\alpha\rho_P$. Le coefficient de proportionnalité α permet notamment de contrôler l'écart entre la surface et la triangulation, ce qui revient donc à contrôler l'écart entre la discrétisation du cercle et le cercle lui-même, puisque celui-ci représente localement la courbe tracée sur la surface au voisinage de P .

Si $\frac{\delta}{\rho_P}$ est l'écart relatif du cercle par rapport à sa discrétisation et $h = \alpha\rho_P$ la longueur euclidienne du segment PQ , alors pour ε fixé, le contrôle de cet écart consiste à définir α de telle sorte que :

$$\frac{\delta}{\rho_P} \leq \varepsilon. \tag{18}$$

Comme on a la relation (cf. figure 14) :

$$\rho_P - \delta = \sqrt{\rho_P^2 - \left(\frac{1}{2}\alpha\rho_P\right)^2}, \quad (19)$$

on peut donc écrire :

$$\delta = \rho_P \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\rho_P}\right)^2} \right). \quad (20)$$

En combinant alors les équations 18 et 20, on déduit l'inégalité :

$$1 - \frac{\alpha^2}{4} \leq (1 - \varepsilon)^2, \quad (21)$$

et par conséquent, le contrôle de l'écart consiste à définir α de telle sorte que, pour un ε fixé, on ait la majoration suivante :

$$\alpha \leq 2\sqrt{\varepsilon(2 - \varepsilon)}. \quad (22)$$

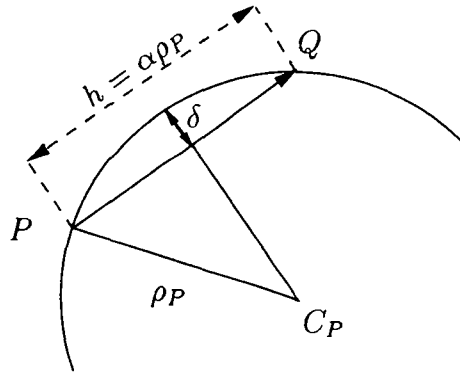


FIG. 14 - *Mesure de l'écart à la surface.*

On a ainsi introduit une mesure de l'écart à la surface, à partir d'une approximation au second ordre du cercle osculateur au voisinage de tout sommet

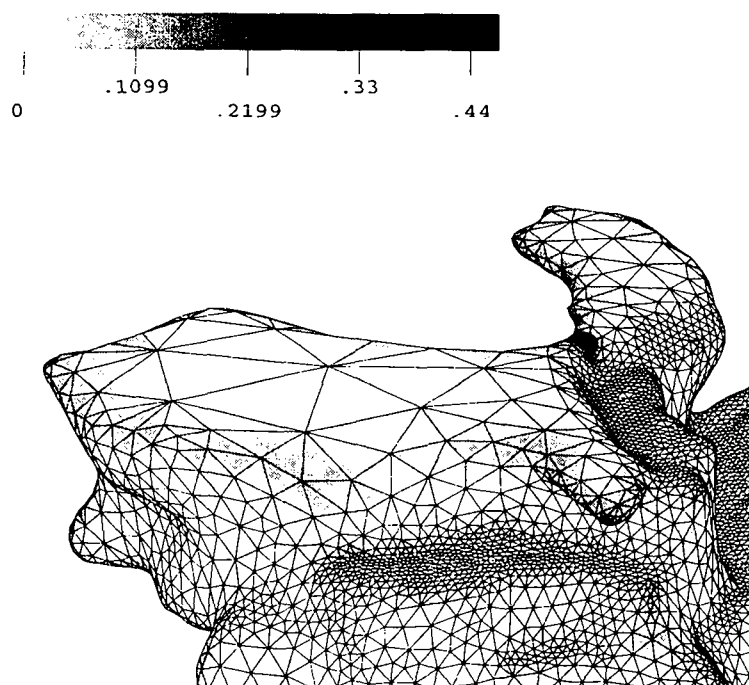


FIG. 15 - Écarts à la surface.

P de \mathcal{T} . Cette mesure permet de savoir comment le maillage approche une surface au second ordre, et donne ainsi un contrôle sur la longueur des arêtes.

Exemple. La figure 15 illustre les écarts à la surface en niveaux de gris. Les zones sombres sur l'image montrent un écart important par rapport à la surface. Pour cet exemple, l'écart maximal est de l'ordre de 0.44.

4.5 Signe de courbure au voisinage d'un sommet

Soient P un sommet de la triangulation et $B(P)$ la boule associée à P , ν_P la normale et $T(P)$ le plan tangent à la surface en P . Ce dernier sépare l'espace en deux demi-espaces. A chaque sommet $Q \neq P$ de $B(P)$ on associe le signe $sgn(Q)$ selon sa position par rapport au plan tangent, défini par :

$$sgn(Q) = \text{signe}(\langle \nu_P, \overrightarrow{PQ} \rangle). \quad (23)$$

Il existe principalement quatre configurations schématisées dans la figure 16 :

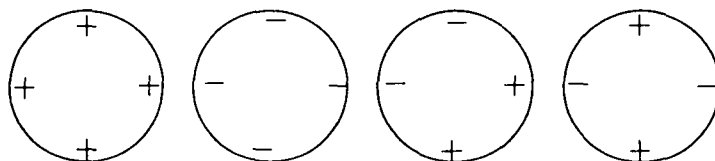


FIG. 16 - *Signe de la courbure.*

Pour les deux premières configurations la courbure ne change pas de signe (localement la surface est située au-dessus ou en-dessous du plan tangent). Ces cas sont les plus fréquents. Les deux autres configurations illustrent le changement de signe de la courbure. Par ailleurs d'autres configurations analogues à celles-ci peuvent exister (plusieurs séquences de $+ -$). Ce type d'évaluations permet simplement de classifier les sommets et éventuellement d'extraire ceux présentant un changement de signe au regard de la courbure.

4.6 Longueurs normalisées des arêtes

Un maillage géométrique de la surface est un maillage qui approche au mieux cette surface. Comme on l'a vu précédemment, pour générer un tel maillage (approchant la surface au second ordre), il suffit de contrôler localement la taille des éléments au voisinage de chaque sommet. Dans ce but, les arêtes du maillage sont examinées pour déterminer si elles ont une *longueur idéale* par rapport aux tailles souhaitées aux extrémités. Par suite, on va définir la longueur idéale d'une arête et en particulier dans le cas d'un maillage géométrique.

En associant à chaque sommet du maillage la taille souhaitée, on obtient ainsi une carte discrète de tailles. On se propose d'analyser le maillage via cette carte de tailles. En interpolant la taille partout où celle-ci n'est pas connue, on peut alors définir la longueur normalisée d'une arête du maillage. Soient (P, Q) un couple de points, $h(P)$ et $h(Q)$ les tailles souhaitées en P et Q ,

respectivement et $h(t)$ une fonction monotone continue qui donne la variation de tailles sur l'arête PQ , telle que $h(0) = h(P)$ et $h(1) = h(Q)$. Alors,

Définition 6 La longueur $l(PQ)$ du segment droit $[PQ] = (P + t\overrightarrow{PQ})_{0 \leq t \leq 1}$ est définie par rapport à $h(t)$ comme :

$$l(PQ) = d(PQ) \int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt \tag{24}$$

où $d(PQ)$ est la longueur euclidienne de l'arête PQ .

Remarque. Dans la plupart des cas, il est possible de trouver une expression analytique pour l'intégrale à calculer. Par exemple, si la fonction d'interpolation $h(t)$ est linéaire, elle s'exprime comme :

$$h(t) = h(P) + [h(Q) - h(P)]t \tag{25}$$

ce qui permet d'écrire :

$$l(PQ) = d(PQ) \int_0^1 \frac{1}{h(P) + [h(Q) - h(P)]t} dt \tag{26}$$

$$= \left[\frac{\text{Log}(h(P) + [h(Q) - h(P)]t)}{h(Q) - h(P)} \right]_0^1 \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

d'où on déduit finalement la longueur de l'arête PQ :

$$l(PQ) = \frac{d(PQ)}{h(Q) - h(P)} \left[\text{Log} \left(\frac{h(Q)}{h(P)} \right) \right] \tag{29}$$

La proposition suivante permet de savoir si la longueur d'une arête est idéale par rapport à la carte de tailles spécifiée [8] :

Proposition 1 La longueur de l'arête PQ est idéale par rapport à $h(t)$ si et seulement si :

$$d(PQ) = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt} \tag{30}$$

Cette proposition indique que la longueur d'une arête est idéale via une carte de tailles si sa longueur normalisée est unitaire. Ce qui peut encore s'énoncer sous la forme suivante :

$$l(PQ) = 1. \tag{31}$$

Un maillage dont toutes les arêtes ont une longueur unité est appelé *maillage unité*. La proposition suivante permet de savoir si un maillage est géométrique.

Proposition 2 *Pour vérifier si un maillage est géométrique, il suffit qu'il soit unitaire par rapport à la carte des tailles de rayons de courbure minimaux.*

Cette proposition est suffisante, mais pas nécessaire, pour qu'un maillage soit géométrique. En effet, on peut remplacer la carte des rayons de courbure minimaux par toute autre carte telle qu'en chaque sommet la taille souhaitée soit plus petite que la taille spécifiée par la carte des rayons. Dans ce cas, le maillage est géométrique et localement la discrétisation est éventuellement plus fine que nécessaire.

Ainsi, pour vérifier si un maillage est géométrique, il suffit qu'il soit unitaire par rapport à une carte de tailles, appelée carte de tailles géométrique, qui représente la taille minimale entre la taille définie par les rayons de courbure minimaux et celle associée aux sommets du maillage. Formellement, si $C(\rho)$ (resp. $C(h)$) représente la carte de tailles des rayons de courbure minimaux (resp. carte de tailles associée aux sommets), alors la carte de tailles géométrique est définie par $C = C(\min(\rho, h))$.

Pour obtenir la carte de tailles associée aux sommets du maillage, il suffit de définir la taille en chacun de ses sommets comme une moyenne des longueurs des arêtes incidentes.

Exemple. La figure 17 illustre la variation en niveaux de gris des tailles de la carte géométrique associée en considérant un écart de 0.001. On remarque que dans certaines zones (presque plates), les tailles ne sont pas compatibles avec les rayons de courbure minimaux.

La figure 18 montre alors la variation des longueurs normalisées du maillage par rapport à la carte géométrique ci-dessus. Pour avoir une variation de longueur comprise entre 0 et 1, toute longueur supérieure à 1 est remplacée par son inverse. On peut observer les zones sombres qui illustrent le non-respect de la géométrie.

Nous avons introduit quelques critères géométriques permettant d'évaluer si une triangulation donnée \mathcal{T} est une approximation fidèle de la surface qu'elle représente. Il reste maintenant à illustrer ces notions sous forme d'histogrammes ou encore de cartes d'évaluation géométriques, pour un exemple donné.

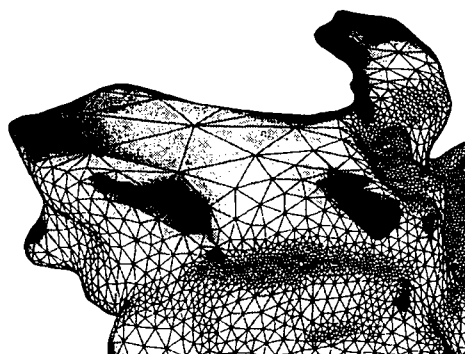
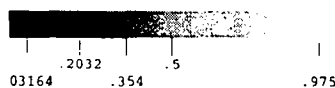
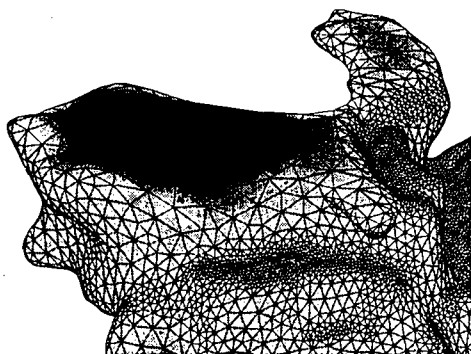
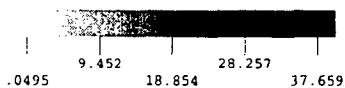


FIG. 17 - Carte géométrique.

FIG. 18 - Longueurs normalisées.

5 Exemple d'application

Dans cette section, on considère le maillage d'une surface géologique illustré par la figure 19 et on propose d'évaluer⁵ ce maillage au moyen des critères géométriques introduits. Comme indiqué en section 2, le maillage surfacique est représenté par une liste de faces (chaque face est référencée par ses trois sommets) et par une liste de coordonnées des sommets. L'exemple considéré comprend 8505 sommets et 17010 faces. La plus petite boîte englobante de cet objet a pour dimensions ($246.3 \times 274.3 \times 123.2$).

Ce maillage est de bonne qualité (au sens des éléments finis, c'est-à-dire proche de l'équilatéralité), en effet 99% des éléments ont une qualité comprise entre 1 et 2 et le plus mauvais élément a une qualité de l'ordre de 4.

La surface comprend uniquement deux points non conformes (dont l'un est visible sur la figure 8 de la section 4.1, correspondant à cet exemple).

La figure 20 montre l'histogramme de la rugosité. Le décollement maximal par rapport au plan tangent est de l'ordre de 55 degrés (7 sommets concernés)

5. sans porter de jugement de valeur sur une méthode de maillage particulière, mais en essayant de conclure qu'une triangulation donnée est une bonne approximation de la surface qu'elle représente.

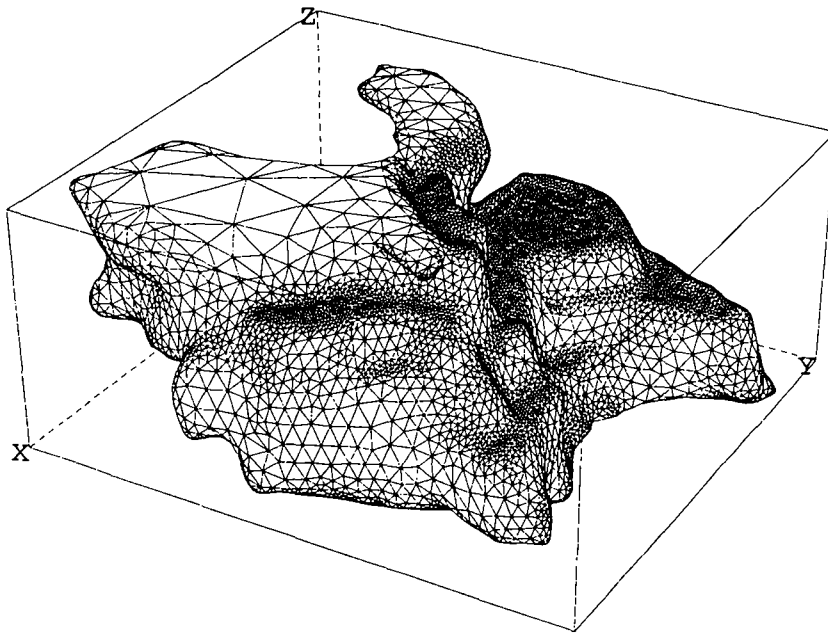


FIG. 19 - *Objet géologique (courtesy GOCAD).*

et 92% des sommets présentent un décollement de moins de 10 degrés. A nouveau, on peut juger que le maillage est assez lisse.

Le minimum des rayons de courbure minimaux aux sommets est de 0.55, alors que le maximum est de l'ordre de 9345.8. La figure 21 montre la variation des écarts à la surface à partir de la valeur 0.05 sur l'axe des abscisses. En fait, 98.5% des écarts sont inférieurs à cette valeur. Le maximum atteint est de 0.45 au voisinage d'un sommet. On en déduit que la surface est localement discrétisée d'une manière raisonnable.

On s'intéresse enfin à évaluer l'aspect géométrique du maillage. Ainsi, on examine la longueur des arêtes du maillage par rapport à la carte géométrique de tailles correspondant respectivement à des écarts (à la surface) de 0.01, 0.05, 0.1 et 0.2. La taille associée aux sommets du maillage varie de 0.95 à 37.65 (carte $C(h)$). Le tableau suivant montre pour chaque écart spécifié les tailles minimale h_{min} et maximale h_{max} de la carte géométrique correspondante, les longueurs normalisées minimale l_{min} et maximale l_{max} associées et le pourcentage de longueurs normalisées comprises entre 0.5 et 2.

ε	h_{min}	h_{max}	l_{min}	l_{max}	$0.5 < l < 2$
0.01	0.15	37.65	0.5	10.01	98.2%
0.05	0.34	37.65	0.52	4.52	99.4%
0.1	0.48	37.65	0.45	3.24	99.9%
0.2	0.66	37.65	0.38	2.35	99.99%

Tableau 2: *Statistiques relatives aux maillages géométriques.*

Les histogrammes de la figure 22 montrent la variation des longueurs normalisées du maillage par rapport aux cartes géométriques correspondant aux écarts spécifiés. L'histogramme correspondant à l'écart 0.2 semble satisfaisant pour valider l'approximation géométrique du maillage, bien que, en certaines zones où la courbure est très faible, le maillage soit trop raffiné.

Au regard de l'ensemble des critères utilisés, on peut conclure que ce maillage approche raisonnablement la surface de l'objet.

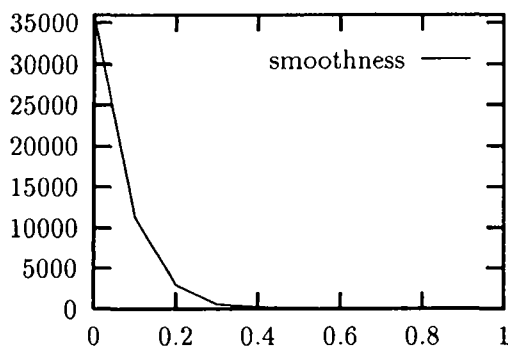


FIG. 20 - Rugosité.

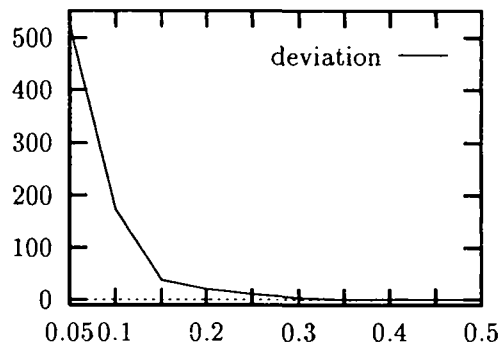


FIG. 21 - Écart.

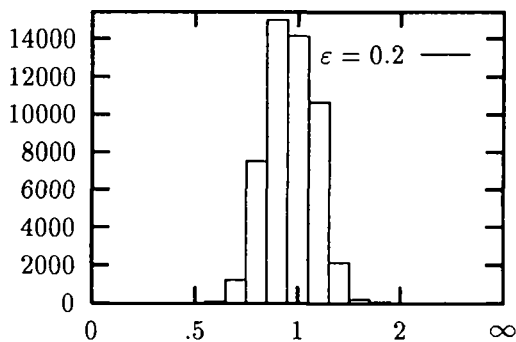
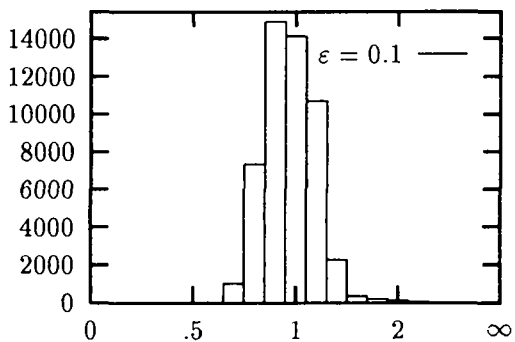
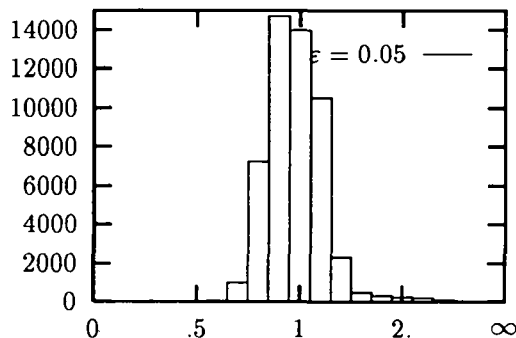
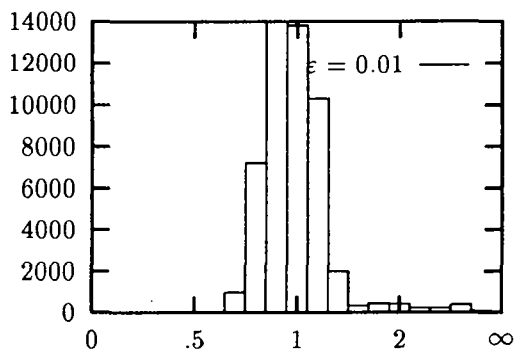


FIG. 22 - Histogramme des longueurs normalisées.

6 Conclusions

Dans cette étude, après avoir rappelé quelques définitions élémentaires, on a introduit quelques critères d'évaluation de maillages surfaciques et on a donné, pour chacun d'eux, une interprétation géométrique. Un exemple de maillage surfacique a ensuite été analysé au regard de ces critères. Parmi les extensions possibles de l'étude, on peut citer :

- la définition de critères équivalents pour une triangulation constituée de polygones autres que des triangles;
- l'utilisation des critères pour gouverner un algorithme d'optimisation de surfaces et/ou de décimation. Par exemple, on peut valider une modification topologique locale à l'aide des critères introduits;
- l'évaluation de maillages surfaciques dans le cas où un champ de tailles est explicitement spécifié (ce qui change notamment la carte géométrique).

Références

- [1] M. BERGER, Géométrie tome 3 : convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes, Fernand Nathan, Paris, 1978.
- [2] J.D. BOISSONNAT ET M. YVINEC, Géométrie Algorithmique, Ediscience, Paris, 1995.
- [3] H. BOROUCAKI ET P.L. GEORGE, Maillage de surfaces paramétriques. Part I: Aspects théoriques, RR INRIA no 2928, juillet 1996.
- [4] P.G. CIARLET, Basic Error Estimates for Elliptic Problems, Handbook of Numerical Analysis, vol II, Finite Element methods (Part 1), pp. 17-352, North Holland, 1991.
- [5] G. FARIN, Curves and Surfaces for C.A.G.D., Academic Press, 1988.
- [6] P.L. GEORGE, Automatic mesh generation. Application to Finite Element Methods, Wiley, 1991.

-
- [7] H. HOPPE, Surface reconstruction from unorganized points, Phd thesis, Univ. of Washington, 1994.
 - [8] P. LAUG, H. BOROUCAKI ET P.L. GEORGE, Maillage de courbes gouverné par une carte de métriques, RR INRIA no 2818, mars 1996.
 - [9] D.L. MARCUM, Unstructured grid generation components for complete systems, *Vth Int. Conf. on Grid Generation in Comp. Field Simulations*, Mississippi State, USA, 1-5 April, 1996.
 - [10] P. MÖLLER AND P. HANSBO, On advancing-front mesh generation in three dimensions, *Int. J. Numer. Methods in Engng.*, vol 38, pp. 3551-3569, 1995.
 - [11] K. NAKAHASHI AND D. SHAROV, Direct surface triangulation using the advancing-front method, *American Inst. of Aero. and Astro.*, vol 1686, pp. 442-451, 1995.
 - [12] V.N. PARTHASARATHY, C.M. GRIACHEN AND A.F. HATHAWAY, A comparison of tetrahedron quality measures., *Finite Element in Analysis and Design*, vol 15, pp. 255-261, 1993.
 - [13] D. RYPL AND P. KRYSL, Triangulation of 3-d surfaces, Tech. Report, Czech Tech. Univ., Prague, 1994.
 - [14] J. SAMAREH-ABOLHASSANI AND J.E. STEWART, Surface grid generation in parameter space, *J. Comput. Physics*, vol 113, pp. 112-121, 1994.
 - [15] X. SHENG AND B.E. HIRSCH, Triangulation of trimmed surfaces in parametric space, *Computer Aided Design*, vol 24, 8, pp. 437-444, 1992.



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine - Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes - IRISA, Campus universitaire de Beaulieu 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble Cedex 1 (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis - 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

