HAL
open science

Maillage de surfaces paramétriques. Partie III: Eléments quadrangulaires

Houman Borouchaki, Pascal Frey, Paul-Louis George

To cite this version:

Houman Borouchaki, Pascal Frey, Paul-Louis George. Maillage de surfaces paramétriques. Partie III: Eléments quadrangulaires. [Rapport de recherche] RR-2954, INRIA. 1996. inria-00073744

HAL Id: inria-00073744

https://inria.hal.science/inria-00073744

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Maillage de surfaces paramétriques. Partie III: Eléments quadrangulaires

Houman Borouchaki - Pascal J. Frey
Paul Louis George

N° 2954
Juillet 1996

THÈME 4

Rapport de recherche

Les rapports de recherche de l'INRIA
sont disponibles en format postscript sous
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

si vous n'avez pas d'accès ftp
la forme papier peut être commandée par mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(n'oubliez pas de mentionner votre adresse postale).

par courrier :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

INRIA research reports
are available in postscript format
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

if you haven't access by ftp
we recommend ordering them by e-mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(don't forget to mention your postal address).

by mail :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

Maillage de surfaces paramétriques. Partie III: Eléments quadrangulaires

Houman BOROUCHAKI, Pascal J. FREY
et Paul Louis GEORGE

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 2954 — 3 août 1996 — 27 pages

Résumé : Ce papier présente la partie III d'une étude concernant le maillage des surfaces paramétriques. Dans la partie I, on a décrit un algorithme de génération de maillage triangulaire surfacique gouverné par une carte de métriques. Dans cette partie, on introduit un schéma indirect de construction d'un maillage quadrangulaire à partir d'un maillage triangulaire. La méthode consiste à regrouper deux à deux les triangles pour former les quadrangles. L'appariement des triangles est dirigé par une mesure de qualité de quadrangle généralisée au cas des surfaces paramétriques. Une procédure d'optimisation du maillage résultant est proposée qui est basé sur le bougé des points. Quelques exemples de maillages quadrangulaires surfaciques montrent la pertinence de la méthode proposée.

Mots-clé : Maillages quadrangulaires, maillages surfaciques, maillages géométriques, Surfaces paramétriques, Approximation de surfaces.

(Abstract: pto)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

Parametric Surfaces Meshing. Part III: Quadrilateral Elements

Abstract: *This paper is the third part of a study devoted to meshing of parametric surfaces. In part I, we have described an algorithm suitable for the generation of parametric surface triangular meshes governed by a metric map. In this report, we introduce an indirect scheme for combining pairs of triangles into quadrilaterals with attention to quadrilateral quality extended to the parametric surfaces case. A mesh optimization procedure is then proposed based on a point smoothing process. Several quadrilateral surface mesh examples show the efficiency of the proposed method.*

Key-words: *Quadrilateral meshes, Surface meshes, Geometric meshes, Parametric surfaces, Surface approximation.*

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Maillage triangulaire unité **6**

3 Conversion en maillage quadrangulaire unité **7**
3.1 Définitions préliminaires 7
3.1.1 Produit scalaire 8
3.1.2 Mesure d'un angle 8
3.2 Qualité d'un quadrangle 8
3.3 Schéma de la méthode 9
3.3.1 Procédé d'appariement de triangles 9
3.3.2 Elimination des triangles isolés 11

4 Optimisation par bougé de points **11**

5 Exemples **13**

6 Conclusions **26**

1 Introduction

Dans la partie I de ce rapport [4], on a proposé un algorithme de génération de maillage triangulaire de surfaces paramétriques, gouverné par une carte de métriques. A la base, on montre qu'il suffit de construire un maillage triangulaire de l'espace des paramètres, gouverné par une carte de métriques déduite de la carte initialement spécifiée en prenant en compte des propriétés intrinsèques de la surface. Le maillage résultant est alors reporté sur la surface. Le problème est ainsi ramené à la construction d'un maillage triangulaire anisotrope en deux dimensions, pour laquelle un algorithme a été proposé dans [3].

Dans le prolongement naturel de cette étude, on s'intéresse maintenant au problème de construction de maillage quadrangulaire de surfaces paramétriques. Comme précédemment, l'idée de base consiste à générer le maillage dans l'espace des paramètres, et de le reporter ensuite sur la surface, le problème étant ainsi ramené au cas d'un domaine de R^2. Avant de présenter la méthode, on rappelle quelques autres méthodes classiques.

Il existe principalement deux approches, directes et indirectes, pour la génération d'un maillage quadrangulaire d'un domaine quelconque de R^2 et sa généralisation au cas d'une surface paramétrique.

Approches directes. Parmi les approches directes, essentiellement deux méthodes ont été suggérées, qui sont basées sur

- la décomposition de domaine couplée avec une méthode algébrique de génération de quadrangles par sous-domaines [1, 12] et
- les techniques de pavages du domaine en quadrangles [2].

La première méthode est sensible à la décomposition du domaine et utilise le fait que les sous-domaines résultants sont quasi-convexes. Les algorithmes de décomposition de domaine requièrent généralement la connaissance ou locale ou globale du domaine. En particulier, dans ce dernier cas, le squelette du domaine définit celui-ci entièrement et permet de le décomposer fidèlement. La détermination du squelette pour un domaine de R^2 est plus ou moins résolue, mais reste un problème ouvert dans le cas des surfaces paramétriques.

La deuxième méthode consiste à générer le pavage de la frontière vers l'intérieur du domaine et à gérer les collisions quand deux fronts s'intersectent. Récemment Cass et al. [6] ont généralisé cette méthode au cas des surfaces paramétriques, en prenant en compte les plans tangents à la surface, ainsi que les rayons de courbures. Par nature, cette méthode est sensible à la discrétisation de la frontière du domaine ou de la surface.

Dans le cas où un champ constant de métriques isotrope est spécifié, ces deux méthodes sont plus ou moins équivalentes. En effet, en appliquant la deuxième méthode, le choc des fronts approche le squelette du domaine. Par contre, dans le cas où un champ quelconque est spécifié, la deuxième méthode peut eventuellement suivre le champ à la différence de la première. Une amélioration potentielle de la première méthode consiste à redéfinir le squelette par rapport au champ spécifié, ce qui revient à munir le domaine ou la surface d'une structure riemannienne. Il s'agit là d'un problème théoriquement difficile.

Approches indirectes. A partir d'un maillage triangulaire du domaine ou de la surface, ce type d'approche consiste à générer des quadrangles, en regroupant deux à deux les triangles [7, 8, 9, 10, 11, 13] et donne lieu à deux classes de méthodes.

Dans la première, le regroupement des triangles, dirigé par un critère sur la qualité des quandrangles du domaine ou de la surface, peut conduire à un maillage mixte, composé de quadrangles et de triangles.

Dans la deuxième, le maillage résultant comprend uniquement des quadrangles, dans la mesure du possible (par exemple pour le cas d'un domaine dont la discrétisation de la frontière comprend un nombre pair de sommets). Cette méthode comprend éventuellement l'ajout de sommets au maillage initial. En effet, dans ce cas, le regroupement se fait à partir de la frontière en progressant vers l'intérieur du domaine, en s'assurant qu'à chaque intersection de fronts, les fronts résultants possédent un nombre pair de sommets. Cette approche demande une classification topologique des cas relatifs aux chocs de fronts.

Dans ce rapport, on propose une méthode basée sur une approche indirecte, appartenant à la première catégorie, qui généralise le procédé d'appariement des triangles au cas où un champ de métriques est spécifié. Ainsi d'une manière

naturelle ([4, 5]), on peut générer le maillage quadrangulaire d'une surface paramétrique via son domaine des paramètres. Par ailleurs, on introduit une nouvelle procédure d'optimisation du maillage résultant basée sur le bougé de points.

Dans la section 2, on rappelle la notion de maillage triangulaire unité d'un domaine par rapport à un champ de métriques. Section 3, après avoir introduit la notion de qualité d'un quadrangle par rapport à une métrique, on décrit l'algorithme de regroupement des triangles, tandis que la procédure d'optimisation fait l'objet de la section 4. En section 5, on montre quelques exemples de maillage quadrangulaires d'une surface. Enfin dans la dernière section, on conclut sur quelques problèmes ouverts qui font suite à ce travail.

2 Maillage triangulaire unité

Soit Ω un domaine de R^2, muni d'une structure riemannienne. Un *maillage unité* de Ω est un maillage dont les arêtes ont une longueur unité via cette structure. En d'autres termes, la structure riemannienne permet de gouverner le maillage de Ω. En pratique, elle est définie par interpolation, à partir d'un champ discret de métriques associé aux sommets d'un maillage donné de Ω (appelé maillage de fond). La métrique en un sommet P du maillage de fond est définie par une matrice symétrique définie positive d'ordre deux, désignée par $\mathcal{M}_2(P)$ et donnée par

$$\mathcal{M}_2(P) = \begin{pmatrix} a(P) & b(P) \\ b(P) & c(P) \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec $a(P) > 0$ et $a(P)c(P) - b^2(P) > 0$. Le but de la construction est de générer un maillage (unité par rapport au champ de métrique $\mathcal{M}_2$) dont chaque arête $\overrightarrow{PX}$ issue d'un sommet P, doit (au mieux) satisfaire la relation (figure 1)

$${}^t\overrightarrow{PX}\mathcal{M}_2(P)\overrightarrow{PX} = 1\,. \tag{2}$$

Un algorithme a été proposé dans [3] pour construire le maillage unité du domaine Ω muni d'une structure riemannienne.

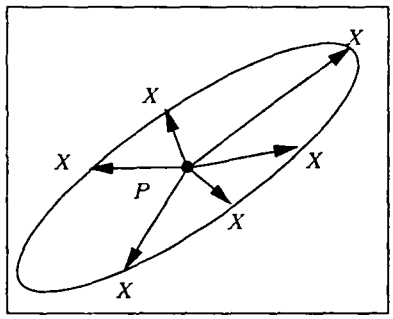

FIG. 1 - *Cercle unité via une métrique.*

3 Conversion en maillage quadrangulaire unité

L'idée principale consiste à apparier les triangles sous contrôle de qualité pour construire les quadrangles. Evidemment, cette stratégie bien connue peut ne pas conduire à un maillage composé uniquement de quadrangles, mais à un maillage mixte (triangles et quadrangles). La méthode proposée généralise la procédure d'appariement des triangles au cas d'un domaine muni d'une structure riemannienne, et tend à créer des quadrangles de qualité optimale via la structure spécifiée. Un second objectif peut également être visé pour minimiser le nombre de triangles *isolés*.

Dans ce but, on introduit quelques définitions préliminaires avant de définir la qualité des quadrangles et on propose un algorithme de maillage en quadrangles respectant les objectifs fixés.

3.1 Définitions préliminaires

Avant de définir la qualité "généralisée" d'un quadrangle, on rappelle les notions de produit scalaire et de mesure d'angles dans un espace euclidien muni d'une métrique quelconque.

3.1.1 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs donnés $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans l'espace euclidien muni d'une métrique $\mathcal{M}_2(X)$ est défini par

$$\left[\langle \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \rangle\right]_{\mathcal{M}_2(X)} = {}^t\overrightarrow{u}\mathcal{M}_2(X)\overrightarrow{v}\,, \tag{3}$$

et la norme d'un vecteur $\overrightarrow{w}$ par

$$\left[\|\overrightarrow{w}\|\right]_{\mathcal{M}_2(X)} = \sqrt{{}^t\overrightarrow{w}\mathcal{M}_2(X)\overrightarrow{w}}\,. \tag{4}$$

3.1.2 Mesure d'un angle

Soient ABC trois points vérifiant $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} > 0$, où $\times$ représente le produit vectoriel dans la métrique euclidienne usuelle. La mesure de l'angle en radians entre les deux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$, dans la métrique $\mathcal{M}_2(X)$, est donnée par

$$[\theta_B]_{\mathcal{M}_2(X)} = \left[(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})\right]_{\mathcal{M}_2(X)} = \arccos\left(\frac{[\langle \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} \rangle]_{\mathcal{M}_2(X)}}{\left[\|\overrightarrow{BC}\|\right]_{\mathcal{M}_2(X)}\left[\|\overrightarrow{BA}\|\right]_{\mathcal{M}_2(X)}}\right)\,. \tag{5}$$

Remarque. Dans le cas où $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} < 0$ alors l'angle est donné par

$$[\theta_B]_{\mathcal{M}_2(X)} = 2\pi - \left[(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})\right]_{\mathcal{M}_2(X)}\,. \tag{6}$$

3.2 Qualité d'un quadrangle

Soit $\mathcal{Q} = [ABCD]$ un quadrangle où A, B, C, D sont donnés dans le sens direct. La qualité de $\mathcal{Q}$ peut être définie à partir de la mesure de la qualité de ses angles dans $[0, 2\pi]$. Cette dernière est optimale pour un angle de $\frac{\pi}{2}$ mesuré en radians et diminue à mesure que l'écart avec cette valeur augmente. Par ailleurs, la qulité de l'angle est nulle dans $[\pi, 2\pi]$. En normalisant à 1 la valeur optimale et en considérant par exemple une variation linéaire pour la qualité, on obtient alors la fonction ϕ de qualité d'angle suivante, calculée dans une

métrique $\mathcal{M}_2(X)$ quelconque (figure 2)

$$\phi([\theta]_{\mathcal{M}_2(X)}) = \begin{cases} \dfrac{2[\theta]_{\mathcal{M}_2(X)}}{\pi} & \text{si } 0 \leq [\theta]_{\mathcal{M}_2(X)} < \frac{\pi}{2} \\ 2 - \dfrac{2[\theta]_{\mathcal{M}_2(X)}}{\pi} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq [\theta]_{\mathcal{M}_2(X)} < \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq [\theta]_{\mathcal{M}_2(X)} \end{cases} \tag{7}$$

où $[\theta]_{\mathcal{M}_2(X)}$, $0 \leq [\theta]_{\mathcal{M}_2(X)} \leq 2\pi$, représente la mesure (en radians) d'un angle dans la métrique $\mathcal{M}_2(X)$.

La qualité $q(\mathcal{Q})$ de $\mathcal{Q}$ est alors définie comme le minimum de la qualité de ses angles mesurée dans les métriques associées à ses sommets. On a donc

$$q(\mathcal{Q}) = \min_{(X,Y)\in\{A,B,C,D\}} \phi([\theta_Y]_{\mathcal{M}_2(X)}) \,. \tag{8}$$

Remarque. Le calcul de la qualité d'un quadrangle dans le cadre euclidien est remplacé par le calcul de 16 mesures de qualité équivalentes.

3.3 Schéma de la méthode

A partir des mesures de qualités introduites, on peut gouverner l'appariement des triangles en utilisant une approche classique que l'on va décrire. Des triangles peuvent éventuellement être présents dans le maillage résultant. Pour obtenir un maillage composé uniquement de quadrangle on va aussi rappeler un procédé standard d'élimination de ces triangles isolés.

3.3.1 Procédé d'appariement de triangles

Soit $\mathcal{T}$ le maillage triangulaire unité initial. Chaque couple de triangles adjacents de $\mathcal{T}$ est susceptible de former un quadrangle et est repéré par l'arête commune. Par suite, on associe à chaque arête une mesure simplifiée de la qualité du quadrangle correspondant (figure 3). Soient $[ABC]$ et $[ACD]$ deux triangles adjacents, partageant l'arête $a = [AC]$. En posant $\theta_A = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}})$ et

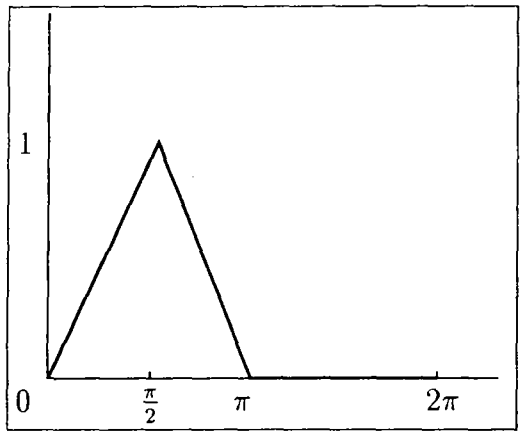

FIG. 2 - *Qualité angulaire.*

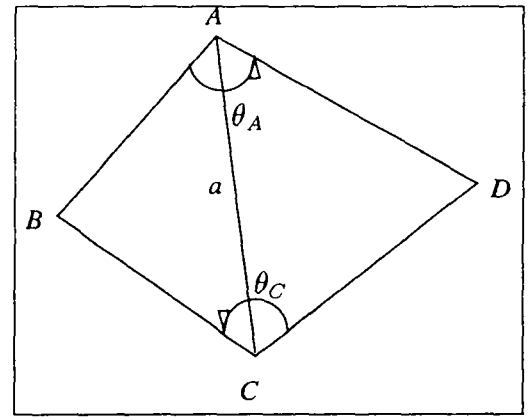

FIG. 3 - *Qualité d'une arête.*

$\theta_C = (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD}})$, la qualité de a peut être définie comme

$$q(a) = \min\Big([\theta_A]_{\mathcal{M}_2(A)}, [\theta_A]_{\mathcal{M}_2(C)}, [\theta_C]_{\mathcal{M}_2(A)}, [\theta_C]_{\mathcal{M}_2(C)}\Big) . \tag{9}$$

La liste des arêtes de $\mathcal{T}$ est triée par ordre décroissant de qualité, les quadrangles correspondants sont construits et leurs arêtes supprimées de cette liste. De cette façon, l'appariement des triangles est gouverné par la mesure de qualité, bien que le nombre de triangles isolés ne soit pas minimisé. Si l'on souhaite minimiser ce nombre, il est possible de gouverner l'appariement des triangles par adjacence, à partir des quadrangles déjà formés. Pour cela, il suffit de redéfinir la qualité d'une arête $q^*(a)$ comme

$$q^*(a) = q(a) - q([AB]) - q([BC]) - q([CD]) - q([DA]) . \tag{10}$$

Remarques. Avec cette nouvelle définition, la liste des arêtes doit être mise à jour après chaque création d'un quadrangle. Une manière efficace d'implémenter cette opération est d'utiliser un tas (*heap*) pour la liste des arêtes.

Par ailleurs, deux paramètres, $q_t(= 0.1)$ et $q_d(= -0.5)$, sont introduits pour contrôler la qualité du maillage

- si $q(a) < q_t$ alors l'arête a n'est pas prise en compte,

- si l'arête a est une arête frontière ou si elle appartient à un nouveau quadrangle, alors on impose $q^*(a) = q_d$.

Un effet pervers de ce dernier type de procédé est qu'il conduit à dégrader globalement la qualité du maillage résultant.

3.3.2 Elimination des triangles isolés

Chaque triangle isolé est subdivisé en trois quadrangles selon le principe habituel, en ajoutant trois sommets au milieu des arêtes et un sommet au barycentre de l'élément. Pour préserver la conformité du maillage, un procédé similaire est appliqué aux autres quadrangles (figure 4), qui conduit par propagation à raffiner uniformément le maillage.

Remarque. Le fait de raffiner les éléments présente un autre inconvénient, le maillage résultant n'est plus conforme à la carte de métriques spécifiée. Il est possible de retrouver la conformité en gouvernant la création du maillage triangulaire initial par la carte de métriques $\{\frac{\mathcal{M}_2(P)}{4}\}$, où $\{\mathcal{M}_2(P)\}$ représente le champ initial. Dans le cas isotrope, cela est équivalent à multiplier la taille spécifiée aux sommets par un facteur deux.

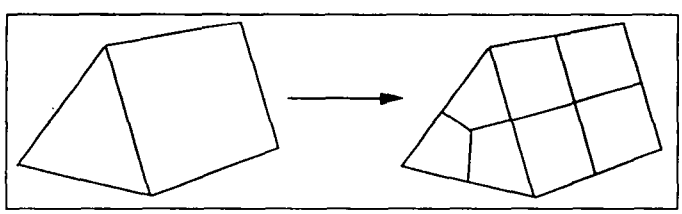

FIG. 4 - *Raffinement.*

4 Optimisation par bougé de points

Cette phase est rendue nécessaire d'une part parce que le maillage initial $\mathcal{T}$ est optimal au regard de la qualité des triangles et non de la qualité des

quadrangles et d'autre part à cause de l'introduction des sommets lors de l'élimination éventuelle des triangles. Habituellement cette étape consiste à bouger les sommets du maillage pour optimiser les longueurs de ses arêtes. Dans le cas d'un maillage triangulaire ce procédé conduit à un résultat satisfaisant. En revanche, il ne s'applique pas à des quadrangles. En effet, pour ce procédé, un losange est un motif optimal au regard de la longueur de ses arêtes. C'est pourquoi on propose une variante de cette technique qui consiste à prendre en compte les diagonales dans le cas des quadrangles.

Soient P un sommet du maillage et n (resp. m) le nombre de quadrangles $\{[PP_iQ_iP_{i+1}]\}$ (resp. triangles $\{[PP_iP_{i+1}]\}$) partageant P, où $[PP_i]$ représente une arête et $[PQ_i]$ une diagonale. On définit sur la droite support de chaque arête

- $[P_iP]$ le point P_i^* de telle sorte que la longueur du segment $[P_iP_i^*]$ soit égale à l'unité (de l'espace muni de la structure spécifiée),
- $[Q_iP]$ le point Q_i^* de telle sorte que la longueur du segment $[Q_iQ_i^*]$ soit égale à $\sqrt{2}$.

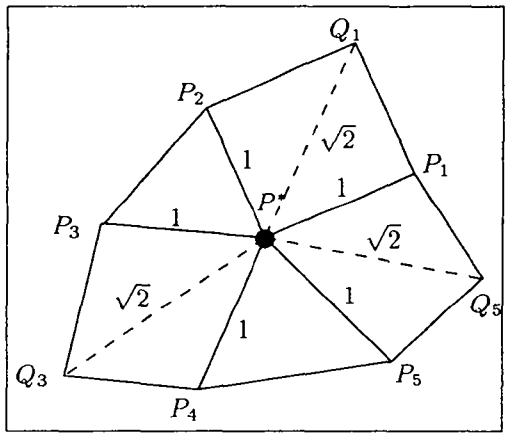

FIG. 5 - *Position optimale du point P.*

La procédure de bougé consiste alors à bouger le point P pas à pas vers le barycentre P^* des points P_i^* et Q_i^* si la qualité du plus mauvais élément

de l'ensemble des quadrangles $\{[PP_iQ_iP_{i+1}]\}$ et des triangles $\{[PP_iP_{i+1}]\}$ est améliorée (figure 5, dans le cas idéal).

Remarques. La longueur d'un segment $[PQ] = (P + t\overrightarrow{PQ})_{0\leq t\leq 1}$ de Ω est donnée par la relation

$$l(P,Q) = \int_0^1 \sqrt{{}^t\overrightarrow{PQ}\mathcal{M}(P + t\overrightarrow{PQ})\overrightarrow{PQ}}\, dt$$

où $\mathcal{M}(P + t\overrightarrow{PQ})$ est la métrique au point $P + t\overrightarrow{PQ}$ définie par interpolation sur le segment à partir des métriques associées aux extrémités. Pour évaluer cette intégrale, on peut appliquer une formule de Simpson.

5 Exemples

On considère une surface paramétrique discrète de la forme

$$(x, y, z = f(x, y)) \tag{11}$$

avec (x, y) les paramètres définis dans un rectangle. La grille support correspondante est régulière et constituée de (122×115) échantillons. Le maillage régulier de cette surface comprend 13794 quadrangles (figure 6, en bas). Ce même maillage en triangles (figure 6, en haut) comporte deux fois plus d'éléments.

Le maillage triangulaire gouverné d'une telle surface demande de connaître en chaque sommet de la grille les quantités $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, $f''_{x^2}(x,y)$, $f''_{y^2}(x,y)$ et $f''_{xy}(x,y)$ que l'on peut évaluer par une méthode de différences finies. On construit différents types de maillages de cette surface gouvernés par des champs de métriques. Pour chaque exemple de maillage, on montre respectivement

1. le maillage triangulaire gouverné par le champ spécifié,

2. le maillage en quadrangles obtenu par appariement des triangles (maillage mixte),

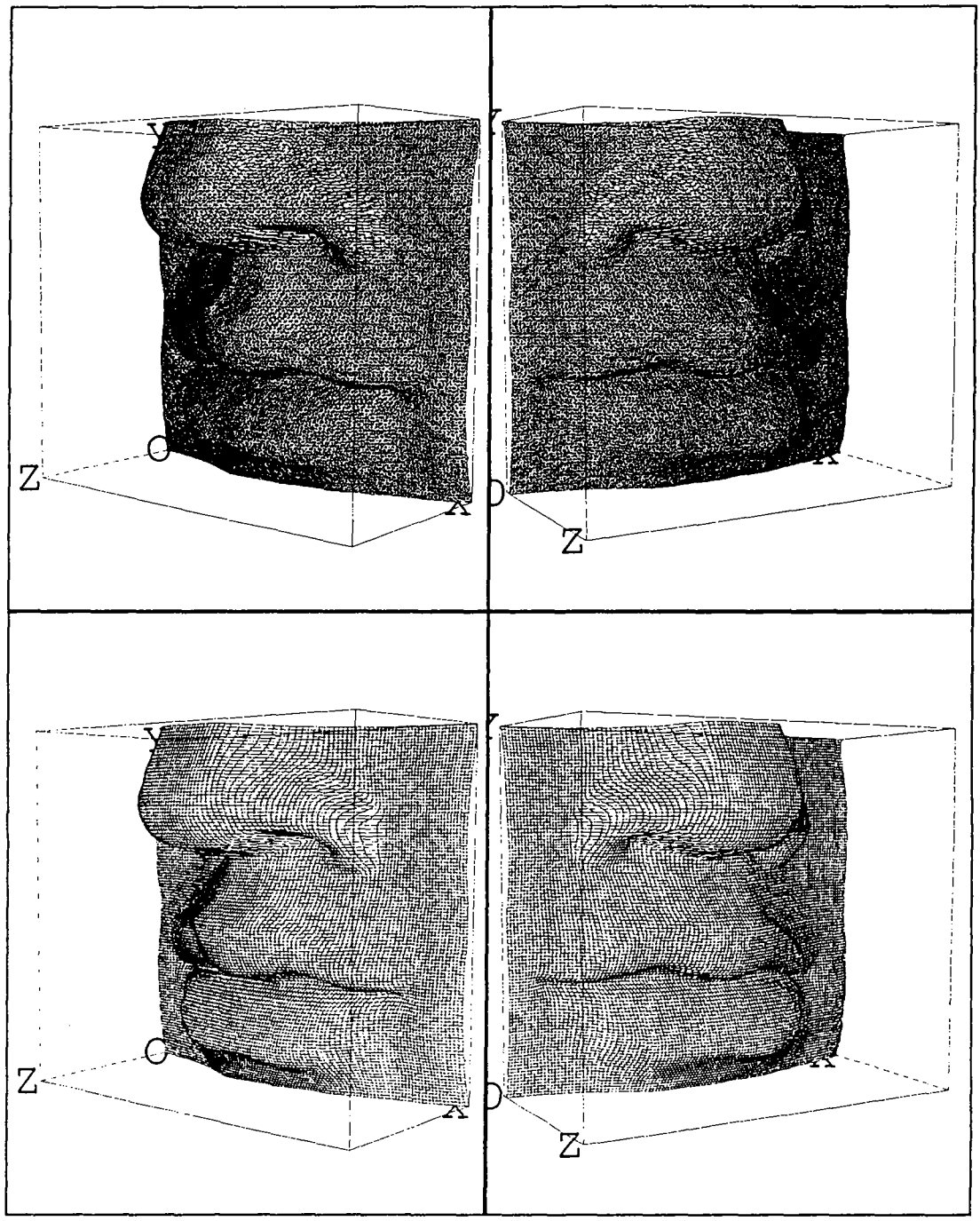

FIG. 6 - *Maillage régulier.*

3. le maillage en quadrangles après raffinement et

4. le maillage final en quadrangles après bougé de points,

dans l'espace des paramètres. De plus, on montre les maillages surfaciques souhaités (triangulaire et quadrangulaire) obtenus en reportant le premier et le dernier de ces maillages sur la surface. Les caractéristiques des différents maillages sont reportées dans le tableau 1, où nt, nq, t_{CPU}, q_{min} et q_{moy} désignent respectivement les nombres de triangles et de quadrangles, le temps CPU en secondes de génération des quadrangles (HP735/99Mhz) et les qualités minimale et moyenne du maillage final. Par ailleurs on indique également les pourcentages $\%t$ de triangles et $\%q$ de quadrangles après appariement. Chaque ligne de ce tableau correspond à un champ spécifique, dans l'ordre

1. champ uniforme h, $\mathcal{M}(h)$ (figures 7 et 8),

2. champ uniforme $\frac{h}{5}$, $\mathcal{M}(\frac{h}{5})$ (figures 9 et 10),

3. champ isotrope des rayons de courbure minimaux, $\mathcal{M}(\rho)$ (figures 11 et 12),

4. champ isotrope des rayons de courbure minimaux avec contrôle des variations de tailles, $\mathcal{M}(\overline{\rho})$ (figures 13 et 14),

5. champ anisotrope des rayons de courbure principaux, $\mathcal{M}(\rho_1, \rho_2)$ (figures 15 et 16).

Remarque. Le détail de définition de ces différents champs est donné dans les parties I et II de ce papier.

La qualité moyenne des maillages obtenus semble satisfaisante. Dans le cas du champs anisotrope des rayons de courbure principaux, à cause des discontinuités apparentes de métriques, le pourcentage des triangles isolés est plus important que dans les autre cas (limite de la méthode d'appariement). Les maillages géométriques (gouvernés par les rayons de courbure) isotrope et anisotrope approche fidélement la surface.

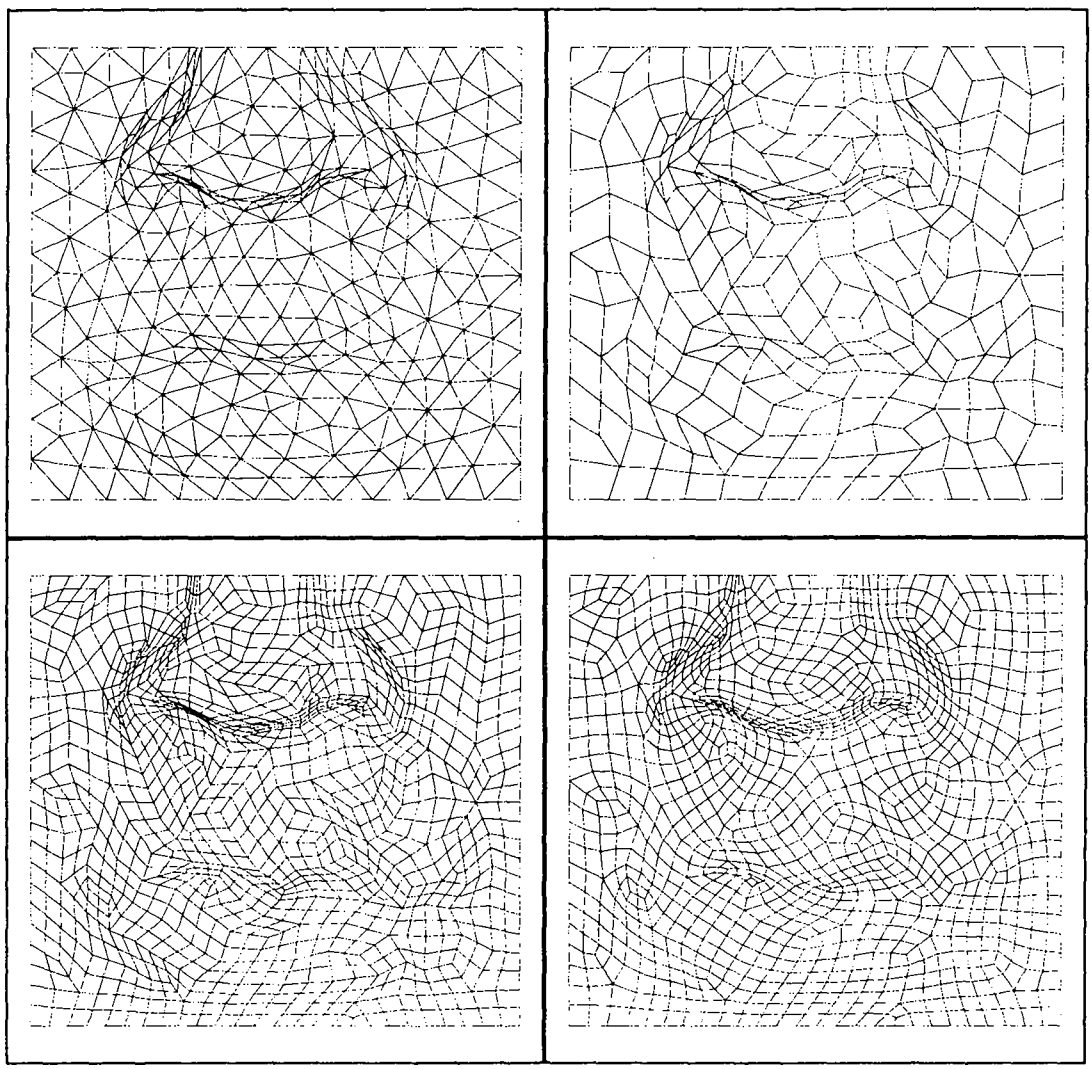

FIG. 7 - *Maillages uniformes h et $\frac{h}{2}$ dans l'espace des paramètres.*

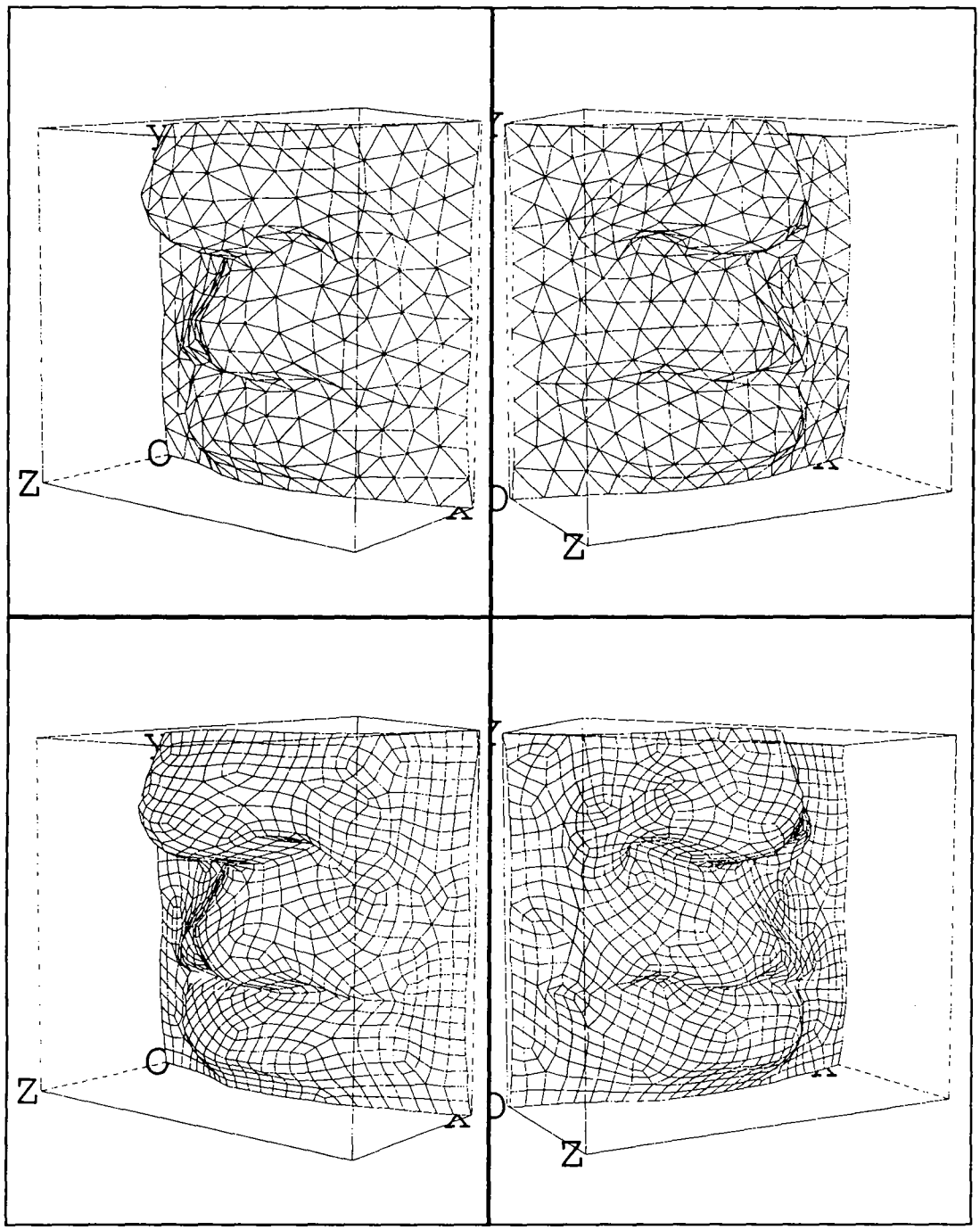

FIG. 8 - *Maillages uniformes h et $\frac{h}{2}$ de la surface.*

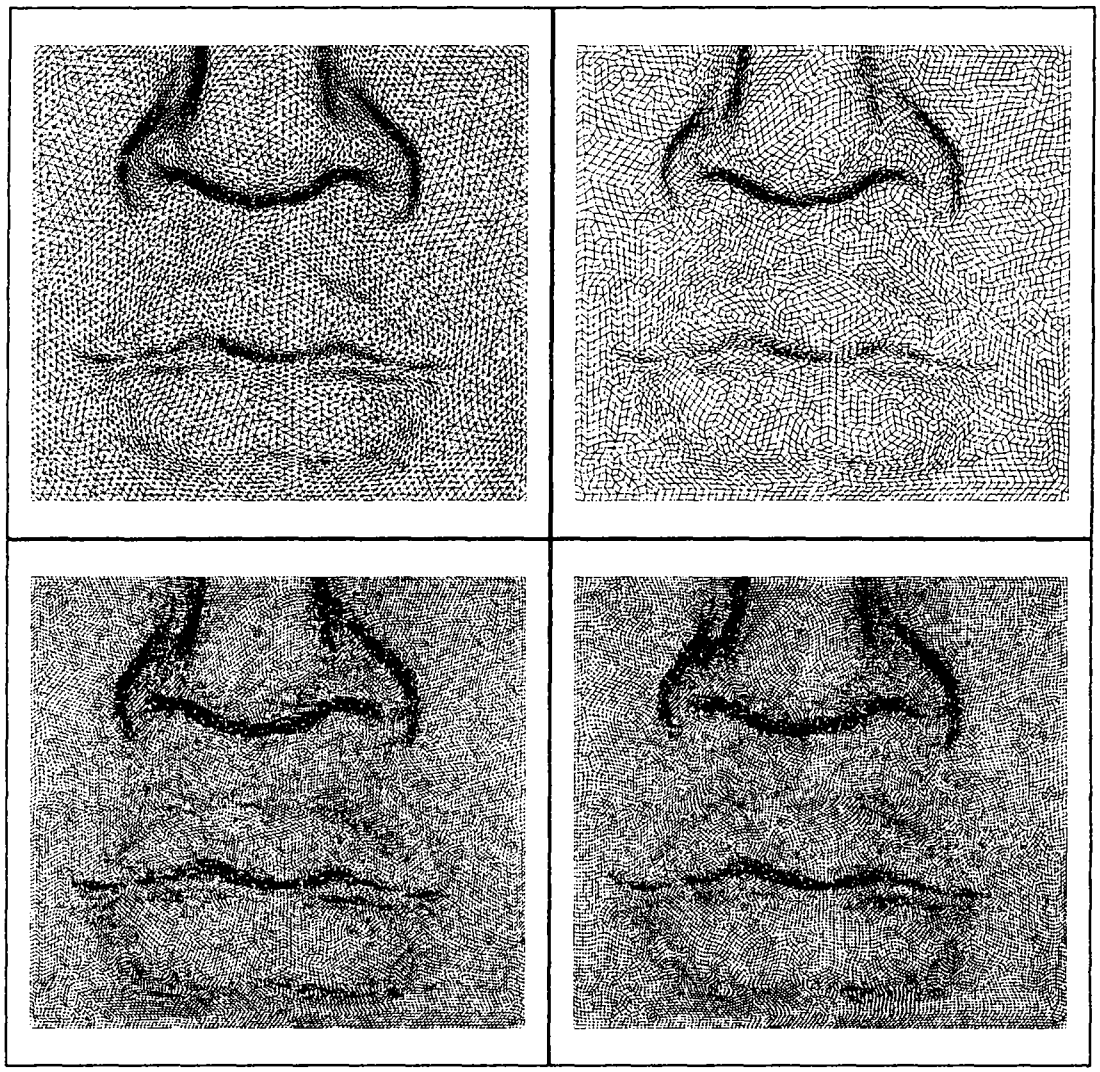

FIG. 9 - *Maillages uniformes* $\frac{h}{5}$ *et* $\frac{h}{10}$ *dans l'espace des paramètres.*

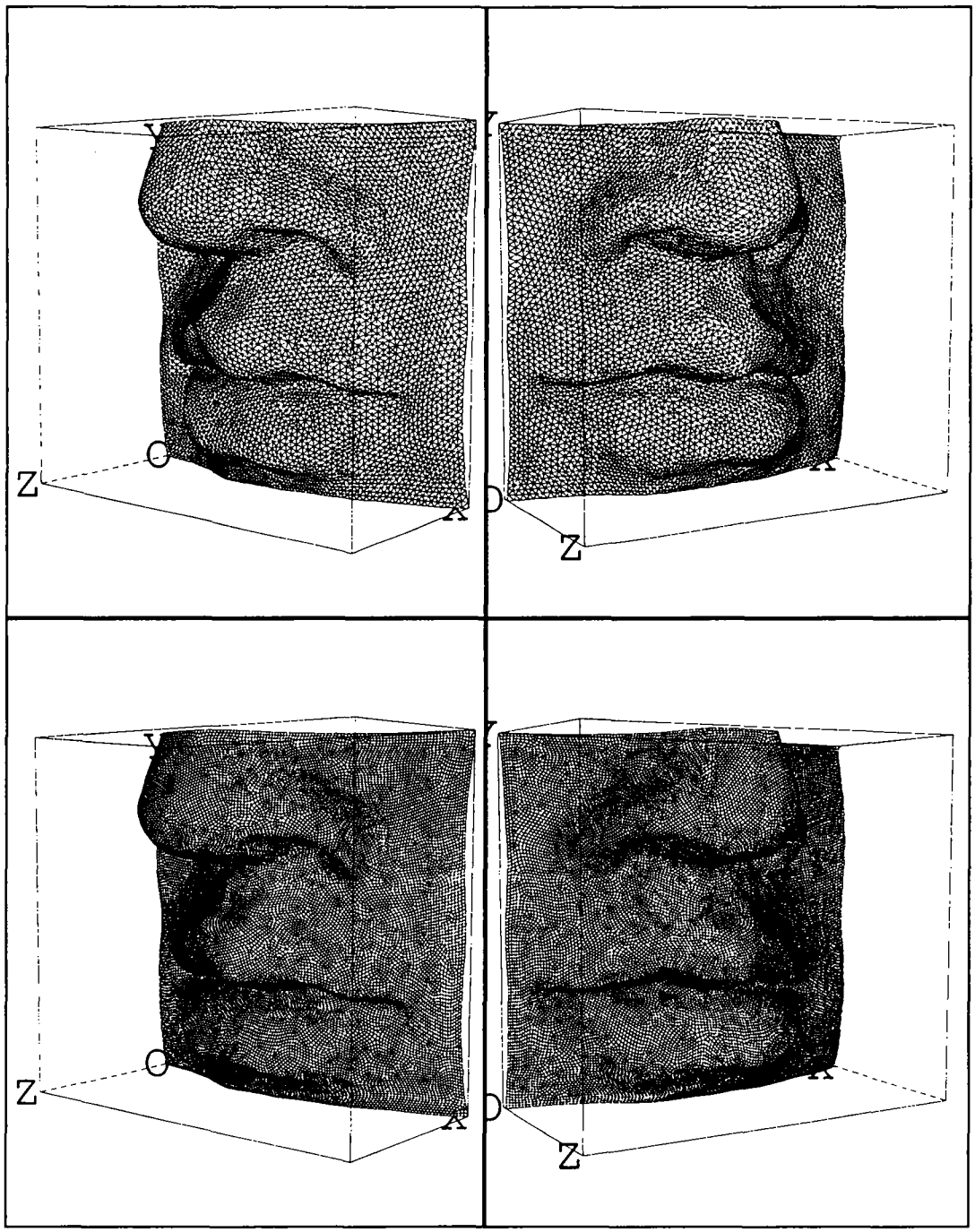

FIG. 10 - *Maillages uniformes* $\frac{h}{5}$ *et* $\frac{h}{10}$ *de la surface.*

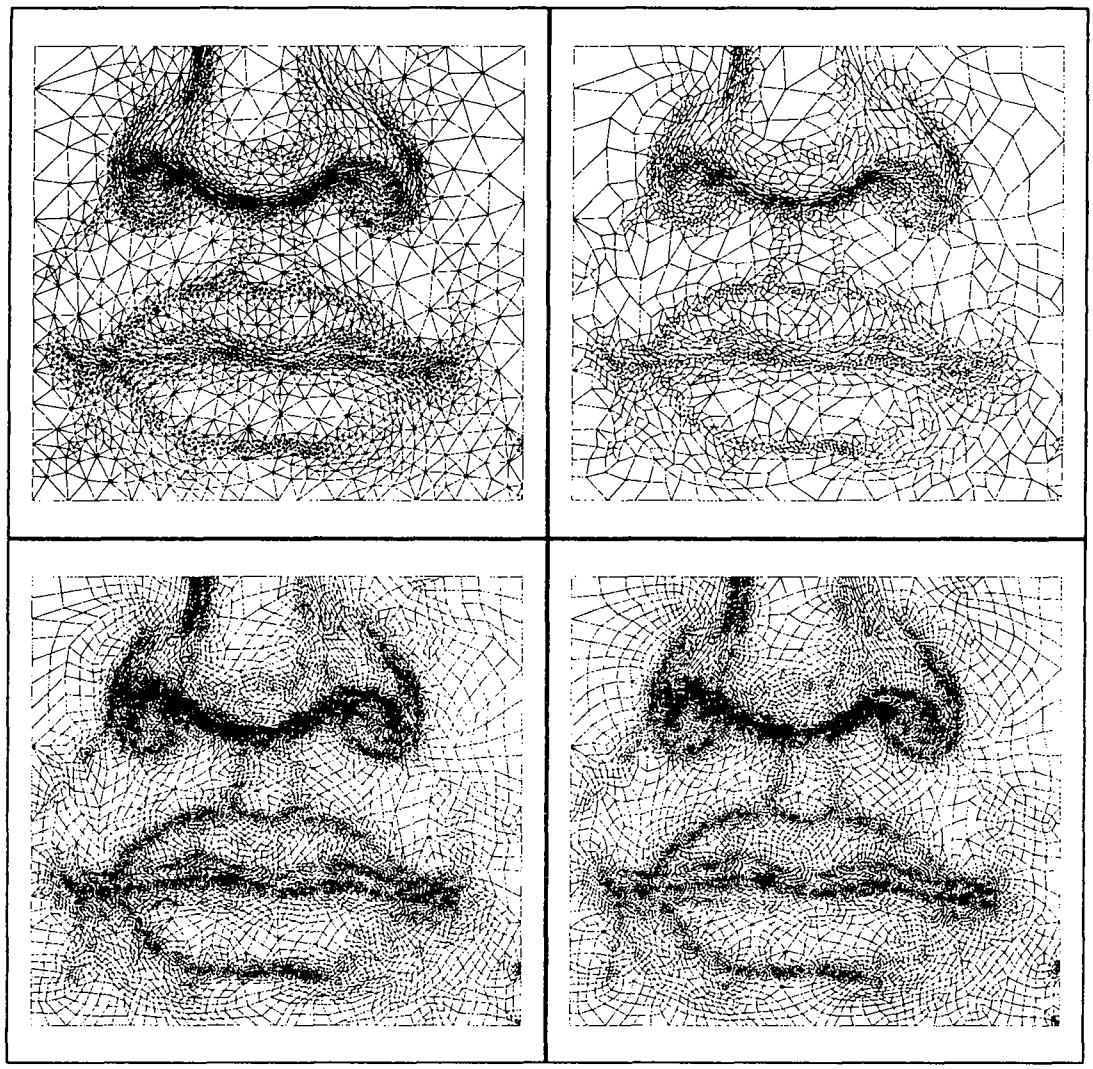

FIG. 11 - *Maillages isotropes des rayons de courbure minimaux dans l'espace des paramètres.*

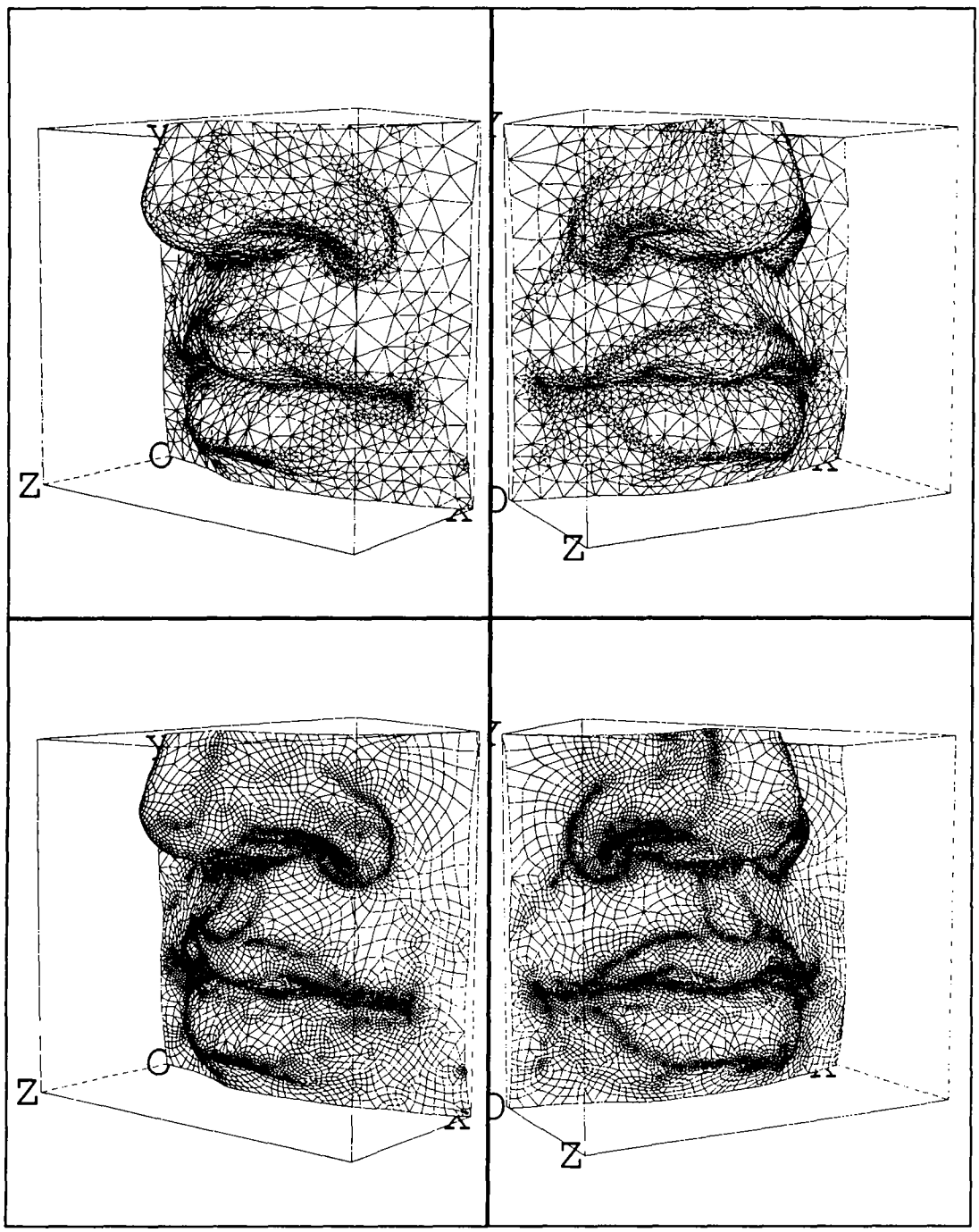

FIG. 12 - *Maillages isotropes des rayons de courbure minimaux de la surface.*

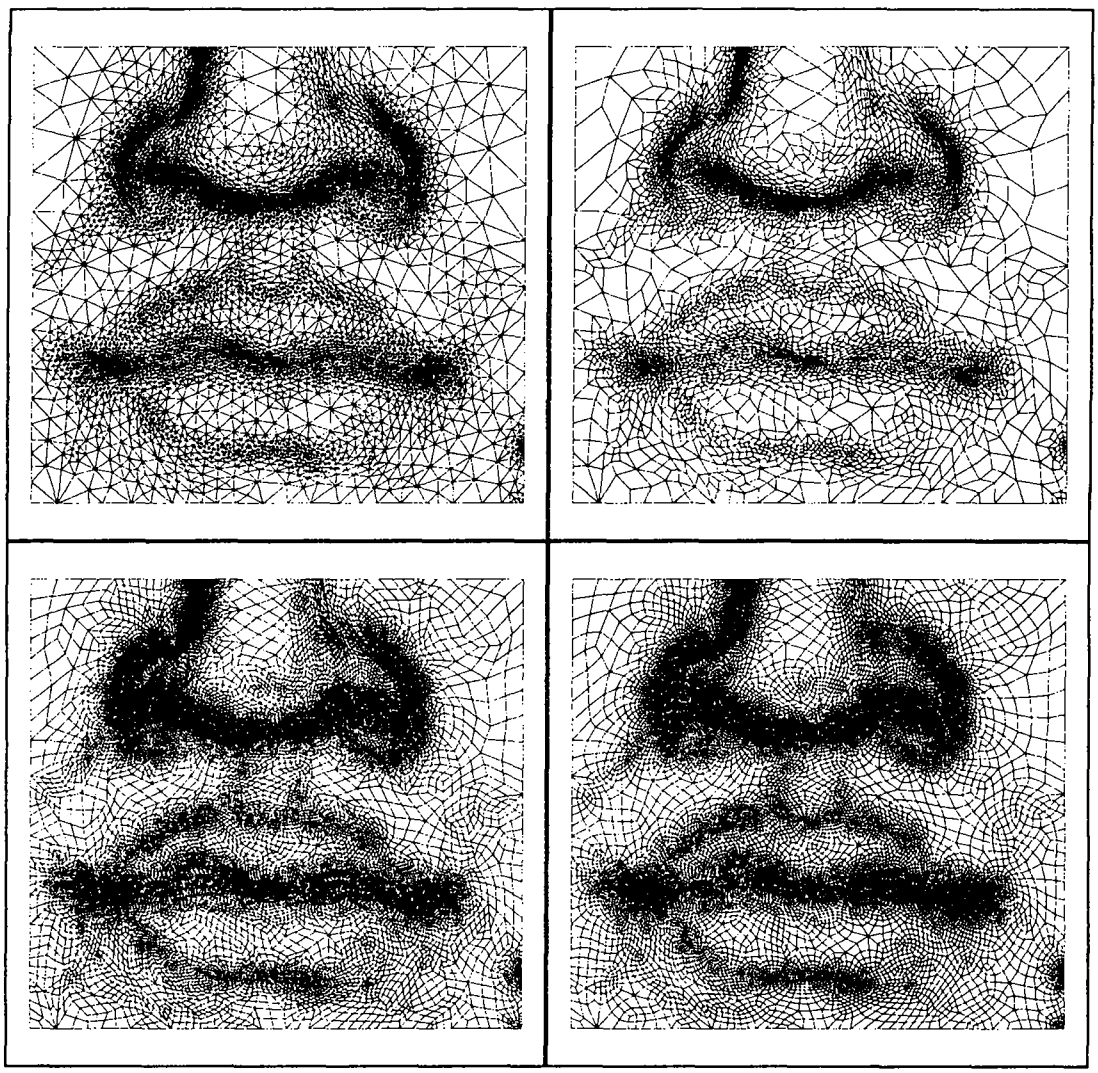

FIG. 13 - *Maillages isotropes des rayons de courbure minimaux avec contrôle des variations de tailles dans l'espace des paramètres.*

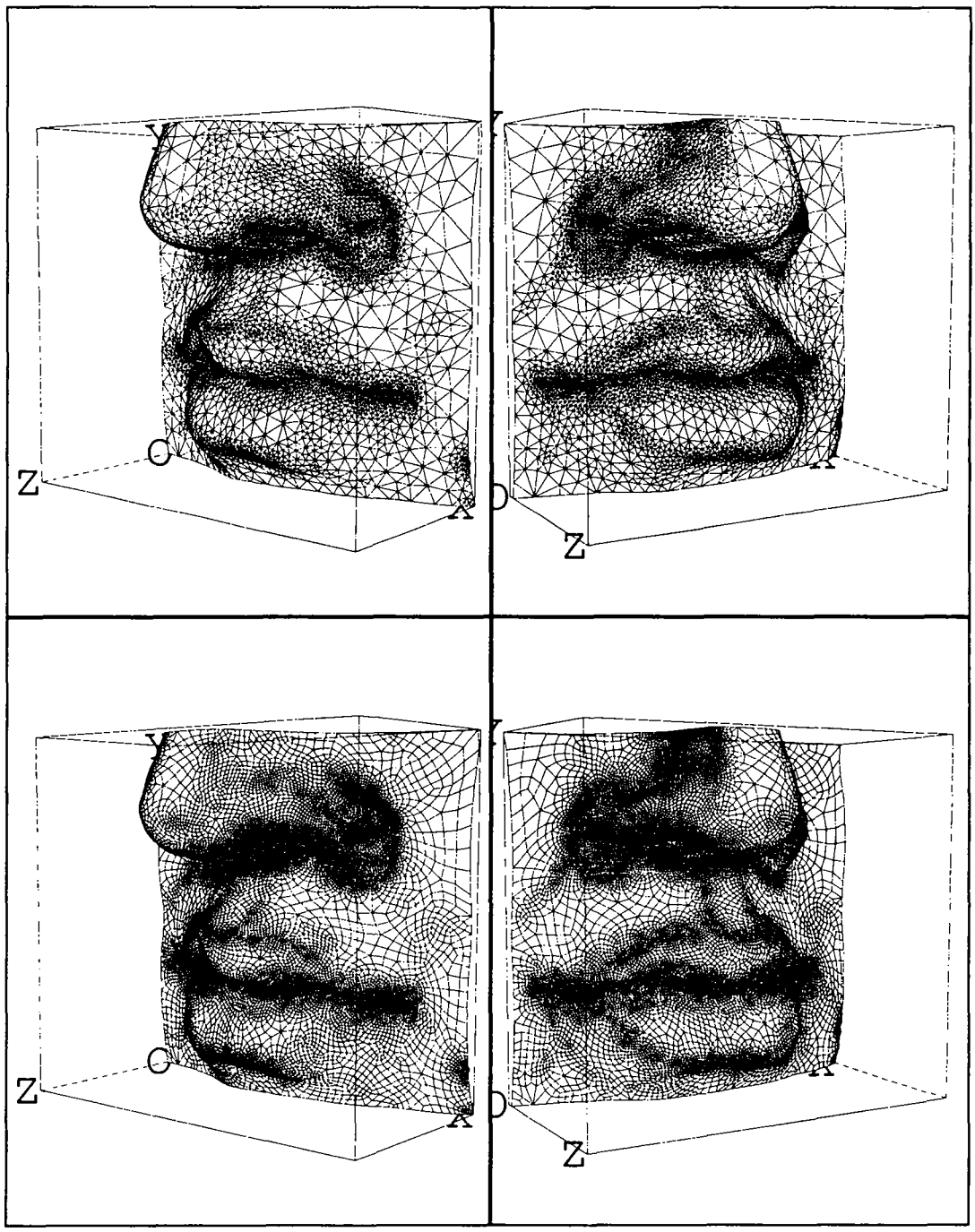

FIG. 14 - *Maillages isotropes des rayons de courbure minimaux avec contrôle des variations de tailles de la surface.*

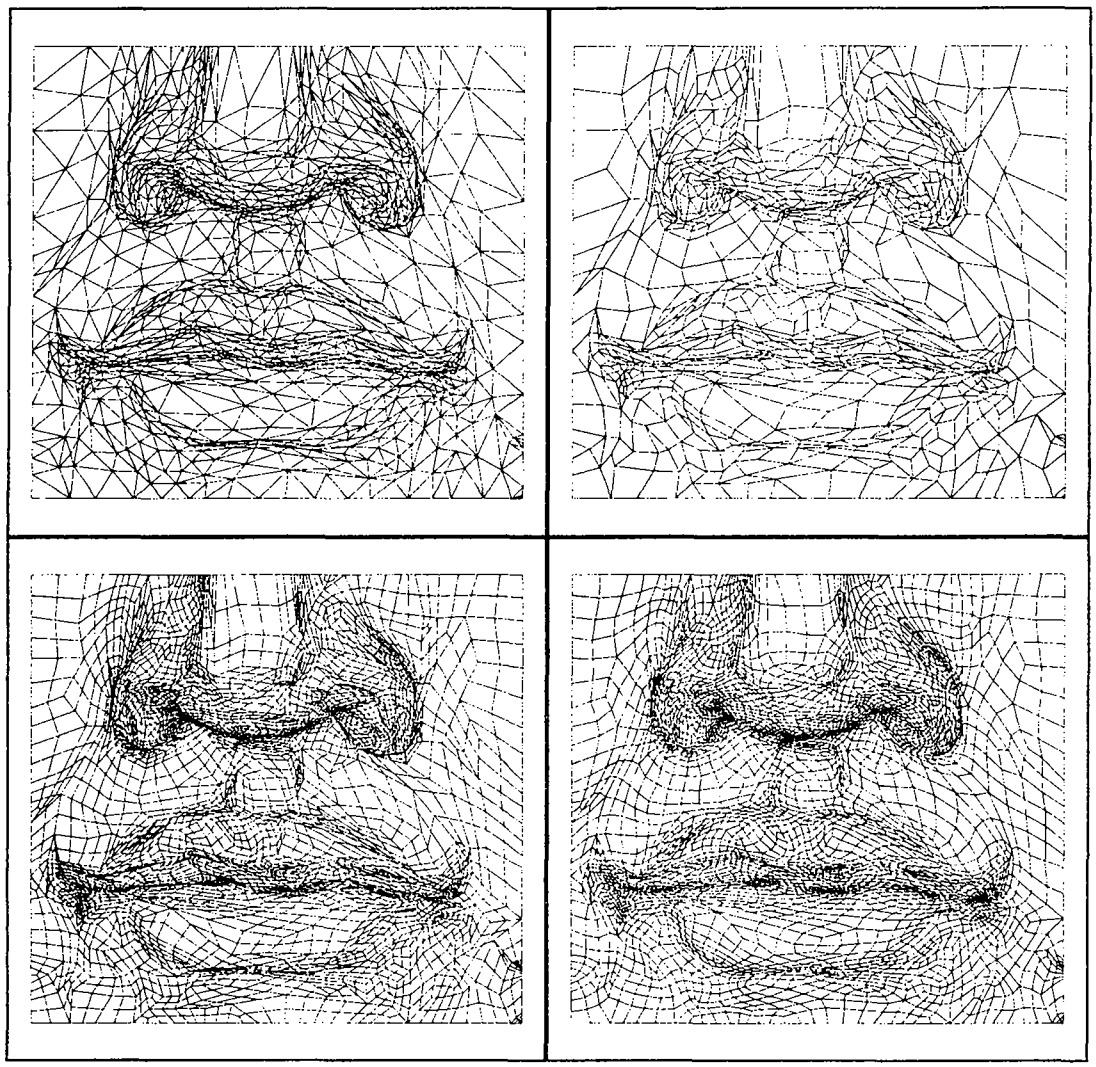

FIG. 15 - *Maillages anisotropes des rayons de courbure principaux dans l'espace des paramètres.*

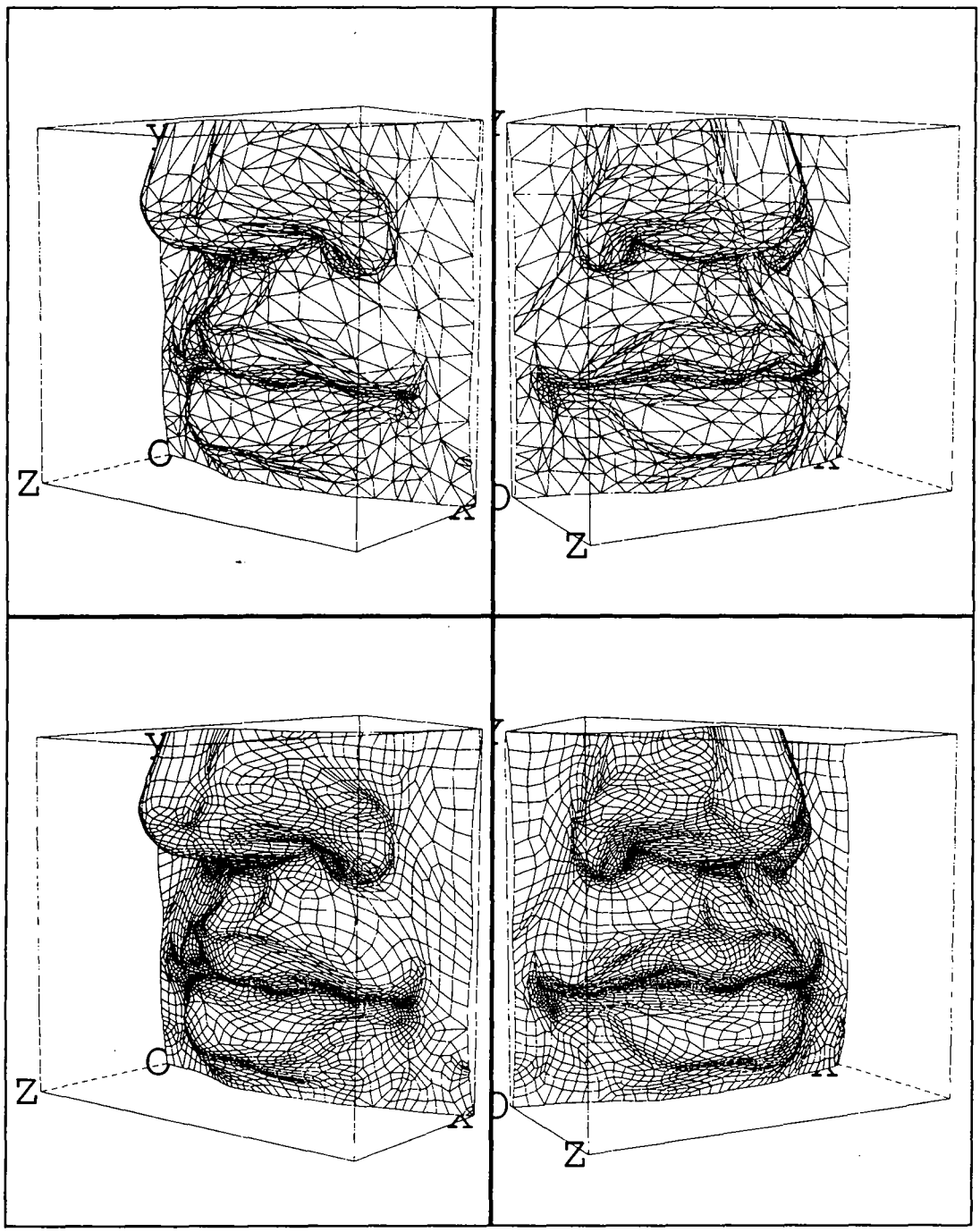

FIG. 16 - *Maillages anisotropes des rayons de courbure principaux de la surface* RR n° 2954

Champ	nt	nq	t_{CPU}	q_{min}	q_{moy}	$\%t$	$\%q$
$\mathcal{M}(h)$	618	1142	1.	0.13	0.62	7.56	92.44
$\mathcal{M}(\frac{h}{5})$	13324	26219	20.	0.13	0.72	1.66	98.34
$\mathcal{M}(\rho)$	6482	12999	11.	0.11	0.65	6.33	93.67
$\mathcal{M}(\overline{\rho})$	15770	31561	25.	0.16	0.69	3.46	96.54
$\mathcal{M}(\rho_1, \rho_2)$	2110	4175	4.	0.1	0.5	11.27	88.73

TAB. 1 - *Statistiques relatives aux maillages.*

6 Conclusions

Dans ce papier, on a généralisé la méthode d'appariement des triangles au cas où un champ de métriques est spécifié. Par conséquent, le problème du maillage en quadrangles des surfaces est traité de manière naturelle. En outre, on a introduit une procédure d'optimisation de maillage par bougé de points.

Ce travail peut s'étendre au cas des méthodes d'appariement pour lesquelles le but visé est d'obtenir un maillage en quadrangles uniquement. Une des difficultés à adresser est le traitement lié à l'ajout des points supplémentaires qui perturbe localement le champ spécifié.

Références

[1] C.G. ARMSTRONG, D.J. ROBINSON, R.M. MCKEAG, T.S. LI, S.J. BRIDGETT AND R.J. DONAGHY, Applications of the medial axis transform in analysis modelling, *Nafems, Proc. of the 5th Int. Conf. Reliability of FEM for Engng. Appl.*, pp. 415–426, Amsterdam, Netherlands, 10-12 May, 1995.

[2] T.D. BLACKER AND M.B. STEPHENSON, Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 32, pp. 811–847, 1991.

[3] H. BOROUCHAKI, P.L. GEORGE, F. HECHT, P. LAUG AND E. SALTEL, Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part I: Algorithms, *to appear in Finite Elements in Anal. and Design.*

[4] H.BOROUCHAKI ET P.L.GEORGE, Maillage de surfaces paramétriques. Partie I: Aspects théoriques, *Rapport de recherche INRIA*, RR-2928, 1996.

[5] H.BOROUCHAKI ET P.L.GEORGE, Maillage de surfaces paramétriques. Partie II: Exemples d'applications, *Rapport de recherche INRIA*, RR-2944, 1996.

[6] R.J.CASS, S.E.BENZLEY, R.J.MEYERS AND T.D.BLACKER, Generalized 3-D Paving: An Automated Quadrilateral Surface Mesh Generation Algorithm, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 39, pp. 1475–1489, 1996.

[7] B.P. JOHNSTON, J.M. SULLIVAN AND A. KWASNIK, Automatic conversion of triangular finite element meshes to quadrilateral elements, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 31, pp. 67–84, 1991.

[8] C.K. LEE AND S.H. LO, A new scheme for the generation of a graded quadrilateral mesh, *Comp. Struct.*, vol 52, pp. 847–857, 1994.

[9] R.W. LEWIS, Y. ZHENG AND A.S. USMANI, Aspects of adaptive mesh generation based on domain decomposition and Delaunay triangulation., *Finite Elements in Anal. and Design.*, vol 20, pp. 47–70, 1995.

[10] S.H. LO, Generating quadrilateral elements on plane and over curved surfaces, *Comp. Struct.*, vol 31, pp. 421–426, 1989.

[11] E. RANK, M. SCHWEINGRUBER AND M. SOMMER, Adaptive Mesh Generation., *Comm. Numer. Meth. in Eng.*, vol 9, pp. 121–129, 1993.

[12] J.A. TALBERT AND A.R. PARKINSON, Development of an automatic two-dimensional finite element mesh generator using quadrilateral elements and Bezier curve boundary definition, *Int. J. Numer. Meth. in Eng.*, vol 29, pp. 1551–1567, 1991.

[13] J.Z. ZHU, O.C. ZIENKIEWICZ, E. HINTON AND J. WU, A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation, *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol 32, pp. 849–866, 1991.

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine - Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes - IRISA, Campus universitaire de Beaulieu 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble Cedex 1 (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis - 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

RR - 2954