



HAL
open science

Structures en grands déplacements couplées à des fluides en mouvement

Patrick Le Tallec, Jean Mouro

► **To cite this version:**

Patrick Le Tallec, Jean Mouro. Structures en grands déplacements couplées à des fluides en mouvement. [Rapport de recherche] RR-2961, INRIA. 1996. inria-00073737

HAL Id: inria-00073737

<https://inria.hal.science/inria-00073737>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Structures en grands déplacements couplées à
des fluides en mouvement*

Patrick Le Tallec , Jean Mouro

N° 2961

Août 1996

_____ THÈME 4 _____



*R*apport
de recherche

Structures en grands déplacements couplées à des fluides en mouvement

Patrick Le Tallec , Jean Mouro

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet M3N

Rapport de recherche n° 2961 — Août 1996 — 44 pages

Résumé : Le calcul en configuration Eulérienne d'écoulements visqueux dans des structures fortement déformables (écoulements dans des tuyaux collabables, amortisseurs hydrauliques) pose des problèmes difficiles de compatibilité cinématique et d'actualisation de géométrie. Pour surmonter ces difficultés, on propose de traiter la structure et le fluide comme un milieu continu unique et d'en rapporter le mouvement à la configuration de calcul délimitée par la structure au repos. Le problème obtenu est ensuite séparé en une partie fluide et une partie solide par décomposition de l'espace des vitesses cinématiquement admissibles. Cette séparation conduit ainsi à une modélisation purement lagrangienne de la structure couplée à une formulation ALE du problème fluide. Cette stratégie a trois avantages qui sont développés dans l'article :

- elle permet d'introduire des schémas de discrétisation en temps et des algorithmes de couplage simples qui respectent la compatibilité cinématique à l'interface et qui ont les bonnes propriétés énergétiques ;
- elle autorise l'emploi d'éléments finis indépendants sur la structure et sur le domaine fluide ;
- elle permet d'utiliser directement les modèles récents de coques hyperélastiques en grands déplacements, et de garantir ainsi la cohérence mathématique et l'objectivité du modèle de structure choisi.

Cette méthodologie a été intégrée dans un code de calcul industriel et a été validée sur des problèmes industriels de calcul d'amortisseurs hydrauliques présentés en fin d'article.

Mots-clé : couplage fluide structure, formulation ALE, structure hyperélastique, grands déplacements, coques géométriquement exactes, schémas conservatifs.

(Abstract: pto)

Ce travail a été partiellement financé par PSA dans le cadre d'une convention CIFRE. Nous tenons à remercier A. Taklanti, M. Corona et B. Mercier de PSA ainsi que M. Carrive et M. Vidrascu de l'INRIA pour leur aide et leur participation.

Structures in Large Displacements Coupled to Fluids in Motion

Abstract: The calculation of viscous flows inside deformable structures faces major difficulties when enforcing the kinematic compatibility at the fluid structure interface and updating the geometry of the domain. This paper proposes to overcome these problems by considering the fluid and the structure as a unique continuous medium, to be studied in a fixed reference configuration. The resulting problem is then split into a fluid and a structural part through an additive decomposition of the space of kinematically admissible test functions. This approach treats the structure in a fully Lagrangian way and uses an associated Arbitrary Lagrangian Eulerian formulation for the fluid. Such a strategy has three advantages which are detailed in the present paper :

- it can be discretised in time by implicit, stable, energy conserving time integration schemes, and solved by simple, iterative uncoupled algorithms ;
- the fluid and the structural problems can be approximated by independent finite element spaces ;
- the most recent geometrically exact nonlinear shell models can be used for the structures.

The full strategy has been implemented into an industrial CFD code. Results obtained in the simulation of industrial hydraulic shock absorbers are presented at the end of the paper.

Key-words: fluid structure coupling, ALE formulation, hyperelastic structure, large displacements, geometrically exact shells, conservative schemes.

1 Introduction

De nombreux problèmes pratiques exigent l'utilisation simultanée de modèles physiques différents à l'intérieur du même domaine de calcul : des modèles cinétiques locaux doivent être utilisés dans les chocs ou dans les couches limites d'écoulements de gaz raréfiés [5, 22], des modèles de sous-maille ou de lois de paroi sont nécessaires pour calculer les écoulements turbulents autour d'obstacles rugueux, les équations de Navier-Stokes doivent être couplées à des modèles de structures non linéaires pour la résolution de problèmes hydroélastiques en grands déplacements.

Ce dernier type de problèmes apparait fréquemment en milieu industriel : modélisation du comportement dynamique d'amortisseurs hydrauliques, calcul d'écoulements biomécaniques dans des tuyaux souples, étude des phénomènes d'instabilité aéroélastique autour d'ailes d'avion en grands déplacements. L'introduction d'une modélisation numérique cohérente, objective et stable de ce type de situations pose un certain nombre de difficultés :

- écriture de conditions d'interface cohérentes aux niveaux continu et discret,
- développement d'algorithmes de couplage efficaces,
- actualisation de la géométrie des domaines fluide et solide,
- modélisation géométriquement exacte de structures en grands déplacements sans faire appel à des bases locales mobiles.

Ces problèmes multimodèles peuvent en fait être abordés de manière efficace par une stratégie de décomposition de domaine suggérée par A. Quarteroni et al [30], et qui s'appuie sur les étapes suivantes :

1. introduction d'un système unique d'Equations aux Dérivées Partielles régissant toutes les composantes du problème étudié. Suivant les applications, ce peut être une formulation ALE des équations de la Mécanique des Milieux Continus (interactions fluide structure), une formulation générale des équations de Navier-Stokes (turbulence multi-échelle), l'équation de Boltzmann de la cinétique des gaz, ou une équation d'advection diffusion (couplage hyperbolique parabolique) ;
2. décomposition multidomaines consistante de ce système d'EDP par décomposition d'espace. Les sous-domaines peuvent être construits a priori à partir de considérations géométriques ou physiques, ou peuvent être actualisés de manière adaptative durant le processus de calcul. Cette décomposition définit de manière automatique et cohérente le type de conditions aux limites à imposer aux interfaces. Pour un problème de couplage fluide structure, ces conditions d'interface dérivent automatiquement de l'écriture de la condition de continuité des vitesses à la surface du solide ;
3. introduction de stratégies d'approximation locales définies indépendamment sur chaque sous-domaine, et interfacées par des techniques de type mortier.

Le résultat de cette démarche est une formulation multimodèle et multidomaine cohérente du problème initial, de type Dirichlet-Neumann [25], dans laquelle les conditions de couplage sont réparties de manière consistante entre les sous-domaines voisins. La difficulté est ensuite de mettre au point une procédure de calcul efficace pour résoudre les équations algébriques couplées obtenues. Dans le cas d'un couplage entre une structure souple et une structure dure, on peut démontrer l'efficacité d'une stratégie de point fixe résolvant d'abord le problème mou avec des conditions aux limites de Dirichlet puis le problème dur avec des conditions aux limites de Neumann. Sur des situations plus générales, ce type d'algorithme doit être accéléré par des procédures de type gradient conjugué préconditionné ou extrapolation de Richardson.

Le but de cet article est de décrire et analyser l'application de cette stratégie aux problèmes de couplage fluide structure en grands déplacements et d'en décrire ses principaux avantages :

- introduction de schémas de discrétisation en temps et d'algorithmes de couplage simples qui respectent la compatibilité cinématique à l'interface et le principe de conservation de l'énergie ;
- emploi d'éléments finis indépendants sur la structure et sur le domaine fluide ;
- utilisation directe des modèles récents de coques hyperélastiques en grands déplacements, garantissant la cohérence mathématique et l'objectivité du modèle de structure choisi.

2 Cinématique et Equations de Bilan

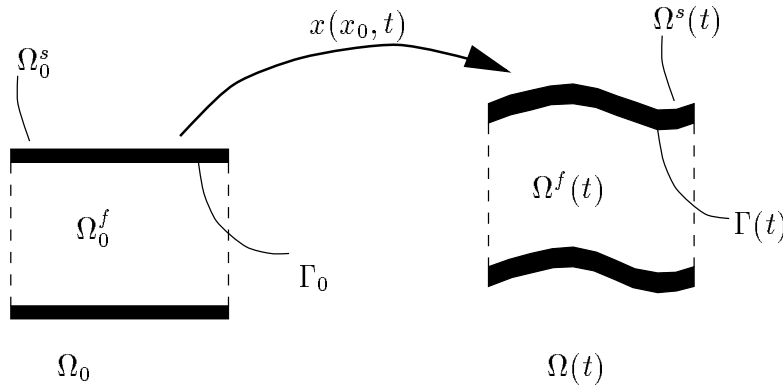


FIG. 1 - *Cinématique.*

Nous considérons ici un milieu continu, qui occupe un domaine $\Omega(t)$ dans sa configuration actuelle (mobile), et qui est constitué d'un fluide en mouvement sur la partie $\Omega^f(t)$ de $\Omega(t)$ et d'une structure déformable sur le complémentaire $\Omega^s(t)$ de $\Omega^f(t)$ dans $\Omega(t)$.

Le problème posé consiste à déterminer à chaque instant la forme et l'évolution de cette configuration $\Omega(t)$ ainsi que la vitesse $U := \frac{dx}{dt}$ du fluide et de la structure, à l'aide des équations de conservation de masse et de quantité de mouvement. Ecrites au sens faible sur la configuration actuelle, ces équations de conservation ont la forme classique

$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_x + \operatorname{div}_x(\rho U) \right) \hat{q} = 0, \forall \hat{q} : \Omega(t) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{Masse}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho U}{\partial t} \Big|_x + \operatorname{div}_x(\rho U \otimes U) \right) \cdot \hat{U} + \int_{\Omega(t)} \sigma : \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \\ = \int_{\Omega(t)} f \cdot \hat{U} + \int_{\partial \Omega(t)} g \cdot \hat{U}, \forall \hat{U} : \Omega(t) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\text{Mouvement}). \end{aligned} \quad (2)$$

A ces équations de bilan portant sur la masse volumique ρ , le champ de vitesse U et le champ de tenseur de contraintes de Cauchy σ du milieu étudié, il faut rajouter une condition cinématique sur la continuité des vitesses à l'interface $\Gamma(t)$ entre fluide et structure. Nous allons supposer ici que le fluide est visqueux et adhère parfaitement à la structure qu'il baigne, ce qui signifie que le champ de vitesses doit être continu à l'interface. Posant $U^s = U|_{\Omega^s}, U^f = U|_{\Omega^f}$, on impose donc la condition de continuité cinématique

$$\operatorname{Tr}(U^s)|_{\Gamma} = \operatorname{Tr}(U^f)|_{\Gamma}. \quad (3)$$

Remarque 1 Dans le cas d'un fluide parfait, cette condition est à remplacer par la condition de non interpénétration

$$\operatorname{Tr}(U^s \cdot n)|_{\Gamma} = \operatorname{Tr}(U^f \cdot n)|_{\Gamma}.$$

3 Transport en configuration Ω_0 fixe.

Du fait des grands déplacements de la structure, la configuration $\Omega(t)$ dépend du temps. Pour mesurer les déformations de la structure et en exprimer les lois de comportement, il est pratique de se ramener à une configuration de référence Ω_0 fixée une fois pour toutes en introduisant une carte continue

$$\begin{aligned} x & : \Omega_0 \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega(t), \\ (x_0, t) & \rightarrow x(x_0, t), \end{aligned}$$

qui associe à tout point x_0 de la configuration fixe Ω_0 sa position actuelle $x(x_0, t)$ en configuration $\Omega(t)$.

Le choix de la configuration Ω_0 et de la carte x peut être arbitraire. Néanmoins, afin de simplifier les calculs ultérieurs, nous allons supposer que la configuration $\Omega_0^s = x^{-1}(\Omega^s)$ est une configuration matérielle de la structure [19]. Autrement dit, sur la structure, $x(x_0, t)$ correspond à la position actuelle du point matériel qui se trouvait en x_0 à l'instant de

référence t_0 . Ce choix exprime qu'en tout point de la structure la vitesse de la configuration (ou vitesse de grille) $U_G := \frac{\partial x}{\partial t}|_{x_0}$ est égale à la vitesse de la structure

$$U(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} x(x_0, t) \right) \Big|_{x_0}. \quad (4)$$

Il est facile de transporter les équations de bilan sur la configuration fixe Ω_0 . De l'identité de Piola

$$\begin{aligned} \int_Q \operatorname{div}_X(A)q dX &= - \int_Q A \cdot \frac{\partial q}{\partial X} dX \\ &= - \int_{Q_0} A \cdot \frac{\partial q}{\partial X_0} \cdot \frac{\partial X_0}{\partial X} \left| \frac{dX}{dX_0} \right| dX_0 \\ &= - \int_{Q_0} \left(\left| \frac{dX}{dX_0} \right| A \cdot \frac{\partial X}{\partial X_0}^{-T} \right) \cdot \frac{\partial q}{\partial X_0} dX_0 \\ &= \int_{Q_0} \operatorname{div}_{X_0} \left(\left| \frac{dX}{dX_0} \right| A \cdot \frac{\partial X}{\partial X_0}^{-T} \right) q dX_0 \end{aligned}$$

appliquée pour le choix $X = (x, t)$, $X_0 = (x_0, t)$ ou $X = x$, $X_0 = x_0$, on déduit d'abord les identités de transport classiques, valables pour tout choix de fonction test \hat{q} ou \hat{U}

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_x \cdot \hat{q}(x_0) d\Omega &= \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial JA}{\partial t} \Big|_{x_0} - \operatorname{div}_0 \left(JA \otimes U_G \cdot F^{-T} \right) \right) \cdot \hat{q}(x_0) d\Omega_0, \\ \int_{\Omega} \sigma : \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} d\Omega &= \int_{\Omega_0} (J\sigma \cdot F^{-T}) : \frac{\partial \hat{U}}{\partial x_0} d\Omega_0, \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}_x(A \otimes U) \cdot \hat{q}(x_0) d\Omega &= \int_{\Omega_0} \operatorname{div}_0 \left(JA \otimes U \cdot F^{-T} \right) \cdot \hat{q}(x_0) d\Omega_0. \end{aligned}$$

On utilise ici les notations classiques

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial x}{\partial x_0}, \\ J &= \det F = \left| \frac{dx}{dx_0} \right| \\ \rho_0 &= J\rho. \end{aligned}$$

L'application de ces identités de transport aux lois de bilan permet de rapporter les lois de bilan sur la configuration fixe $\Omega_0(t)$ et donne [27]

$$\int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0(\rho_0(U - U_G) \cdot F^{-T}) \right) \hat{q} = 0, \forall \hat{q} \in Q, \text{ (Masse)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \rho_0 U}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_0(\rho_0 U \otimes (U - U_G) \cdot F^{-T}) \right) \cdot \hat{U} \\ & + \int_{\Omega_0} (J\sigma \cdot F^{-T}) : \frac{\partial \hat{U}}{\partial x_0} = \int_{\Omega(t)} f \cdot \hat{U} + \int_{\partial\Omega(t)} g \cdot \hat{U}, \quad (6) \\ & \forall \hat{U} \in V, \text{ (Mouvement)}. \end{aligned}$$

Sur Ω_0 , les espaces tests sont maintenant définis par

$$Q = \{\hat{q} : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}, \hat{q} \in L^2(\Omega_0)\},$$

$$V = \{\hat{U} : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \hat{U} \in H^1(\Omega_0)\}.$$

4 Décomposition Fluide Structure

4.1 Décomposition d'espace

Les équations de bilan de la section précédente doivent être complétées par des lois de comportement reliant contraintes et histoire des déformations. A ce niveau, il devient nécessaire de distinguer fluide et structure. Pour le faire de manière automatique, il suffit en fait de décomposer les espaces des fonctions tests en fonctions test "fluides" opérant sur la partie fluide du milieu et fonctions test "solides" opérant sur le complémentaire structure

$$V = V^s \oplus V^f, Q = Q^s \oplus Q^f.$$

Pour cela, on introduit un opérateur d'extension (trace inverse)

$$Tr^{-1} : V(\Gamma_0) \longrightarrow H^1(\Omega_0^f),$$

$$Tr \circ Tr^{-1}(\hat{U}) = \hat{U}, \forall \hat{U} \in V(\Gamma_0),$$

qui prolonge de manière continue dans le fluide tout champ de vitesses défini sur l'interface, et on définit les espaces fluides et solides respectivement par

$$V^f = \{\hat{U} \in H^1(\Omega_0, \mathbb{R}^3), \hat{U}|_{\Omega_0^s} = 0\},$$

$$Q^f = \{\hat{q} \in L^2(\Omega_0), \hat{q}|_{\Omega_0^s} = 0\},$$

$$V^s = \{\hat{U} \in H^1(\Omega_0, \mathbb{R}^3), \hat{U}|_{\Omega_0^f} = Tr^{-1}(\hat{U}|_{\Gamma_0})\},$$

$$Q^s = \{\hat{q} \in L^2(\Omega_0), \hat{q}|_{\Omega_0^f} = 0\}.$$

Dans cette construction, les fonctions tests "fluides" sont nulles sur l'interface. Par contre, les fonctions "solides" sont non nulles sur l'interface et se prolongent de manière continue dans le fluide. Une telle décomposition d'espace n'est pas unique. Un changement de décomposition d'espace revient en fait à partager différemment les conditions d'interface entre problème fluide et problème structure. Le choix effectué ici impose les conditions de continuité cinématiques sur le problème fluide (conditions de Dirichlet) et les conditions de continuité d'efforts sur le problème solide (conditions de Neumann).

4.2 Le Problème Fluide

Le problème fluide est automatiquement obtenu en restreignant les lois de bilan aux seules fonctions tests de Q^f et V^f . Comme ces fonctions sont nulles sur Ω_0^s , il reste

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^f} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} \Big|_{x_0} + \text{div}_0(\rho(U - V_G) \cdot F^{-T}) \right) \hat{q} &= 0, \forall \hat{q} : \Omega_0^f \longrightarrow R, \\ \int_{\Omega_0^f} \left(\frac{\partial \rho_0 U}{\partial t} \Big|_{x_0} + \text{div}_0(\rho_0 U \otimes (U - V_G)) \cdot F^{-T} \right) \cdot \hat{U} \\ + \int_{\Omega_0} (J\sigma \cdot F^{-T}) : \frac{\partial \hat{U}}{\partial x_0} &= \int_{\Omega_0^f} f \cdot \hat{U} + \int_{\partial\Omega_0^f - \Gamma_0} g \cdot \hat{U}, \forall \hat{U} \in V^f. \end{aligned}$$

Dans ces intégrales, il est plus simple de calculer les dérivations en temps sur la configuration fixe Ω_0 , et les termes de convection ou les lois de comportement sur la configuration actuelle $\Omega(t)$. Pour ce faire, il faut donc retransporter les termes de convection et de contraintes vers la configuration actuelle en utilisant les identités de transport de la section précédente. Après transport et élimination du tenseur des contraintes par la loi de comportement (on suppose que le fluide est visqueux Newtonien incompressible), on obtient

$$\int_{\Omega^f(t)} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial J \rho}{\partial t} \Big|_{x_0} + \text{div}_x(\rho(U - V_G)) \right) \hat{q} = 0, \forall \hat{q} : \Omega_0^f \longrightarrow IR, \text{ (Masse)} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^f(t)} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial J \rho U}{\partial t} \Big|_{x_0} + \text{div}_x(\rho U \otimes (U - U_G)) \right) \cdot \hat{U} \\ + \int_{\Omega^f(t)} (\mu(\nabla U + \nabla^t U) - pId) : \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} &= \int_{\Omega^f(t)} f \cdot \hat{U} + \int_{\partial\Omega(t)} g \cdot \hat{U}, \quad (8) \\ \forall \hat{U} \in V^f \text{ (Mouvement)}. \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette formulation l'écriture ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) des équations de Navier-Stokes, formulation classiquement utilisée pour la simulation numérique d'écoulements visqueux sur domaines mobiles. Ces équations permettent de déterminer complètement l'état du fluide si on y rajoute les conditions aux limites adéquates sur l'extérieur du domaine fluide $\partial\Omega^f(t) - \Gamma(t)$ et sur l'interface $\Gamma(t)$. Les conditions extérieures dépendent

de la situation physique envisagée. Les conditions d'interface sont liées au choix de l'espace des fonctions tests "fluides". Par construction, ces fonctions tests sont nulles sur l'interface, donc la vitesse du fluide sur l'interface doit être imposée en dehors des équations de bilan à l'aide de la condition de continuité cinématique (condition de Dirichlet pour le problème fluide)

$$\text{Tr}U_{|\Gamma}^f = \text{Tr}U_{|\Gamma}^s. \quad (9)$$

Remarque 2 La formulation ALE du problème fluide fait intervenir la vitesse de grille

$$U_G = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{x_0},$$

donc demande le calcul de la carte auxiliaire $x(x_0, t) : \Omega_0^f \rightarrow \Omega^f(t)$. Par construction, $x(x_0, t)$ doit correspondre à la position actuelle x^s du point matériel x_0 sur la partie structure.

Remarque 3 Après intégration par parties et hors conditions aux limites, le problème fluide s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{J} \frac{\partial J \rho}{\partial t} \Big|_{x_0} + \text{div}_x (\rho U \otimes (U - U_G) - \sigma) - f = 0 \quad \text{sur } \Omega^f(t),$$

les dérivées étant calculées au sens des distributions.

4.3 Le Problème Solide

Le problème solide est automatiquement obtenu en se restreignant aux fonctions tests de Q^s et V^s . Comme les fonctions de Q^s sont nulles sur Ω^f et que la configuration Ω_0^s est une configuration matérielle ($U = U_G$ sur Ω_0^s), il reste

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_0 = 0 \quad \text{sur } \Omega_0^s, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0^s} \rho_0 \dot{U} \cdot \hat{U} + \int_{\Omega_0^s} (J \sigma \cdot F^{-T}) : \frac{\partial \hat{U}}{\partial x_0} = \\ \int_{\Omega_0^s} f_0 \cdot \hat{U} + \int_{\partial \Omega_0^s - \Gamma_0} g_0 \cdot \hat{U} + L_{interface}(\hat{U}_{|\Gamma}), \quad \forall \hat{U} \in V^s. \end{aligned} \quad (11)$$

Ci-dessus, les **forces d'interface** $L_{interface}$ correspondent aux intégrales de la quantité de mouvement virtuelle sur la partie fluide qui, après transport, s'écrivent

$$L_{interface}(\hat{U}_{|\Gamma}) = \int_{\Omega^f(t)} f \cdot \text{Tr}^{-1}(\hat{U}_{|\Gamma}) + \int_{\partial \Omega^f(t) - \Gamma(t)} g \cdot \text{Tr}^{-1}(\hat{U}_{|\Gamma})$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega^f(t)} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial J \rho U}{\partial t} \Big|_{x_0} + \operatorname{div}_x (\rho U \otimes (U - V_G)) \right) \cdot \operatorname{Tr}^{-1}(\hat{U}|_\Gamma) \\
& - \int_{\Omega^f(t)} \sigma^f : \frac{\partial \operatorname{Tr}^{-1}(\hat{U}|_\Gamma)}{\partial x},
\end{aligned} \tag{12}$$

c'est-à-dire au résidu des équations fluides calculé sur les fonctions tests $\operatorname{Tr}^{-1}(\hat{U}|_\Gamma)$.

La formulation (11) correspond à une formulation du problème de structures en Lagrangien total. Par le choix des fonctions tests solides qui ne s'annulent pas sur l'interface, cette formulation intègre l'action $L_{interface}(\hat{U}|_\Gamma)$ du fluide sur la structure. Elle doit seulement être complétée par la prise en compte de la loi de comportement et des conditions aux limites imposées à la frontière extérieure de la structure.

Pour une structure hyperélastique où le premier tenseur de contraintes de Piola Kirchhoff est égal à la dérivée de la densité d'énergie élastique [19]

$$B(x_0) := J \sigma \cdot F^{-T}(x_0) = \frac{\partial}{\partial F} \psi(x_0, \frac{\partial x}{\partial x_0}),$$

cette formulation lagrangienne permet de définir la position de la structure dès que les forces d'interface $L_{interface}$ sont connues. Elle prend alors la forme abstraite classique

$$m^s(\ddot{x}^s, \hat{U}) + a^s(x^s, \hat{U}) = L_{interface}(\hat{U}), \forall \hat{U} \in V^s, \tag{13}$$

sous la notation

$$\begin{aligned}
\ddot{x}^s &= \dot{U}^s = \frac{\partial^2 x^s}{\partial t^2} \Big|_{x_0}, \\
m^s(\ddot{x}^s, \hat{U}) &= \int_{\Omega_0^s} \rho_0 \ddot{x}^s \cdot \hat{U}, \\
a^s(x^s, \hat{U}) &= \int_{\Omega_0^s} \frac{\partial}{\partial F} \psi(x_0, \frac{\partial x}{\partial x_0}) \cdot \frac{\partial \hat{U}}{\partial x_0}.
\end{aligned}$$

4.4 Le Problème Couplé Final

Comme toute fonction test se décompose par construction en la somme d'une fonction test solide et d'une fonction test fluide, les lois de conservation globales sont équivalentes au système formé par l'écriture simultanée de leur composante fluide (problème fluide sans condition d'interface) et de leur composante solide (problème solide). Le problème couplé global étant constitué de la donnée de la carte $x(x_0, t)$, de la condition cinématique d'interface et des équations de bilan globales, se réduit donc finalement au système à trois champs :

1. calculer le champ de vitesse U^f sur le fluide en résolvant le Problème Fluide (7)-(8) avec condition de Dirichlet (9) à l'interface;

2. calculer la position x^s de la structure en résolvant le problème solide (13);
3. construire une carte x de Ω_0 vers $\Omega(t)$ telle que

$$x|_{\Omega_0^s} = x^s.$$

Remarque 4 *Par intégration par parties, la puissance virtuelle des efforts d'interface peut encore s'écrire*

$$\begin{aligned} L_{interface}(\hat{U}|_{\Gamma}) = & \int_{\Omega^f(t)} \left[f - \frac{1}{J} \frac{\partial J \rho}{\partial t} \Big|_{x_0} - \operatorname{div}_x (\rho U \otimes (U - U_G) - \sigma) \right] \cdot \operatorname{Tr}^{-1}(\hat{U}|_{\Gamma}) \\ & + \int_{\partial\Omega^f(t) - \Gamma(t)} (g - n^f \cdot \sigma^f) \cdot \operatorname{Tr}^{-1}(\hat{U}|_{\Gamma}) - \int_{\Gamma(t)} n^f \cdot \sigma^f \cdot \hat{U}. \end{aligned}$$

Comme par construction U^f est solution du problème fluide, les deux premiers termes s'annulent et il reste finalement

$$L_{interface}(\hat{U}|_{\Gamma}) = - \int_{\Gamma(t)} n^f \cdot \sigma^f \cdot \hat{U} = \int_{\Gamma(t)} n^s \cdot \sigma^f \cdot \hat{U}.$$

On retrouve donc l'expression classique de la puissance des efforts de contraintes exercées par le fluide sur la structure. Par rapport à cette expression classique, le calcul des forces d'interface à partir des résidus (12) a l'avantage de pouvoir se calculer simplement même après discrétisation par éléments finis.

4.5 Approximation par Eléments Finis

La forme faible décomposée introduite dans les paragraphes précédents permet d'approcher très simplement le problème de couplage fluide structure par éléments finis. Pour ce faire, il suffit d'introduire trois espaces d'éléments finis sur la configuration fixe Ω_0

$$\begin{aligned} H_h^f &\subset H^1(\Omega_0^f), \\ Q_h^f &\subset L^2(\Omega_0^f), \\ H_h^s &\subset H^1(\Omega_0^s), \end{aligned}$$

d'introduire des opérateurs de trace discret (définis en chaque noeud élément fini ou en moyenne par des opérateurs de type mortiers)

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}_h^f &: H_h^f \rightarrow V(\Gamma_0), \\ \operatorname{Tr}_h^s &: H_h^s \rightarrow V(\Gamma_0), \end{aligned}$$

et de construire un inverse Tr^{-1} de Tr_h

$$\begin{aligned} Tr^{-1} : Tr_h^f(H_h^f) &\longrightarrow H_h^f, \\ Tr_h^f \circ Tr^{-1} v_h &= v_h, \forall v_h \in Tr_h^f(H_h^f). \end{aligned}$$

Avec ces nouveaux outils, on construit les espaces discrets

$$\begin{aligned} V_h &= \{v_h, v_h|_{\Omega_0^f} \in H_h^f, v_h|_{\Omega_0^s} \in H_h^s, Tr_h^f(v_h) = Tr_h^s(v_h) \text{ sur } \Gamma_0, \\ &\quad v_h \text{ vérifie les conditions cinématiques imposées sur } \partial\Omega_0\}, \\ V_h^f &= \{v_h, v_h|_{\Omega_0^f} \in H_h^f, v_h|_{\Omega_0^s} = 0, Tr_h^f(v_h) = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ &\quad v_h \text{ vérifie les conditions cinématiques imposées sur } \partial\Omega_0\}, \\ V_h^s &= \{v_h, v_h|_{\Omega_0^s} \in H_h^s, v_h|_{\Omega_0^f} = Tr^{-1} \circ Tr_h^s(v_h), \\ &\quad v_h \text{ vérifie les conditions cinématiques imposées sur } \partial\Omega_0\}. \end{aligned}$$

Le problème discret est alors simplement obtenu en remplaçant les espaces continus par ces espaces discrets dans les formulations variationnelles (7)-(8) et (11)-(12), et l'opérateur de trace par les traces discrètes Tr_h dans la condition de continuité cinématique (9).

5 Discrétisation en temps et stabilité

5.1 Schéma d'Euler implicite

Le problème de couplage fluide structure introduit dans les sections précédentes est un problème d'évolution en temps qu'il faut donc discrétiser avant intégration en temps. Pour des raisons de stabilité, on choisit de remplacer dans un premier temps toutes les dérivées en temps par le schéma Euler implicite

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^{n+1} \approx \frac{A^{n+1} - A^n}{\Delta t}.$$

L'avantage de cette stratégie est de respecter la stabilité des systèmes couplés. De manière plus précise, on a le résultat suivant, valable avant ou après discrétisation par éléments finis :

Théorème 1 *Pour un système isolé constitué d'une structure hyperélastique et d'un fluide visqueux, la perte d'énergie est égale*

- à l'énergie dissipée dans le fluide pour le problème continu en temps,
- à la somme de l'énergie dissipée dans le fluide et d'un petit terme d'ordre $+O(\Delta t)$ pour le problème discrétisé en temps. Ce terme additionnel est positif (dissipatif) dès que l'énergie hyperélastique ψ est localement convexe.

Preuve: On se limite à un milieu fermé ($U \cdot n|_{\Gamma_0} = 0$), au problème discrétisé en temps, et on note pour tout n

$$\gamma^n := \rho_0^n (U^n - U_G^n) \cdot (F^{-T})^n.$$

Pour chaque temps t^{n+1} , l'idée consiste à multiplier la forme locale conservative des équations de bilan par $\Delta t U^{n+1}$ et à intégrer sur Ω_0 . Après intégrations par parties et utilisation de la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega_0} \rho_0^{n+1} |U^{n+1}|^2 = \int_{\Omega_0} \rho_0^n U^n \cdot U^{n+1} + \Delta t \int_{\Omega_0} [U^{n+1} \otimes \gamma^{n+1}] : \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x_0} - \Delta t \int_{\Omega_0} J^{n+1} \sigma^{n+1} \cdot (F^{-T})^{n+1} : \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x_0}. \quad (14)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $f = \sqrt{\rho_0^n} U^n$ et $g = \sqrt{\rho_0^n} U^{n+1}$, on a

$$\int_{\Omega_0} \rho_0^n U^n \cdot U^{n+1} \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0^n |U^n|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0^n |U^{n+1}|^2.$$

Le dernier terme se simplifie en utilisant l'équation discrète de conservation de la masse :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0^n |U^{n+1}|^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0^{n+1} |U^{n+1}|^2 + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_0} |U^{n+1}|^2 \operatorname{div}_0 \gamma^{n+1}.$$

En reportant ces deux derniers résultats dans l'équation (14), on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} (\rho_0^{n+1} |U^{n+1}|^2 - \rho_0^n |U^n|^2) \\ & \leq \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial |U^{n+1}|^2}{\partial x_0} \cdot \gamma^{n+1} + |U^{n+1}|^2 \operatorname{div}_0 \gamma^{n+1} \right) \\ & \quad - \Delta t \int_{\Omega_0} J^{n+1} \sigma^{n+1} \cdot (F^{-T})^{n+1} : \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

En regroupant la première intégrale du second membre, et en utilisant la formule de Green et la condition aux limites homogène, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial |U^{n+1}|^2}{\partial x_0} \cdot \gamma^{n+1} + |U^{n+1}|^2 \operatorname{div}_0 \gamma^{n+1} \right) \\ & = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}_0 [|U^{n+1}|^2 \gamma^{n+1}] = \int_{\partial \Omega_0} |U^{n+1}|^2 \gamma^{n+1} \cdot n = 0. \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0^{n+1} |U^{n+1}|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0^n |U^n|^2 \leq -\Delta t \int_{\Omega_0} J^{n+1} \sigma^{n+1} \cdot (F^{-T})^{n+1} : \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x_0}. \quad (15)$$

Appelons C le second membre de cette inégalité et discernons sa partie solide C_1 et sa partie fluide C_2 . Sur Ω_0^s , on a

$$C_1 = -\Delta t \int_{\Omega_0^s} B^{n+1} \cdot \dot{F}^{n+1},$$

où le terme \dot{F}^{n+1} est discrétisé en écrivant

$$\dot{F}^{n+1} = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{x_s^{n+1} - x_s^n}{\Delta t} \right) = \frac{F^{n+1} - F^n}{\Delta t}.$$

A l'aide de la loi de comportement, on en déduit que

$$C_1 = - \int_{\Omega_0^s} B^{n+1} : [F^{n+1} - F^n] = - \int_{\Omega_0^s} \frac{\partial \psi}{\partial F^{n+1}} : [F^{n+1} - F^n].$$

Si on suppose que la fonction $\psi(x, F)$ est localement convexe, on a alors

$$C_1 \leq \int_{\Omega_0^s} \psi(F^n) - \int_{\Omega_0^s} \psi(F^{n+1}). \quad (16)$$

Pour le fluide, on transporte l'intégrale en configuration actuelle à t^{n+1} . En tenant compte de la condition d'incompressibilité, on a

$$\begin{aligned} C_2 &= -\Delta t \int_{\Omega^f(t^{n+1})} (-p^{n+1} \operatorname{div}_x U^{n+1} + 2\mu D^{n+1} : D^{n+1}) \\ &= -2\mu \Delta t \int_{\Omega^f(t^{n+1})} D^{n+1} : D^{n+1} \leq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

avec

$$D^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} + \left(\frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} \right)^T \right].$$

En sommant les relations (15), (16) et (17), on obtient le résultat :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0^{n+1} |U^{n+1}|^2 + \int_{\Omega_0^s} \psi(F^{n+1}) - \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0^n |U^n|^2 - \int_{\Omega_0^s} \psi(F^n) \\ &\leq -2\mu \Delta t \int_{\Omega^f(t^{n+1})} D^{n+1} : D^{n+1} \leq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Remarque 5 *Ce théorème exige d'écrire le principe de conservation de la masse du fluide sous forme conservative. Des instabilités sont possibles dans le cas de formulations non conservatives [27].*

5.2 Le schéma de point milieu

Les schémas de type Euler ne sont pas souvent utilisés en dynamique des structures car ils sont trop dissipatifs. Il est conseillé d'utiliser des schémas linéairement conservatifs

comme la famille des schémas de Newmark ou le schéma de point milieu qui garantissent la conservation de l'énergie mécanique en élasticité linéaire. Pour un tel choix, on pose

$$\begin{aligned} x_s^{n+1/2} &= 2x_s^n - x_s^{n-1/2}, \\ U_s^{n+1/2} &= 2U_s^n - U_s^{n-1/2}, \\ U_s^{n+1} &= \frac{x_s^{n+1} - x_s^{n+1/2}}{\Delta t/2} \\ \ddot{x}_s^{n+1} &= \left(\frac{x_s^{n+1} - x_s^{n+1/2}}{\Delta t/2} - U_s^{n+1/2} \right) \frac{2}{\Delta t} \end{aligned}$$

Le principe de ce schéma est d'utiliser un schéma d'Euler implicite entre les instants $t^{n+1/2}$ et t^{n+1} puis d'extrapoler le résultat en vitesse et en accélération entre t^{n+1} et $t^{n+3/2}$. La phase d'extrapolation corrige l'excès de dissipation généré par le schéma d'Euler. On peut alors montrer que, pour des problèmes linéaires, le schéma résultant est stable et précis au second ordre.

6 Résolution Algébrique

6.1 Algorithme de base

L'inconvénient des schémas implicites introduits dans la section précédente est de coupler algébriquement les problèmes fluide et structure. Il est cependant possible de séparer la résolution de ces problèmes grâce à l'introduction d'algorithmes de type point fixe relaxés. La procédure est la suivante :

1. deviner une approximation $X = \left(x_{|\Gamma}^s\right)^{n+1}$ de la position de l'interface par une prédiction explicite telle que

$$X = \left(x_{|\Gamma}^s\right)^n + \frac{3\Delta t}{2}(U_{|\Gamma}^s)^n - \frac{1\Delta t}{2}(U_{|\Gamma}^s)^{n-1} ;$$

2. en déduire la vitesse du fluide à l'interface par

$$Tr_h^f(U) = \frac{X - \left(x_{|\Gamma}^s\right)^n}{\Delta t} = U_G^{n+1}|_{\Gamma_0} ;$$

3. actualiser la configuration (grille) fluide $x(x_0, t^{n+1})$ sur Ω_0^f en respectant la condition de matérialité

$$x(x_0, t^{n+1})|_{\Gamma_0} = X ;$$

4. résoudre le problème fluide sur la configuration actualisée

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_0^f} \frac{J^{n+1} \rho^{n+1} - J^n \rho^n}{\Delta t} \hat{q} + \int_{\Omega^f(t)} \operatorname{div}_x (\rho^{n+1} (U^{n+1} - U_G^{n+1})) \hat{q} = 0, \\
& \forall \hat{q} : \Omega_0^f \longrightarrow \mathbb{R}, \\
& \int_{\Omega_0^f} \frac{J^{n+1} \rho^{n+1} U^{n+1} - J^n \rho^n U^n}{\Delta t} \cdot \hat{U} \\
& + \int_{\Omega^f(t)} \operatorname{div}_x (\rho^{n+1} U^{n+1} \otimes (U^{n+1} - U_G^{n+1})) \cdot \hat{U} \\
& + \int_{\Omega^f(t)} (\mu (\nabla U^{n+1} + \nabla^T U^{n+1}) - p^{n+1} Id) : \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \\
& = \int_{\Omega^f(t)} f \cdot \hat{U} + \int_{\partial \Omega^f(t) - \Gamma(t)} g \cdot \hat{U}, \\
& \forall \hat{U} \in V^f, U^{n+1} - Tr^{-1} \circ Tr_h^f(U) \in V^f;
\end{aligned}$$

5. calculer les forces interfaces par

$$\begin{aligned}
L_{interface}^{n+1}(\hat{U}) &= \int_{\Omega^f(t)} f \cdot Tr^{-1}(\hat{U}) + \int_{\partial \Omega^f(t) - \Gamma(t)} g \cdot Tr^{-1}(\hat{U}) \\
&- \int_{\Omega_0^f} \frac{J^{n+1} \rho^{n+1} U^{n+1} - J^n \rho^n U^n}{\Delta t} \cdot Tr^{-1}(\hat{U}) \\
&- \int_{\Omega^f(t)} \operatorname{div}_x (\rho^{n+1} U^{n+1} \otimes (U^{n+1} - U_G^{n+1})) \cdot Tr^{-1}(\hat{U}) \\
&- \int_{\Omega^f(t)} (\mu (\nabla U^{n+1} + \nabla^T U^{n+1}) - p^{n+1} Id) : \frac{\partial Tr^{-1}(\hat{U})}{\partial x};
\end{aligned}$$

6. résoudre le problème solide en x^s

$$m^s((x^s)^{\ddot{\cdot}})^{n+1}, \hat{U} + a^s((x^s)^{n+1}, \hat{U}) = L_{interface}^{n+1}(\hat{U}), \forall \hat{U} \in V^s, (x^s)^{n+1} \in V^s;$$

7. actualiser la position de l'interface par relaxation

$$X = (1 - \omega_n)X + \omega_n(x_{|\Gamma}^s)^{n+1};$$

et retourner en 2.

6.2 Analyse de Convergence

L'analyse des propriétés de convergence de ce type d'algorithme nécessite dans un premier temps d'adimensionner les inconnues en les divisant par les échelles caractéristiques

ρ_{ref} , U_{ref} ou L_{ref} de densité, vitesse ou longueur du problème étudié. Comme il n'y a pas de risque de confusion, les variables seront notées de la même manière avant et après adimensionnement.

Pour simplifier, nous négligerons ensuite dans notre analyse les termes d'inertie côté structure, les termes de convection et de changement de géométrie côté fluide, et nous linéariserons les termes de raideur élastique de la structure. Dans ce cadre très réaliste d'un point de vue pratique, nous introduisons les opérateurs de Schur adimensionnés usuels S_i ($i = s$ pour le solide et $i = f$ pour le fluide)

$$\langle S_i U|_{\Gamma}, \hat{U}|_{\Gamma} \rangle = a^i(\text{Ext}^i(U), \text{Ext}^i(\hat{U}))$$

où l'opérateur Ext^i dénote l'extension harmonique définie par

$$a^i(\text{Ext}^i(U), \hat{U}) = 0, \forall \hat{U} \in V^i, \hat{U}|_{\Gamma} = 0, \text{Ext}^i(U)|_{\Gamma} = U.$$

Les formes bilinéaires a^s et a^f introduites ici correspondent respectivement aux opérateurs fluides et structures linéarisés adimensionnés, c'est à dire

$$a^s(x, \hat{U}) = \int_{\Omega_{adim}^s} \frac{1}{K_{ref}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial F^2} \nabla x \cdot \nabla \hat{U},$$

$$a^f(U, \hat{U}) = \int_{\Omega_{adim}^f} U \cdot \hat{U} + \frac{\Delta t}{2\mathcal{R}ey} (\nabla U + \nabla^T U) : (\nabla \hat{U} + \nabla^T \hat{U})$$

L'adimensionnement solide (resp. fluide) s'obtient en divisant l'opérateur solide (resp. fluide) par $K_{ref} U_{ref} L_{ref}^2$ (resp. $\rho_{ref} U_{ref}^3 L_{ref}^2 / \Delta t$). Par construction et après intégration par parties, ces opérateurs de Schur vérifient

$$\begin{aligned} \langle S_i U|_{\Gamma}, \hat{U}|_{\Gamma} \rangle &= a^i(\text{Ext}^i(U), \text{Ext}^i(\hat{U})) \\ &= a^i(\text{Ext}^i(U), \text{Tr}^{-1}(\hat{U})) \\ &\quad + a^i(\text{Ext}^i(U), \text{Ext}^i(\hat{U}) - \text{Tr}^{-1}(\hat{U})) \\ &= a^i(\text{Ext}^i(U), \text{Tr}^{-1}(\hat{U})) \\ &= L_{interface}^i(\hat{U}) \\ &= \int_{\Gamma_{adim}} (\sigma_{adim} \cdot n^i) \cdot \hat{U}. \end{aligned}$$

Ci-dessus, les forces et contraintes d'interface $L_{interface}^i$ et σ_{adim} sont les forces associées au problème homogène (sans second membre) induites par le déplacement imposé de l'interface.

Les opérateurs de Schur associent donc à une valeur donnée de la trace sur l'interface le vecteur contrainte qu'il faut y exercer pour que la solution Ext^i ait la bonne trace sur l'interface. Leur inverse associent à un vecteur contrainte donnée la trace sur l'interface de la solution du problème local à vecteur contrainte imposée.

Après adimensionnement, ces opérateurs de Schur ne dépendent plus que de la géométrie du problème. Par ailleurs, ils sont symétriques définis positifs par construction. On peut en fait montrer [20]

Lemme 1 *Dans le cas linéaire sans convection, les opérateurs de Schur S_s et S_f sont symétriques, définis, positifs, ne dépendent que de la géométrie du problème, et sont spectralement équivalents.*

Avec ces notations, on peut maintenant interpréter facilement l'algorithme de point fixe proposé :

Théorème 2 *L'algorithme proposé est un algorithme de descente pour l'opérateur*

$$S_s + \frac{\rho_{ref} U_{ref}^2}{K_{ref} \Delta t^2} S_f$$

préconditionné par S_s .

Preuve: Par rapport à la variable X et introduisant la solution U^{fixe} du problème fluide à second membre imposé et vitesse d'interface nulle, l'algorithme s'écrit

$$\begin{aligned} U_{|\Gamma} &= \frac{X - X^n}{\Delta t} \\ U^{n+1} &= \text{Ext}^f(U_{|\Gamma}) + U^{fixe} \\ L_{interface}^{n+1} &= -\frac{\rho_{ref} U_{ref}^2 L_{ref}^2}{\Delta t} S_f(U_{|\Gamma}) + L_{interface}(U^{fixe}) \\ &= -\frac{\rho_{ref} U_{ref}^2 L_{ref}^2}{\Delta t^2} (S_f(X) - S_f(X^n)) + L_{interface}(U^{fixe}) \\ &= -\frac{\rho_{ref} U_{ref}^2 L_{ref}^2}{\Delta t^2} S_f(X) + L_{interface}^{fixe} \\ (x_{|\Gamma}^s)^{n+1} &= (S_s)^{-1} \left(\frac{L_{interface}^{n+1}}{K_{ref} L_{ref}^2} \right) \\ X &= (1 - \omega_n)X + \omega_n (x_{|\Gamma}^s)^{n+1}. \end{aligned}$$

Après élimination des variables intermédiaires, cet algorithme s'écrit

$$X = X - \omega_n (S_s)^{-1} \left(S_s X + \frac{\rho_{ref} U_{ref}^2}{K_{ref} \Delta t^2} S_f(X) - \frac{L_{interface}^{fixe}}{K_{ref} L_{ref}^2} \right),$$

ce qui est bien la forme cherchée. On a alors le résultat de convergence suivant :

Théorème 3 *La méthode de point fixe avec relaxation de pas fixe ω appliquée au problème de couplage linéarisé converge si et seulement si*

$$\omega \leq 2 \frac{K_{ref} \Delta t^2 \left(\frac{K_{ref} \Delta t^2}{\rho_{ref} U_{ref}^2} Id + S_s^{-1/2} S_f S_s^{-1/2} \right)_{min}}{\rho_{ref} U_{ref}^2 \left(\frac{K_{ref} \Delta t^2}{\rho_{ref} U_{ref}^2} Id + S_s^{-1/2} S_f S_s^{-1/2} \right)_{max}^2}$$

Preuve: On sait qu'un algorithme de relaxation à pas fixe appliqué à un opérateur symétrique positif A converge si et seulement si le pas ω vérifie

$$\omega \leq \frac{2(A)_{min}}{(A)_{max}^2},$$

$(A)_{min}$ (resp. $(A)_{max}$) dénotant la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de A .

L'application de ce résultat à l'opérateur symétrique défini positif

$$S_s + \frac{\rho_{ref} U_{ref}^2}{K_{ref} \Delta t^2} S_f$$

donne le résultat souhaité.

Conséquence: L'algorithme de point fixe avec $\omega = 1$ diverge si la structure est souple ($K_{ref} \Delta t^2$ petit). Il faut alors soit inverser le rôle du fluide et de la structure en décomposant de manière différente l'espace des fonctions tests, soit utiliser une méthode de descente à pas optimal dont le taux de convergence est déterminé par le conditionnement de l'opérateur préconditionné

$$S_s^{-1/2} \left(S_s + \frac{\rho_{ref} U_{ref}^2}{K_{ref} \Delta t^2} S_f \right) S_s^{-1/2}.$$

Par équivalence spectral de S_f et S_s , ce conditionnement est uniformément borné, ce qui garantit l'efficacité et la robustesse de ces algorithmes de descente à pas optimal.

7 Extension aux Structures Minces

7.1 Cinématique

Dans tous les problèmes de couplage fluide structure en grands déplacements, il est essentiel d'avoir une description aussi fine que possible de la géométrie du solide déformé. Très souvent, les structures manipulées sont minces, et sont donc assimilables à des coques minces. L'étude de ces coques par analyse classique en base locale est délicate car le mouvement de la base locale au cours de la déformation est difficile à gérer et peut fausser fortement le résultat du problème couplé. Il est donc préférable d'utiliser les modèles de

coques géométriquement exacts proposés par J.C. Simo et D.D. Fox [34] et développés dans [8] ou [9]. Ces modèles s'écrivent indépendamment de toute base locale (calcul intrinsèque) et calculent les déformations de la surface moyenne de manière exacte même en présence de grands déplacements (aucune approximation de la géométrie, transport exact, prise en compte des termes quadratiques dans les déformations de membrane et de flexion). Après linéarisation, ils se réduisent aux modèles de coques minces de Koiter [18].

L'hypothèse cinématique fondamentale de tous ces modèles de coque est celle des fibres indéformables. Autrement dit, on définit dans la configuration initiale Ω_0^s donnée la surface moyenne ω_o de la coque et un champ de vecteurs directeurs unitaires normaux

$$t^o : \omega_o \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad (19)$$

tel que la position x_0 tout point M de la coque s'y décompose en

$$x_0 = m + \xi t^o(m), m \in \omega_o, \xi \in [-e(m), e(m)]. \quad (20)$$

La quantité $2e(m)$ représente l'épaisseur locale de la coque le long de la direction $t(m)$.

On suppose ensuite que la position de chaque point M en toute configuration ultérieure reste de la forme

$$x(x_0) = \phi(m) + \xi t(m) = x(m, \xi), \forall x_0 \in \Omega_0^s. \quad (21)$$

Avec ce choix, la fibre des points matériels M associés à un point m donné de la surface moyenne se transporte sans déformation au cours du mouvement, et la configuration tridimensionnelle de la coque est après déformation

$$\Omega^s = \{x = \phi(m) + \xi t(m), m \in \omega_o, \xi \in [-e(m), e(m)]\}. \quad (22)$$

Les inconnues caractérisant le mouvement sont donc les applications

$$\begin{aligned} \phi : \omega_o &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ t : \omega_o &\rightarrow S^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Les vitesses virtuelles \hat{U} de la structure sont alors simplement définies comme les variations cinématiquement admissibles de la configuration Ω^s , et donc par construction sont de la forme

$$\hat{U}_{|\Omega^s} = \hat{\phi}(m_0) + \xi \hat{t}(m_0). \quad (24)$$

Ci-dessus, les variations virtuelles $\hat{\phi}$ et \hat{t} vérifient les conditions aux limites cinématiques imposées à la structure, et la variation de normale \hat{t} vérifie en outre la condition d'inextensibilité linéarisée

$$t \cdot \hat{t} = 0.$$

Remarque 6 *L'hypothèse des fibres indéformables n'est pas une hypothèse de comportement physique. La fibre peut se déformer dans le déplacement réel et cette déformation est en général prise en compte dans les lois de comportement par le biais d'une hypothèse de contraintes planes. On ignore simplement ici cette déformation au niveau de la description du mouvement.*

Remarque 7 Dans cette construction cinématique, les gradients tridimensionnels de la déformation et du champ de vitesse virtuelle prennent la forme

$$F = \frac{\partial x}{\partial x_0} = \nabla \phi \cdot \Pi^* + t \otimes t^* + \xi \nabla t \cdot \Pi^*$$

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial x_0} = \nabla \hat{\phi} \cdot \Pi^* + \hat{t} \otimes t^* + \xi \nabla \hat{t} \cdot \Pi^*$$

où Π^* et t^* dénotent les opérateurs de projection définis sur la configuration initiale tangente $d\Omega_0^s$

$$\begin{aligned} \Pi^*(dm + d\xi t^0(m)) &= dm, \\ t^*(dm + d\xi t^0(m)) &= d\xi. \end{aligned}$$

7.2 Mesure des déformations

Les déformations de la coque entre la configuration initiale et la configuration actuelle peuvent être caractérisées indépendamment de tout mouvement rigide (même en grandes rotations) par les tenseurs de membrane $\boldsymbol{\varepsilon}$, de flexion $\boldsymbol{\rho}$ et de cisaillement $\boldsymbol{\gamma}$ qui mesurent respectivement les variations d'étirement dans le plan tangent à la surface moyenne, les variations de courbure de la surface moyenne et les rotations de la fibre normale par rapport au plan tangent :

– **déformation de membrane**

$$\begin{aligned} C &= \nabla \phi^T \cdot \nabla \phi, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= 1/2(C - C_0); \end{aligned}$$

– **déformation de flexion**

$$K = \nabla \phi^T \cdot \nabla t, \quad \boldsymbol{\rho} = K - K^0;$$

– **cisaillement**

$$R = t \cdot \nabla \phi, \quad \boldsymbol{\gamma} = R - R^0.$$

7.3 Puissance des efforts intérieurs

Dans la cinématique choisie, la puissance virtuelle des efforts intérieurs se réduit à la somme de trois termes :

1. le travail des efforts de membrane n dans l'étirement virtuel de membrane $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$,
2. le travail des efforts de flexion m dans la flexion virtuelle $\hat{\boldsymbol{\rho}}$,

3. le travail des efforts de cisaillement q dans le cisaillement virtuel $\hat{\gamma}$.

En effet, une intégration directe de la puissance des efforts intérieurs tridimensionnels donne

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(\hat{U}) &= \int_{\Omega_0} (J\sigma \cdot F^{-T}) : \frac{\partial \hat{U}}{\partial x_0} \\ &= \int_{\Omega_0} F \cdot (JF^{-1} \cdot \sigma \cdot F^{-T}) : (\nabla \hat{\phi} \cdot \Pi^* + \hat{t} \otimes t^* + \xi \nabla \hat{t} \cdot \Pi^*) \\ &= \int_{\Omega_0} (\nabla \hat{\phi} \cdot \Pi^* + t \otimes t^* + \xi \nabla t \cdot \Pi^*) \cdot S : (\nabla \hat{\phi} \cdot \Pi^* + \hat{t} \otimes t^* + \xi \nabla \hat{t} \cdot \Pi^*) \end{aligned}$$

où $S = JF^{-1} \cdot \sigma \cdot F^{-T}$ dénote le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff. Tous calculs faits, cette puissance des efforts intérieurs se met bien sous la forme

$$\mathcal{P}_i(\hat{U}) = \int_{\omega_0} n : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + m : \hat{\boldsymbol{\rho}} + q \cdot \hat{\gamma},$$

sous la notation

$$\begin{aligned} n &= \Pi^* \left(\int_{\xi} S - \xi^2 F_0^{-1} \cdot \nabla t \cdot \Pi^* \cdot S \cdot \Pi^{*T} \cdot \nabla t^T \cdot F_0^{-T} \right) \cdot \Pi^{*T} \\ &= \text{tenseur symétrique d'efforts de membrane,} \\ q &= t^* \left(\int_{\xi} S - \xi^2 F_0^{-1} \cdot \nabla t \cdot \Pi^* \cdot S \cdot \Pi^{*T} \cdot \nabla t^T \cdot F_0^{-T} \right) \cdot \Pi^{*T} \\ &= \text{efforts de cisaillement,} \\ m &= \Pi^* \left(\int_{\xi} \xi S + \xi^2 F_0^{-1} \cdot \nabla t \cdot \Pi^* \cdot S \right) \cdot \Pi^{*T} \\ &= \text{tenseur des efforts de flexion.} \end{aligned}$$

A une correction de second ordre près associée à des termes de courbure, ces efforts intérieurs correspondent respectivement aux intégrales à travers l'épaisseur des composantes tangentes du second tenseur de Kirchhoff, de ses composantes normales, et de ses moments par rapport à la surface moyenne. Ces efforts travaillent dans les variations virtuelles de déformations de membrane, cisaillement et flexion données par

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &= 1/2(\nabla \hat{\phi}^T \cdot \nabla \hat{\phi} + \nabla \hat{\phi}^T \cdot \nabla \hat{\phi}), \\ \hat{\gamma} &= t \cdot \nabla \hat{\phi} + \hat{t} \cdot \nabla \hat{\phi}, \\ \hat{\boldsymbol{\rho}} &= \nabla \hat{\phi}^T \cdot \nabla t + \nabla \hat{\phi}^T \cdot \nabla \hat{t}. \end{aligned}$$

7.4 Lois de Comportement et Formulation Variationnelle

Pour rester cohérent avec les modèles tridimensionnels introduits précédemment, et du fait que les structures subissent en général de grands déplacements mais des petites déformations, nous supposons que les coques considérées ont un comportement hyperélastique : autrement dit, les efforts intérieurs n, q, m ne dépendent que de la valeur actuelle des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}, \gamma, \boldsymbol{\rho}$, et leur travail doit être nul dans tout mouvement périodique réalisable.

On peut alors démontrer [8] que toutes les trajectoires périodiques sont réalisables dans le demi-espace connexe des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}, \gamma, \boldsymbol{\rho}$ associées à un déterminant $J > 0$. Par un résultat classique de calcul différentiel, la nullité du travail intérieur dans tout cycle implique alors que les efforts intérieurs dérivent d'une énergie élastique :

$$\begin{aligned} n &= \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}, \gamma), \\ m &= \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}, \gamma), \\ q &= \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}, \gamma). \end{aligned}$$

L'identification de la densité d'énergie élastique demande ensuite un certain nombre d'hypothèses mécaniques et de vérifications expérimentales. Dans le cas simple d'une coque isotrope, en contraintes planes, au repos dans la configuration ω_0 et résistant parfaitement au cisaillement, cette densité prend la forme classique

$$\begin{aligned} \psi &= \infty \text{ si le cisaillement n'est pas nul } (\gamma \neq 0) \\ &= \frac{Ee^3}{24(1-\nu^2)} \left((1-\nu)Tr\{(\rho_0 \cdot \rho_0) + \nu\{Tr(\rho_0)\}^2\} \right) \\ &\quad + \frac{Ee}{2(1-\nu^2)} \left((1-\nu)Tr\{(\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_0) + \nu\{Tr(\varepsilon_0)\}^2\} \right) \text{ si } \gamma = 0. \end{aligned}$$

Après introduction de cette loi de comportement hyperélastique, le problème de structure s'écrit sous la même forme variationnelle que dans le cas tridimensionnel mais cette formulation variationnelle est maintenant posée sur la surface moyenne ω_0

$$\begin{aligned} \int_{\omega_0} \left(2e\rho_0 \ddot{\hat{\phi}} \cdot \hat{\phi} + \left(\int_{\xi} \xi^2 \right) \rho_0 \ddot{\hat{t}} \cdot \hat{t} + \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}, \gamma)}{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}, \gamma)} \cdot \frac{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\rho}, \gamma)}{\partial(\hat{\phi}, \hat{t})} \cdot (\hat{\phi}, \hat{t}) \right) \\ = L_{interface}(\hat{U}), \quad \forall (\hat{\phi}, \hat{t}) \text{ admissible.} \end{aligned} \quad (25)$$

Cette formulation variationnelle d'un problème de coque mince hyperélastique est bien adaptée aux problèmes de couplage fluide structure en grands déplacements car

- le modèle utilisé est objectif par construction et ne fait pas intervenir de base locale,

- la configuration de référence ω_0 est fixe mais peut être arbitraire et assez peu régulière,
- les élongations et les courbures sont calculées exactement,
- tous les effets non linéaires sont pris en compte, et en particulier ce modèle peut décrire le comportement de la coque après flambement.

7.5 Approximation par éléments finis

L'approximation de ce problème par élément fini s'obtient simplement en triangulant la surface moyenne ω_0 et en approchant sur chacun de ces triangles courbes les composantes cartésiennes des inconnues (ϕ, t) par des éléments finis de type Argyris ou DKT (Discrete Kirchhoff Triangle). Dans ce dernier choix, les fonctions discrètes ϕ_h et t_h sont de la forme

$$\begin{aligned} \phi_h &\in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3), (\phi_h)|_T \in P'^3, \\ t &= \frac{(\nabla_h \phi)_1 \wedge (\nabla_h \phi)_2}{\|(\nabla_h \phi)_1 \wedge (\nabla_h \phi)_2\|} \end{aligned}$$

le gradient discret ∇_h étant le champ de vecteur continu et P^2 par morceaux défini sur chaque triangle par

$$(\nabla_h \phi_h)_T = \nabla \phi_h(a_i) \lambda_i + 6 \nabla_{i_j}^2(\phi_h) \frac{\overrightarrow{a_i a_j}}{|a_i a_j|} \lambda_i \lambda_j.$$

Ce type d'approximations est étudié dans [9, 27] et sa convergence est garantie par le théorème suivant [8, 23]

Théorème 4 *Pour le problème linéarisé, posé par rapport à l'inconnue $u = \phi - \phi_0$, l'erreur entre solution discrète et continue est majorée par*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_1 + \|(\nabla^2 u - \nabla^2 u_h) \cdot t\|_0 &\leq ch^4 \|u\|_6 \text{ (Argyris)} \\ \|u - u_h\|_1 + \|(\nabla^2 u - \nabla^2 u_h) \cdot t\|_0 &\leq ch \|u\|_3 \text{ (DKT)}. \end{aligned}$$

8 Validation numérique du modèle de coque non linéaire

Nous avons effectué plusieurs tests afin de valider modèle et éléments finis en statique et en dynamique. Pour ce dernier cas, l'inertie en rotation \dot{t} de la coque a été négligée. De plus amples détails ainsi que d'autres exemples peuvent être trouvés dans [8, 9, 27].

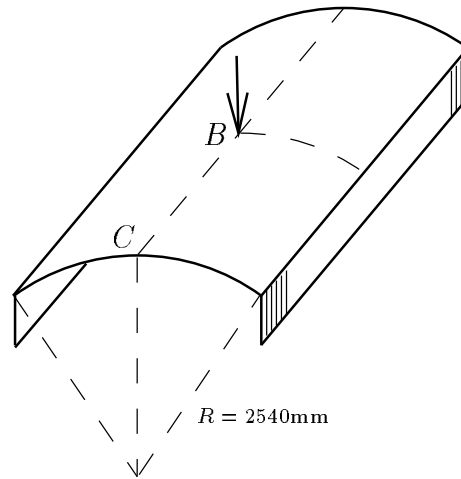


FIG. 2 - Coque peu profonde de Simo.

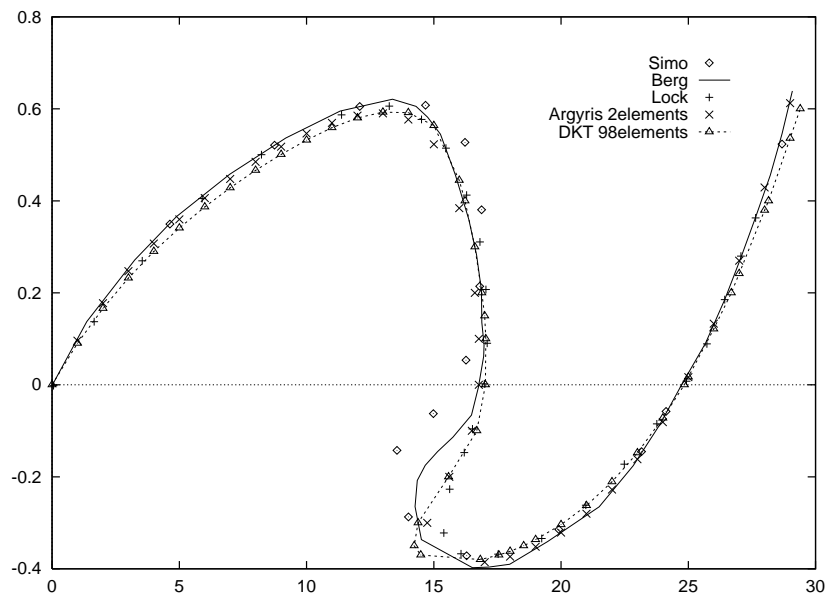


FIG. 3 - Chargement central (kN) en fonction de la déflexion (mm) du point B. Comparaison avec d'autres éléments finis. On peut observer l'aspect fortement non linéaire du résultat obtenu.

8.1 La coque peu profonde de Simo

Ce test classique de retournement de coque couple résistance en flexion et résistance en membrane et présente plusieurs points limites.

On considère une coque peu profonde (faiblement courbée au repos) cylindrique, de rayon de courbure $R = 2540$ mm, de longueur $l = 254$ mm et d'épaisseur $e_1 = 6.35$ mm. Son module d'Young vaut $E = 3102.75$ N/mm² et son coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Cette coque est encastree sur ses deux côtés droits. Les symétries du problème permettent de n'étudier que le 1/4 de la coque (Fig. 2).

On déforme la coque :

- soit en appliquant une force ponctuelle au point central B,
- soit en forçant le déplacement de ce point.

Pour les deux types de chargement, les solutions sont calculées ici par un algorithme de Newton-Raphson. S'il est initialisé par la solution au repos ϕ_0 , cet algorithme converge en moins de huit itérations quel que soit le cas de calcul. Dans le tableau ci-après, nous avons également représenté le nombre d'itérations et le temps de calcul sur HP735 nécessaires pour obtenir les solutions d'équilibre pour les deux choix d'éléments finis, au voisinage de points limites, ou pour les cas de déflexion maximale. Les résultats sont très peu sensibles au choix de l'élément fini.

Sol. estimée	Déf. imposée	élt fini	iters	chargt	CPU
ϕ_{0h}	30	Argyris	7	3.87	32.67s
		DKT	7	4.364	26.29s
ϕ_{0h}	20	Argyris	7	0.52	32.53s
		DKT	8	0.518	30.38s
ϕ_{0h}	10	Argyris	5	2.22	23.28s
		DKT	5	2.306	19.21s

Les résultats sont comparés aux résultats obtenus par Simo [35] ou par d'autres auteurs (Fig. 3). On remarque que même pour un maillage relativement grossier (2 éléments Argyris ou 98 éléments DKT), les résultats sont tout à fait satisfaisants.

8.2 Le clapet d'amortisseur

Cet exemple est caractéristique des structures minces et déformables qui équipent les organes hydrauliques des automobiles. Il nous intéresse pour le problème de couplage fluide structure traité après.

On considère un clapet (Fig. 4) ayant la forme d'un anneau plat de rayon intérieur $r = 5$ mm, de rayon extérieur $R = 10.5$ mm et d'épaisseur $e = 0.2$ mm. Cet anneau est en acier trempé, de module de Young $E = 621\,000$ MPa et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Le clapet est serti sur tout son bord intérieur, liaison que nous assimilerons à une condition aux limites de type encastrement. Sur 4 disques de rayon 2 mm disposés régulièrement sur

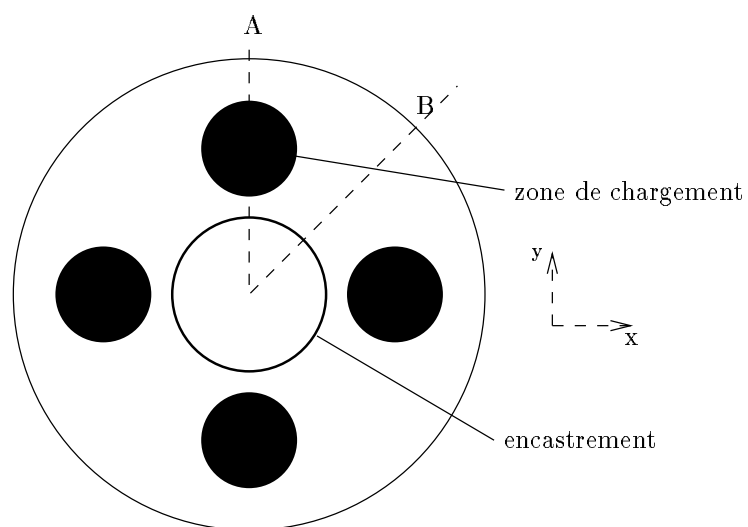


FIG. 4 - Clapet d'amortisseur: Géométrie et chargement.

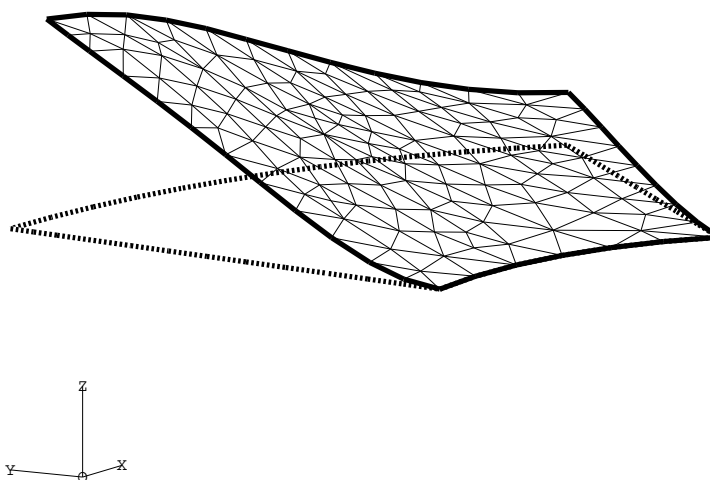


FIG. 5 - Déformée du clapet (1/8).

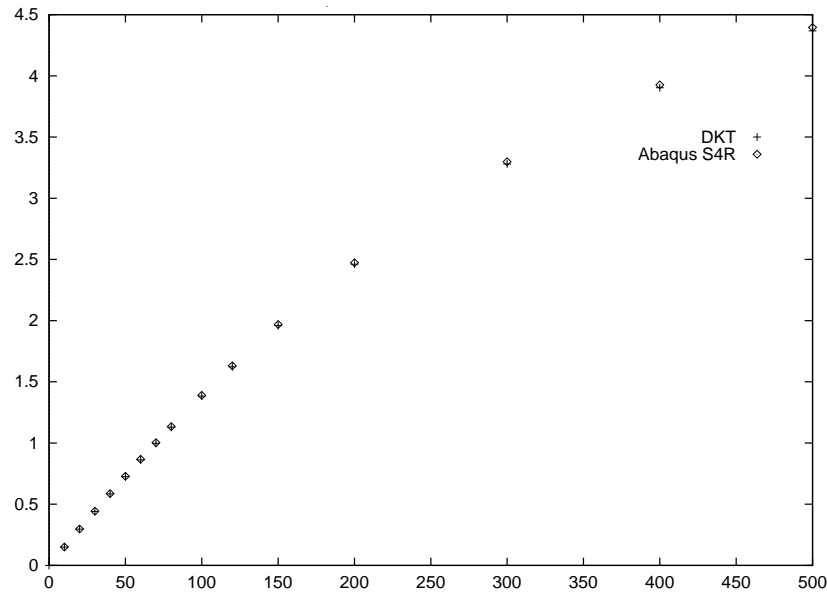


FIG. 6 - Déflexion (mm) du point A en fonction du chargement (bars). Comparaison avec l'élément S4R d'Abaqus.

cet anneau, on applique une force de pression uniforme. Etant donné les symétries de la géométrie et du chargement, on étudie seulement 1/8 du clapet (Fig. 4).

Les grands déplacements et la zone d'application du chargement entraînent un couplage entre la résistance en flexion et la résistance en membrane. On s'intéresse à la déformée du clapet (Fig. 5) et au déplacement du point A. On compare les résultats à ceux obtenus avec le code ABAQUS et l'élément fini S4R (élément quadrangulaire type coque à facettes). Pour ce test, on prend un clapet de module de Young $E = 210\,000$ MPa et de coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ pour une épaisseur $e = 0.215$ mm (Fig. 6).

Pour ce type de structure, on voit que les résultats obtenus ici avec notre modèle de coques en grands déplacements restent cohérents avec ceux des modèles robustes testés dans l'industrie.

8.3 Fréquences propres de la plaque simplement posée

On considère une plaque plane carrée de côté $L = 20$ cm, d'épaisseur constante $e = 0.9144$ mm, de masse volumique $\rho = 8500$ kg/m³, de module d'Young $E = 104\,000$ MPa et de coefficient de Poisson $\nu = 0.37$. On se propose d'effectuer une analyse modale de cette plaque en flexion pure lorsqu'elle est posée sur ses bords.

Il est possible de calculer analytiquement la solution. De façon classique [4], la plaque mince posée en flexion pure obéit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} w_{,iiii} + \rho e \omega^2 w = 0 \\ w(x_i = 0) = 0 \\ w(x_i = L) = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

où $w = \phi_z$. On en déduit aisément les fréquences propres de la structure :

$$f_{n_1, n_2} = 2\pi\omega = \frac{\pi e}{2L^2} (n_1^2 + n_2^2) \sqrt{\frac{E}{12(1-\nu^2)\rho}} \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}. \quad (27)$$

Parallèlement, on effectue un calcul numérique direct de ces fréquences propres à l'aide de l'élément fini DKT. Pour extraire les 8 premiers modes, on utilise l'algorithme de Lanczos. On donne dans le tableau ci-dessous les résultats obtenus pour un maillage à 128 éléments et pour un maillage à 800 éléments. Les erreurs obtenues restent inférieures au % pour le maillage à 800 éléments, ce qui est tout à fait acceptable.

Modes		Théoriques	128 EF	erreur	800 EF	erreur
n_1	n_2	(Hz)	(Hz)	(%)	(Hz)	(%)
1	1	78.06	77.5	.72	77.97	.12
1	2	195.15	192.58	1.32	194.71	.23
2	1	195.15	193.02	1.09	194.78	.19
2	2	312.24	304.00	2.64	310.78	.75
1	3	390.29	384.54	1.47	389.23	.27
3	1	390.29	384.58	1.46	389.23	.27
2	3	507.38	488.94	3.63	504	.67
3	2	507.38	489.77	3.47	504.12	.64

8.4 Evolution d'une poutre encastree

On veut maintenant valider nos schémas d'intégration en temps sur un cas très simple.

On considère une poutre isotrope de masse volumique $\rho = 7900 \text{ kg/m}^3$, de longueur $l = 4 \text{ mm}$, d'épaisseur $e = 0.2 \text{ mm}$ et de module de Young $E = 621\,000 \text{ MPa}$. Cette poutre est encastree à l'une de ses extrémités. Une force ponctuelle constante est appliquée à l'extrémité libre. On étudie l'évolution de cette extrémité au cours du temps pour le schéma de point milieu et pour le schéma d'Euler (Fig. 7). Dans les deux cas, le maillage comporte 8 éléments et on prend $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$.

Comme prévu, le schéma d'Euler engendre un amortissement numérique important tandis que le schéma de point milieu est consistant. La fréquence d'oscillation mesurée vaut $f \approx 17850 \text{ Hz}$ ce qui est très proche de la première fréquence propre de la poutre qui vaut (calcul analytique)

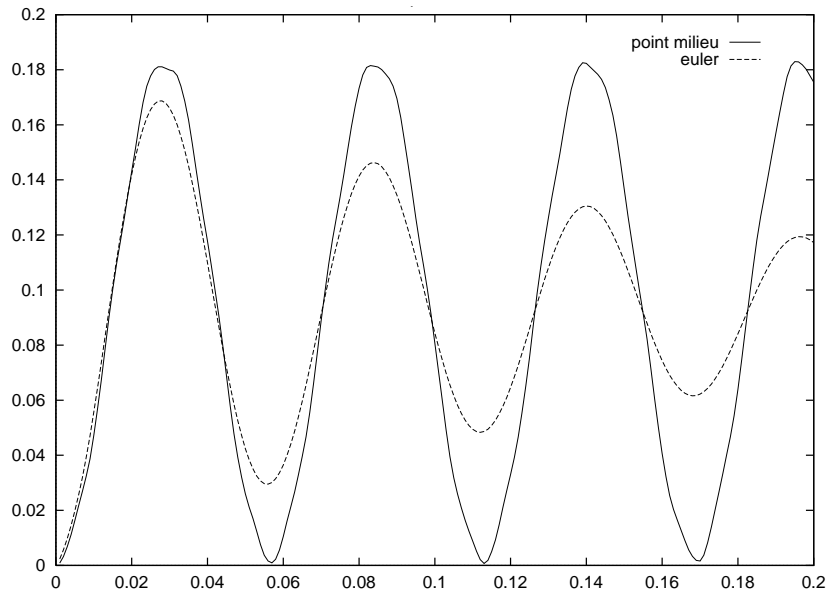


FIG. 7 - Déplacement (μm) de l'extrémité libre de la poutre au cours du temps (ms). Comparaison entre les schémas d'Euler implicite et de point milieu.

$$f_1 = \frac{1.8751^2}{2\pi} \frac{e}{L^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}} = 17903 \text{ Hz.}$$

9 Simulation numérique du fonctionnement d'un amortisseur à clapets souples

Nous avons vérifié la cohérence et la robustesse de l'algorithme de couplage présenté ici sur le problème complexe du fonctionnement d'un amortisseur à clapets souples de type Citroën. Cet organe met en jeu un fluide visqueux contenu dans un cylindre et supposé incompressible. Lors d'une charge exercée sur l'essieu, le liquide est mis en mouvement et vient comprimer un clapet métallique qui obstrue le cylindre. Sous la pression, le clapet se déforme et laisse s'écouler le liquide. L'amortissement est réalisé par effet de laminage du fluide par le clapet. Pour caractériser la performance de l'amortisseur, on s'intéresse à la relation entre la perte de charge (différence de pression) et le débit dans le cylindre.

Cet exemple est une bonne illustration des problèmes industriels où le couplage est le phénomène physique dominant.

Remarque 8 *Pour ce problème, on peut montrer que l’inertie du clapet peut être négligée [27]. Un calcul numérique donne une première fréquence propre de 5720 Hz, c’est-à-dire 100 fois supérieure à la fréquence maximale d’excitation.*

Remarque 9 *L’ensemble des outils développés dans ce rapport a fait l’objet d’un module de calcul programmé en fortran 77 et contenant le modèle de coque, l’algorithme de couplage et l’actualisation du maillage. Ce module a été inséré dans l’architecture du code industriel de résolution des équations de la mécanique des fluides 3D FIRE [7].*

9.1 Adaptation de maillage

Lorsque l’on traite des problèmes de couplage fluide structure en grands déplacements, on est amené à déformer le maillage du domaine de calcul fluide. La plupart du temps, le déplacement d’une partie de la frontière résulte directement de la déformation d’une structure élastique de type coque. Le déplacement de la frontière étant connu, il est en général indispensable de propager cette déformation à l’intérieur du domaine, de façon à conserver sur $\Omega^f(t)$ un maillage “propre”, c’est-à-dire respectant les contraintes de régularité qu’on avait imposées au maillage initial (topologies équivalentes, absence de chevauchement et de retournement de cellules, qualité des mailles).

Pour résoudre ce problème, il existe plusieurs approches possibles. L’une d’entre elles consiste à affecter au maillage une cinématique propre [15, 29] et à traiter ses déformations $x(x_0, t)$ comme un problème d’élasticité non linéaire tridimensionnelle. Celui-ci s’exprime en formulation déplacement sur la structure initiale et est cohérent avec le modèle à trois champs que nous avons présenté. L’inconvénient d’une telle approche est son coût qui peut être prohibitif dès lors que l’on est amené à l’effectuer souvent (tous les pas de temps par exemple). En général, on préfère utiliser des méthodes explicites moins coûteuses qui calculent le déplacement des noeuds internes en fonction du déplacement des noeuds frontières. Batina [1] propose une méthode d’adaptation qui utilise des ressorts fictifs placés le long des arêtes du maillage. Marrocco [26] utilise un algorithme basé sur la distance des noeuds internes à la frontière. Enfin, il existe des méthodes issues des techniques de régularisation de maillage par “*smoothing*”. Toutes ces méthodes sont robustes dès lors que les mouvements de la frontière sont suffisamment réguliers. La Fig. 8 donne le résultat de l’adaptation entre deux positions de maillage extrêmes en utilisant l’algorithme de Marrocco.

9.2 Validation numérique dans le cas stationnaire

Les données expérimentales les plus fiables étant mesurées pour un écoulement stationnaire, on cherche d’abord à valider nos simulations stationnaires. On s’intéresse au cas d’un amortisseur monté avec un seul clapet comme celui décrit à la section 8.2 (Fig. 9). Les résultats sont nettement meilleurs que dans le cas d’un couplage simplifié [27] même si les calculs

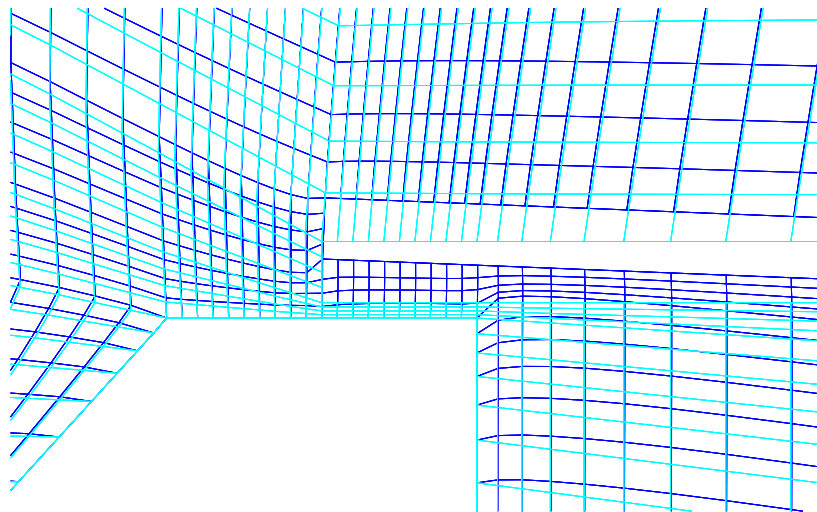


FIG. 8 - Adaptation de maillage : coupe dans le plan de symétrie. En clair le maillage initial, en foncé le maillage final.

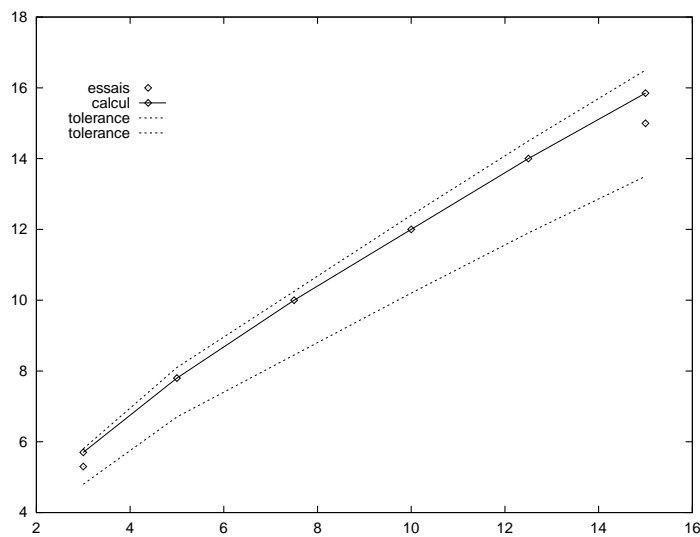


FIG. 9 - Perte de charge (bars) en fonction du débit (l/mn) pour un amortisseur $\varnothing 0.7$ 1C. Comparaison calculs / essais.

ont tendance à sur-estimer légèrement les pertes de charge “moyennes”. On peut donner deux raisons. D’abord, le débit est mis à zéro dans une partie des cellules fluides (là où elles deviennent trop minces). Cela a pour effet de sous-estimer la section de passage réelle, donc de sur-estimer la perte de charge. Ensuite, la modélisation du sertissage par une liaison encastrement sur une zone bien précise (rayon de 5 mm) est probablement trop parfaite. Elle ne prend pas en compte la partie du clapet qui se trouve sous le sertissage.

9.3 Validation numérique dans le cas instationnaire

On s’intéresse maintenant à des phénomènes instationnaires. Pour représenter l’action de la roue sur l’amortisseur, on impose un débit sinusoïdal en amont du clapet. La fréquence de ce débit varie de 5 à 50 Hz. On impose en sortie une condition aux limites de pression constante. Etant données les dimensions physiques du modèle (mm), la taille des cellules est faible : près de la zone de contact, certaines cellules ont une épaisseur de l’ordre de 5 μm . Bien que le schéma d’intégration soit implicite, il est donc nécessaire d’utiliser des pas de temps relativement petits : dans les calculs basse fréquence (< 20 Hz), on a choisi $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ s de façon à ce que le nombre de Courant maximal soit de l’ordre de 200 ; pour les calculs haute fréquence, on a pris $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-5}$ s pour garantir une meilleure stabilité. Pour ce pas de temps, remarquons qu’il faut 4000 itérations pour faire 1 cycle à 10 Hz. Par conséquent, on limite le calcul à 1 cycle pour des faibles fréquences et à 2 ou 3 pour des fréquences supérieures à 20 Hz. L’utilisation intensive de ces modèles numériques couplés exige donc d’avoir accès à des ordinateurs de très haute performance.

Les principaux dysfonctionnements de l’amortisseur à clapets sont observés pour des fréquences d’excitation élevées (≥ 20 Hz). Pour ces fréquences, il est extrêmement difficile d’obtenir des mesures fiables car le banc d’essais et les mesures sont fortement perturbés par le mouvement du vérin hydraulique qui simule le mouvement de la roue. Pour pouvoir comparer à des mesures fiables, nous avons fait une première simulation à basse fréquence (5 Hz) (Fig. 10). Puis, pour diagnostiquer les problèmes, nous avons effectué un deuxième calcul à 25 Hz (Fig. 11) et un autre à 50 Hz avec un orifice de sortie plus faible. Dans chaque cas, le trou de fuite permanente est modélisé. Notons que sa modélisation est indispensable pour conserver un écoulement entre les deux chambres lorsque le clapet est fermé. Les résultats sont résumés dans les Fig. 10, 11, 12 et 13.

Il est intéressant de remarquer que l’on distingue assez bien les deux zones de fonctionnement : écoulement par le trou de fuite (clapet fermé, faibles débits) et écoulement par les deux orifices (clapet ouvert). Pour des fréquences élevées, on remarque une légère augmentation de la perte de charge nominale et un phénomène d’hystérésis quand le clapet est ouvert (Fig. 11). Ce phénomène est lié à la recirculation qui apparaît dans la chambre aval lors d’une montée en débit et dont les effets sont dissipés par la viscosité dans le fluide. La partie de la courbe représentant le fonctionnement de l’amortisseur avant l’ouverture du clapet montre aussi une hystérésis. Son origine est surtout numérique et est liée à la difficulté

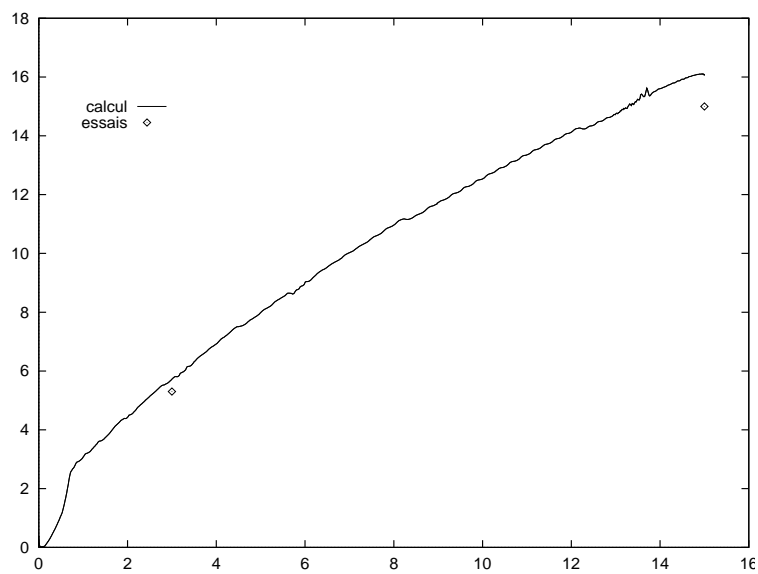


FIG. 10 - Perte de charge (bars) en fonction du débit (l/mn) à 5 Hz pour un amortisseur $\varnothing 0.7 1C$.

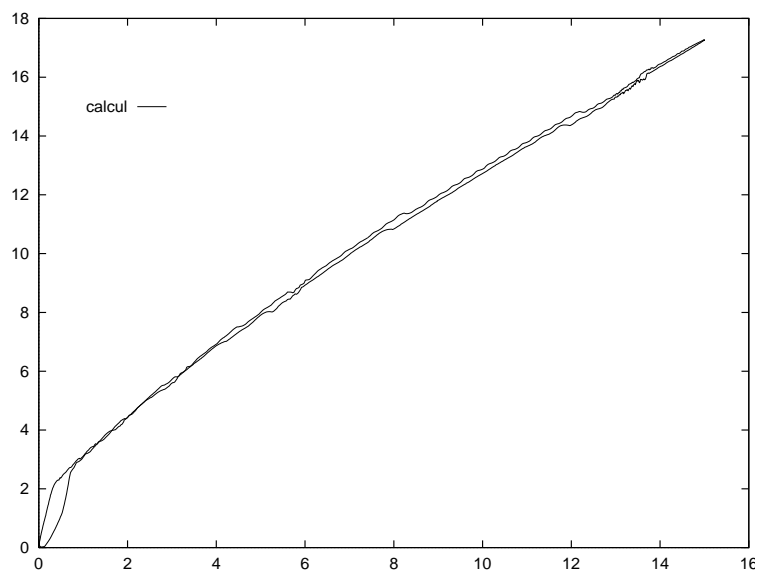


FIG. 11 - Perte de charge (bars) en fonction du débit (l/mn) à 25 Hz. Phénomène d'hystérésis lié à l'inertie du fluide.

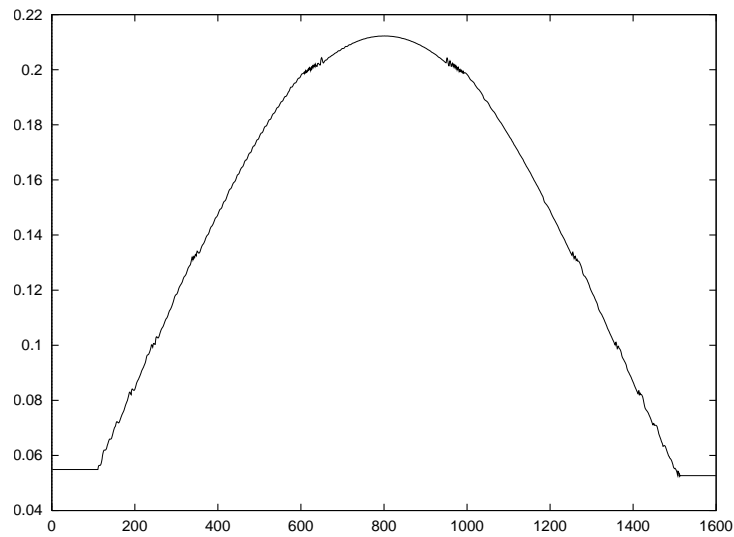


FIG. 12 - Déplacement maximal (mm) du clapet à 25 Hz en fonction du nombre d'itérations en temps.

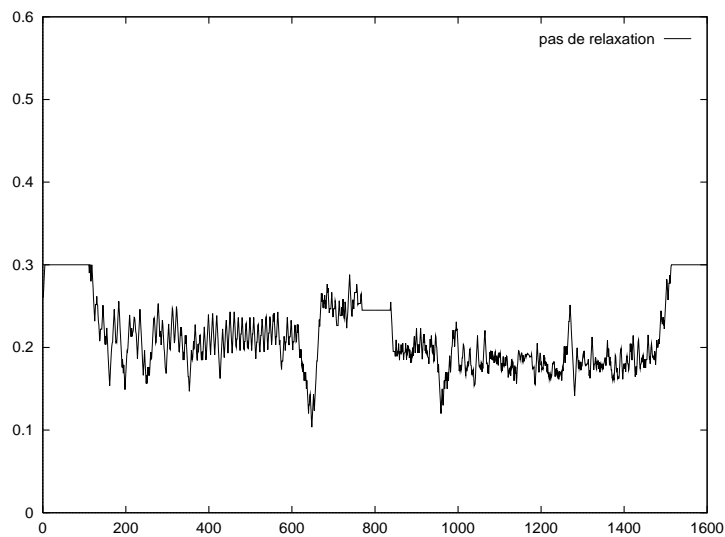


FIG. 13 - Pas de relaxation ω_n au cours du temps. Ce pas est calculé dynamiquement à partir des données du pas de temps précédent. Il est limité à une valeur maximale de 0.3 pour garantir la contractance de l'opérateur de couplage et prend une valeur constante d'un pas de temps à l'autre lorsque l'algorithme converge en 2 itérations.

d'assurer la conservation totale du débit quand celui-ci devient très petit.

Concernant la convergence de l'algorithme, notons qu'il faut entre 2 et 8 itérations de couplage pour obtenir l'équilibre à chaque pas de temps. En moyenne, 3 à 4 itérations suffisent.

Enfin, on a porté dans le tableau ci-après la part relative des différentes étapes de calcul dans le temps de calcul total. Ces résultats sont une moyenne des multiples calculs effectués. Ils montrent grosso modo que le temps de calcul pour une simulation couplée est multiplié par deux par rapport à un calcul fluide seul. On a environ 2000 degrés de liberté pour la coque et entre 75000 et 100000 pour le fluide (pression et composantes de vitesses). Le calcul complet pour 1000 itérations en temps nécessite environ 16h CPU sur un IBM 590.

Type de calcul	Part dans le temps total (%)
COQUE	20
FLUIDE	45
MAILLAGE	30
E/S	5

Remarque 10 *La gestion de l'ouverture et de la fermeture du clapet (changement de topologie) sort du cadre de notre modèle de couplage. Pour les traiter, on calcule le rapport volume/surface de chaque cellule fluide. Si ce rapport est inférieur à une certaine valeur (cellule de mauvaise qualité), on annule la vitesse dans cette cellule après avoir vérifié qu'elle est effectivement dans la zone de contact possible. Quant à la pression, soit on l'extrapole des cellules fluide voisines (Fig. 19), soit on calcule la pression de contact exercée par le corps sur le clapet à l'aide d'un modèle de traitement du contact [27]. Ce dernier choix est assez délicat à mettre en place. Nous n'avons pas cherché à montrer le bien-fondé scientifique de cette méthode relativement "intuitive".*

On trouvera dans les pages suivantes les principales figures dont sont tirées les observations précédentes.

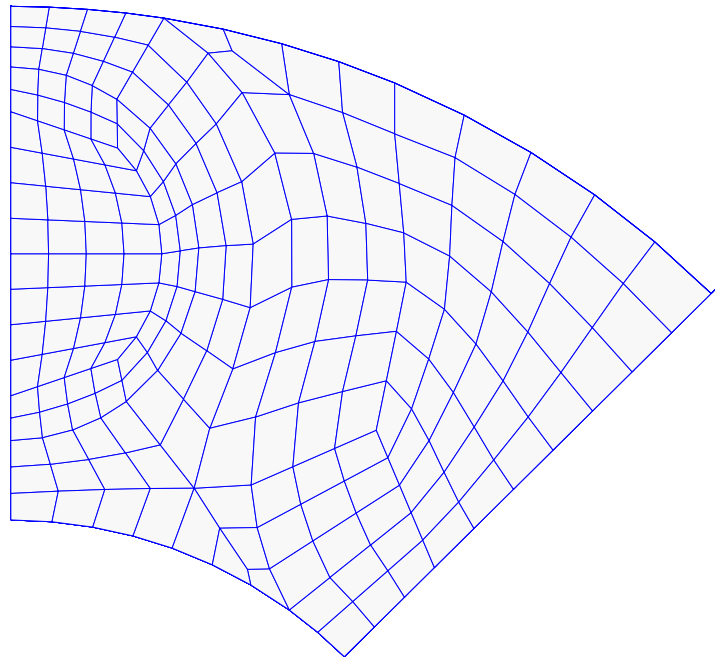


FIG. 14 - *Maillage du clapet (1/8) : chaque quadrilatère est divisé en deux triangles : 216 noeuds, 380 triangles.*

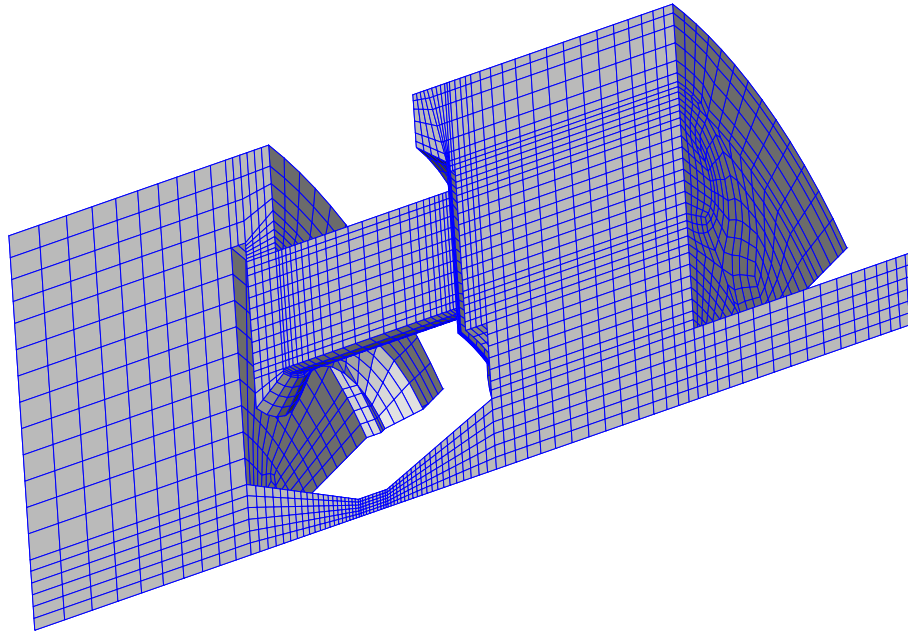


FIG. 15 - *Maillage de l'amortisseur (partie fluide : 1/8 du domaine réel) \approx 18500 cellules. On peut noter la présence d'un trou de fuite permanente au diamètre calibré sur l'axe de l'amortisseur.*

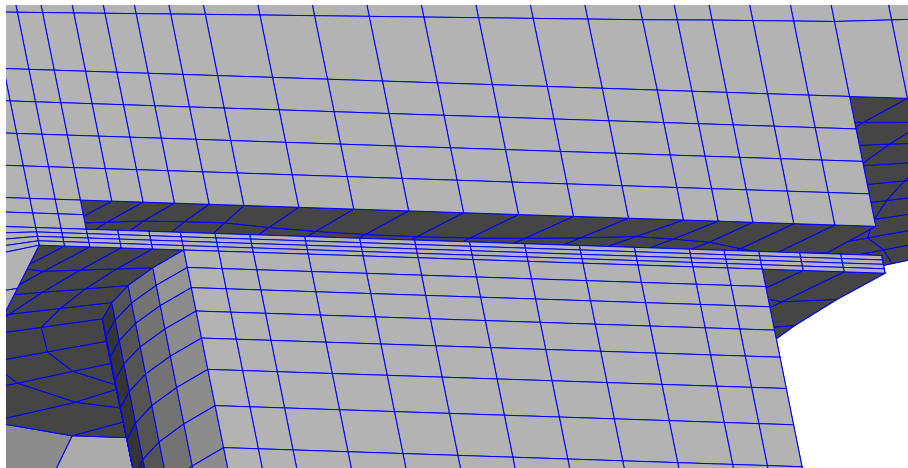


FIG. 16 - *Maillage initial: zoom sur la région proche du clapet.*

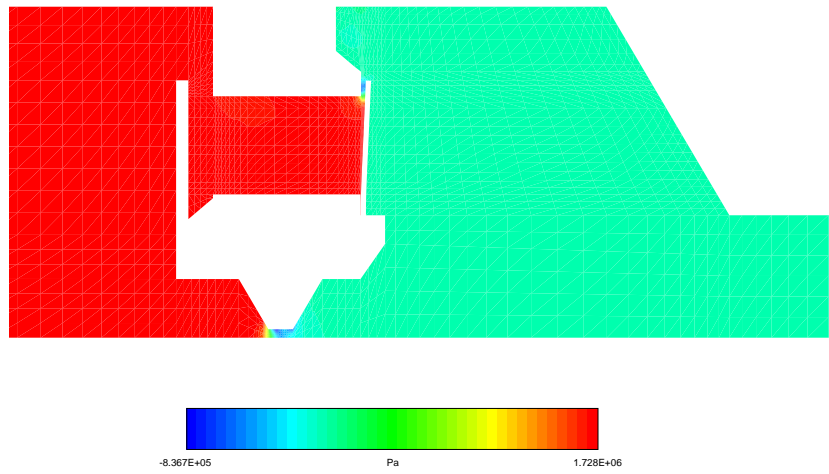


FIG. 17 - *Champ de pression dans le plan de symétrie au débit maximal.*

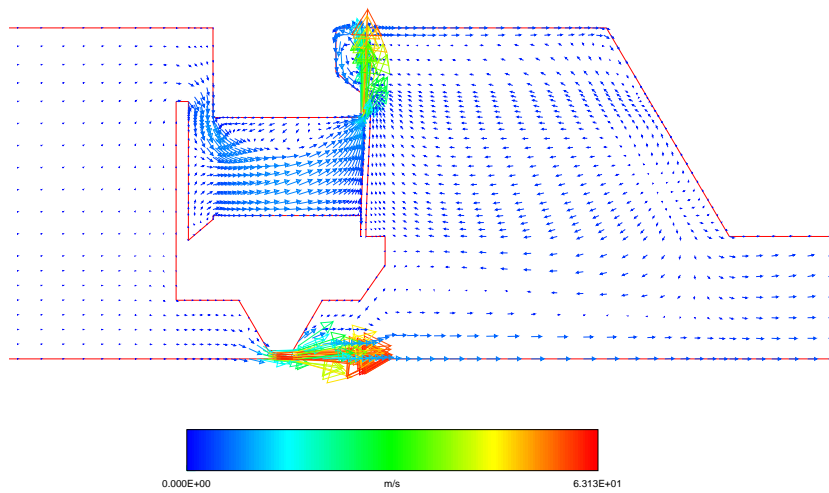


FIG. 18 - *Champ de vitesses dans le plan de symétrie au débit maximal.*

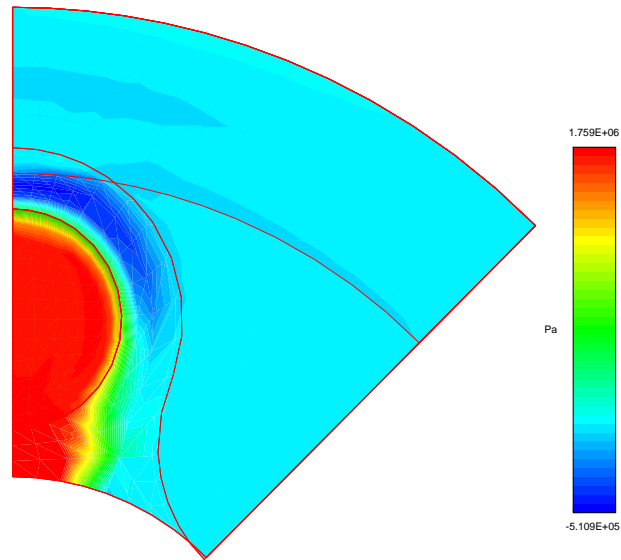


FIG. 19 - Champ de pression sur l'intrados du clapet au débit maximal (on a dessiné le contour du clapet et de la surface de contact). On peut observer la forte dépression en aval de l'orifice, dépression qui n'est jamais prise en compte dans les modèles simplifiés.

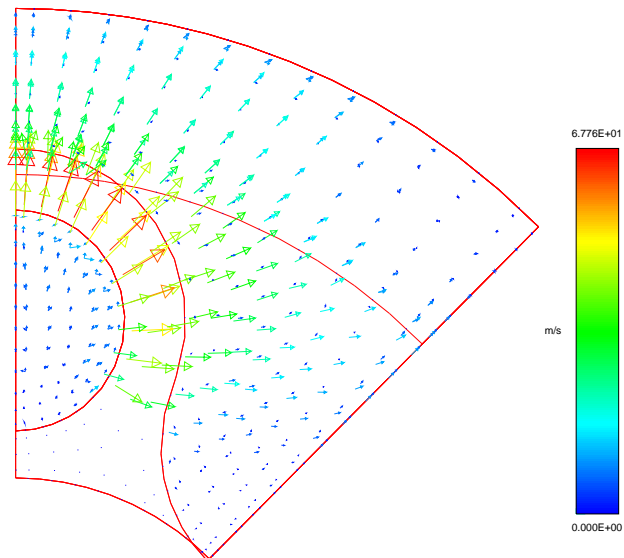


FIG. 20 - Champ de vitesse proche de l'intrados du clapet au débit maximal.

10 Conclusion

Le but de ce rapport a été d'introduire d'un point de vue mécanique et numérique une technique générale de couplage fluide structure en grands déplacements. Par une écriture appropriée des équations de bilan et par un traitement purement cinématique des conditions de couplage, on a introduit une formulation couplant automatiquement un problème de fluide visqueux écrit en formulation ALE et un problème de structure élastique écrit en Lagrangien total. Le schéma de discrétisation proposé approche les composantes cartésiennes de la vitesse par des espaces d'éléments finis définis indépendamment sur chaque domaine. L'intégration en temps utilise un schéma implicite global qui garantit la stabilité du problème approché. La formulation finale respecte totalement les invariances géométriques (même après discrétisation), n'introduit pas d'instabilité artificielle, utilise des algorithmes faciles à analyser et implémenter, et permet d'utiliser les modèles récents de coques géométriquement exacts. Elle a été appliquée avec succès à des problèmes industriels tels que le calcul d'amortisseurs hydrauliques.

Le travail de développement en cours s'attaque d'une part à l'amélioration de la modélisation des coques (résultats d'existence, de convergence, analyse du blocage membranaire), d'autre part à l'étude de la stabilité de ces problèmes couplés, enfin à l'amélioration des interfaces informatiques afin de pouvoir traiter le problème par couplage de codes industriels existants.

Références

- [1] BATINA J.T. [1989]: *Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes*, AIAA 27th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada.
- [2] BATOZ J.L., GEOFFROY P. [1983]: *Evaluation d'un élément fini triangulaire pour l'analyse non linéaire statique de coques minces*, Rapport DRET/UTC n° 81/032.
- [3] BERNADOU M. [1994]: *Méthodes d'Eléments Finis pour des Problèmes de Coques Minces*, Collection RMA, Masson, Paris.
- [4] BISPLINGHOFF R.L., ASHLEY H., HALFMAN R.L. [1957]: *Aeroelasticity*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- [5] BOURGAT J.F., LE TALLEC P., MALLINGER F., PERTHAME B., QIU Y. [1994]: *Couplage Boltzmann Navier-Stokes*, Rapport de Recherche Inria N 2281.
- [6] BOURGAT J.F., LE TALLEC P. [1994]: *Etude Cinétique des Couches Limites en Régime Transitionnel*, Rapport de Contrat CEA-CESTA G93-13117.
- [7] BRANDSTATTER W. & AL. [1994]: *FIRE, User's manual*, Ed. by AVL-GmbH.
- [8] CARRIVE M. [1995]: *Modélisation intrinsèque et analyse numérique d'un problème de coque mince en grands déplacements*, Thèse de l'Université de Paris IX.

-
- [9] CARRIVE M., LE TALLEC P., MOURO J. [1995]: *Approximations par Eléments Finis d'un modèle de coques minces géométriquement exact*, Revue Européenne des Eléments Finis, 4, **5-6**, pp. 633-662.
- [10] CIARLET P.G. [1987]: *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam.
- [11] COSSERAT E., COSSERAT F. [1909]: *Théorie des corps déformables*, Traité de Physique, Hermann, Paris.
- [12] CRISFIELD M.A. [1990]: *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley and Sons, Chichester. New York. Brisbane. Toronto. Singapore.
- [13] DESTUYNDER P. [1990]: *Modélisation des coques minces élastiques*. Masson.
- [14] DHATT G. [1970]: *An efficient triangular shell element*, AIAA J., Vol.8, N 11 Vol.1.
- [15] FAHRAT, LESOINNE M. [1995]: *Geometric Conservation Laws for Aeroelastic Computations using Unstructured Dynamic Meshes*, Proc. 12th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, San Diego CA.
- [16] GASTALDI F., GASTALDI L. [1993]: *On a domain decomposition approach for the transport equation: theory and finite element approximations*, IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 14.
- [17] IBRAHIMBEGOVIC A. [1994]: *Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations - Part II: Computational aspects*, Comp. Methods Appl. Mech. Eng., 118, pp. 285-305.
- [18] KOITER W.T. [1966]: *On the Non-linear Theory of Thin Elastic Shells*, Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, series B, 69, pp. 1-54.
- [19] LE TALLEC P. [1994]: *Numerical Methods for Nonlinear Three-dimensional Elasticity*. Handbook of Numerical Analysis, Vol III.
- [20] LE TALLEC P. [1994], *Domain Decomposition Methods in Computational Mechanics*, Computational Mechanics Advances, Vol 1, **2** North-Holland, 121-220.
- [21] LE TALLEC P., MALLINGER F. [1995]: *Modélisation d'un gaz Polyatomique, Equations de Grad Généralisées et Validité de la Solution des Equations de Navier-Stokes*, Rapport de contrat final - Hermes.
- [22] LE TALLEC P., MALLINGER, F. [1996] : *Adaptive Multimodel Domain Decomposition in Fluid Mechanics*, Proceedings of the eighth international symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Beijing, May 95, J. Wiley and Sons.

- [23] LE TALLEC P., MANI, S. [1996] : *Analyse Numérique d'un modèle de coques minces de Koiter discrétisé en base cartésienne*, (en préparation).
- [24] MALLINGER F. [1996] : *Couplage adaptatif des équations de Boltzmann et de Navier-Stokes*, Thèse de l'Université de Paris Dauphine.
- [25] MARINI L.D., QUARTERONI A. [1989] : *A relaxation procedure for Domain Decomposition Methods using Finite Elements*, Num. Math., 55, 575-598.
- [26] MARROCCO A. [1984] : *Simulations numériques dans la fabrication des circuits à semiconducteurs (Process Modelling)*, Rapport de Recherche INRIA N 305.
- [27] MOURO J. [1996] : *Interactions fluide structure en grands déplacements. Résolution numérique et application aux composants hydrauliques automobiles*, Thèse de l'Ecole Polytechnique.
- [28] MOURO J. [1996] : *Numerical Simulation of Nonlinear Fluid Structure Interactions Problems and Application to hydraulic shock-absorbers*, Proc. of Third World Conf. in Appl. Computational Fluid Dynamics, Basel World User Days CFD, B. Löffler & A. Müller Eds., Freiburg i. Br.
- [29] PIPERNO S. [1995] : *Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide structure*, Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [30] QUARTERONI A. [1990] : *Domain Decomposition Method for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Technical report UMSI90/246, (Supercomputer Institute, University of Minnesota).
- [31] QUARTERONI A., SACCHI LANDRIANI G., VALLI A. [1989] : *Coupling of Viscous and Inviscid Stokes Equations via a Domain Decomposition Method for Finite Elements*, Technical report UTM89-287 (Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento).
- [32] RIKS E. [1979] : *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, Int. J. of Solids and Struc., Vol. 15, pp. 529-551.
- [33] SABIR A.B. AND LOCK A.C. [1973] : *The Application of Finite Elements to the Large Deflexion Geometrically Nonlinear Behaviour of Cylindrical Shells*, in Variational Methods in Engineering, Ed. C. A. Brebbia and H. Tottenham, Southampton University Press, pp. 7/66-7/75.
- [34] SIMO J.C., FOX D.D., RIFAI M.S. [1989] : *On a stress resultant geometrically exact shell model, Part I: Formulation and optimal parametrization*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 72 267-304.
- [35] SIMO J.C., FOX D.D., RIFAI M.S. [1990] : *On a stress resultant geometrically exact shell model, Part III: Computational aspects of the nonlinear theory*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 79 21-70.

- [36] TIDRIRI M.D. [1994]: *Domain decomposition for incompatible nonlinear models*, INRIA Research Report 2435.



Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

 diteur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399