



HAL
open science

Eléments finis et condensation de masse pour les équations de Maxwell: le cas 2D

Alexandre Elm kies, Patrick Joly

► **To cite this version:**

Alexandre Elm kies, Patrick Joly. Eléments finis et condensation de masse pour les équations de Maxwell: le cas 2D. [Rapport de recherche] RR-3035, INRIA. 1996. inria-00073658

HAL Id: inria-00073658

<https://inria.hal.science/inria-00073658>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Eléments finis et condensation de masse pour les
équations de Maxwell: le cas 2D*

Alexandre Elmekies Patrick Joly

N° 3035

Novembre 1996

_____ THÈME 4 _____



*R*apport
de recherche



Eléments finis et condensation de masse pour les équations de Maxwell: le cas 2D

Alexandre Elmkins Patrick Joly *

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet ondes

Rapport de recherche n ° 3035 — Novembre 1996 — 83 pages

Résumé : Dans ce travail, nous nous proposons de construire de nouveaux espaces d'éléments finis d'arêtes adaptés à la résolution des équations de Maxwell avec pour objectif de résoudre le délicat problème de la condensation de masse, y compris en milieu anisotrope. A notre connaissance, ce problème n'a pas reçu de solution vraiment satisfaisante jusqu'à présent. Pour cela, nous sommes amenés à enrichir les espaces de Nédélec et à introduire certaines composantes normales comme degrés de liberté supplémentaires. Les schémas obtenus sont alors analysés par l'intermédiaire d'une étude de dispersion numérique en maillage régulier. Dans ce rapport, nous nous limitons au cas bidimensionnel et considérons aussi bien les maillages triangulaires que rectangulaires. L'étude du cas tridimensionnel fera l'objet d'un rapport ultérieur.

Mots-clé : Eléments finis d'arête, équations de Maxwell, condensation de masse, milieux anisotropes

(Abstract: pto)

* INRIA, Domaine de Voluceau, B.P.105 78153 Le Chesnay cedex, France.

Finite elements and mass lumping for Maxwell's equations: the 2D case

Abstract: In this work, we propose to construct a new family of edge finite elements for the resolution of Maxwell equations with the objective of solving the difficult problem of mass lumping, including the case of anisotropic media. To our knowledge, this question has not received, up to now, a satisfactory solution. To attain this goal, we are led to enrich the usual Nédélec space and to introduce additional degrees of freedom associated with the normal components of the vector fields. The schemes obtained in this way are analyzed through their numerical dispersion on regular meshes. In this report, we limit ourselves to the 2D case but we consider triangular meshes as well as rectangular ones.

Key-words: Edge finite elements, Maxwell equations, mass lumping, anisotropic media

Table des matières

1	Introduction. Position du problème	4
2	Les nouveaux éléments en maillage triangulaire	6
2.1	Nouvel élément fini de référence	6
2.2	Construction des fonctions de base de l'élément	8
2.3	Construction de l'espace d'approximation \tilde{V}_h	9
2.4	Cas des milieux anisotropes	13
3	Les nouveaux éléments en maillage rectangulaire	15
3.1	Nouvel élément fini de référence	17
3.2	Construction de l'espace d'approximation \tilde{V}_h	19
3.3	Cas des milieux anisotropes	20
4	Analyse en maillage triangulaire régulier	20
4.1	Construction du problème semi-discret associé au nouvel élément fini d'arête.	21
4.1.1	Maillage régulier en triangles rectangles	21
4.1.2	Maillage régulier en triangles équilatéraux	24
4.2	Analyse de la dispersion numérique du schéma semi discret.	28
4.2.1	Introduction	28
4.2.2	Courbes de dispersion numérique	29
4.2.3	Ordre de la dispersion numérique	31
4.2.4	Comparaison avec le schéma correspondant aux éléments finis de Nédélec du premier ordre (matrice de masse non condensée).	32
4.3	Discrétisation en temps	36
4.3.1	Introduction	36
4.3.2	Analyse de la stabilité: résultats généraux	36
4.3.3	Stabilité des schémas pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$ et \mathcal{R}_1	37
4.3.4	Analyse de la dispersion	37
5	Analyse en maillage rectangulaire régulier	44
5.1	Construction du problème semi-discret associé au nouvel élément fini d'arête.	45
5.2	Analyse de la dispersion numérique.	46
5.2.1	Ordre de la dispersion numérique	47
5.2.2	Comparaison avec le schéma correspondant aux éléments finis de Nédélec du premier ordre (matrice de masse non condensée et condensée).	48
5.3	Discrétisation en temps	51
5.3.1	Analyse de la stabilité	52
5.3.2	Analyse de la dispersion	52
6	Les éléments d'ordre supérieur en maillage triangulaire	56
6.1	Élément fini d'arête triangulaire du second ordre	57
6.2	Nouvel élément fini d'arête du second ordre	59
6.3	Rappels sur les formules de quadrature symétriques dans un triangle	60
6.4	Formule de quadrature pour l'élément fini du second ordre	61
6.5	Analyse en maillage triangulaire régulier	62
6.5.1	Problème semi-discret et dispersion numérique associée	62
6.5.2	Discrétisation en temps et ordre élevé	65
6.5.3	Analyse de la stabilité	66
6.5.4	Analyse de la dispersion numérique pour le schéma discrétisé en temps et en espace	67
6.6	Cas du troisième ordre	69
6.6.1	Élément fini d'arête triangulaire du troisième ordre	69
6.6.2	Une formule de quadrature pour l'élément du troisième ordre	71

7	Les éléments finis d'ordre supérieur en maillage rectangulaire	71
7.1	Élément fini d'arête quadrangulaire du second ordre	71
7.2	Nouvel élément fini d'arête quadrangulaire du second ordre	73
7.3	Une formule de quadrature pour l'élément fini quadrangulaire du second ordre	74
7.4	Analyse en maillage quadrangulaire régulier	75
7.4.1	Problème semi-discret et dispersion numérique associée	75
7.4.2	Discrétisation en temps d'ordre élevé	78
7.4.3	Analyse de stabilité	78
7.4.4	Analyse de la dispersion numérique pour le schéma discrétisé en temps et en espace	78
7.5	Cas du troisième ordre	80
7.5.1	Élément fini d'arête quadrangulaire du troisième ordre	80
7.6	Nouvel élément fini d'arête quadrangulaire du troisième ordre	82
7.7	Une formule de quadrature pour l'élément fini quadrangulaire du troisième ordre	82
8	Conclusion et perspectives	82

1 Introduction. Position du problème

Les éléments finis d'arête tels qu'ils ont été introduits par Nédélec [8] (voir aussi [9]) s'imposent comme un outil naturel pour la résolution des équations de Maxwell. En effet, d'un point de vue mathématique, ils permettent de construire des espaces d'approximation conforme de l'espace $H(\text{rot}, \Omega)$ qui intervient de façon naturelle dans la formulation variationnelle de ces équations. D'autre part, d'un point de vue physique et pratique, ils permettent par exemple de tenir compte des discontinuités des champs électromagnétiques aux interfaces entre différents matériaux mais aussi d'implémenter de façon simple des conditions aux limites de type conducteur parfait ou impédance de surface. Toutefois, si l'on s'intéresse à des problèmes en régime transitoire et en géométrie complexe, ceux-ci imposent en principe l'utilisation de maillages triangulaires (2D) où tétraédriques (3D). On se heurte alors de façon surprenante au problème de la condensation de masse, opération indispensable pour que le schéma numérique, après discrétisation en temps, reste explicite, propriété indispensable pour garantir l'efficacité de la méthode. Nous illustrons cette difficulté sur le cas de l'équation 2D en milieu homogène pour simplifier, une fois celle-ci écrite sous la forme d'un système du second ordre:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \text{rot}(\text{rot} \vec{u}) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \quad (1)$$

où

– \vec{u} désigne ici indifféremment le champ électrique ou le champ magnétique.

$$- \text{rot} \vec{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$- \text{rot} \psi = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right)^t. \text{rot} \text{ est l'adjoint formel de } \text{rot}.$$

La formulation variationnelle de (1) s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \vec{u}(t) \in V = H(\text{rot}, \mathbb{R}^2) \text{ tel que:} \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^2} \vec{u}(t) \cdot \vec{v} dx + \int_{\mathbb{R}^2} \text{rot}(\vec{u}) \text{rot}(\vec{v}) dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in V \end{array} \right. \quad (2)$$

V_h désignant un sous-espace d'approximation par éléments finis de V , le problème semi-discrétisé en espace s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \vec{u}_h(t) \in V_h \text{ tel que:} \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^2} \vec{u}_h(t) \cdot \vec{v}_h dx + \int_{\mathbb{R}^2} \text{rot}(\vec{u}_h) \text{rot}(\vec{v}_h) dx = 0 \quad \forall \vec{v}_h \in V_h \end{array} \right. \quad (3)$$

ce que l'on écrit sous forme "matricielle":

$$M_h \frac{d^2 U_h}{dt^2} + A_h U_h = 0 \quad (4)$$

On dit qu'il y a condensation de masse si, dans une base convenable $\{\vec{w}_i\}$ de V_h , la matrice M_h dite "de masse" est diagonale. Dans le cas de l'équation des ondes scalaire et de l'utilisation d'éléments finis de type P_1 -Lagrange, cette propriété n'est obtenue que via une approximation consistant à calculer les intégrales intervenant dans la matrice de masse à l'aide de formules de quadrature appropriées (voir [10], [6]). Dans le cas des éléments finis $H(rot)$ pour des maillages rectangulaires, la structure particulière des fonctions de base (qui sont en fait des produits tensoriels) permet d'obtenir la condensation de masse à l'aide de formules de quadrature monodimensionnelles, et ceci peut se généraliser aux éléments d'ordre supérieur conformément aux travaux de Cohen-Monk (cf. [3]). En revanche, une telle stratégie se révèle inopérante avec les éléments finis d'arête, ceci même pour les éléments finis d'ordre le plus bas, lorsque l'on s'intéresse à un maillage en triangles. En effet, désignons par \mathcal{T}_h une triangulation de \mathbb{R}^2 . On a:

$$V_h = \{ \vec{v}_h \in H(rot, \mathbb{R}^2) / \forall K \in \mathcal{T}_h, \vec{v}_h|_K = \vec{a}_K + b_K(x_2, -x_1)^t \text{ où } (\vec{a}_K, b_K) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \} \quad (5)$$

Il est bien connu qu'à chaque arête est associé un degré de liberté, et donc une fonction de base, qui n'est autre que la valeur constante de la composante tangentielle du champ le long de cette arête. La fonction de base associée a pour support les deux triangles ayant cette arête en commun. Pour évaluer la matrice de masse, il faut calculer $\int \vec{u} \cdot \vec{v}$, \vec{u} et \vec{v} désignant deux fonctions de base de V_h . Sur chaque triangle, la formule de quadrature naturellement candidate est:

$$\int_K \vec{u} \cdot \vec{v} dx \simeq \frac{\text{mes}(K)}{3} \sum_{i=1}^3 \vec{u}(M_i) \vec{v}(M_i) \quad (6)$$

où les points M_i sont les milieux des arêtes de K . En fait, $\vec{u} \cdot \vec{v}$ étant sur chaque triangle K un polynôme de degré 2, il se trouve que la formule (6) est exacte! Pour comprendre pourquoi on n'a pas condensation de masse, on peut simplement faire apparaître les composantes tangentielles et normales des champs \vec{u} et \vec{v} sur chacune des arêtes en écrivant:

$$\int_K \vec{u} \vec{v} dx = \frac{\text{mes}(K)}{3} \sum_{i=1}^3 u_\tau(M_i) v_\tau(M_i) + \frac{\text{mes}(K)}{3} \sum_{i=1}^3 u_\nu(M_i) v_\nu(M_i) \quad (7)$$

ce qui revient à décomposer la matrice de masse sous la forme $M_h = M_h^\tau + M_h^\nu$. Le fait que les quantités $u_\tau(M_i)$ soient les degrés de liberté entraîne que la matrice M_h^τ est diagonale. En revanche, la matrice M_h^ν n'est pas diagonale car les composantes normales de chaque fonction de base ne sont en général nulles en aucun des points M_i ! En d'autres termes, le défaut de condensation de masse par quadrature apparaît dans le fait que seules certaines composantes du champ (et non le champ lui-même) soient les degrés de liberté.

Quoi qu'il en soit, il est clair que l'obtention de la condensation de masse pour les éléments finis $H(rot)$ passe par un traitement spécifique. Ce problème a été récemment abordé par Haugazeau et Lacoste [7] selon le point de vue suivant: cherchons une approximation de $\int \vec{u} \cdot \vec{v} dx$ sous la forme d'une forme bilinéaire diagonale des degrés de liberté, soit $\sum_i \alpha_i u_\tau(M_i) v_\tau(M_i)$, et cherchons à déterminer les coefficients α_i pour que cette quantité

soit égale à $\int \vec{u} \vec{v} dx$ lorsque \vec{u} et \vec{v} sont des champs de vecteurs constants, ce qui assure au moins la consistance de la méthode. Cette procédure aboutit mais présente quelques inconvénients, notamment pour les problèmes transitoires. En effet, en fonction de la qualité du maillage, certains coefficients α_i peuvent être négatifs (voire nuls) ce qui conduit à un schéma semi-discret inconditionnellement instable! Ceci se produit en fait dès que l'un des angles du maillage est supérieur à $\frac{\pi}{2}$. Dans ce travail, nous adopterons une démarche radicalement différente qui s'inspire de celle adoptée dans [10] pour le cas des éléments finis de Lagrange d'ordre élevé. Il s'agit d'enrichir l'espace d'éléments finis de façon à ce que l'utilisation de formules de quadrature à poids positifs mène simultanément à la condensation de masse et à la stabilité, si possible sans perte de précision.

Comme nous l'avons vu, l'absence de condensation de masse pour les éléments finis d'arête usuels peut être attribuée au fait que les composantes normales des champs ne figurent pas parmi les degrés de liberté. L'idée que nous avons suivie consiste à réincorporer ces quantités dans l'ensemble des degrés de liberté sans toutefois forcer le raccord des composantes normales d'un triangle à l'autre. Ainsi l'espace construit contiendra-t-il l'espace V_h décrit plus haut, ce qui garantit qu'il n'y a pas de perte de précision. En outre, insistons sur le fait que

nos nouveaux éléments finis ont la propriété fort intéressante d’aboutir à la condensation de masse même en milieu anisotrope, c’est à dire lorsque ε et μ sont tensoriels. De façon plus précise, nous verrons comment notre stratégie ramène les calculs effectifs à des inversions de matrices 3×3 , ce qui garantit en particulier que le coût calcul de chaque itération, après discrétisation en temps, reste proportionnel au nombre d’arêtes du maillage (cette propriété n’est pas obtenue par exemple par la méthode d’Haugazeau-Lacoste). C’est cette constatation qui nous a conduit également à construire, dans le même esprit (qui consiste à rajouter les degrés de liberté associés aux composantes normales), des éléments finis sur maillages rectangulaires. En effet, la condensation de masse est perdue avec les éléments standards dès que l’on est en milieu anisotrope dont les axes principaux ne coïncident pas avec les directions du maillage. Nos nouveaux éléments finis en maillage rectangulaire permettent de contourner cet obstacle.

La suite de cet article s’organise comme suit. La section 2 est consacrée à la construction de nouveaux éléments en maillage triangulaire. Nous construisons en particulier les fonctions de base et démontrons la propriété de condensation de masse en milieu anisotrope. Le paragraphe 3 est consacré à la construction des nouveaux éléments en maillage rectangulaire. Dans les paragraphes 4 et 5, nous analysons la précision et la stabilité des schémas obtenus grâce à l’utilisation de nos nouveaux éléments. Nous nous limitons à une analyse en maillage régulier (nous considérons deux types de maillages pour les triangles), ce qui permet en particulier d’étudier la dispersion et l’anisotropie numériques qui fournissent une évaluation qualitative et quantitative de la précision de nos schémas¹. Pour les maillages rectangulaires, nous montrons que les schémas ainsi obtenus ont, outre la propriété de condensation de masse en milieu anisotrope, d’excellentes propriétés de dispersion numérique. Enfin, avec la section 6, nous montrons sur un exemple comment nous pouvons généraliser notre stratégie pour construire des éléments d’ordre supérieur.

2 Les nouveaux éléments en maillage triangulaire

2.1 Nouvel élément fini de référence

Commençons par considérer le cas d’un seul triangle K dont nous désignons par S_1, S_2, S_3 les sommets, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les coordonnées barycentriques associées et (M_1, M_2, M_3) les milieux des cotés conformément à la figure 1.

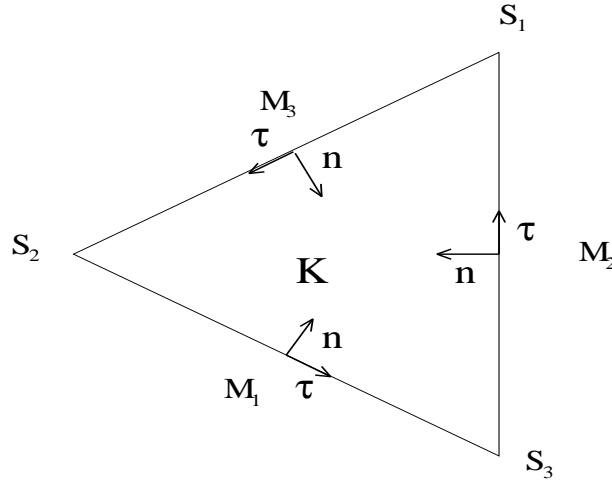


FIG. 1 – *Élément fini de référence 2D. Arête 1= S_2S_3 , Arête 2= S_1S_3 , Arête 3= S_1S_2 .*

Nous choisissons comme degrés de liberté les quantités

$$\Sigma = \{\vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_1), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_2), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_3), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_1), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_2), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_3)\}$$

où le vecteur normal \vec{n} est choisi rentrant par rapport au triangle, et $\vec{\tau}$ tel que le repère $(\vec{\tau}, \vec{n})$ soit orthonormé. Il s’agit maintenant de décrire l’espace de champs de vecteurs 2D qui sera Σ -unisolvant. Le plus simple consiste

1. L’étude de maillages non réguliers fera l’objet d’un travail ultérieur.

à décrire les fonctions de base associées aux nouveaux degrés de liberté, à savoir $\vec{w} \cdot \vec{n}(M_i)$.

Nous considérons les trois fonctions de base:

$$\begin{cases} \vec{w}_1 &= \nabla \lambda_1 \cdot \lambda_2 \lambda_3 \\ \vec{w}_2 &= \nabla \lambda_2 \cdot \lambda_1 \lambda_3 \\ \vec{w}_3 &= \nabla \lambda_3 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \end{cases} \quad (8)$$

Notons que chaque fonction \vec{w}_i vérifie, si $\{i, j, k\}$ désigne une permutation circulaire de $\{1, 2, 3\}$,

$$\begin{cases} \vec{w}_i &= \vec{0} \text{ sur les arêtes } \{j, k\} \\ \vec{w}_i \cdot \vec{\tau} &= 0 \text{ sur l'arête } \{i\} \\ \vec{w}_i \cdot \vec{n} &= \|\nabla \lambda_i\| \lambda_j \lambda_k \text{ sur l'arête } \{i\} \end{cases} \quad (9)$$

(voir figure 2).

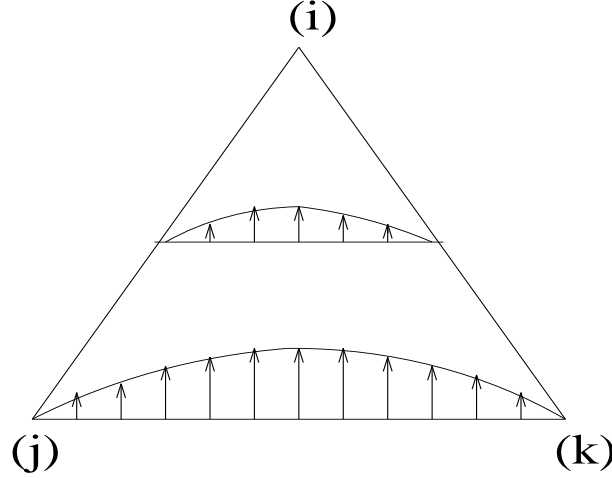


FIG. 2 – La fonction de base \vec{w}_i

Nous considérons l'espace de champs de vecteurs suivant:

$$\tilde{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}_1 \oplus [\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3]$$

où $\mathcal{R}_1 = \{\vec{u}(x) = \vec{a} + b(x_2, -x_1)^t, \vec{a} \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}\}$.

Remarque 2.1 L'espace de champs de vecteurs recherché étant de dimension 6, $(P_1)^2$ semble constituer un choix naturel. Pourtant, une étude de dispersion sur maillage régulier montre que ce choix mène à un schéma semi-discret qui n'est pas consistant.

Nous avons le

Théorème 2.1 L'espace $\tilde{\mathcal{R}}_1$ est de dimension 6 et l'ensemble Σ est $\tilde{\mathcal{R}}_1$ -unisolvant. De plus, $\vec{w} \cdot \vec{\tau}$ est constant par arête si \vec{w} désigne un élément quelconque de $\tilde{\mathcal{R}}_1$.

Démonstration:

Notons que si $\vec{w} \in \mathcal{R}_1$, il est bien connu que $\vec{w} \cdot \vec{\tau}$ est constant par arête. Il suffit alors de remarquer que $\vec{w}_i \cdot \vec{\tau}$ est identiquement nul sur le bord de K (pour $i = 1, 2, 3$) pour conclure que cette propriété est satisfaite pour tout élément \vec{w} de $\tilde{\mathcal{R}}_2$.

Supposons maintenant que $\vec{w} \in \tilde{\mathcal{R}}_1$ vérifie:

$$\vec{w} \cdot \vec{n}(M_i) = 0 \text{ et } \vec{w} \cdot \vec{\tau}(M_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

Nous avons

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \sum_{j=1}^3 \alpha_j \vec{w}_j, \quad \vec{w}_0 \in \mathcal{R}_1, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$$

Donc,

$$\vec{w} \cdot \vec{\tau}(M_i) = 0 = \vec{w}_0 \cdot \vec{\tau}(M_i), \quad i = 1, 2, 3$$

(puisque $\vec{w}_j \cdot \vec{\tau}(M_i) = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3$). Or les degrés de libertés $\vec{w} \cdot \vec{\tau}(M_i)$ sont \mathcal{R}_1 -unisolvants, donc $\vec{w}_0 = \vec{0}$. Par suite,

$$\vec{w} \cdot \vec{n}(M_i) = 0 = \alpha_i \cdot (\vec{w}_i \cdot \vec{n})(M_i) = \alpha_i \frac{\|\nabla \lambda_i\|}{4}$$

Donc $\alpha_i = 0$ pour tout i ce qui entraîne $\vec{w} = \vec{0}$. Σ est donc $\widetilde{\mathcal{R}}_1(K)$ -unisolvant et par suite $\dim \widetilde{\mathcal{R}}_1(K) = 6$. ■

Remarque 2.2 • On a la double inclusion:

$$\mathcal{R}_1 \subset \widetilde{\mathcal{R}}_1(K) \subset (P_2)^2$$

Par contre, considéré comme sous espace de $(P_2)^2$, l'espace $\widetilde{\mathcal{R}}_1(K)$ dépend du triangle K . Par exemple, si K désigne le triangle de référence usuel: $K = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$, il est facile de voir que $\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{R}}_1(K) \iff$

$$\begin{cases} u_1 = a_1 - bx_2 + \alpha_1 x_2(1 - x_1 - x_2) + \beta x_1 x_2 \\ u_2 = a_2 + bx_1 + \alpha_2 x_1(1 - x_1 - x_2) + \beta x_1 x_2 \end{cases} \quad (10)$$

alors que si $K = \{x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_1 + x_2 \geq -1\}$,

$$\begin{cases} u_1 = a_1 - bx_2 + \alpha_1 x_2(1 + x_1 + x_2) + \beta x_1 x_2 \\ u_2 = a_2 + bx_1 + \alpha_2 x_1(1 + x_1 + x_2) + \beta x_1 x_2 \end{cases} \quad (11)$$

C'est ce fait qui justifie la notation $\widetilde{\mathcal{R}}_1(K)$ et non $\widetilde{\mathcal{R}}_1$. En revanche, on peut vérifier que l'espace $\widetilde{\mathcal{R}}_1(K)$ est "affinement équivalent" (en un sens à préciser) à l'espace des polynômes définis sur l'élément de référence par les formules (10).

• Pour ce type d'élément fini, il est plus usuel de choisir, pour les degrés de liberté, des moments sur les arêtes plutôt que des valeurs ponctuelles (cf [8]). Ainsi, nous pourrions remplacer l'ensemble Σ par les quantités:

$$\tilde{\Sigma} = \left\{ \int_{\Gamma_1} \vec{u} \cdot \vec{\tau} d\sigma, \int_{\Gamma_2} \vec{u} \cdot \vec{\tau} d\sigma, \int_{\Gamma_3} \vec{u} \cdot \vec{\tau} d\sigma, \int_{\Gamma_1} \vec{u} \cdot \vec{n} d\sigma, \int_{\Gamma_2} \vec{u} \cdot \vec{n} d\sigma, \int_{\Gamma_3} \vec{u} \cdot \vec{n} d\sigma \right\}$$

où Γ_1 (resp. Γ_2, Γ_3) est l'arête S_2S_3 (resp. S_1S_3, S_1S_2). Pour trouver les nouvelles fonctions de base, il suffirait de modifier celles que nous allons construire par le facteur multiplicatif adéquat. Nous avons ici fait le choix de valeurs ponctuelles dans l'optique de l'utilisation de formules de quadrature.

2.2 Construction des fonctions de base de l'élément

Il est facile d'explicitier les fonctions de base associées aux degrés de liberté de Σ . En effet, celles associées aux $\vec{w} \cdot \vec{n}(M_i)$ sont connues par construction et données par:

$$\vec{s}_i = \frac{4}{\|\nabla \lambda_i\|} \vec{w}_i$$

Pour celles associées aux degrés de liberté $\vec{w} \cdot \vec{\tau}(M_i)$, il est utile d'introduire les fonctions de base de l'espace \mathcal{R}_1 associées aux même degrés de liberté, à savoir:

$$\vec{q}_i = \nabla \lambda_j \lambda_k - \nabla \lambda_k \lambda_j$$

On peut alors vérifier que la fonction de base \vec{r}_i associée à $\vec{w} \cdot \vec{\tau}(M_i)$ est donnée par:

$$\vec{r}_i = \vec{q}_i + \sum_{l=1}^3 \alpha_{il} \vec{s}_l$$

avec $\alpha_{il} = -(\vec{q}_i \cdot \vec{n})(M_l)$.

2.3 Construction de l'espace d'approximation \tilde{V}_h

Nous définissons l'espace:

$$\tilde{V}_h = \left\{ \vec{v}_h \in H(\text{rot}, \Omega) / \forall K \in \mathcal{T}_h, \vec{v}_h|_K \in \widetilde{\mathcal{R}}_1(K) \right\}$$

Notons que comme $\mathcal{R}_1 \subset \widetilde{\mathcal{R}}_1(K)$ pour tout K , \tilde{V}_h contient l'espace V_h des éléments finis usuels. Pour décrire plus précisément l'espace V_h , il est utile d'introduire:

- \mathcal{A}_i : l'ensemble des arêtes intérieures de \mathcal{T}_h , de cardinal N_i .
- \mathcal{A}_f : l'ensemble des arêtes frontières de \mathcal{T}_h , de cardinal N_f .

A toute arête a de \mathcal{A}_i , nous associons une orientation arbitraire, donnée par le vecteur $\vec{\tau}$, qui permet de définir de façon univoque K_a^g et K_a^d comme les deux triangles ayant l'arête a en commun. On note alors \vec{n}^g (resp. \vec{n}^d) le vecteur normal à cette arête, rentrant par rapport au triangle K_a^g (resp. K_a^d), conformément à la figure 3.

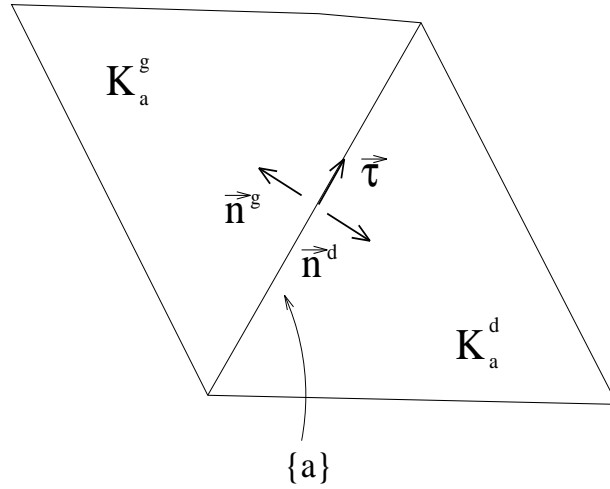


FIG. 3 – Triangles communs à l'arête a

Nous définissons alors les deux fonctions de base \vec{s}_a^g et \vec{s}_a^d par:

- $\text{supp } \vec{s}_a^g \subseteq K_a^g$
- $\vec{s}_a^g|_{K_a^g} = \vec{s}_j(K_a^g)$ si a est l'arête j de K_a^g
- $\text{supp } \vec{s}_a^d \subseteq K_a^d$
- $\vec{s}_a^d|_{K_a^d} = \vec{s}_j(K_a^d)$ si a est l'arête j de K_a^d

Compte tenu des propriétés des fonctions $\vec{s}_j(K)$ décrites dans la section précédente, il est clair que \vec{s}_a^d et \vec{s}_a^g sont deux éléments de \tilde{V}_h (le fait que \vec{s}_a^d et \vec{s}_a^g soient dans $H(\text{rot}, \Omega)$ vient du fait que \vec{s}_a^d - resp. \vec{s}_a^g - s'annule identiquement sur $\partial(K_a^d)$ - resp. $\partial(K_a^g)$ -).

Nous définissons également la fonction de base \vec{r}_a par:

- $\text{supp } \vec{r}_a = K_a^d \cup K_a^g$
- $\vec{r}_a|_{K_a^g} = \vec{r}_j(K_a^g)$ si a est l'arête j de K_a^g
- $\vec{r}_a|_{K_a^d} = \vec{r}_j(K_a^d)$ si a est l'arête j de K_a^d

Le fait que $\vec{r}_a \cdot \vec{\tau}$ s'annule identiquement sur $\partial(K_a^g \cup K_a^d)$ entraîne que \vec{r}_a appartient à $H(\text{rot}, \Omega)$ et donc à l'espace \tilde{V}_h .

De même, à toute arête a de \mathcal{A}_f , nous associons l'unique triangle admettant a pour arête et définissons les deux fonctions \vec{r}_a et \vec{s}_a de \tilde{V}_h par:

- $\text{supp } \vec{s}_a = K_a$
- $\vec{s}_a|_{K_a} = \vec{s}_j(K_a)$ si a est l'arête j de K_a
- $\text{supp } \vec{r}_a = K_a$
- $\vec{r}_a|_{K_a} = \vec{r}_j(K_a)$ si a est l'arête j de K_a

Nous avons alors le:

Théorème 2.2 \tilde{V}_h est l'espace engendré par

$$\bigcup_{a \in \mathcal{A}_i} \{\vec{r}_a, \vec{s}_a^g, \vec{s}_a^d\} \cup \bigcup_{a \in \mathcal{A}_f} \{\vec{r}_a, \vec{s}_a\}$$

Démonstration:

Désignons par W_h l'espace engendré par les $\vec{r}_a|_{a \in \mathcal{A}_i \cup \mathcal{A}_f}$ et les $\vec{s}_a, \vec{s}_a^d, \vec{s}_a^g$. Nous allons maintenant montrer que toute fonction de \tilde{V}_h est dans W_h . Notons tout d'abord que si $\vec{v}_h \in \tilde{V}_h$, alors, pour toute arête a , la quantité $v_h \cdot \tau|_a$ a un sens: elle est même constante sur chaque arête a . En revanche, sur chaque arête intérieure $a \in \mathcal{A}_i$, il faut définir deux traces normales:

- $(\vec{v}_h \cdot \vec{n})|_a^g = [(v_h|_{K_a^g}) \cdot \vec{n}^g]|_a$
- $(\vec{v}_h \cdot \vec{n})|_a^d = [(v_h|_{K_a^d}) \cdot \vec{n}^d]|_a$

Il s'agit dans chaque cas de fonctions polynomiales de degré 2. Si a est une arête frontière, alors $(v_h \cdot n)|_a$ a un sens tout à fait intrinsèque.

Soit alors $v_h \in \tilde{V}_h$. Posons, M_a désignant le milieu de l'arête a :

$$\begin{aligned} \vec{e}_h = \vec{v}_h &= \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \{(v_h \cdot n)_a^g(M_a) \vec{s}_a^g + (v_h \cdot n)_a^d(M_a) \vec{s}_a^d\} \\ &- \sum_{a \in \mathcal{A}} (v_h \cdot \tau)_a(M_a) \vec{r}_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_f} (v_h \cdot n)_a(M_a) \vec{s}_a \end{aligned} \quad (12)$$

2. Par construction, nous avons évidemment $W_h \subset \tilde{V}_h$.

Par construction des fonctions $\vec{r}_a, \vec{s}_a, \vec{s}_a^g, \vec{s}_a^d$ il est immédiat de vérifier que

$$\begin{cases} (\vec{\varepsilon}_h \cdot \vec{n})|_a^g(M_a) = (\vec{\varepsilon}_h \cdot \vec{n})|_a^d(M_a) = 0 & \forall a \in \mathcal{A}_i \\ (\vec{\varepsilon}_h \cdot \vec{n})|_a(M_a) = 0 & \forall a \in \mathcal{A}_f \\ (\vec{\varepsilon}_h \cdot \vec{\tau})|_a(M_a) = 0 & \forall a \in \mathcal{A} \end{cases} \quad (13)$$

Par ailleurs, $\vec{\varepsilon}_K = \vec{\varepsilon}_{h|_K} \in \mathcal{R}_1(K)$. Or, les égalités précédentes entraînent que les composantes tangentielle et normales de $\vec{\varepsilon}_K$ s'annulent au milieu de chaque arête de K . La propriété d'unisolvance établie au théorème 1 permet alors de conclure que $\vec{\varepsilon}_K = \vec{0}$. Ceci étant vrai pour tout K dans \mathcal{T}_h , il s'ensuit que $\vec{\varepsilon}_h = \vec{0}$ ce qui montre que \vec{v}_h est combinaison linéaire des fonctions $\{\vec{s}_a^g, \vec{s}_a^d, a \in \mathcal{A}_i\}, \{\vec{s}_a, a \in \mathcal{A}_f\}, \{\vec{r}_a, a \in \mathcal{A}\}$. ■

Si N_i désigne le nombre d'arêtes intérieures et N_f le nombre d'arêtes frontières, nous avons donc:

$$\dim \tilde{V}_h = 3N_i + 2N_f$$

(à comparer avec $\dim V_h = N_i + N_f$). En effet, à chaque arête intérieure de \mathcal{T}_h , nous avons trois degrés de liberté de $v_h \in \tilde{V}_h$, à savoir:

- la composante tangentielle de \vec{v}_h en M_a (ou tout autre point de a)
- les deux composantes normales de \vec{v}_h en M_a

Pour une arête frontière, ce nombre de degrés de liberté tombe à deux car alors \vec{v}_h n'a qu'une trace normale (cf. fig 4).

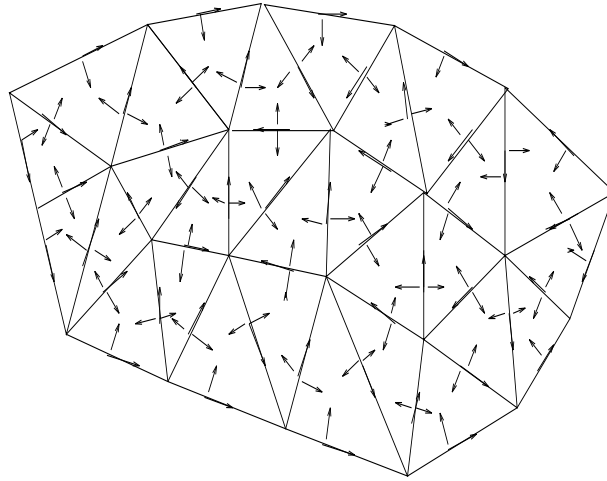


FIG. 4 – Maillage triangulaire pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$ et degrés de libertés associés.

Nous avons par ailleurs deux types de fonctions de base (cf. fig 5):

- celle de type \vec{r} , associées aux degrés de liberté tangentiels, à support dans deux triangles (sauf pour les arêtes frontières): ce sont ces fonctions qui généralisent celles de l'élément $H(rot)$ usuel.
- celle de type \vec{s} , associées aux degrés de liberté normaux, à support dans un seul triangle. Ce sont en quelque sorte les nouvelles fonctions de base.

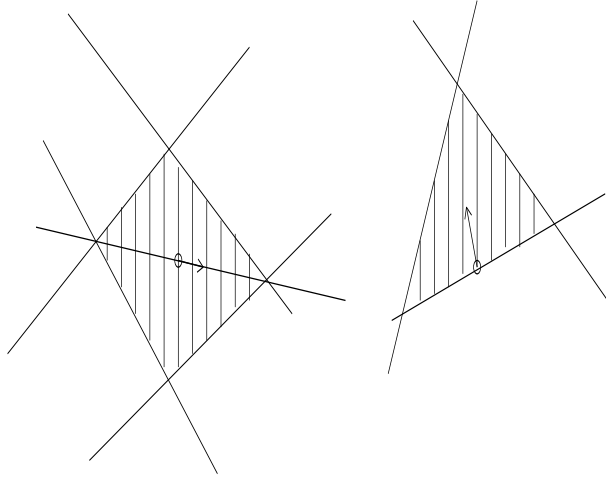


FIG. 5 – A gauche: fonction de base “ \vec{r} ”. A droite: fonction de base “ \vec{s} ”.

Commentaires:

Le fait d’avoir distingué deux traces normales sur chaque arête autorise bien entendu les discontinuités de la composante normale de chaque champ de vecteurs à travers chaque arête du maillage. C’est cette propriété qui permet d’affirmer que \tilde{V}_h réalise une bonne approximation de $H(rot, \Omega)$. Ceci est par ailleurs évident car

$$\forall u \in H(rot, \Omega), \quad \inf_{v_h \in \tilde{V}_h} \|u - v_h\|_{rot, \Omega} \leq \inf_{v_h \in \tilde{V}_h} \|u - v_h\|_{rot, \Omega}$$

et par conséquent, si $\{\mathcal{T}_h, h > 0\}$ désigne une famille régulière de triangulations de $\bar{\Omega}$, on a:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in \tilde{V}_h} \|u - v_h\|_{rot, \Omega} = 0$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat, immédiat par construction mais essentiel sur le plan pratique, relatif à la condensation de masse dans l’espace \tilde{V}_h . Tout d’abord, si K désigne un triangle, nous désignons par $\oint_K f dx$ la forme linéaire sur $C^0(K)$ définie par:

$$\oint_K f dx = \frac{\text{mes}(K)}{3} \sum_{i=1}^3 f(M_i)$$

Rappelons que:

$$\forall f \in P_2(K) \quad \oint_K f dx = \int_K f dx$$

Considérons alors la forme bilinéaire définie sur \tilde{V}_h par:

$$(\vec{u}_h, \vec{v}_h)_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \vec{u}_h \cdot \vec{v}_h dx$$

(qui approche le produit scalaire dans $(L^2(\Omega))^2$). Nous avons le

Théorème 2.3 La forme bilinéaire $(\vec{u}_h, \vec{v}_h) \longrightarrow (\vec{u}_h, \vec{v}_h)_h$ est diagonalisée dans la base $\mathcal{B}_h = \{\vec{s}_a^g, \vec{s}_a^d, a \in \mathcal{A}_i\} \cup \{\vec{s}_a, a \in \mathcal{A}_f\} \cup \{\vec{r}_a, a \in \mathcal{A}\}$

2.4 Cas des milieux anisotropes

Pour le cas d'un milieu anisotrope, on considère le système du second ordre suivant:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \vec{rot}(\mu^{-1} \vec{rot} \vec{E}) = 0 \quad x \in \Omega, t > 0 \quad (14)$$

où \vec{E} désigne ici le champ électrique, ε et μ la permittivité électrique et la perméabilité magnétique. Ce système provient des équations de Maxwell 3D pour un domaine Ω invariant par translation, et pour lequel le champ électrique est normal à la direction de translation (mode transverse magnétique). De manière générale, ε est une matrice symétrique définie positive (dépendant a priori de la variable d'espace), ce qui complique, comme nous allons le voir, le problème de la condensation de masse. Par la suite, nous conserverons les notations introduites dans la section précédente.

La formulation variationnelle de (14) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \vec{u}(t) \in V = H(\vec{rot}, \Omega) \text{ tel que:} \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \varepsilon \vec{E}(t) \cdot \vec{F} dx + \int_{\Omega} \mu^{-1} \vec{rot}(\vec{E}) \vec{rot}(\vec{F}) dx = 0 \quad \forall \vec{F} \in V \end{array} \right. \quad (15)$$

Si \mathcal{T}_h est une triangulation de Ω et \tilde{V}_h l'espace d'approximation de V associé défini dans la section précédente, le problème semi discrétisé en espace s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \vec{E}_h(t) \in \tilde{V}_h \text{ tel que:} \\ \frac{d^2}{dt^2} (\varepsilon \vec{E}_h(t), \vec{F}_h)_h + (\mu^{-1} \vec{rot}(\vec{E}_h), \vec{rot}(\vec{F}_h)) dx = 0 \quad \forall \vec{F}_h \in \tilde{V}_h \end{array} \right. \quad (16)$$

où $(\cdot, \cdot)_h$ est la forme bilinéaire définie sur \tilde{V}_h dans la section précédente et (\cdot, \cdot) le produit scalaire $L^2(\Omega)$. (16) peut s'écrire sous forme "matricielle":

$$M_{\varepsilon, h} \frac{d^2 E_h}{dt^2} + A_{\mu, h} E_h = 0 \quad (17)$$

Ainsi, pour le cas anisotrope, les termes de la matrice de masse calculés au moyen de la formule de quadrature sont de la forme $(\varepsilon \vec{u}, \vec{v})_h$ où \vec{u} et \vec{v} sont deux fonctions de base. Or, a priori, la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_{\varepsilon, h}$ définie sur \tilde{V}_h par:

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\varepsilon, h} = (\varepsilon \vec{u}, \vec{v})_h$$

n'est pas diagonalisée dans la base \mathcal{B}_h des fonctions de base.

Pourtant, nous allons voir que cette difficulté peut être contournée et que via une numérotation adaptée de la base \mathcal{B}_h , la matrice $M_{\varepsilon, h}$ est diagonale par blocs de petite taille (2×2 ou 3×3).

Nous établissons d'abord le lemme suivant:

Lemme 2.1 *Soit \vec{u} et \vec{v} deux fonctions de base de \tilde{V}_h (de type \vec{r} ou \vec{s}) associées à deux arêtes distinctes. Alors, \vec{u} et \vec{v} sont orthogonales pour la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_{\varepsilon, h}$.*

Démonstration:

On note $\{a_1\}$ (resp. $\{a_2\}$) l'arête associée à \vec{u} (resp. \vec{v}). Nous avons deux cas possibles:

- $\{a_1\}$ et $\{a_2\}$ sont deux arêtes n'ayant aucun triangle en commun (cf. figure 6).

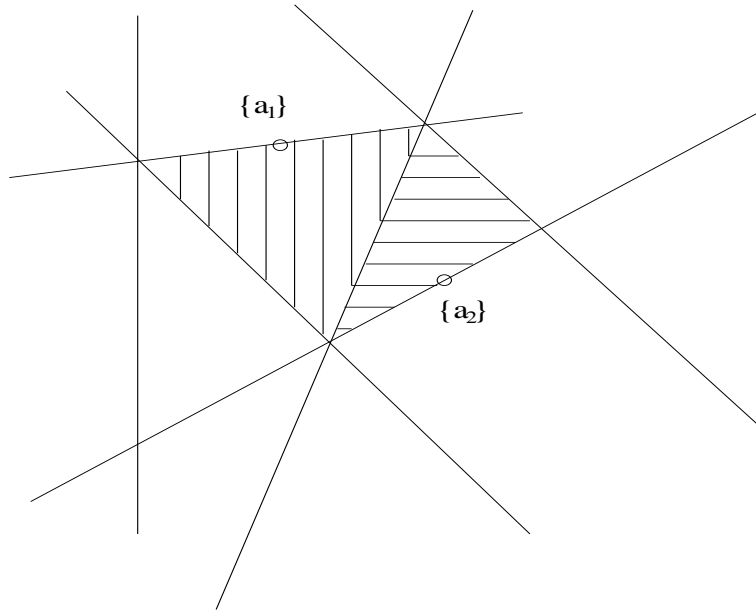


FIG. 6 – 1^{er} cas: les deux arêtes n'ont pas de triangle en commun

Il est clair qu'alors $\text{Supp } \vec{u} \cap \text{Supp } \vec{v} = \emptyset$ et de même $\text{Supp } \varepsilon \vec{u} \cap \text{Supp } \vec{v} = \emptyset$. On a donc immédiatement $(\vec{u}, \vec{v})_{\varepsilon, h} = 0$

- $\{a_1\}$ et $\{a_2\}$ sont deux arêtes d'un même triangle K . On note $\{a_3\}$ sa troisième arête (cf. figure 7)

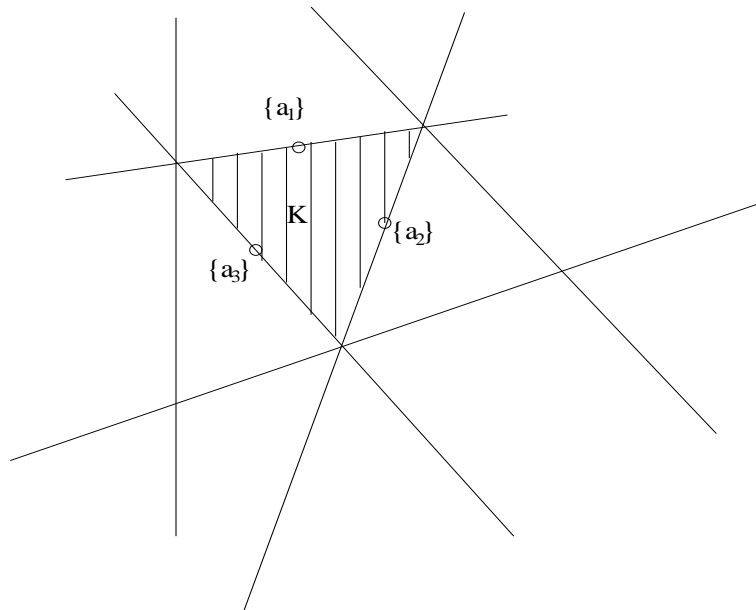


FIG. 7 – 2^{ème} cas: les deux arêtes ont un triangle en commun

On note M_1, M_2, M_3 les milieux respectifs de $\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}$. D'autre part, pour $i = 1, 2, 3$, on note $\vec{\tau}_i$ le vecteur tangent à $\{a_i\}$ en M_i et \vec{n}_i le vecteur normal à $\{a_i\}$ en M_i et rentrant par rapport au triangle K . D'une part, il est clair que si $\{a_1\}$ est une arête intérieure et \vec{u} est la fonction de type \vec{s} associée au degré de liberté normal en M_1 sortant par rapport au triangle K , $\text{Supp } \vec{u} \cap \text{Supp } \vec{v} = \emptyset$ et donc $(\vec{u}, \vec{v})_{\varepsilon, h} = 0$. De même,

si $\{a_2\}$ est une arête intérieure et \vec{v} est la fonction de type \vec{s} associée au degré de liberté normal en M_2 sortant par rapport au triangle K . En dehors de ces deux cas, $\text{Supp } \vec{u} \cap \text{Supp } \vec{v} = K$ et donc

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\varepsilon, h} = \oint_K \varepsilon \vec{u} \cdot \vec{v} dx$$

Si on note \vec{w}_1 (resp. \vec{w}_2) la restriction de \vec{u} (resp. \vec{v}) au triangle K , on a, par définition des degrés de liberté:

$$\begin{cases} \vec{w}_1(M_l) \cdot \vec{\tau}_l = \vec{w}_1(M_l) \cdot \vec{\tau}_l = 0 \text{ pour } l = 2, 3 \\ \vec{w}_2(M_l) \cdot \vec{\tau}_l = \vec{w}_2(M_l) \cdot \vec{\tau}_l = 0 \text{ pour } l = 1, 3 \end{cases} \quad (18)$$

Ainsi:

$$\begin{cases} \vec{w}_1(M_l) = \vec{0} \text{ pour } l = 2, 3 \\ \vec{w}_2(M_l) = \vec{0} \text{ pour } l = 1, 3 \end{cases} \quad (19)$$

Par conséquent,

$$\oint_K \varepsilon \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 dx = \frac{\text{mes}(K)}{3} \sum_{l=1,2,3} \varepsilon(M_l) \vec{w}_1(M_l) \cdot \vec{w}_2(M_l) = 0$$

On a donc bien:

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\varepsilon, h} = 0$$

■

On se donne alors une numérotation des arêtes de la triangulation \mathcal{T}_h de sorte que l'on puisse écrire

$$\begin{cases} \mathcal{A}_f = \{a_i, \quad i = 1 \cdots N_f\} \\ \mathcal{A}_i = \{a_i, \quad i = N_f + 1 \cdots N_f + N_i\} \end{cases} \quad (20)$$

On considère la base $\tilde{\mathcal{B}}_h$ définie par

$$\tilde{\mathcal{B}}_h = \left\{ \vec{r}_{a_1}, \vec{s}_{a_1}, \dots, \vec{r}_{a_{N_f}}, \vec{s}_{a_{N_f}}, \vec{r}_{a_{N_f+1}}, \vec{s}_{a_{N_f+1}}^g, \vec{s}_{a_{N_f+1}}^d \cdots \vec{r}_{a_{N_f+N_i}}, \vec{s}_{a_{N_f+N_i}}^g, \vec{s}_{a_{N_f+N_i}}^d \right\}$$

Le théorème suivant est la conséquence directe du lemme qui précède:

Théorème 2.4 *La matrice de la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_{\varepsilon, h}$ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}_h$ est diagonale par blocs.*

Remarque 2.3 – *Les seules fonctions non orthogonales pour la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_{\varepsilon, h}$ étant celles associées à une même arête, la taille du bloc correspondant dépend de la position de cette arête. Il sera de taille 3×3 dans le cas d'une arête intérieure et de taille 2×2 dans le cas d'une arête frontière.*

– *Ce résultat est quasi optimal. En effet, même une méthode de type différences finies imposerait, en milieu anisotrope, l'inversion locale du tenseur ε (de taille 2×2).*

3 Les nouveaux éléments en maillage rectangulaire

Le problème de la condensation de masse pour les éléments finis d'arête en maillage rectangulaire a déjà fait l'objet d'une étude menée par Gary Cohen et Peter Monk (cf. [3]). Nous rappelons rapidement la démarche qu'ils ont adoptée dans le cas des éléments finis du premier ordre.

On considère le carré de référence $K = [0, 1]^2$, dont nous désignons par S_1, S_2, S_3, S_4 les sommets, et (M_1, M_2, M_3, M_4) les milieux des cotés conformément à la figure 8.

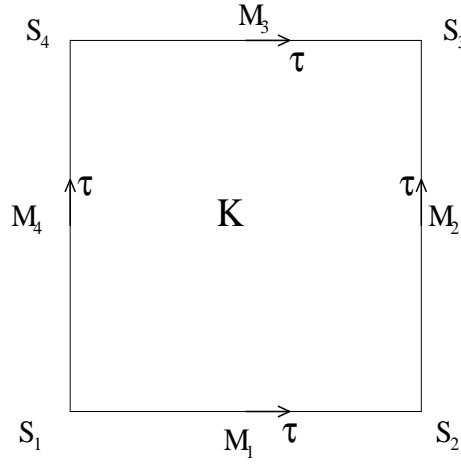


FIG. 8 – *Elément fini d'arête rectangulaire du premier ordre: carré de référence et degrés de liberté associés. Arête 2= S_2S_3 , Arête 3= S_3S_4 , Arête 4= S_4S_1 .*

Pour l'élément fini rectangulaire du premier ordre, rapellons que l'ensemble des degrés de liberté choisi est:

$$\Sigma = \{\vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_1), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_2), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_3), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_4)\}$$

et que l'espace de champs de vecteur $\mathcal{F}_1 = \{\vec{u}(x) = \vec{a} + (bx_2, cx_1)^t, \vec{a} \in \mathbb{R}^2, b, c \in \mathbb{R}\}$ est Σ -unisolvant.

Il faut alors noter que si $\vec{w} \in \mathcal{F}_2$, $\vec{w} \cdot \vec{\tau}$ est constant par arête. D'autre part, dans le cas d'un carré, et plus généralement d'un rectangle dont les cotés sont parallèles aux axes des coordonnées, $\vec{\tau} = \vec{e}_1$ ou $\vec{\tau} = \vec{e}_2$, si (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est la base canonique de \mathbb{R}^2 . Par conséquent, les fonctions de base associée au degrés de liberté de type $\vec{u} \cdot \vec{e}_1(M_i)$ (resp. $\vec{u} \cdot \vec{e}_2(M_i)$) sont de la forme $(u_1, 0)^t$ (resp. $(0, u_2)^t$) où le polynôme u_1 (resp. u_2) vaut 1 sur l'une des deux arêtes parallèles à \vec{e}_1 (resp. \vec{e}_2) et s'annule sur l'autre.

Ainsi, si \vec{u} et \vec{v} sont deux fonctions de base, on a deux possibilités:

- \vec{u} et \vec{v} sont orthogonales et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- \vec{u} et \vec{v} sont parallèles de direction commune \vec{e}_i et $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v_i$.

Pour obtenir la condensation de masse, il suffit, dans le deuxième cas, de calculer $\int_K \vec{u} \vec{v} dx$ en utilisant une formule de quadrature faisant intervenir les milieux des deux arêtes parallèles à la direction commune à \vec{u} et \vec{v} , c'est-à-dire

$$\int_K \vec{u} \vec{v} dx \simeq \frac{1}{2} (\vec{u}(M_1) \vec{v}(M_1) + \vec{u}(M_3) \vec{v}(M_3))$$

ou

$$\int_K \vec{u} \vec{v} dx \simeq \frac{1}{2} (\vec{u}(M_2) \vec{v}(M_2) + \vec{u}(M_4) \vec{v}(M_4))$$

ces deux formules étant exactes sur $Q_1(K)$.

Cette démarche aboutit et se généralise aux éléments d'ordre supérieur. Cependant, il est clair que si l'on se place dans le cas d'un milieu anisotrope de permittivité électrique ε , les termes de la matrice de masse sont, comme nous l'avons vu, de la forme $\int_K \varepsilon \vec{u} \vec{v} dx$. Il suffit alors que ε soit un tenseur non diagonal pour que la condensation de masse soit perdue.

C'est cette remarque qui nous a conduit à construire un nouvel élément fini pour maillage rectangulaire en suivant la même démarche que celle adoptée pour les triangles. Dans la mesure où le cas des rectangles n'introduit pas de difficulté particulière, nous établirons des résultats analogues à ceux établis dans la section 2 sans rentrer dans le détail des démonstrations qui suivent de très près celles qui concernent les triangles.

3.1 Nouvel élément fini de référence

Nous considérons le carré de référence $K = [0, 1]^2$, dont nous désignons par S_1, S_2, S_3, S_4 les sommets, et (M_1, M_2, M_3, M_4) les milieux des cotés conformément à la figure 9.

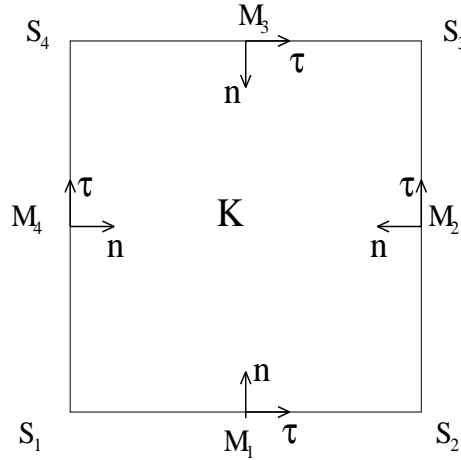


FIG. 9 – Nouvel élément fini de référence 2D pour maillage rectangulaire. Arête 1= S_1S_2 , Arête 2= S_2S_3 , Arête 3= S_3S_4 , Arête 4= S_4S_1 .

Remarque 3.1 Pour travailler dans le cas général d'un rectangle de longueur h_1 et de largeur h_2 , il suffit de se ramener au carré de référence par un changement de variable affine de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

où $A = \text{diag}(h_1, h_2)$.

On pose

$$\begin{cases} f_1 = y \\ f_2 = x - 1 \\ f_3 = y - 1 \\ f_4 = x \end{cases} \quad (22)$$

de sorte que le polynôme f_i s'annule sur l'arête $\{i\}$. On choisit comme degrés de liberté

$$\Sigma = \{\vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_1), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_2), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_3), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_4), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_1), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_2), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_3), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_4)\}$$

où le vecteur normal \vec{n} est choisi rentrant par rapport au carré et $\vec{\tau}$ tel que le repère $(\vec{\tau}, \vec{n})$ soit orthonormé. Il s'agit maintenant de décrire l'espace de champs de vecteurs 2D qui sera Σ -unisolvant. Comme dans la section précédente, le plus simple consiste à décrire les fonctions de base associées aux nouveaux degrés de liberté, à savoir $\vec{u} \cdot \vec{n}(M_i)$.

Nous considérons les quatre fonctions de base:

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = f_2 f_3 f_4 \nabla f_1 \\ \vec{w}_2 = f_1 f_3 f_4 \nabla f_2 \\ \vec{w}_3 = f_1 f_2 f_4 \nabla f_3 \\ \vec{w}_4 = f_1 f_2 f_3 \nabla f_4 \end{cases} \quad (23)$$

Notons que chaque fonction \vec{w}_i vérifie, si $\{i, j, k, l\}$ désigne une permutation circulaire de $\{1, 2, 3, 4\}$,

$$\begin{cases} \vec{w}_i = \vec{0} \text{ sur les arêtes } \{j, k, l\} \\ \vec{w}_i \cdot \vec{\tau} = 0 \text{ sur l'arête } \{i\} \\ \vec{w}_i \cdot \vec{n} = \|\nabla f_i\| f_j f_k f_l \text{ sur l'arête } \{i\} \end{cases} \quad (24)$$

(voir figure 10).

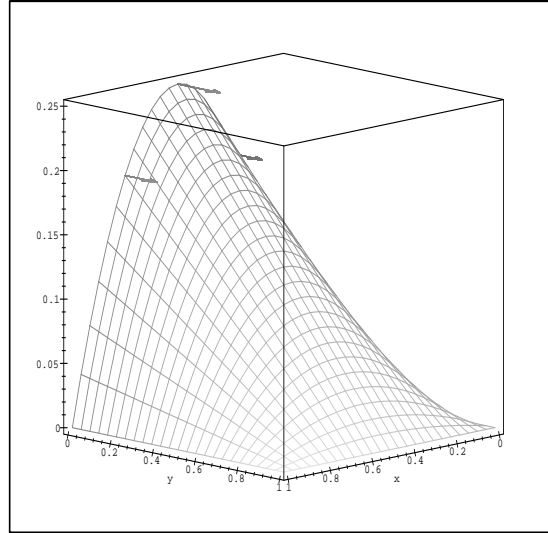


FIG. 10 – La fonction de base \vec{w}_i

Nous considérons l'espace de champs de vecteurs suivant:

$$\tilde{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_1 \oplus [\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4]$$

où $\mathcal{F}_1 = Q_{0,1} \times Q_{1,0} = \{\vec{u}(x) = \vec{a} + (bx_2, cx_1)^t, \vec{a} \in \mathbb{R}^2, b, c \in \mathbb{R}\}$. On a la double inclusion:

$$Q_{0,1} \times Q_{0,1} \subset \tilde{\mathcal{F}}_2 \subset Q_{1,2} \times Q_{2,1}$$

Nous avons le

Théorème 3.1 *L'espace $\tilde{\mathcal{F}}_1$ est de dimension 8 et l'ensemble Σ est $\tilde{\mathcal{F}}_1$ -unisolvant. De plus, $\vec{w} \cdot \vec{\tau}$ est constant par arête si \vec{w} désigne un élément quelconque de $\tilde{\mathcal{F}}_1$.*

Démonstration:

Le raisonnement est identique à celui suivi pour la démonstration du théorème analogue pour les triangles. Nous n'en donnerons donc que les grandes lignes.

Il faut juste noter que, comme pour les triangles, si $\vec{w} \in \mathcal{F}_1$, alors $\vec{w} \cdot \vec{\tau}$ est constant par arête. De plus, les fonctions de base \vec{w}_i ont la même propriété que celles introduites pour les triangles, à savoir que $\vec{w}_i \cdot \vec{\tau}$ est identiquement nul sur le bord de K (pour $i = 1, 2, 3, 4$). Par conséquent, cette propriété est satisfaite pour tout élément \vec{w} de $\tilde{\mathcal{F}}_1$.

On utilise alors le fait que les $\vec{w} \cdot \vec{\tau}(M_i)$ sont \mathcal{F}_1 -unisolvants pour achever la démonstration. ■

Comme dans le cas des triangles, il est facile d'expliciter les fonctions de base associées aux degrés de liberté de Σ . En effet, celles associées aux $\vec{w} \cdot \vec{n}(M_i)$ sont connues par construction et données par:

$$\vec{s}_i = \frac{4}{\|\nabla f_i\|} \vec{w}_i$$

Pour la fonction \vec{r}_i associée au degré de liberté $\vec{w} \cdot \vec{\tau}(M_i)$, on a une expression analogue à celle établie pour les triangles, à savoir

$$\vec{r}_i = \vec{q}_i + \sum_{l=1}^4 \alpha_{il} \vec{s}_l$$

où les $\{\vec{q}_i \quad i = 1, \dots, 4\}$ sont les fonctions de base de l'élément fini d'arête classique pour le carré et $\alpha_{il} = -(\vec{q}_i \cdot \vec{n})(M_l)$.

3.2 Construction de l'espace d'approximation \tilde{V}_h

Dans cette partie, \mathcal{T}_h désigne un maillage de Ω en rectangles, conformément à la figure 11.

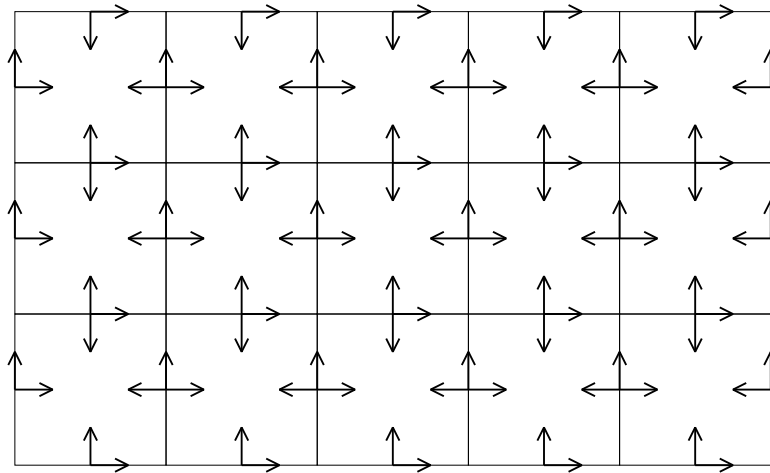


FIG. 11 – Maillage rectangulaire pour \mathcal{F}_1 et degrés de liberté associés

Nous définissons l'espace:

$$\tilde{V}_h = \left\{ \vec{v}_h \in H(\text{rot}, \Omega) / \forall K \in \mathcal{T}_h, \vec{v}_h|_K \in \tilde{\mathcal{F}}_1(K) \right\}$$

De même que pour les triangles, en fixant de manière arbitraire l'orientation de chaque arête du maillage, on définit de façon univoque K_a^g et K_a^d comme les deux triangles ayant l'arête a en commun, conformément à la figure 12.

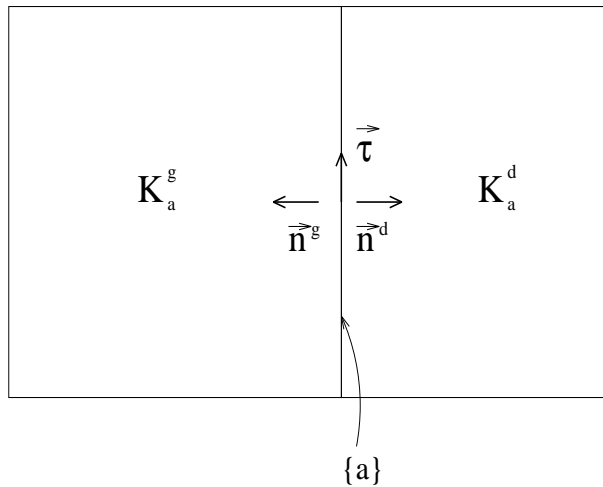


FIG. 12 – Rectangles communs à l'arête a

En adoptant des notations analogues à celles introduites dans la section précédente, on a le

Théorème 3.2 \tilde{V}_h est l'espace engendré par

$$\bigcup_{a \in \mathcal{A}_i} \{\vec{r}_a, \vec{s}_a^g, \vec{s}_a^d\} \cup \bigcup_{a \in \mathcal{A}_f} \{\vec{r}_a, \vec{s}_a\}$$

Si K désigne un rectangle, nous désignons par $\oint_K f dx$ la forme linéaire sur $C^0(K)$ définie par:

$$\oint_K f dx = \frac{\text{mes}(K)}{4} \sum_{i=1}^4 f(M_i)$$

Pour le cas des carrés, on a:

$$\forall f \in Q_1(K) \quad \oint_K f dx = \int_K f dx$$

Considérons alors la forme bilinéaire définie sur \tilde{V}_h par:

$$(\vec{u}_h, \vec{v}_h)_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \oint_K \vec{u}_h \cdot \vec{v}_h dx$$

(qui approche le produit scalaire dans $(L^2)^2$). Nous avons le

Théorème 3.3 La forme bilinéaire $(\vec{u}_h, \vec{v}_h) \longrightarrow (\vec{u}_h, \vec{v}_h)_h$ est diagonalisée dans la base $\mathcal{B}_h = \{\vec{s}_a^g, \vec{s}_a^d, a \in \mathcal{A}_i\} \cup \{\vec{s}_a, a \in \mathcal{A}\} \cup \{\vec{r}_a, a \in \mathcal{A}\}$

3.3 Cas des milieux anisotropes

Le traitement des milieux anisotropes se fait exactement de la même manière que pour les triangles. On a, en posant encore

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\varepsilon, h} = (\varepsilon \vec{u}, \vec{v})_h$$

et

$$\tilde{\mathcal{B}}_h = \left\{ \vec{r}_{a_1}, \vec{s}_{a_1}, \dots, \vec{r}_{a_{N_f}}, \vec{s}_{a_{N_f}}, \vec{r}_{a_{N_f+1}}, \vec{s}_{a_{N_f+1}}^g, \vec{s}_{a_{N_f+1}}^d, \dots, \vec{r}_{a_{N_f+N_i}}, \vec{s}_{a_{N_f+N_i}}^g, \vec{s}_{a_{N_f+N_i}}^d \right\}$$

le résultat suivant:

Théorème 3.4 La matrice de la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_{\varepsilon, h}$ dans la base $\tilde{\mathcal{B}}_h$ est diagonale par blocs de taille 2×2 ou 3×3 .

4 Analyse en maillage triangulaire régulier

Dans cette section, on s'est attaché à analyser les schémas obtenus dans le cadre de la résolution des équations de Maxwell en milieu bidimensionnel homogène isotrope, écrites sous la forme d'un système différentiel du second ordre. Notre problème modèle peut donc s'écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \vec{E} \text{ dans } L^2([0, T], H(\text{rot}, \mathbb{R}^2)) \text{ tel que:} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \end{array} \right. \quad (25)$$

La formulation variationnelle de (25) s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \vec{E} \text{ dans } L^2([0, T], H(\text{rot}, \mathbb{R}^2)) \text{ tel que:} \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^2} \vec{E} \cdot \vec{F} + \int_{\mathbb{R}^2} \text{rot}(\vec{E}) \text{rot}(\vec{F}) = 0 \quad \forall \vec{F} \in H(\text{rot}, \mathbb{R}^2) \end{array} \right. \quad (26)$$

Fixons ici les notations que nous utiliserons dans cette section. Soit \vec{E} un élément de l'espace \tilde{V}_h associé à une triangulation \mathcal{T}_h (supposée régulière) de \mathbb{R}^2 . Soit a une arête de \mathcal{T}_h , dont le milieu a pour coordonnées (ph, qh) où p et q ne sont pas nécessairement des entiers. Cette arête est orientée par le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ et qui sépare deux triangles K_a^g et K_a^d , conformément à la figure 3. Nous désignons alors ci-dessous par \vec{E}_a^g et \vec{E}_a^d les restrictions respectives de \vec{E} à K_a^g et K_a^d et posons:

$$\begin{cases} E_{p,q}^\tau &= \vec{E}(ph, qh) \cdot \vec{\tau} \\ E_{p,q}^{n,g} &= \vec{E}_a^g(ph, qh) \cdot \vec{n}^g \\ E_{p,q}^{n,d} &= \vec{E}_a^d(ph, qh) \cdot \vec{n}^d \end{cases} \quad (27)$$

Ces quantités ne sont autres que les degrés de liberté du champ de vecteur \vec{E} .

4.1 Construction du problème semi-discret associé au nouvel élément fini d'arête.

4.1.1 Maillage régulier en triangles rectangles

On considère un maillage régulier de \mathbb{R}^2 en triangles rectangles obtenu à partir d'un maillage de carrés de cotés h que l'on coupe par une diagonale parallèle à la seconde bissectrice.(cf. figure 13). Ce choix est bien entendu arbitraire. Une étude similaire sera menée dans un second temps pour un maillage régulier de \mathbb{R}^2 en triangles équilatéraux de coté h .

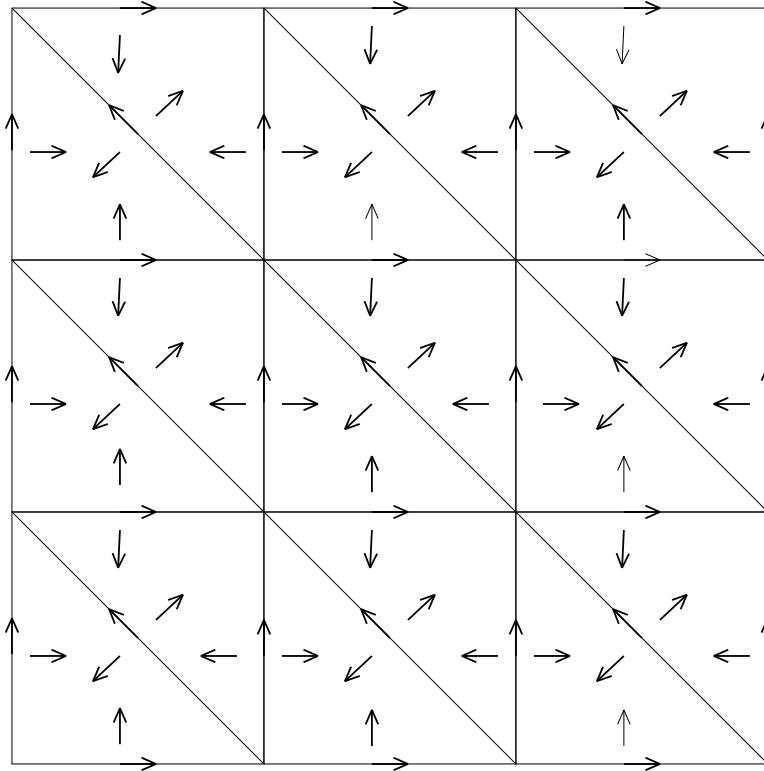


FIG. 13 – Maillage régulier pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$

L'espace de discrétisation \tilde{V}_h associé au nouvel élément fini est défini par:

$$\tilde{V}_h = \left\{ \vec{v}_h \in H(\text{rot}, \mathbb{R}^2) / \forall K \in \mathcal{T}_h, \vec{v}_{h|_K} \in \tilde{\mathcal{R}}_1(K) \right\}$$

Le problème semi-discretisé en espace s'écrit alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{E}_h \in \widetilde{V}_h \text{ tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^2} \vec{E}_h \cdot \vec{F}_h + \int_{\mathbb{R}^2} \text{rot}(\vec{E}_h) \text{rot}(\vec{F}_h) = 0 \quad \forall \vec{F}_h \in \widetilde{V}_h \end{array} \right. \quad (28)$$

Notons, ceci est fondamental pour la suite, que la régularité du maillage permet d'assimiler notre problème à l'étude d'un réseau périodique dont la cellule de base comporte 9 types de degrés de liberté comme indiqué sur la figure 14 ci-dessous:

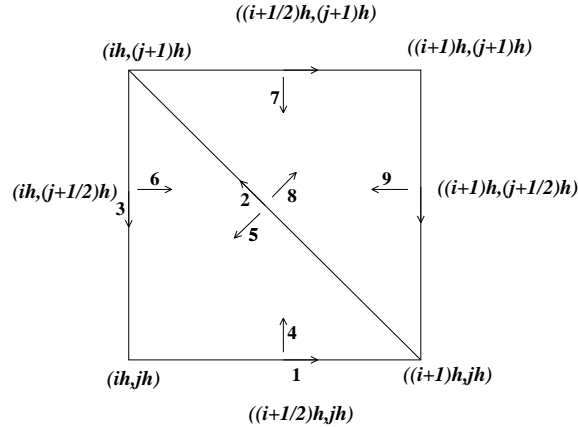


FIG. 14 – La cellule unité pour $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ et ses 9 types de points.

Les degrés de libertés de type 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont notés respectivement $E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau$, $E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^\tau$, $E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau$, $E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g}$, $E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,g}$, $E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,g}$, $E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,d}$, $E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,d}$, $E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,d}$ ($(i,j) \in \mathbb{Z}^2$). A ces degrés de liberté sont associées 9 classes de fonctions de base.

En écrivant (28) pour ces neuf types de fonctions de bases, on obtient le système différentiel formé par (29), (30), (31), qui est équivalent au problème semi-discretisé en espace. (29) regroupe les équations associées aux degrés de liberté de type $E_{\alpha,\beta}^\tau$ (types 1, 2 et 3), (30) ceux de type $E_{\alpha,\beta}^{n,g}$ (types 3, 4 et 5), et (31) ceux de type $E_{\alpha,\beta}^{n,d}$ (types 7, 8 et 9).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \frac{d^2 E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[\frac{20}{3} E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau + 2\sqrt{2}(E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^\tau + E_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^\tau) + \frac{2}{3}(E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau + E_{i+1,j-\frac{1}{2}}^\tau) \right. \\ \left. - \frac{2}{3}(E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g} - E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,d}) + \frac{2\sqrt{2}}{3}(E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,g} - E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,d}) - \frac{2}{3}(E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,g} - E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,d}) \right] = 0 \\ \\ \frac{1}{3} \frac{d^2 E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^\tau}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[2\sqrt{2}(E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau + E_{i+\frac{1}{2},j+1}^\tau) + 12E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^\tau + 2\sqrt{2}(E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau + E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^\tau) \right. \\ \left. - \sqrt{2}(E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g} - E_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n,d}) + \sqrt{2}(E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,g} - E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,d}) \right] = 0 \\ \\ \frac{1}{3} \frac{d^2 E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3}(E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau + E_{i-\frac{1}{2},j+1}^\tau) + 2\sqrt{2}(E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^\tau + E_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^\tau) + \frac{20}{3} E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau \right. \\ \left. + \frac{2}{3}(E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g} - E_{i-\frac{1}{2},j+1}^{n,d}) - \frac{2\sqrt{2}}{3}(E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,g} - E_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,d}) + \frac{2}{3}(E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,g} - E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,d}) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} \frac{d^2 E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[-\frac{2}{3} E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau - \sqrt{2} E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^\tau + \frac{2}{3} E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau + \frac{4}{3} E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g} - \frac{\sqrt{2}}{3} E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,g} - \frac{2}{3} E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,g} \right] = 0 \\ \\ \frac{1}{6} \frac{d^2 E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,g}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau - \frac{2\sqrt{2}}{3} E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau - \frac{\sqrt{2}}{3} E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g} + \frac{2}{3} E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,g} - \frac{\sqrt{2}}{3} E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,g} \right] = 0 \\ \\ \frac{1}{6} \frac{d^2 E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,g}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[-\frac{2}{3} E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau + \sqrt{2} E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^\tau + \frac{2}{3} E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau - \frac{2}{3} E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g} \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2}}{3} E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,g} + \frac{4}{3} E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,g} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6} \frac{d^2 E_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n,d}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[+\frac{2}{3} E_{i+\frac{1}{2},j+1}^\tau + \sqrt{2} E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^\tau - \frac{2}{3} E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^\tau \right. \\ \left. + \frac{4}{3} E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,d} - \frac{\sqrt{2}}{3} E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,d} - \frac{2}{3} E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,d} \right] = 0 \\ \\ \frac{1}{6} \frac{d^2 E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,d}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[-\frac{2\sqrt{2}}{3} E_{i+\frac{1}{2},j+1}^\tau + \frac{2\sqrt{2}}{3} E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^\tau - \frac{\sqrt{2}}{3} E_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n,d} + \frac{2}{3} E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,d} - \frac{\sqrt{2}}{3} E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,d} \right] = 0 \\ \\ \frac{1}{6} \frac{d^2 E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,d}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3} E_{i+\frac{1}{2},j+1}^\tau - \sqrt{2} E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^\tau - \frac{2}{3} E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^\tau - \frac{2}{3} E_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n,d} \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{2}}{3} E_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n,d} + \frac{4}{3} E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,d} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (31)$$

Ecrivons ce système différentiel sous forme matricielle. A chaque $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on associe la cellule unité $[ph, (p+1)h] \times [qh, (q+1)h]$ et le vecteur

$$E_{p,q} = (E_{p,q}^l) \in \mathbb{C}^9$$

où $E_{p,q}^l$ représente le $l^{\text{ième}}$ degré de liberté de la cellule (p, q) pour $1 \leq l \leq 9$, conformément à la numérotation de la figure 14.

Nous désignons par $l_h^2(\mathbb{C}^9)$ l'espace des suites de carré sommable et posons $E^h = (E_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}$. Nous munissons l_h^2 du produit scalaire:

$$(E_h, F_h) = \sum_{p,q} (E_{p,q}, F_{p,q})_{\mathbb{C}^9}$$

où $(\cdot)_{\mathbb{C}^9}$ désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{C}^9 . On montre alors que le problème semi-discret peut se réécrire sous la forme

$$\widetilde{M}_h \frac{d^2 E^h}{dt^2} + \widetilde{A}_h E^h = 0$$

où \widetilde{M}_h et \widetilde{A}_h sont des opérateurs symétriques et positifs de $l_h^2(\mathbb{C}^9)$ (\widetilde{M}_h n'est autre que la matrice de masse condensée). \widetilde{M}_h et \widetilde{A}_h sont des opérateurs à coefficients constants dans le sens où ils commutent avec les opérateurs de translation,

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2, \tau_{pq} \circ \widetilde{M}_h = \widetilde{M}_h \circ \tau_{pq} \text{ et } \tau_{pq} \circ \widetilde{A}_h = \widetilde{A}_h \circ \tau_{pq}$$

où τ_{pq} est définie par

$$S_h = \tau_{pq}(U_h) \Leftrightarrow S_{i,j} = U_{i+p,j+q}$$

4.1.2 Maillage régulier en triangles équilatéraux

En menant la même étude pour un maillage régulier de \mathbb{R}^2 en triangles équilatéraux de cotés h , on met en évidence 9 types de degrés de liberté pour le schéma correspondant au nouvel élément fini (cf. figures 15 et 16).

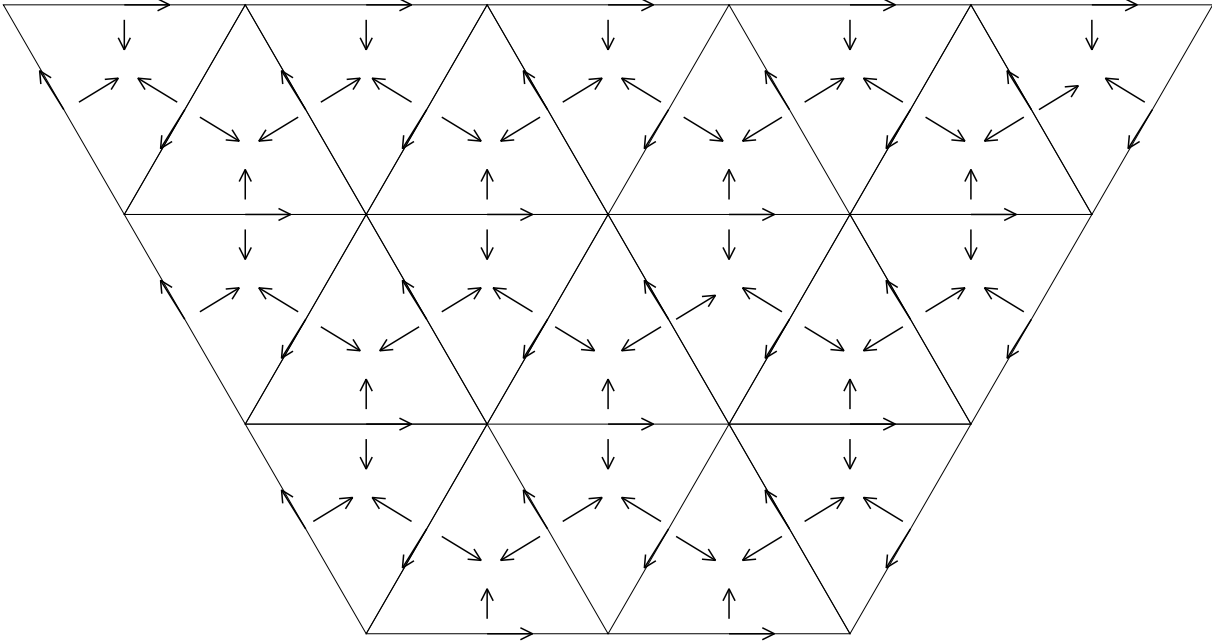
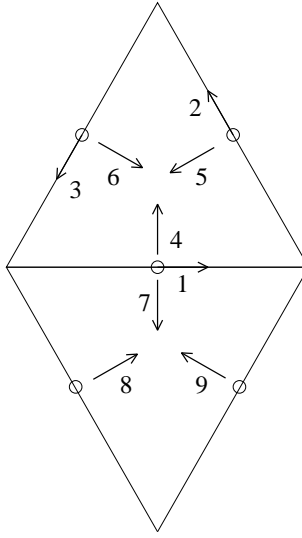


FIG. 15 – Maillage régulier en triangles équilatéraux pour $\widetilde{\mathcal{R}}_1$


 FIG. 16 – Cellule périodique pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$ pour un maillage en triangles équilatéraux

En écrivant l'équation précédente pour les neuf types de fonctions de bases précédents, on obtient un système différentiel qui est équivalent au problème semi-discrétisé. Pour l'écriture de ce système, nous avons adopté une numérotation locale pour simplifier les équations.

- Equation au premier type de nœud

On adopte la numérotation locale représentée dans la figure 17.

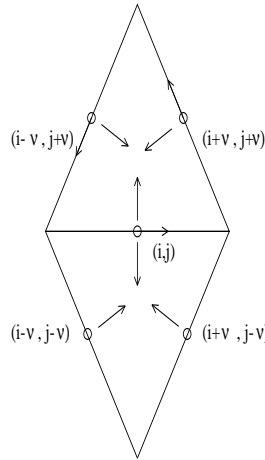


FIG. 17 – Equation au premier type de nœud

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \frac{d^2 E_{i,j}^r}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[4\sqrt{3} E_{i,j}^r + \sqrt{3} (E_{i+\nu, j+\nu}^r + E_{i-\nu, j-\nu}^r) \right. \\ \left. + \sqrt{3} (E_{i-\nu, j+\nu}^r + E_{i+\nu, j-\nu}^r) + (E_{i+\nu, j+\nu}^{n,g} + E_{i+\nu, j+\nu}^{n,d}) - (E_{i-\nu, j+\nu}^{n,g} - E_{i+\nu, j-\nu}^{n,d}) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (32)$$

- Equation au deuxième type de nœud

On adopte la numérotation locale représentée dans la figure 18.

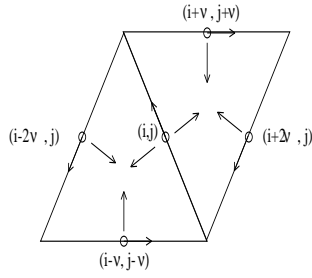


FIG. 18 – Equation au deuxième type de nœud

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \frac{d^2 E_{i,j}^T}{dt^2} + \frac{1}{\hbar^2} \left[\sqrt{3}(E_{i-\nu,j-\nu}^T + E_{i+\nu,j+\nu}^T) + 4\sqrt{3}E_{i,j}^T + \sqrt{3}(E_{i-2\nu,j}^T + E_{i+2\nu,j}^T) \right. \\ \left. - (E_{i-\nu,j-\nu}^{n,g} + E_{i+\nu,j+\nu}^{n,d}) + (E_{i-2\nu,j}^{n,g} + E_{i+2\nu,j}^{n,d}) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (33)$$

- Equation au troisième type de nœud

On adopte la numérotation locale représentée dans la figure 19.

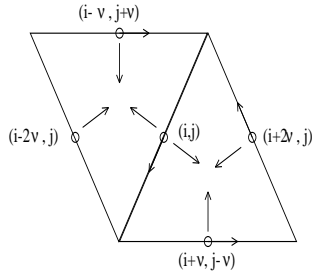


FIG. 19 – Equation au troisième type de nœud

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \frac{d^2 E_{i,j}^T}{dt^2} + \frac{1}{\hbar^2} \left[\sqrt{3}(E_{i+\nu,j-\nu}^T + E_{i-\nu,j+\nu}^T) + \sqrt{3}(E_{i+2\nu,j}^T + E_{i-2\nu,j}^T) + 4\sqrt{3}E_{i,j}^T \right. \\ \left. + (E_{i+\nu,j-\nu}^{n,g} + E_{i-\nu,j+\nu}^{n,d}) - (E_{i+2\nu,j}^{n,g} + E_{i-2\nu,j}^{n,d}) \right] = 0 \end{array} \right. \quad (34)$$

- Equation au quatrième, cinquième et sixième type de nœud

On adopte la numérotation locale représentée dans la figure 20.

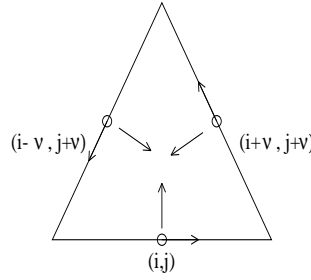


FIG. 20 – Equation au quatrième, cinquième et sixième type de nœud

$$\begin{cases} \frac{1}{6} \frac{d^2 E_{i,j}^{n,g}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[-E_{i+\nu,j+\nu}^\tau + E_{i-\nu,j+\nu}^\tau + \frac{2\sqrt{3}}{3} E_{i,j}^{n,g} - \frac{\sqrt{3}}{3} E_{i+\nu,j+\nu}^{n,g} - \frac{\sqrt{3}}{3} E_{i-\nu,j+\nu}^{n,g} \right] = 0 \\ \frac{1}{6} \frac{d^2 E_{i+\nu,j+\nu}^{n,g}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[E_{i,j}^\tau - E_{i-\nu,j+\nu}^\tau - \frac{\sqrt{3}}{3} E_{i,j}^{n,g} + \frac{2\sqrt{3}}{3} E_{i+\nu,j+\nu}^{n,g} - \frac{\sqrt{3}}{3} E_{i-\nu,j+\nu}^{n,g} \right] = 0 \\ \frac{1}{6} \frac{d^2 E_{i-\nu,j+\nu}^{n,g}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[-E_{i,j}^\tau + E_{i+\nu,j+\nu}^\tau - \frac{\sqrt{3}}{3} E_{i,j}^{n,g} - \frac{\sqrt{3}}{3} E_{i+\nu,j+\nu}^{n,g} + \frac{2\sqrt{3}}{3} E_{i-\nu,j+\nu}^{n,g} \right] = 0 \end{cases} \quad (35)$$

- Equation au septième, huitième et neuvième type de nœud

On adopte la numérotation locale représentée dans la figure 21.

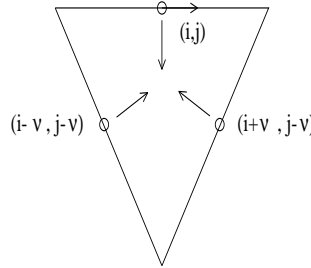


FIG. 21 – Equation au septième, huitième et neuvième type de nœud

$$\begin{cases} \frac{1}{6} \frac{d^2 E_{i,j}^{n,d}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[-E_{i-\nu,j-\nu}^\tau + E_{i+\nu,j-\nu}^\tau + \frac{2\sqrt{3}}{3} E_{i,j}^{n,d} - \frac{\sqrt{3}}{3} E_{i-\nu,j-\nu}^{n,d} - \frac{\sqrt{3}}{3} E_{i+\nu,j-\nu}^{n,d} \right] = 0 \\ \frac{1}{6} \frac{d^2 E_{i-\nu,j-\nu}^{n,d}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[E_{i,j}^\tau - E_{i+\nu,j-\nu}^\tau - \frac{\sqrt{3}}{3} E_{i,j}^{n,d} + \frac{2\sqrt{3}}{3} E_{i-\nu,j-\nu}^{n,d} - \frac{\sqrt{3}}{3} E_{i+\nu,j-\nu}^{n,d} \right] = 0 \\ \frac{1}{6} \frac{d^2 E_{i+\nu,j-\nu}^{n,d}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[-E_{i,j}^\tau + E_{i-\nu,j-\nu}^\tau - \frac{\sqrt{3}}{3} E_{i,j}^{n,d} - \frac{\sqrt{3}}{3} E_{i-\nu,j-\nu}^{n,d} + \frac{2\sqrt{3}}{3} E_{i+\nu,j-\nu}^{n,d} \right] = 0 \end{cases} \quad (36)$$

En menant la même analyse que pour les triangles rectangles, ce système différentiel peut se mettre sous la forme:

$$\widetilde{M}_h^{eq} \frac{d^2 E^h}{dt^2} + \widetilde{A}_h^{eq} E^h = 0$$

où \widetilde{M}_h^{eq} et \widetilde{A}_h^{eq} ont les mêmes propriétés que \widetilde{M}_h et \widetilde{A}_h .

4.2 Analyse de la dispersion numérique du schéma semi discret.

4.2.1 Introduction

L'analyse de la dispersion numérique consiste à étudier de l'équation de type "onde plane" c'est-à-dire de la forme:

$$\vec{E}(x, y, t) = \vec{E}_0 \exp i(k_1 x + k_2 y - \omega t)$$

Plus précisément, il s'agit d'écrire la relation que doivent respecter la pulsation ω et le nombre d'onde $\vec{k} = (k_1, k_2)$ pour qu'une telle fonction soit solution. Cette relation est dite "relation de dispersion". Pour le problème continu, en injectant l'expression de \vec{E} dans notre équation, on obtient la relation de dispersion continue:

$$\omega^2 = |\vec{k}|^2$$

Pour le problème semi-discretisé, on suppose que les fonctions $E_{p,q}^l$ sont de la forme:

$$E_{p,q}^l = E^l \exp i(k_1 p h + k_2 q h - \omega_h t)$$

De telles solutions seront appelées "ondes planes numériques". Nous allons voir que du fait de la multiplicité des types de degrés de liberté, il y aura neuf ondes planes numériques dont une seule est une approximation de l'onde plane continue. Elle sera appelée "onde plane physique", les autres étant des modes dits "parasites".

En injectant l'expression de E^h dans le système différentiel écrit précédemment, on obtient la relation suivante:

$$\omega_h^2 \widehat{M}_h \vec{E}_0 = \widehat{A}_h \vec{E}_0 \quad (37)$$

où $\widehat{M}_h(\vec{k})$ et $\widehat{A}_h(\vec{k})$ sont hermitiennes positives et $\vec{E}_0 = (E^l, l = 1..9)$. $\widehat{M}_h(\vec{k})$ est la matrice diagonale définie par

$$M_h = h^2 \text{diag} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

La relation (37) s'interprétant comme un problème aux valeurs propres généralisé pour \widehat{A}_h , ω_h^2 est valeur propre de \widehat{A}_h et \vec{E}_0 est le vecteur propre associé. Notons que les modules des composantes de \vec{E}_0 représentent les amplitudes des oscillations de la solution associée 9 types de degrés de liberté. Lorsque h tend vers 0, ces degrés de liberté tendent à se confondre en un seul. Ainsi, si le mode $E_{i,j}$ représente une approximation de la quantité continue, le vecteur propre \vec{E}_0 doit converger vers le vecteur $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^t$ que nous appellerons vecteur unité. C'est ce qui nous amène à la définition de mode non parasite. Nous appellerons onde plane numérique non parasite le mode associé à la direction propre de la matrice \widehat{A}_h qui converge en direction vers le vecteur unité lorsque h tend vers 0.

Nous nous intéressons ici uniquement à la dispersion de l'onde plane non parasite. Si on note λ_h^0 la valeur propre "physique" (celle associée au mode non parasite), la relation de dispersion du problème semi-discret peut s'écrire:

$$\omega_h^2(\vec{k}) = \lambda_h^0(\vec{k})$$

où ω_h est la pulsation discrète.

On peut de la même manière écrire la relation de dispersion pour le problème semi-discret correspondant à un maillage en triangle équilatéraux en résolvant un problème aux valeurs propres généralisé de la forme

$$\omega_h^{eq2} \widehat{M}_h^{eq} \vec{E}_0 = \widehat{A}_h^{eq} \vec{E}_0 \quad (38)$$

où \widehat{M}_h^{eq} et \widehat{A}_h^{eq} ont les mêmes propriétés que \widehat{M}_h et \widehat{A}_h . Un bon moyen d'évaluer l'erreur introduite par un schéma numérique consiste alors à calculer l'erreur faite sur la vitesse de phase. La relation de dispersion obtenue dans le cas continu nous donne la vitesse exacte:

$$c = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}$$

On définit alors, à partir de la relation de dispersion obtenue dans le cas discret, la vitesse approchée:

$$c_h = \frac{\omega_h}{|\vec{k}|}$$

Pour mesurer l'erreur faite sur la vitesse, on étudie le rapport:

$$Q_h = \frac{c_h}{c} = \frac{\omega_h}{\omega}$$

dont l'écart avec 1 quantifie l'erreur de dispersion du schéma.

Nous posons:

$$K = \frac{|\vec{k}|h}{2\pi} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

où K est l'inverse du nombre d'éléments finis par longueur d'onde, et:

$$\begin{cases} k_1 &= |\vec{k}| \cos \psi \\ k_2 &= |\vec{k}| \sin \psi \end{cases} \quad (39)$$

où ψ est l'angle entre la direction de propagation de l'onde et l'axe O_x . Un calcul simple montre qu'il existe une fonction $\lambda^0(K, \psi)$ définie pour $K \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\psi \in [0, 2\pi]$ telle que:

$$h^2 \lambda_h^0(\vec{k}) = \lambda^0(K, \psi)$$

On en déduit que

$$Q_h = Q(K, \psi) = \frac{\lambda^0(K, \psi)^{\frac{1}{2}}}{2\pi K}$$

La dépendance de Q par rapport à K caractérise la dispersion numérique proprement dite puisqu'elle évalue les variations de la vitesse de phase d'une onde plane en fonction du nombre de points par longueur d'onde. La dépendance de Q par rapport à ψ caractérise l'anisotropie du schéma puisqu'elle mesure les variations de cette même vitesse en fonction de la direction de propagation.

Définition 4.1 *On appellera par la suite courbe de dispersion du schéma dans la direction ψ la courbe représentant les variations de $Q(K, \psi)$ en fonction de K .*

En superposant sur un même graphe les courbes de dispersion associées à diverses valeurs de ψ , on visualise l'anisotropie du schéma.

4.2.2 Courbes de dispersion numérique

Il est important de noter que les problèmes aux valeurs propres que nous avons définis avec (37) et (38) ne peuvent être résolus analytiquement du fait de la taille des matrices qui entrent en jeu. Nous avons donc résolu ces problèmes aux valeurs propres numériquement.

Pour des raisons de symétrie, dans le cas du maillage en triangles rectangles, nous avons tracé, à la même échelle, les courbes de dispersion du schéma dans les directions $\psi = 0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ$ (cf. figure 22). Par contre, dans le cas d'un maillage en triangles équilatéraux, nous avons tracé, à la même échelle, les courbes de dispersion du schéma dans les directions $\psi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ (cf. figure 23)

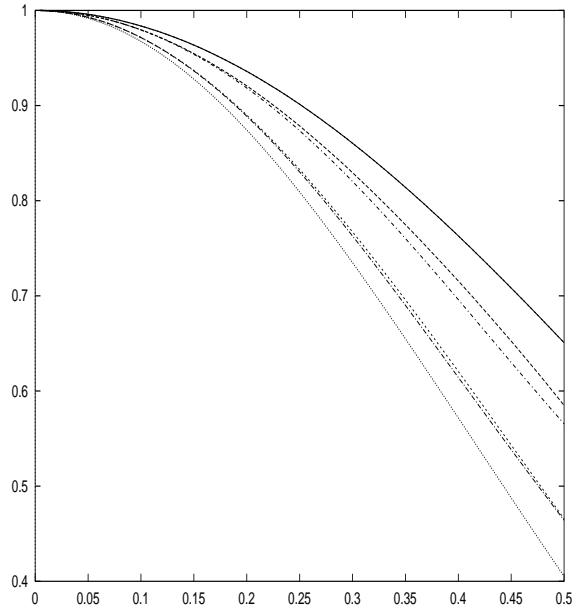


FIG. 22 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$ (maillage en triangles rectangles) et $\psi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

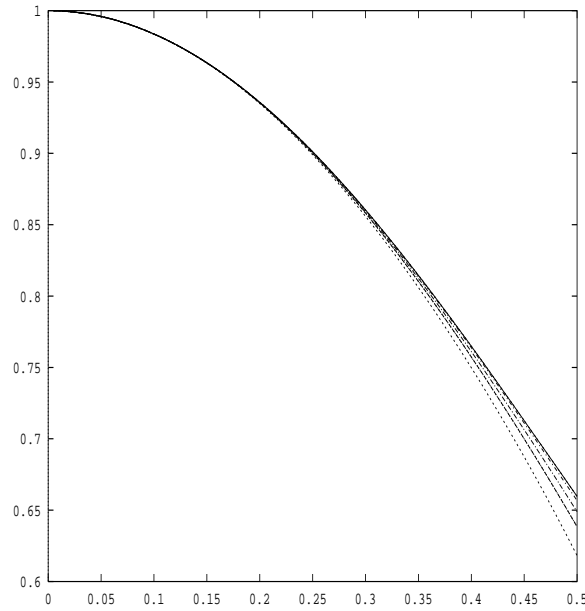


FIG. 23 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$ (maillage en triangles équilatéraux) et $\psi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

On observe que pour les deux schémas,

$$\forall \psi, \quad \lim_{K \rightarrow 0} Q(K, \psi) = 1$$

ce qui illustre la consistance du schéma. En outre, l’allure “parabolique” des courbes de dispersion au voisinage de $K = 0$ suggère que nous avons affaire à des schémas d’ordre 2. Cela sera confirmé dans le paragraphe suivant.

En ce qui concerne la comparaison des deux maillages, on constate très clairement que le maillage équilatéral se révèle très supérieur en ce qui concerne l’anisotropie, ce qui était attendu, mais aussi en ce qui concerne la

dispersion ce qui est moins évident a priori. Cette propriété doit probablement être attribuée à un meilleur remplissage de l'espace par les nœuds du maillage équilatéral.

4.2.3 Ordre de la dispersion numérique

Pour ψ fixé, si on écrit un développement limité de $Q(K, \psi)$ au voisinage de $K = 0$ de la forme

$$Q(K, \psi) = 1 + C(\psi)K^p + O(K^{p+1}) \quad (40)$$

où $C(\psi)$ est une constante qui ne dépend que de ψ , l'entier p est appelé "ordre de la dispersion numérique" introduite par le schéma semi-discrétisé en espace. Or, nous ne disposons pas des premiers termes de ce développement limité. Nous avons donc seulement obtenu une estimation numérique de l'ordre de la dispersion introduite, pour les maillages en triangles rectangles et en triangles équilatéraux. En effet, si on pose $R(K, \psi) = |Q(K, \psi) - 1|$, la courbe de $R(\cdot, \psi)$ en échelle logarithmique a l'allure d'une droite dont la pente fournit une estimation de l'entier p (cf. figure 24).

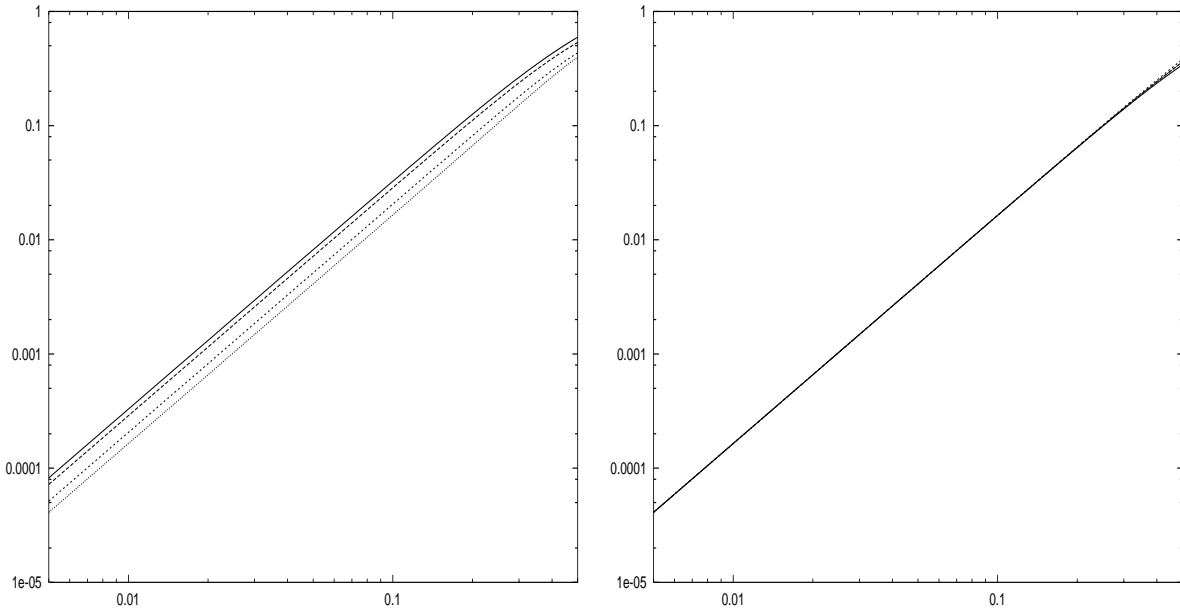


FIG. 24 – Droites en échelle logarithmique: à gauche maillage en triangles rectangles et à droite maillage en triangles équilatéraux.

Ces droites permettent d'émettre la

Conjecture 4.1 Les fonctions $\omega_h(\vec{k})$ et $\omega_h^{eq}(\vec{k})$ admettent les développements limités suivants:

$$\omega_h(\vec{k}) = |\vec{k}|(1 + O(h^2|\vec{k}|^2))$$

$$\omega_h^{eq}(\vec{k}) = |\vec{k}|(1 + O(h^2|\vec{k}|^2))$$

Remarque 4.1 Dans le cadre de l'équation des ondes, l'analyse de la dispersion numérique des schémas semi-discrétisés en espace avec condensation de masse sur maillage triangulaire aboutit à un problème aux valeurs propres qui, lui aussi, ne peut être résolu analytiquement. Toutefois, il a été possible d'exhiber les premiers termes du développement limité de la valeur propre "physique" et du vecteur propre associé (cf. [10]). Cette démarche devrait être transposable à notre problème.

4.2.4 Comparaison avec le schéma correspondant aux éléments finis de Nédélec du premier ordre (matrice de masse non condensée).

On considère maintenant l'espace de discrétisation V_h correspondant aux éléments finis de Nédélec du premier ordre pour maillage triangulaire. Celui-ci s'écrit

$$V_h = \left\{ v_h \in H(\text{rot}, \mathbb{R}^2) / \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{h|_K} \in \mathcal{R}_1(K) \right\}$$

où $\mathcal{R}_1(K) = \{ \vec{u}(x) = \vec{a} + b(x_2, -x_1)^t, \vec{a} \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R} \}$.

Cette fois, si on considère un maillage régulier en triangles rectangles ou équilatéraux (cf. figure 25), le problème semi-discret peut être assimilé à l'étude d'un réseau périodique dont la cellule de base comporte 3 types de degrés de liberté (cf. figure 26)

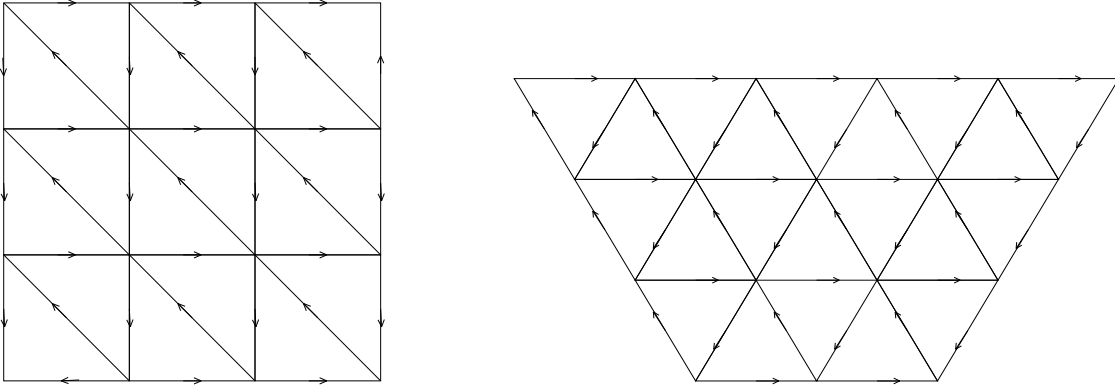


FIG. 25 – Maillage régulier pour \mathcal{R}_1 : à gauche maillage en triangles rectangles et à droite en triangles équilatéraux

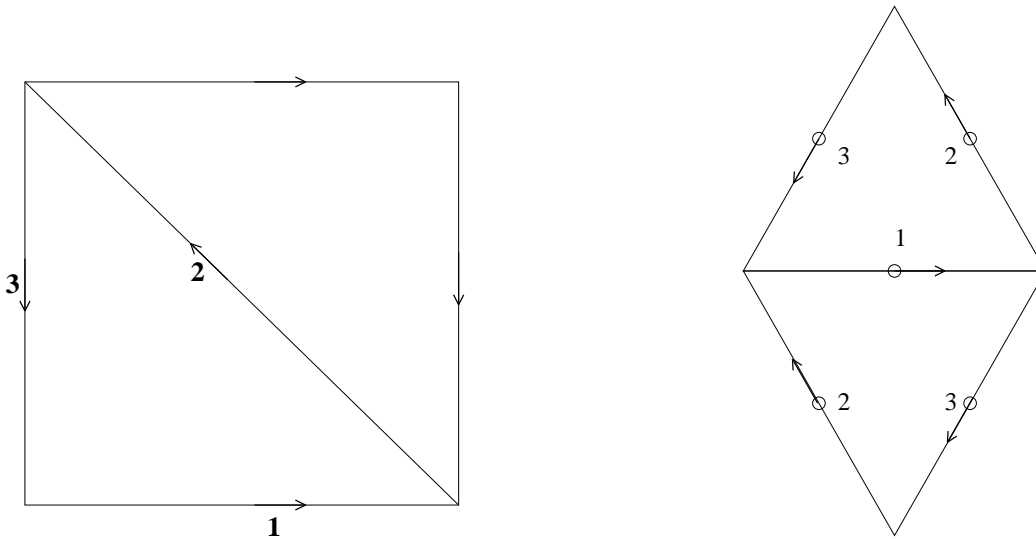


FIG. 26 – La cellule unité pour \mathcal{R}_1 et ses 3 types de points: à gauche maillage en triangles rectangles et à droite en triangles équilatéraux

Une analyse similaire à celle menée précédemment permet d'écrire la relation de dispersion associée à chaque schéma et de tracer les courbes de dispersion correspondantes (cf. figure 27).

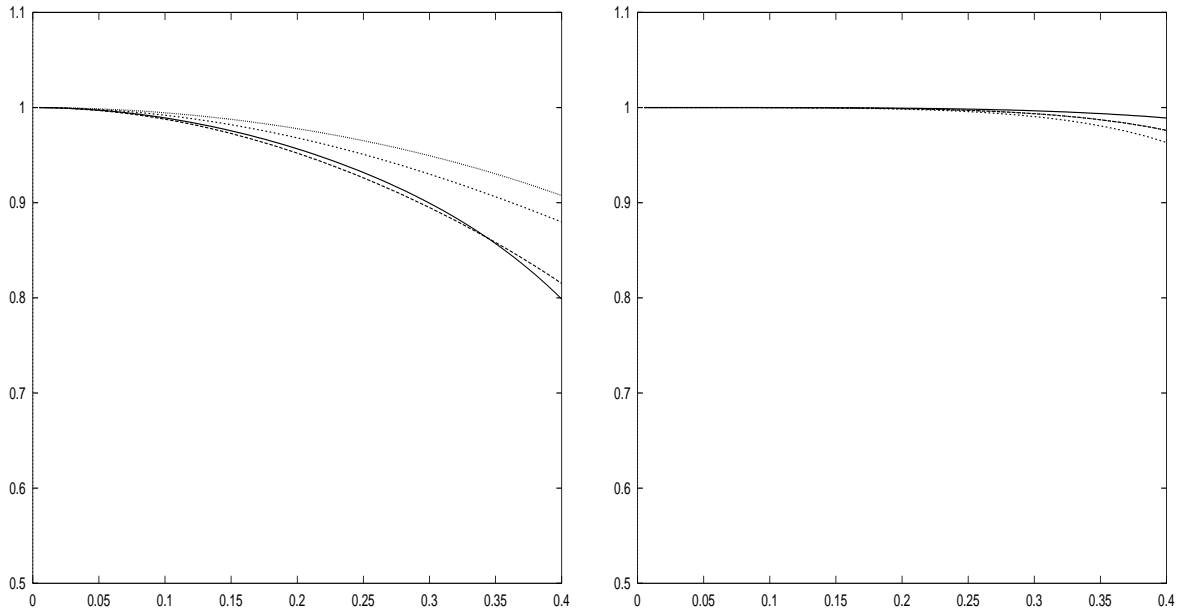


FIG. 27 – Courbes de dispersion pour \mathcal{R}_1 , $\psi = 0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ$. A gauche, maillage en triangles rectangles et à droite maillage en triangles équilatéraux

Nous avons alors le

Théorème 4.1 Les fonctions $\omega_h(\vec{k})$ et $\omega_h^{eq}(\vec{k})$ associées à \mathcal{R}_1 admettent les développements limités suivants:

$$\omega_h(\vec{k}) = |\vec{k}|(1 + O(h^2|\vec{k}|^2))$$

$$\omega_h^{eq}(\vec{k}) = |\vec{k}|(1 + O(h^4|\vec{k}|^4))$$

Une bonne manière de comparer, pour un maillage donné, la précision du schéma avec condensation de masse et celle du schéma correspondant à la discrétisation usuelle est de tracer à la même échelle et pour ψ fixé les courbes de dispersion des deux schémas dans la direction ψ . C'est ce que l'on peut visualiser avec les figures 28 et 29 (maillage en triangles rectangles) et les figures 30 et 31 (maillage en triangles équilatéraux).

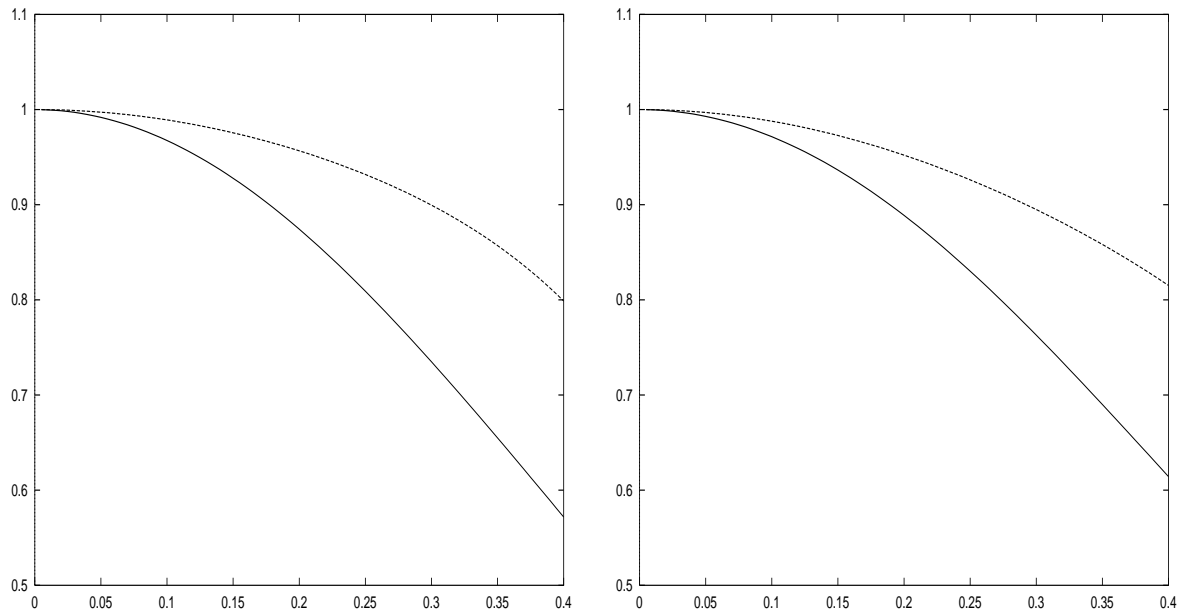


FIG. 28 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$ (trait plein) et \mathcal{R}_1 (pointillé), $\psi = 0^\circ$ (à gauche) et $\psi = 15^\circ$ (à droite)

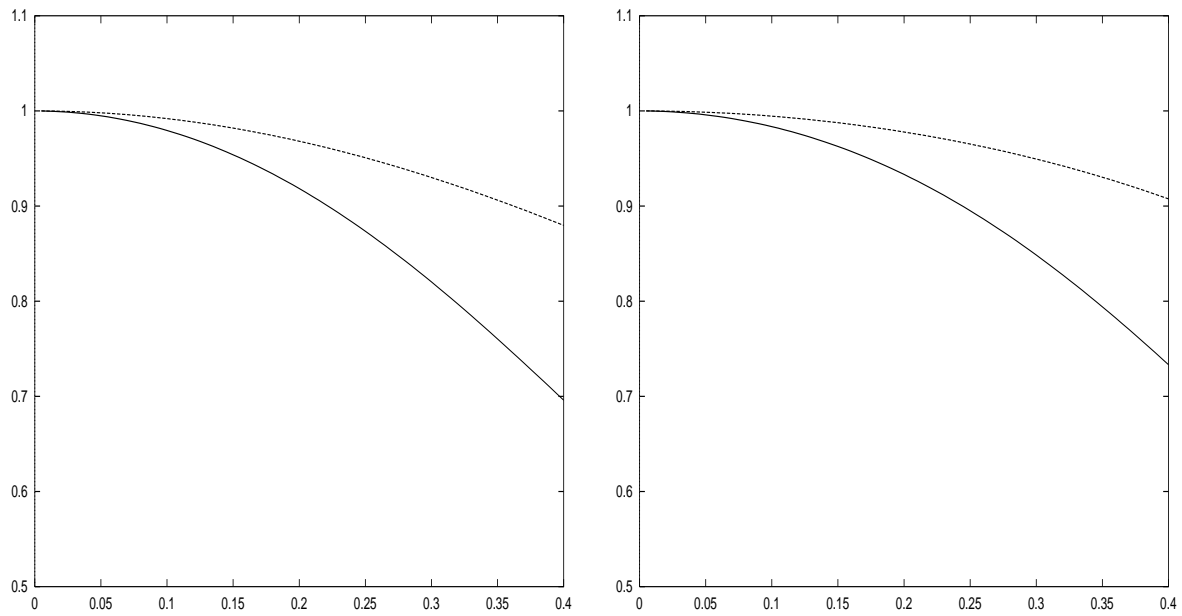


FIG. 29 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$ (trait plein) et \mathcal{R}_1 (pointillé), $\psi = 30^\circ$ (à gauche) et $\psi = 45^\circ$ (à droite)

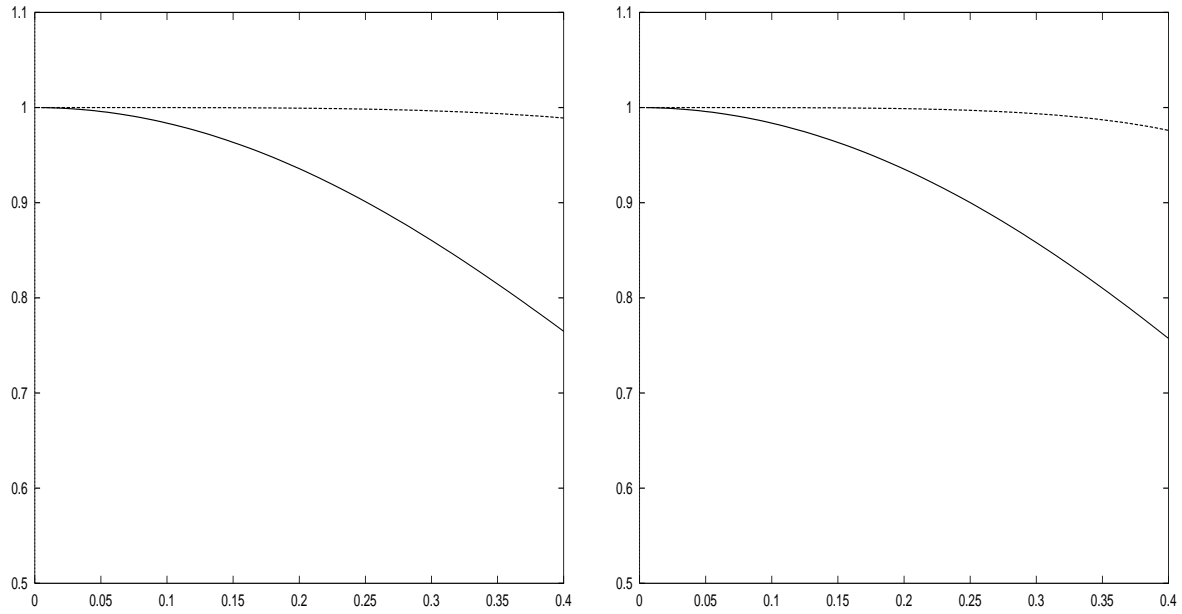


FIG. 30 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$ (trait plein) et \mathcal{R}_1 (pointillé), $\psi = 0^\circ$ (à gauche) et $\psi = 15^\circ$ (à droite)

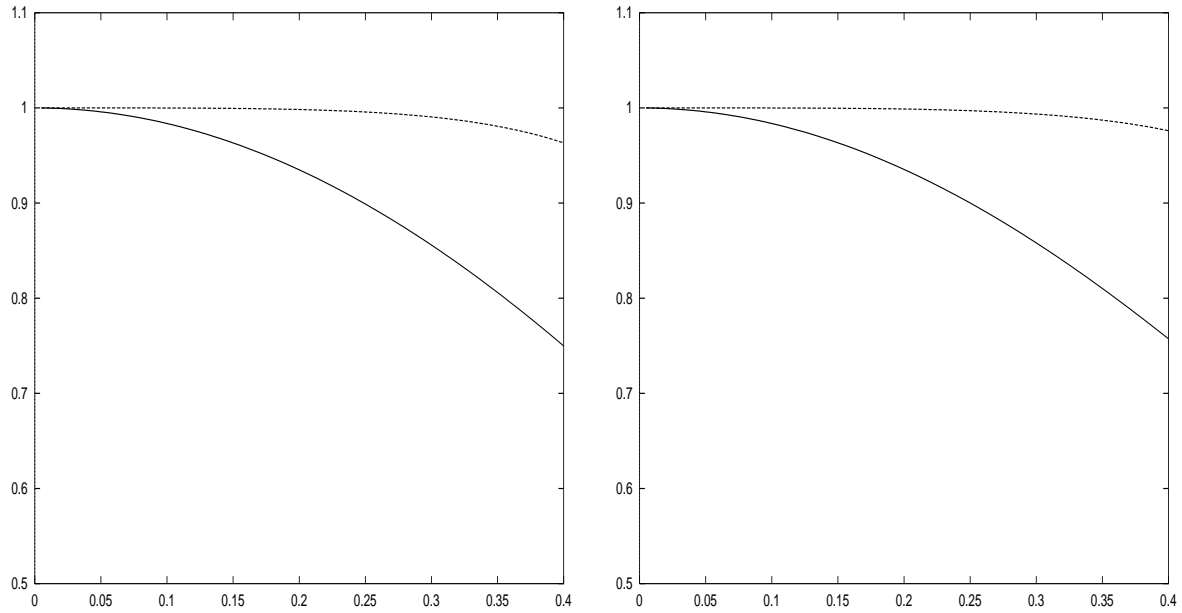


FIG. 31 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$ (trait plein) et \mathcal{R}_1 (pointillé), $\psi = 30^\circ$ (à gauche) et $\psi = 45^\circ$ (à droite)

Ces courbes permettent de constater que le schéma avec condensation de masse, s'il est du même ordre que le schéma classique, est moins précis et ce, quelle que soit la direction de propagation ψ considérée. Cependant, nous allons voir plus loin qu'à l'inverse, pour les éléments finis quadrangulaires, le schéma avec condensation de masse est nettement plus précis. D'autre part, pour les éléments finis triangulaires, la construction et l'analyse d'un nouvel élément fini du second ordre avec condensation de masse montrera qu'il est plus précis pour certaines directions de propagation.

4.3 Discrétisation en temps

4.3.1 Introduction

Dans les sections précédentes, nous nous sommes intéressés à la discrétisation en espace. Notre problème semi-discret peut être défini de façon générale par:

$$\frac{d^2 E_h}{dt^2} + D_h E_h = 0 \quad (41)$$

où D_h est l'opérateur $M_h^{-1}A_h$.

Il reste alors à définir la discrétisation en temps. Le plus simple consiste à utiliser le schéma classique saute mouton avec 3 pas de temps en écrivant:

$$\frac{E_h^{n+1} - 2E_h^n + E_h^{n-1}}{\Delta t^2} + D_h E_h^n = 0 \quad (42)$$

où Δt représente le pas de discrétisation en temps.

4.3.2 Analyse de la stabilité: résultats généraux

Une importante caractéristique relative à une analyse et à une implémentation de ce genre de schéma est l'étude de leur stabilité. En effet, il est bien connu que les schémas explicites dépendent d'une condition de stabilité. Pour le schéma saute mouton (42), la condition de stabilité est:

$$\frac{\Delta t^2 \|D_h\|}{4} \leq 1 \quad (43)$$

où, si on note $a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \text{rot}(u_h) \text{rot}(v_h) dx$ et $(u_h, v_h)_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K u_h \cdot v_h dx$,

$$\|D_h\| = \sup_{v_h \in \tilde{V}_h} \frac{a(v_h, v_h)}{(v_h, v_h)_h}$$

Par un argument d'homogénéité, on a:

$$\|D_h\| = h^2 \|D_1\|$$

Une analyse par transformée de Fourier discrète (cf. [5]) montre que

$$\|D_1\| = \max_{K \in [0, \frac{1}{2}]} \max_{1 \leq j \leq 9} \lambda^i(K)$$

où les $\lambda^i(K)$ sont les solutions du problème aux valeurs propres généralisé

$$A_1(K) \vec{w} = \lambda M_1(K) \vec{w}$$

La condition (43) devient alors:

$$\frac{\Delta t^2}{h^2} \leq \frac{4}{\max_{i,K} |\lambda^i(K)|}$$

c'est-à-dire:

$$\alpha \leq \frac{2}{\sqrt{\max_{i,K} |\lambda^i(K)|}}$$

où

$$\alpha = \frac{\Delta t}{h}$$

4.3.3 Stabilité des schémas pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$ et \mathcal{R}_1

Il est important de noter que le maximum $\max_{i,K} |\lambda^i(K)|$, quelle que soit la matrice \widehat{D}_h , est estimé numériquement du fait de la complexité des termes de ces matrices. On a alors les conditions de stabilité suivantes:

– Pour un maillage en triangles rectangles:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 0,2654 \text{ pour } \tilde{\mathcal{R}}_1 \\ \alpha &\leq 0,3333 \text{ pour } \mathcal{R}_1 \end{aligned} \quad (44)$$

– Pour un maillage en équilatéraux:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 0,2886 \text{ pour } \tilde{\mathcal{R}}_1 \\ \alpha &\leq 0,2886 \text{ pour } \mathcal{R}_1 \end{aligned} \quad (45)$$

On peut donc constater que le nouveau schéma, dans le cas d'un maillage en triangles rectangles, présente une condition de stabilité légèrement plus restrictive que celle associée au schéma classique sans condensation de masse. Ce résultat, si le nouveau schéma ne faisait pas intervenir l'intégration numérique, pouvait être attendu. En effet, dans la mesure où l'espace de discrétisation a été enrichi ($V_h \subset \tilde{V}_h$), on a:

$$\sup_{v_h \in \tilde{V}_h} \frac{a(v_h, v_h)}{(v_h, v_h)} \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(v_h, v_h)}{(v_h, v_h)}$$

La valeur maximum permise par la condition de stabilité étant inversement proportionnelle à la norme de l'opérateur considéré, il en résulte que la condition de stabilité est au moins aussi restrictive lorsque l'on enrichit l'espace. Il semblerait donc que ce résultat reste dans notre cas inchangé par l'emploi de l'intégration numérique.

4.3.4 Analyse de la dispersion

Rappelons que les différents schémas discrétisés en temps et en espace s'écrivent:

$$\frac{E_h^{n+1} - 2E_h^n + E_h^{n-1}}{\Delta t^2} + D_h E_h^n = 0 \quad (46)$$

Comme dans le cas semi-discret, l'analyse de dispersion consiste à étudier l'erreur commise sur la vitesse des ondes planes solutions de notre problème discrétisé en temps et en espace. La relation de dispersion à satisfaire pour qu'un champ de type "onde plane", c'est-à-dire de la forme

$$E_{p,q}^l = E^l \exp i(k_1 p h + k_2 q h - \omega_h^{\Delta t} n \Delta t)$$

soit solution de (46) s'écrit:

$$\frac{4}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\Delta t}{2} \omega_h^{\Delta t}\right) = \lambda^0$$

où λ^0 est la valeur propre "physique" de \widehat{D}_1 .

On s'intéresse à la vitesse de phase adimensionnelle $Q_h = \frac{\omega_h^{\Delta t}}{\omega}$ en fonction de deux paramètres:

$$\begin{aligned} - K &= \frac{kh}{2\pi} = \frac{1}{N} \\ - \alpha &= \frac{\Delta t}{h} \end{aligned}$$

On a alors:

$$Q_h = \frac{1}{\pi \alpha K} \arcsin\left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{h^2 \lambda^0}\right)$$

Nous allons maintenant visualiser la dispersion numérique. Nous représentons les variations de la vitesse de phase adimensionnelle en fonction de K pour différents coefficients α et différents angles de propagation ψ .

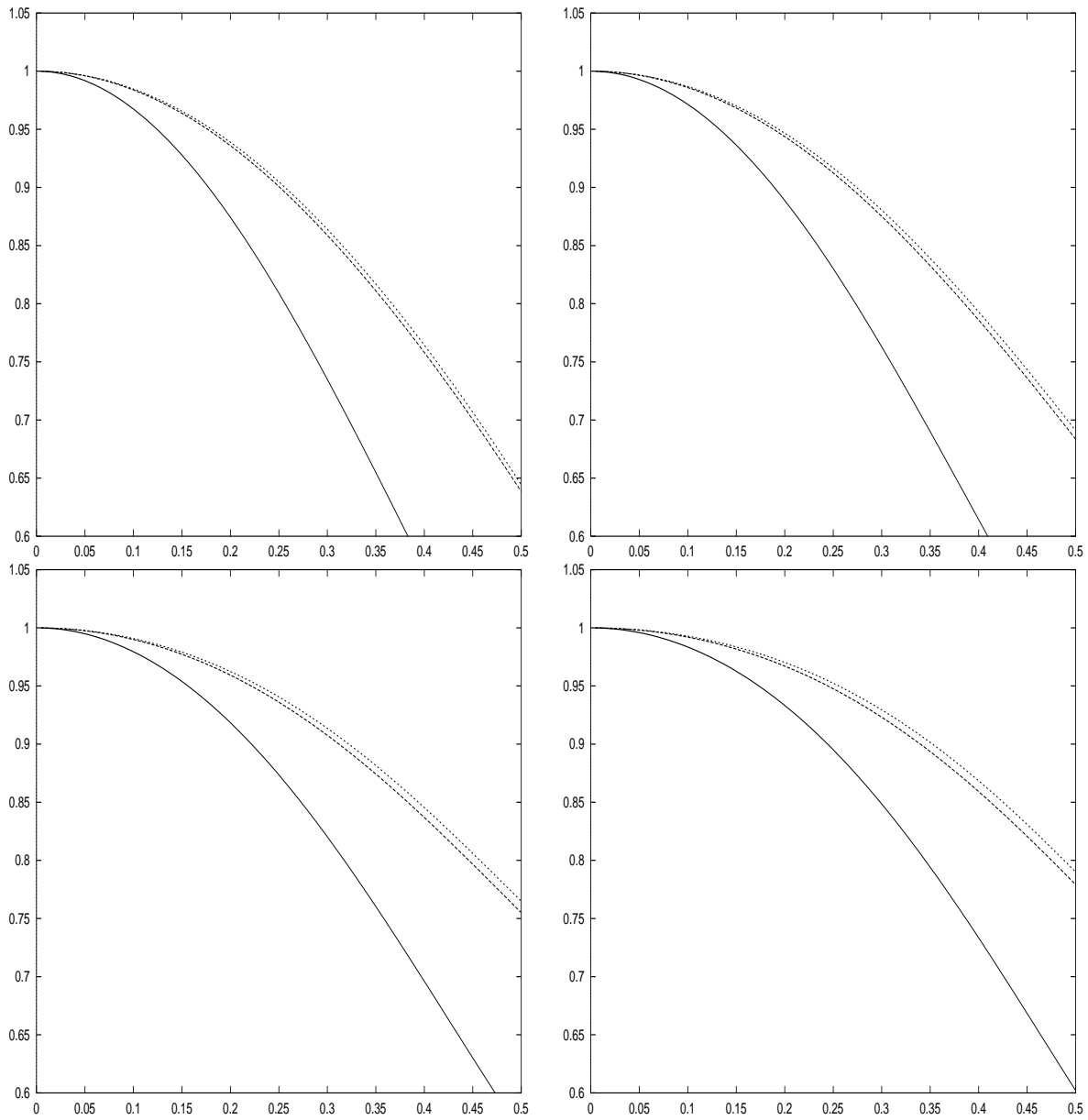


FIG. 32 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$ et l'ordre 2 en temps sur maillage en triangles rectangles, avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.265 pour les courbes supérieures, pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

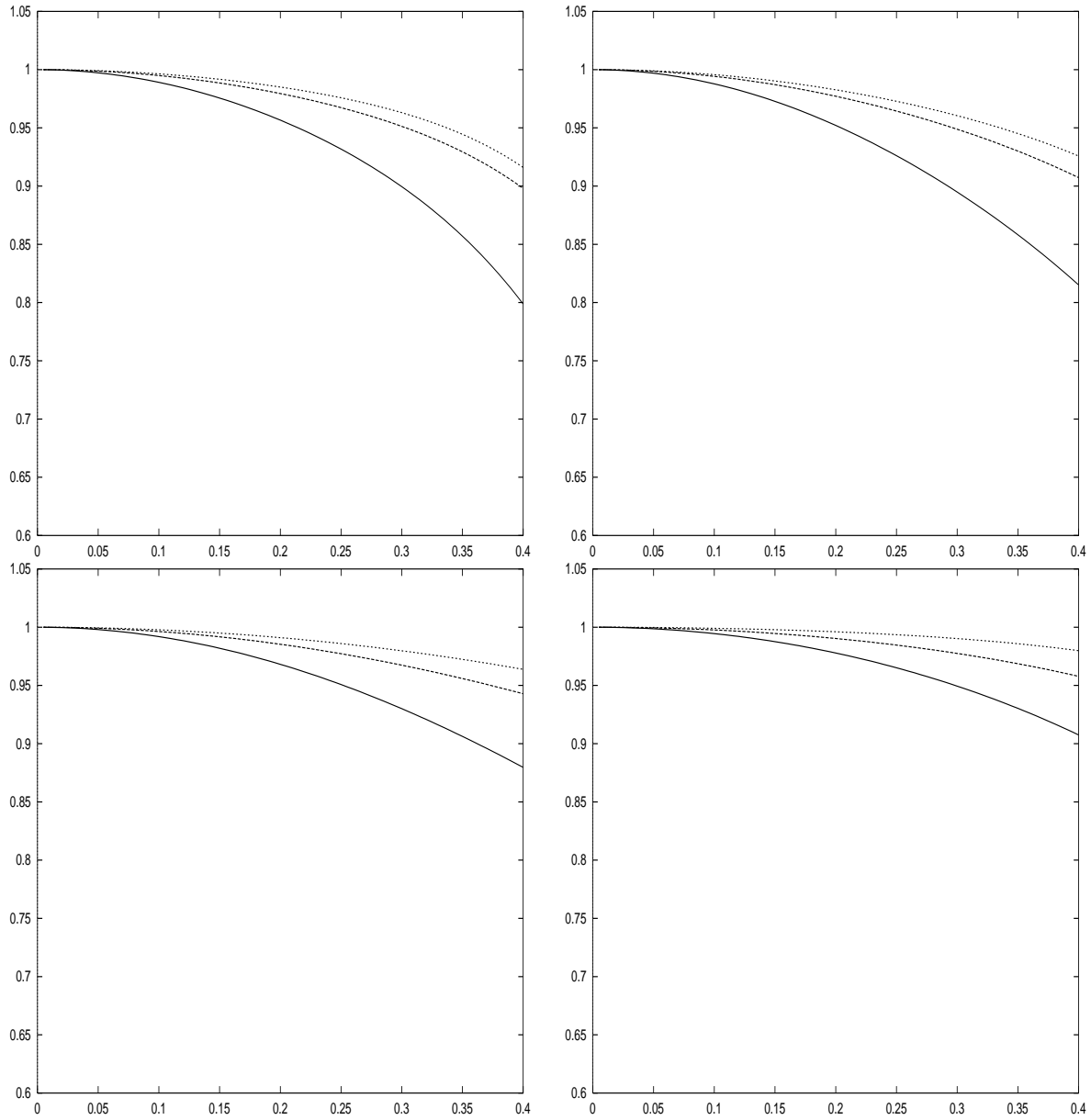


FIG. 33 – Courbes de dispersion pour \mathcal{R}_1 et l'ordre 2 en temps sur maillage en triangles rectangles, avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.333 pour les courbes supérieures, pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

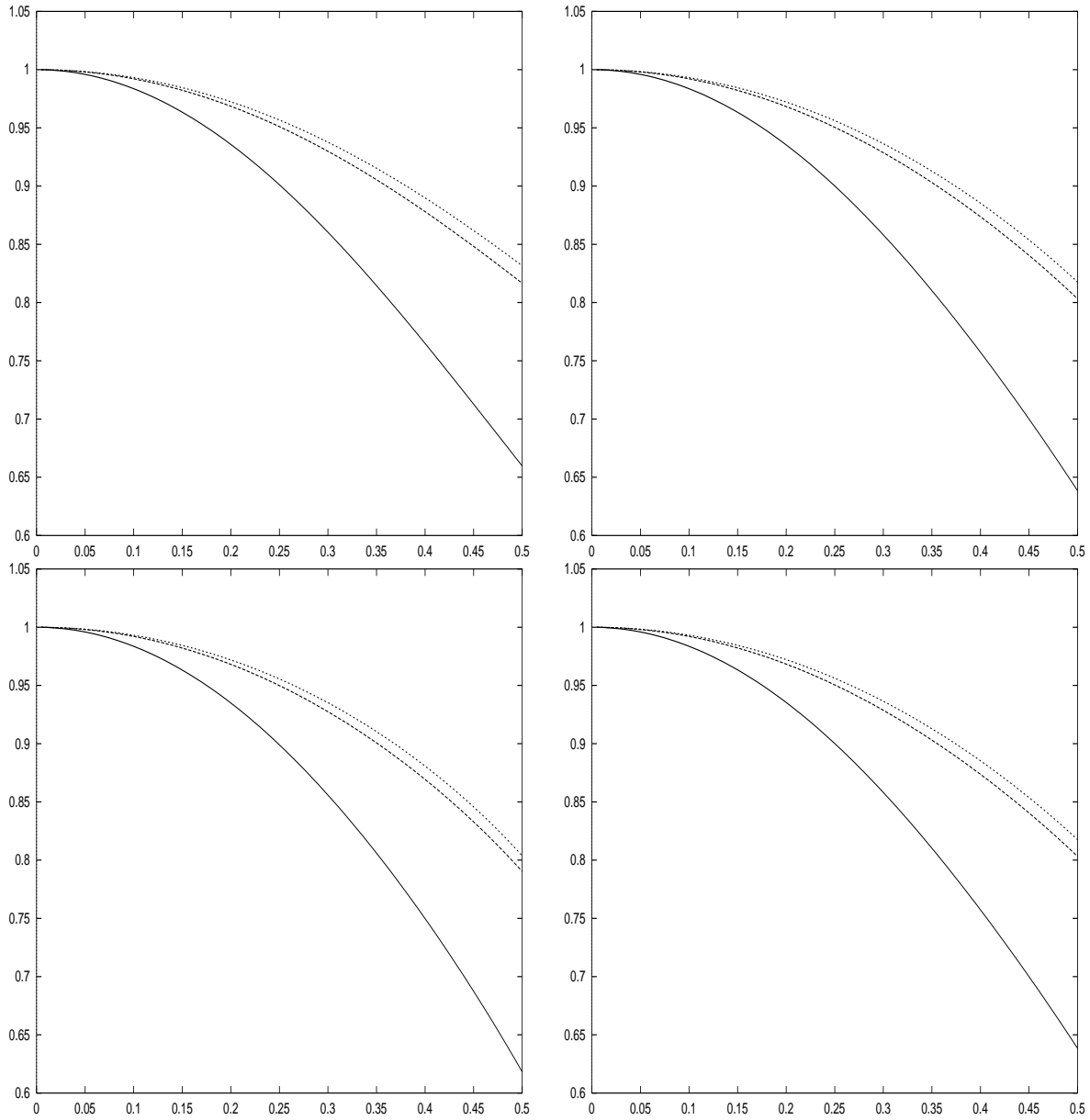


FIG. 34 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{R}}_1$ et l'ordre 2 en temps sur maillage en triangles équilatéraux, avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.288 pour les courbes supérieures, pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

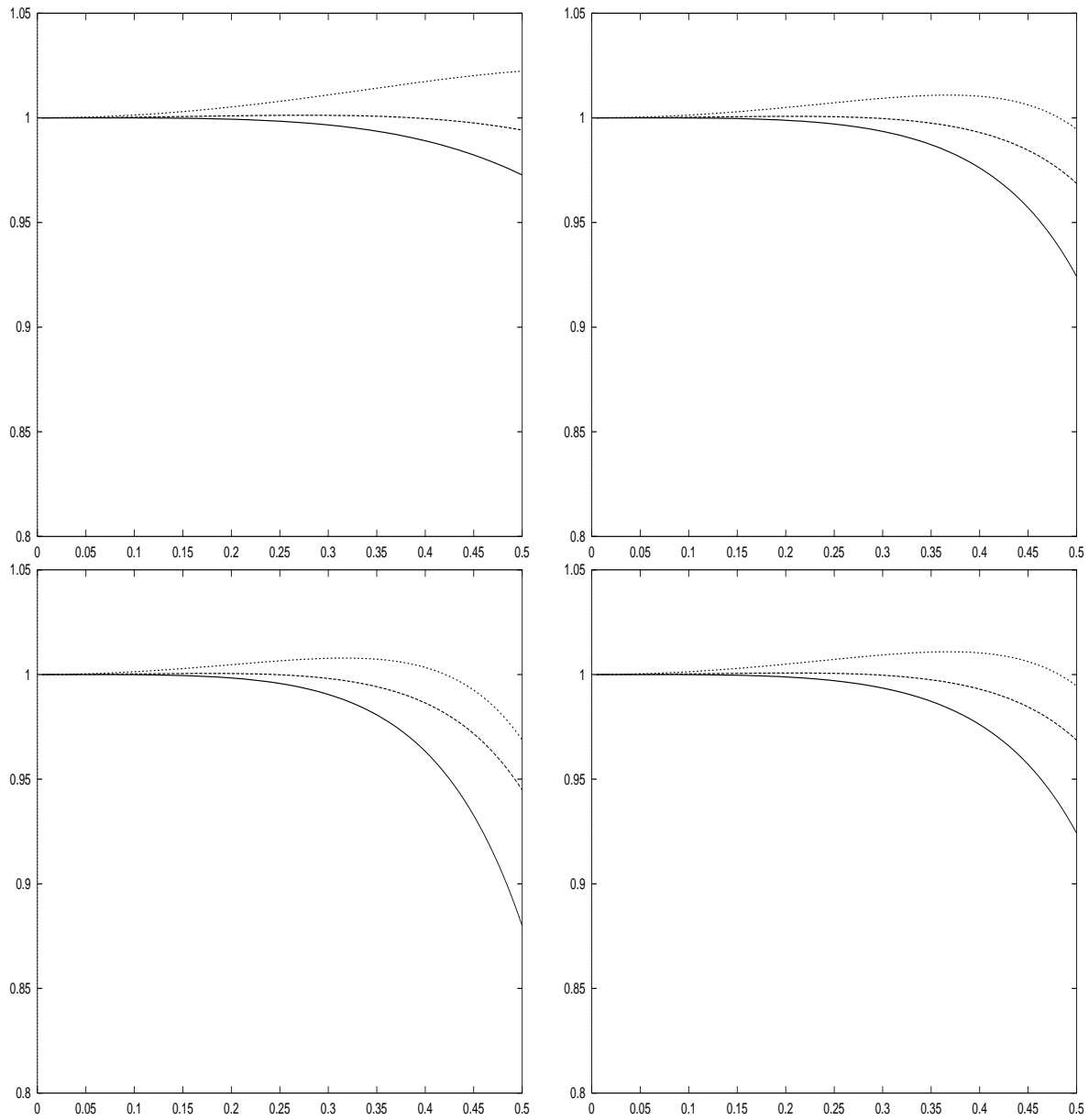


FIG. 35 – Courbes de dispersion pour \mathcal{R}_1 et l'ordre 2 en temps sur maillage en triangles équilatéraux, avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour la courbe médiane, $\alpha = 0.288$ pour la courbe supérieure, $\alpha = 0.14$ pour la courbe inférieure, et pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

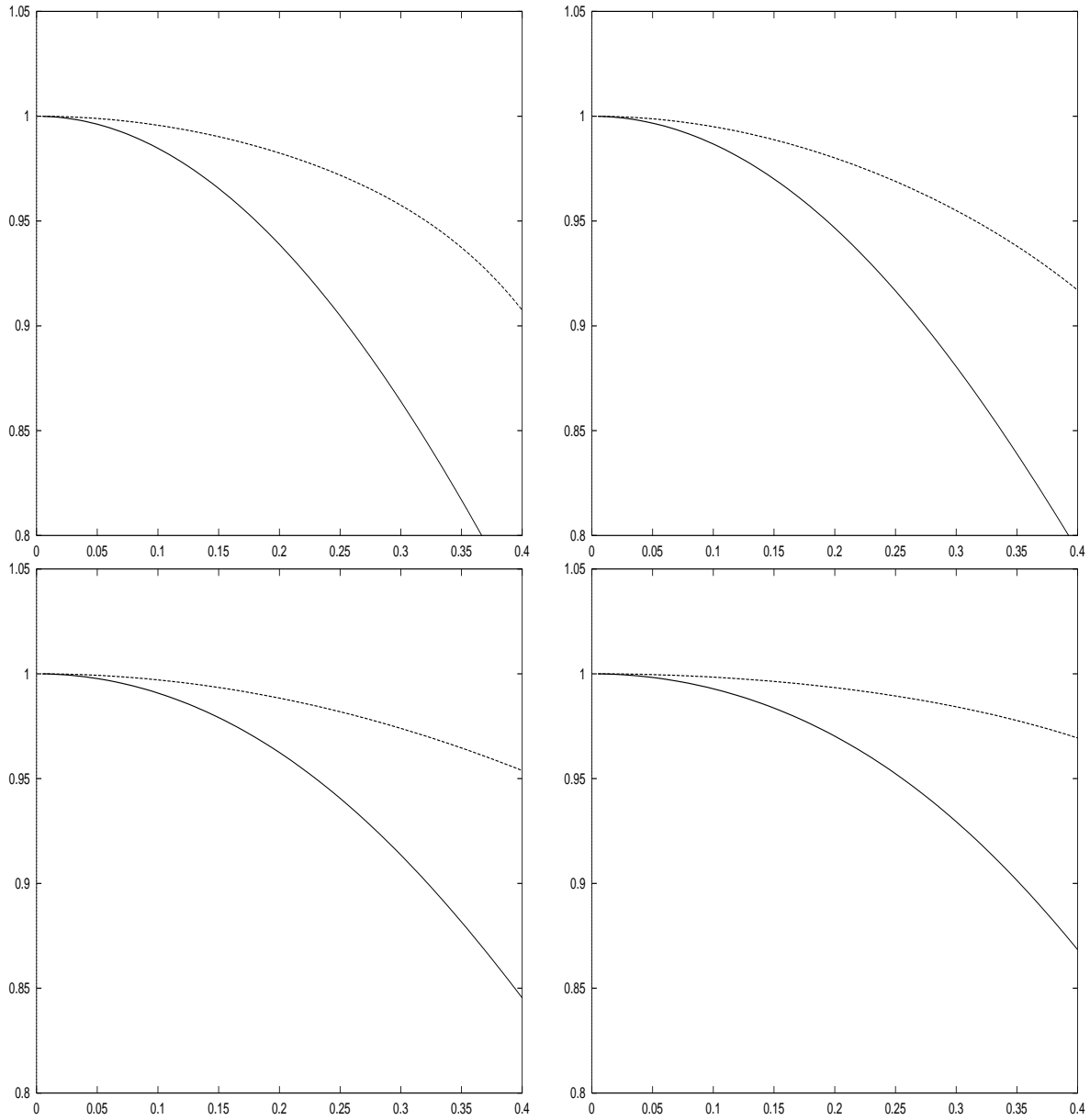


FIG. 36 – Courbes de dispersion comparées pour \mathcal{R}_1 (pointillé) et $\tilde{\mathcal{R}}_1$ (trait plein) et l'ordre 2 en temps sur maillage en triangles rectangles, avec $\alpha = 0.265$ pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

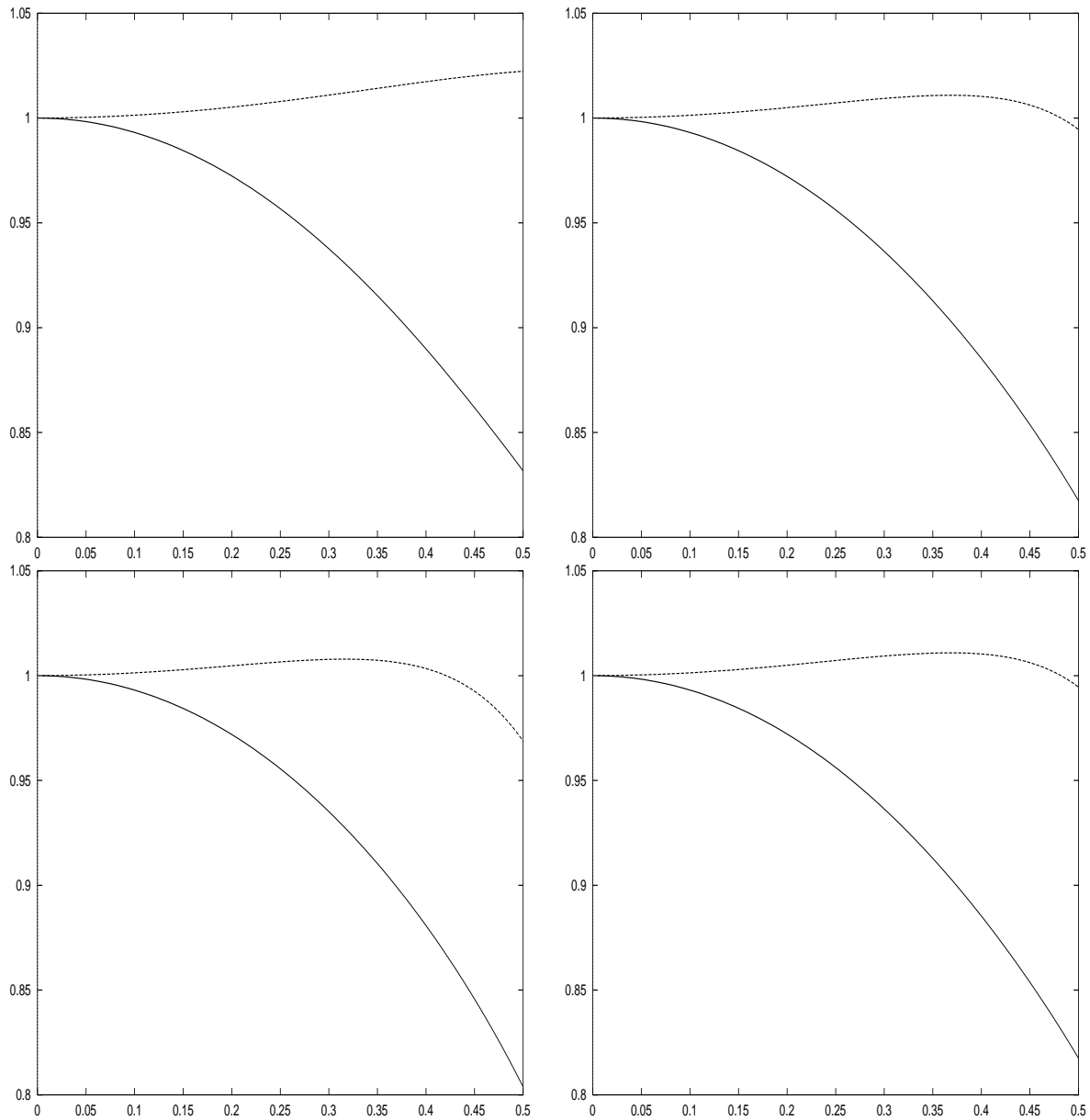


FIG. 37 – Courbes de dispersion comparées pour \mathcal{R}_1 (pointillé) et $\tilde{\mathcal{R}}_1$ (trait plein) et l'ordre 2 en temps sur maillage en triangles équilatéraux, avec $\alpha = 0.288$ pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

Ces courbes permettent de constater que la discrétisation en temps améliore la précision du schéma (du point de vue de la dispersion numérique) et que cette précision est optimale pour la valeur de α maximale. Toutefois, à valeur de α fixée et pour une direction de propagation ψ donnée, le schéma avec condensation de masse reste moins précis que le schéma classique.

5 Analyse en maillage rectangulaire régulier

Dans cette partie, nous analysons les schémas obtenus en maillage rectangulaire régulier en suivant la même démarche que celle adoptée pour les maillages triangulaires. Le problème modèle reste donc

$$\begin{cases} \text{Chercher } \vec{E} \text{ dans } L^2([0, T], H(\text{rot}, \mathbb{R}^2)) \text{ tel que:} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \end{cases} \quad (47)$$

de formulation variationnelle:

$$\begin{cases} \text{Chercher } \vec{E} \text{ dans } L^2([0, T], H(\text{rot}, \mathbb{R}^2)) \text{ tel que:} \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^2} \vec{E} \cdot \vec{F} + \int_{\mathbb{R}^2} \text{rot}(\vec{E}) \text{rot}(\vec{F}) = 0 \quad \forall \vec{F} \in H(\text{rot}, \mathbb{R}^2) \end{cases} \quad (48)$$

On adopte donc des notations similaires à celles introduites dans la section 4. \mathcal{T}_h désigne maintenant un maillage régulier de \mathbb{R}^2 en carrés de côté h (cf. figure 38).

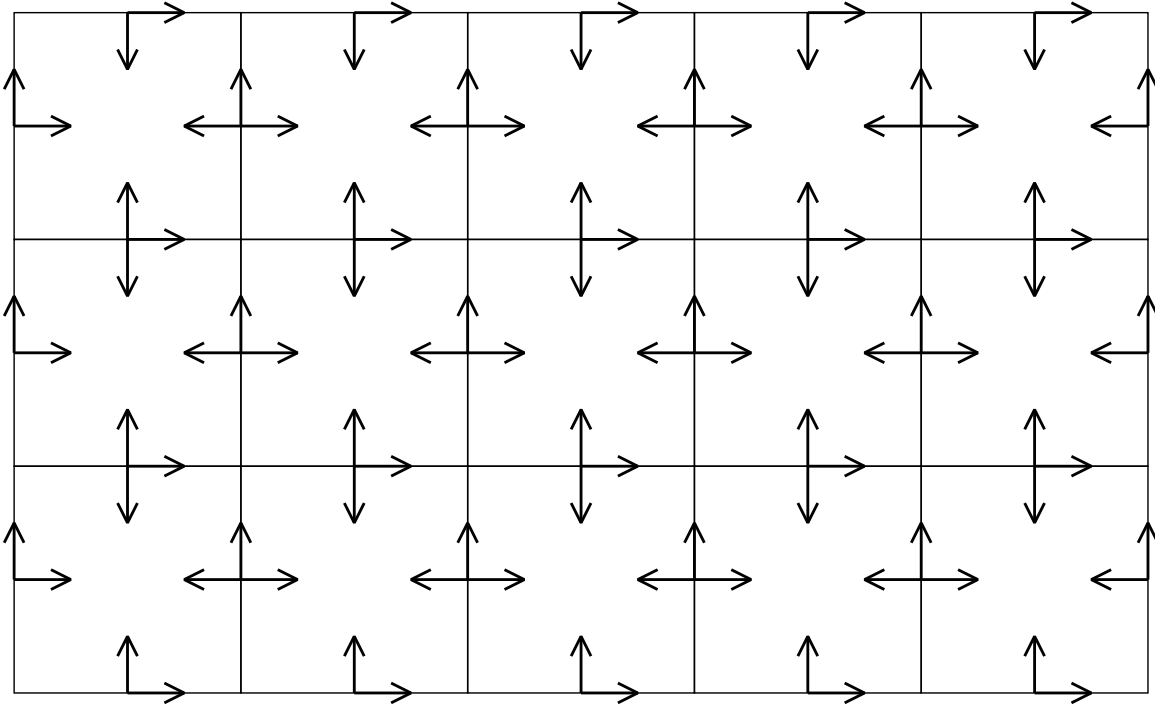
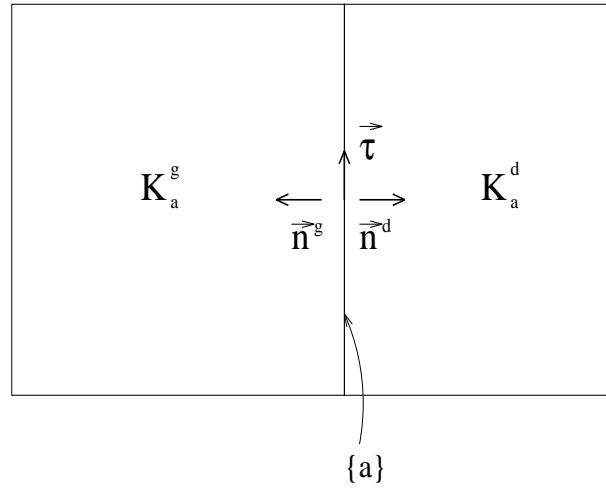


FIG. 38 – Maillage régulier en carrés pour $\tilde{\mathcal{F}}_1$

Soit \vec{E} un élément de l'espace \tilde{V}_h associé à une triangulation \mathcal{T}_h (supposée régulière) de \mathbb{R}^2 . Soit a une arête de \mathcal{T}_h , dont le milieu a pour coordonnées (ph, qh) , orientée par le vecteur unitaire $\vec{\tau}$ et qui sépare deux triangles K_a^g et K_a^d , conformément à la figure 39.


 FIG. 39 – Rectangles communs à l'arête a

Nous désignons alors ci-dessous par \vec{E}_a^g et \vec{E}_a^d les restrictions respectives de \vec{E} à K_a^g et K_a^d et posons:

$$\begin{cases} E_{p,q}^\tau &= \vec{E}(ph, qh) \cdot \vec{\tau} \\ E_{p,q}^{n,g} &= \vec{E}_a^g(ph, qh) \cdot \vec{n}^g \\ E_{p,q}^{n,d} &= \vec{E}_a^d(ph, qh) \cdot \vec{n}^d \end{cases} \quad (49)$$

Ces quantités ne sont autres que les degrés de liberté du champ de vecteur \vec{E} .

5.1 Construction du problème semi-discret associé au nouvel élément fini d'arête.

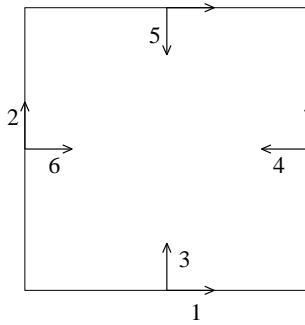
L'espace de discrétisation \widetilde{V}_h associé au nouvel élément fini est défini par:

$$\widetilde{V}_h = \left\{ \vec{v}_h \in H(\text{rot}, \mathbb{R}^2) / \forall K \in \mathcal{T}_h, \vec{v}_{h|_K} \in \widetilde{\mathcal{F}}_1(K) \right\}$$

Le problème semi-discretisé en espace s'écrit alors:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \vec{E}_h \in \widetilde{V}_h \text{ tel que} \\ \frac{d^2}{dt^2} \int_{\mathbb{R}^2} \vec{E}_h \cdot \vec{F}_h + \int_{\mathbb{R}^2} \text{rot}(\vec{E}_h) \text{rot}(\vec{F}_h) = 0 \quad \forall \vec{F}_h \in \widetilde{V}_h \end{cases} \quad (50)$$

De manière analogue au cas des triangles, la régularité du maillage permet de mettre en évidence un réseau périodique dont la cellule de base comporte 6 types de degrés de liberté (cf figure 40).


 FIG. 40 – La cellule unité pour $\widetilde{\mathcal{F}}_1$ et ses 6 types de degrés de liberté.

Les degrés de libertés de type 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont notés respectivement $E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau$, $E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau$, $E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g}$, $E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,g}$, $E_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n,d}$, $E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,d}$. A ces degrés de liberté sont associées 6 classes de fonctions de base. En écrivant (50) pour ces six types de fonctions de bases, on obtient le système différentiel formé par (51), (52), (53) qui est équivalent au problème semi-discrétisé en espace:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \frac{d^2 E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[\frac{14}{3} E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau + \frac{1}{3} (E_{i+\frac{1}{2},j+1}^\tau + E_{i+\frac{1}{2},j-1}^\tau) + (E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^\tau - E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau + E_{i,j-\frac{1}{2}}^\tau - E_{i+1,j-\frac{1}{2}}^\tau) \right. \\ \left. + \frac{4}{3} (E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,g} + E_{i+1,j-\frac{1}{2}}^{n,g}) - \frac{4}{3} (E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,d} + E_{i,j-\frac{1}{2}}^{n,d}) \right] = 0 \\ \frac{1}{3} \frac{d^2 E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[(E_{i+\frac{1}{2},j+1}^\tau - E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau + E_{i-\frac{1}{2},j}^\tau - E_{i-\frac{1}{2},j+1}^\tau) + \frac{14}{3} E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau + \frac{1}{3} (E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^\tau + E_{i-1,j+\frac{1}{2}}^\tau) \right. \\ \left. - \frac{4}{3} (E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g} + E_{i-\frac{1}{2},j}^{n,g}) + \frac{4}{3} (E_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n,d} + E_{i-\frac{1}{2},j+1}^{n,d}) \right] = 0 \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \frac{d^2 E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[-\frac{4}{3} (E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^\tau + E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau) + \frac{16}{9} E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g} - \frac{4}{9} E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,g} - \frac{8}{9} E_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n,d} - \frac{4}{9} E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,d} \right] = 0 \\ \frac{1}{3} \frac{d^2 E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,g}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[\frac{4}{3} (E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau + E_{i+\frac{1}{2},j+1}^\tau) - \frac{4}{9} E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g} + \frac{16}{9} E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,g} - \frac{4}{9} E_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n,d} - \frac{8}{9} E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,d} \right] = 0 \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \frac{d^2 E_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n,d}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[\frac{4}{3} (E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^\tau + E_{i,j+\frac{1}{2}}^\tau) - \frac{4}{9} E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g} - \frac{8}{9} E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,g} + \frac{16}{9} E_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n,d} - \frac{8}{9} E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,d} \right] = 0 \\ \frac{1}{3} \frac{d^2 E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,d}}{dt^2} + \frac{1}{h^2} \left[-\frac{4}{3} (E_{i+\frac{1}{2},j}^\tau + E_{i+\frac{1}{2},j+1}^\tau) - \frac{4}{9} E_{i+\frac{1}{2},j}^{n,g} - \frac{8}{9} E_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n,g} - \frac{4}{9} E_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n,d} + \frac{16}{9} E_{i,j+\frac{1}{2}}^{n,d} \right] = 0 \end{cases} \quad (53)$$

5.2 Analyse de la dispersion numérique.

De manière analogue au cas des triangles, on peut écrire la relation de dispersion pour le problème semi-discrét en résolvant un problème aux valeurs propres généralisé de dimension 6 et mesurer l'erreur sur la vitesse. Pour des raisons de symétrie, nous avons tracé, à la même échelle, les courbes de dispersion correspondant aux directions $\psi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ (cf. figure 41).

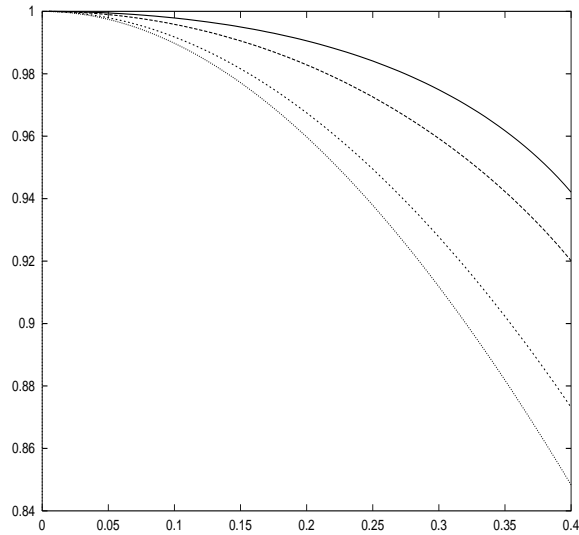


FIG. 41 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{F}}_1$, $\psi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$.

5.2.1 Ordre de la dispersion numérique

D'après l'allure des courbes de $R(K, \psi) = |Q(K, \psi) - 1|$ en échelle logarithmique (cf. figure 42), on peut émettre la conjecture:

Conjecture 5.1 La fonction $\omega_h(\vec{k})$ associée à $\tilde{\mathcal{F}}_1$ admet le développement limité suivant:

$$\omega_h(\vec{k}) = |\vec{k}|(1 + O(h^2|\vec{k}|^2))$$

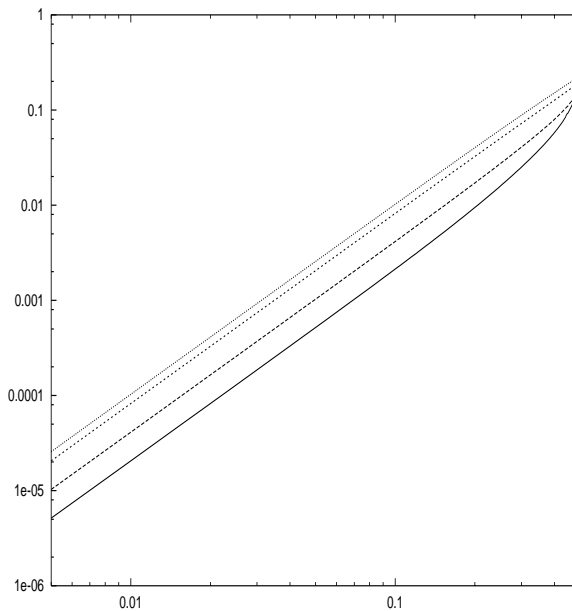


FIG. 42 – Droites en échelle logarithmique: maillage en carrés.

5.2.2 Comparaison avec le schéma correspondant aux éléments finis de Nédélec du premier ordre (matrice de masse non condensée et condensée).

On considère maintenant l'espace de discrétisation V_h correspondant aux éléments finis de Nédélec du premier ordre. Celui-ci s'écrit

$$V_h = \left\{ \vec{v}_h \in H(\text{rot}, \mathbb{R}^2) / \forall K \in \mathcal{T}_h, \vec{v}_{h|_K} \in \mathcal{F}_1(K) \right\}$$

où $\mathcal{F}_2(K) = \{ \vec{u}(x) = \vec{a} + (bx_2, cx_1)^t, \vec{a} \in \mathbb{R}^2, b, c \in \mathbb{R} \}$.

Si on considère un maillage régulier en carrés de coté h , (cf figure 43), on met en évidence un réseau périodique de 2 types de degrés de liberté (cf figure 44).

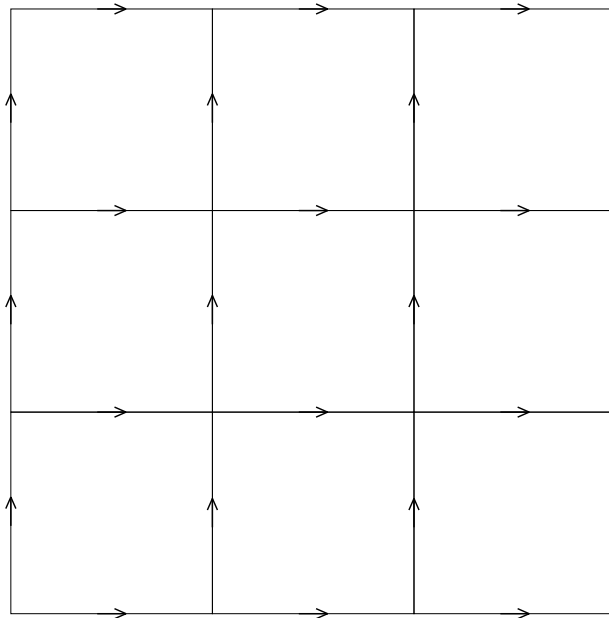


FIG. 43 – Maillage régulier pour \mathcal{F}_2

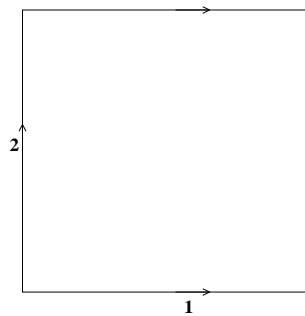


FIG. 44 – La cellule unité pour \mathcal{F}_1 et ses 2 types de degrés de liberté.

On a alors l'alternative suivante:

- Ecrire le problème semi-discrétisé en espace correspondant en calculant les termes de la matrice de masse de manière exacte (matrice de masse non-condensée).
- Utiliser la démarche de Cohen-Monk [3] pour obtenir la condensation de masse.

Ces deux possibilités mènent à deux discrétisations en espace différentes. Nous avons donc étudié la dispersion numérique associée à ces deux schémas pour ensuite faire la comparaison avec celle introduite par notre nouvel élément fini. Dans la figure 45, on a tracé à la même échelle, les courbes de dispersion de ces deux schémas pour les directions $\psi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$.

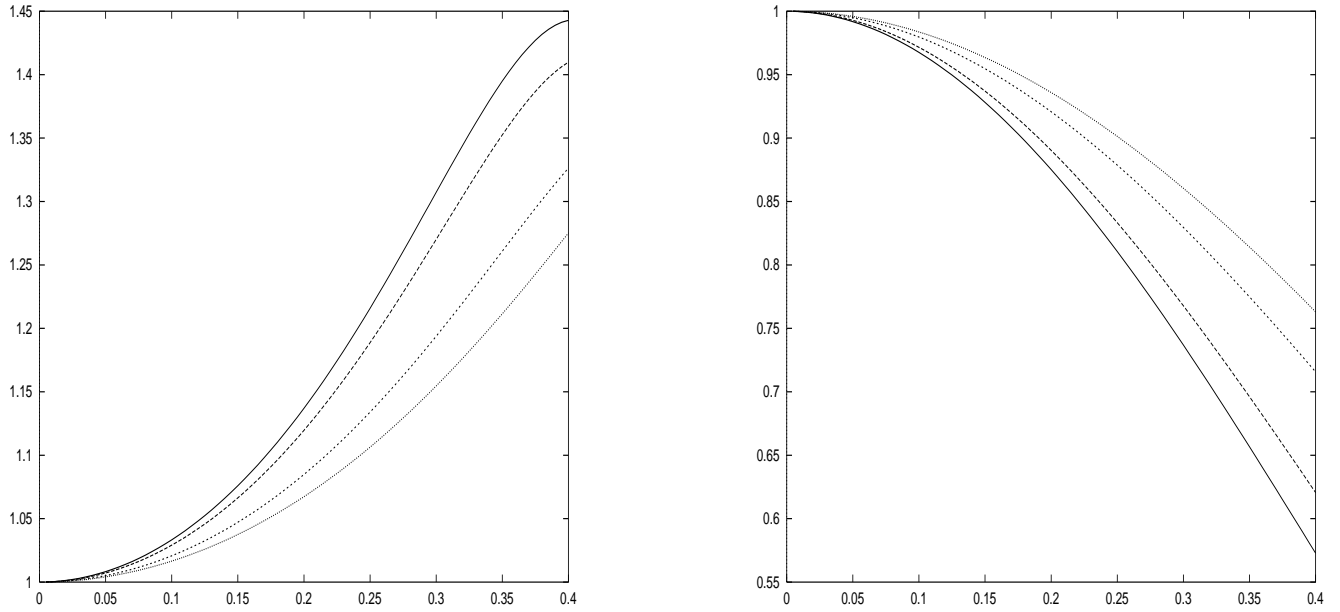


FIG. 45 – Courbes de dispersion pour \mathcal{F}_1 , $\psi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$: à gauche, schéma sans condensation de masse et à droite, schéma avec condensation de masse.

En plaçant en regard chacun des graphes ci-dessus avec celui des courbes de dispersion du schéma avec condensation de masse (à une échelle commune), on peut comparer l’anisotropie de ces schémas (cf. figure 46).

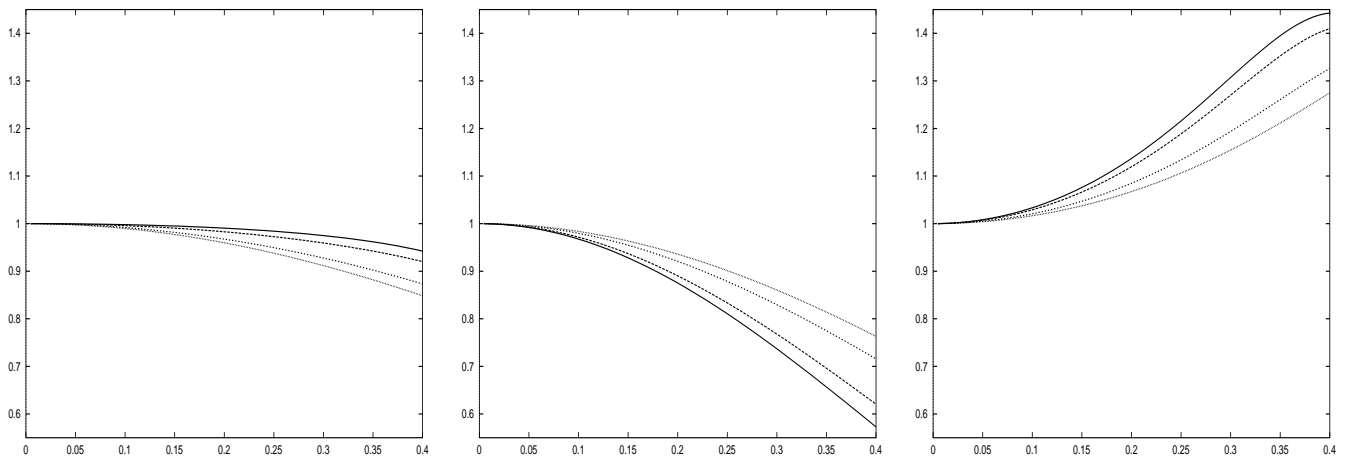


FIG. 46 – Courbes de dispersion pour \mathcal{F}_1 , $\psi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$: à gauche, nouveau schéma avec condensation de masse, au centre schéma avec condensation de masse de Cohen-Monk et à droite schéma usuel sans condensation de masse.

Ces courbes permettent de constater que le nouveau schéma est un peu moins anisotrope que les deux autres. Pour comparer la dispersion numérique proprement dite, on a tracé à la même échelle, et pour $\psi =$

0° , 15° , 30° , 45° , les courbes de dispersion associées à ces trois schémas. La courbe inférieure correspond au schéma avec condensation de masse de Cohen et Monk, courbe supérieure au schéma sans condensation de masse et la courbe médiane au nouveau schéma avec condensation de masse (figures 47 et 48).

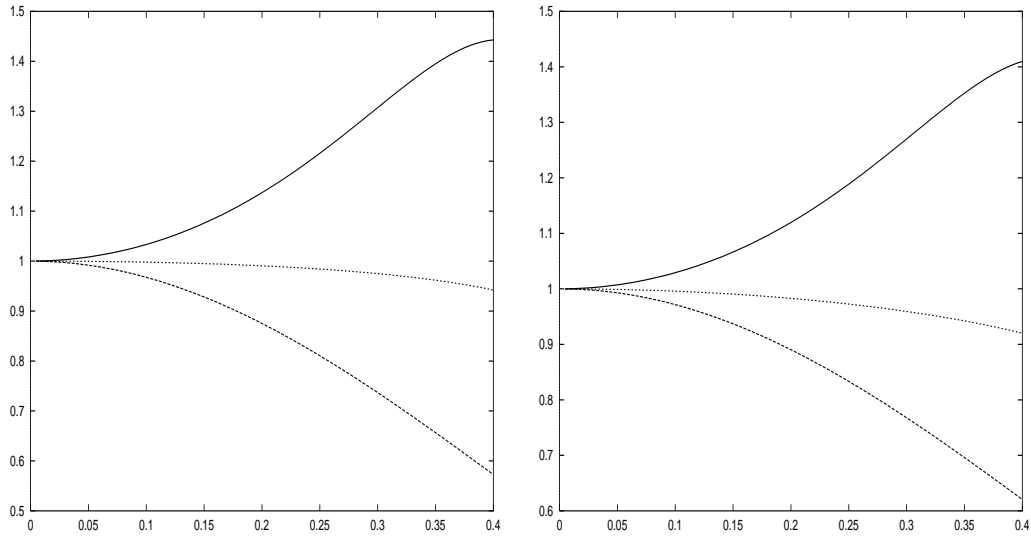


FIG. 47 – Courbes de dispersion comparées sur maillage en carrés: $\psi = 0^\circ$ (à gauche) et $\psi = 15^\circ$ (à droite).

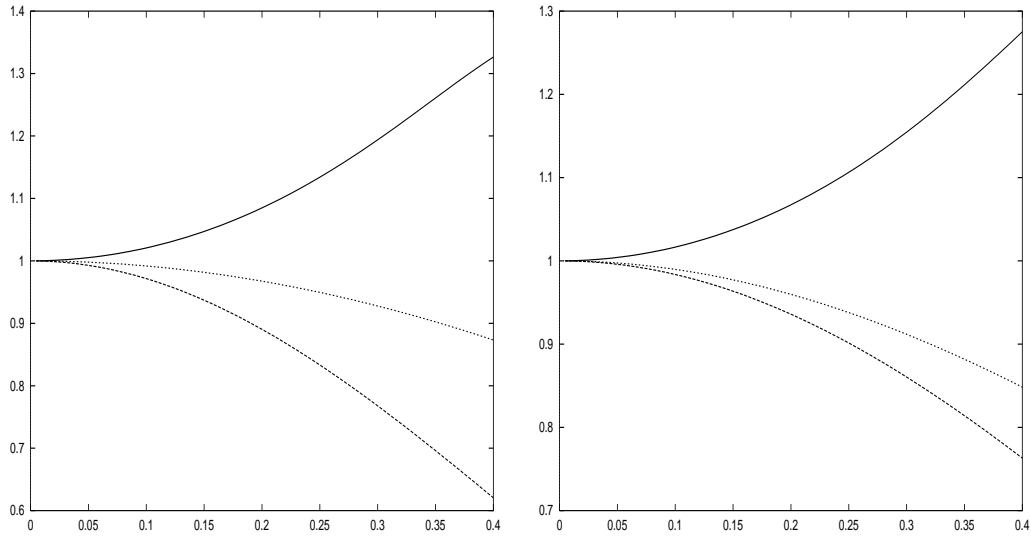


FIG. 48 – Courbes de dispersion comparées sur maillage en carrés: $\psi = 30^\circ$ (à gauche) et $\psi = 45^\circ$ (à droite).

Ces courbes mettent en évidence un gain de précision très net tant par rapport au schéma sans condensation de masse que par rapport à celui avec condensation de masse.

5.3 Discrétisation en temps

En utilisant le schéma classique saute-mouton avec trois pas de temps, on obtient, pour chacune des discrétisations en espace étudiées précédemment, un schéma discrétisé en temps et en espace. Nous étudions maintenant les conditions de stabilité qui leur sont associées pour ensuite faire la comparaison de la dispersion numérique introduite par chaque schéma.

5.3.1 Analyse de la stabilité

En utilisant la même méthode que pour les triangles, on obtient les conditions de stabilités suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 0,433 \text{ pour } \tilde{\mathcal{F}}_1 \\ \alpha &\leq 0,538 \text{ pour } \mathcal{F}_1 \text{ (sans condensation de masse)} \\ \alpha &\leq 0,789 \text{ pour } \mathcal{F}_1 \text{ (avec condensation de masse)} \end{aligned} \quad (54)$$

où

$$\alpha = \frac{\Delta t}{h}$$

De manière similaire au cas des triangles, le nouveau schéma présente une condition de stabilité plus restrictive que les deux autres.

5.3.2 Analyse de la dispersion

Comme dans le cas des triangles, nous avons étudié l'erreur commise sur la vitesse des ondes planes solutions du problème discrétisé en temps et en espace associé au nouvel élément fini pour les carrés. Nous l'avons ensuite comparée à celle introduite par les schémas analogues associés aux éléments finis de Nédélec du premier ordre avec et sans condensation de masse. Dans les figures qui suivent, nous représentons les variations de la vitesse de phase adimensionnelle en fonction de $K = \frac{kh}{2\pi} = \frac{1}{N}$ pour différents coefficients α et différents angles de propagation ψ .

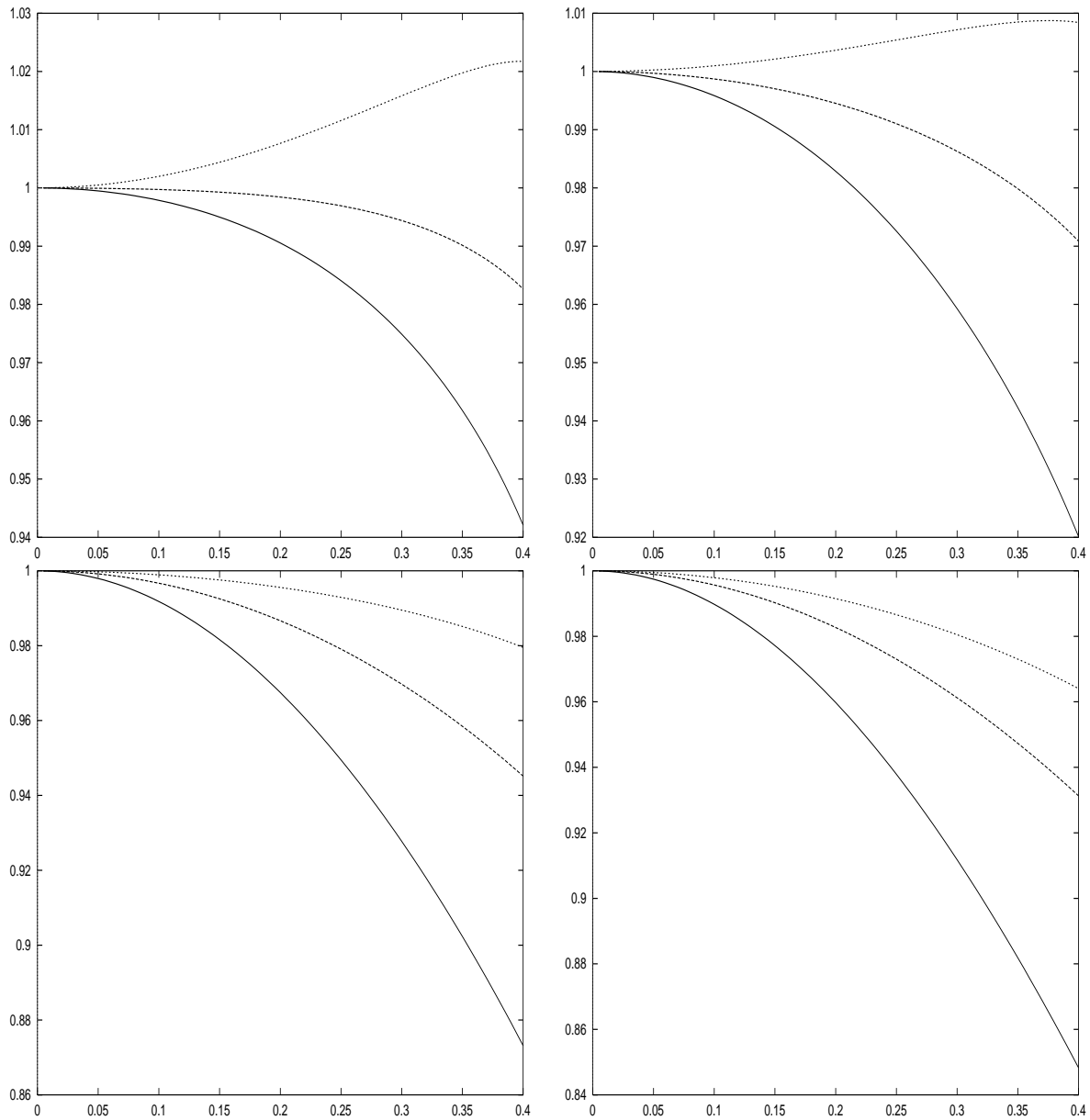


FIG. 49 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{F}}_1$ et l'ordre 2 en temps, avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.433 pour les courbes supérieures, pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

Dans la figure qui suit, on a encore comparé, à valeur de α fixée, la dispersion numérique des schémas discrétisés en temps et en espace obtenus par les trois méthodes. Encore une fois, la courbe inférieure correspond au schéma avec condensation de masse de Cohen et Monk, courbe supérieure au schéma sans condensation de masse et la courbe médiane au nouveau schéma avec condensation de masse.

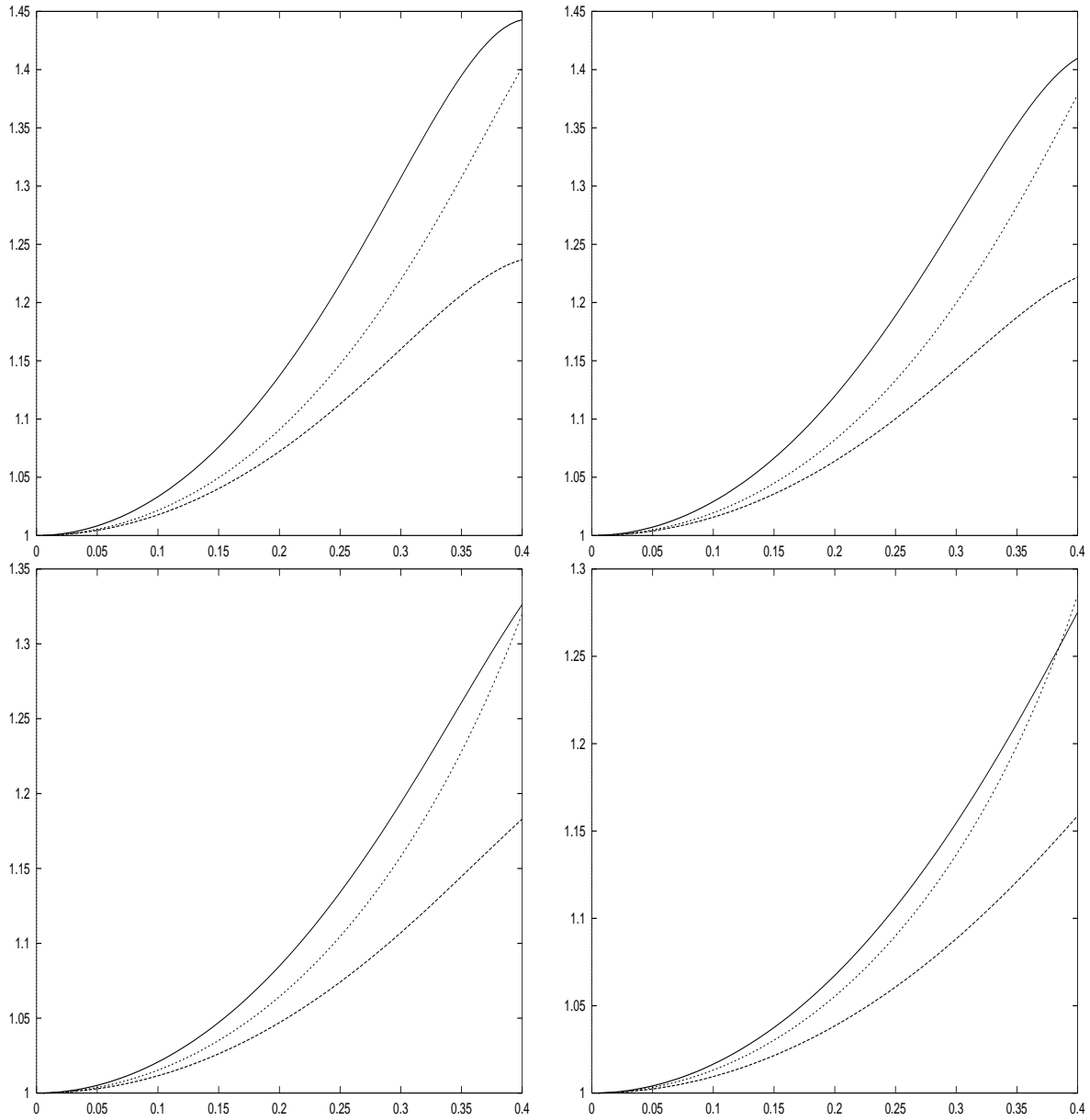


FIG. 50 – Courbes de dispersion pour \mathcal{F}_1 (sans condensation de masse) et l'ordre 2 en temps, avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.538 pour les courbes supérieures, pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

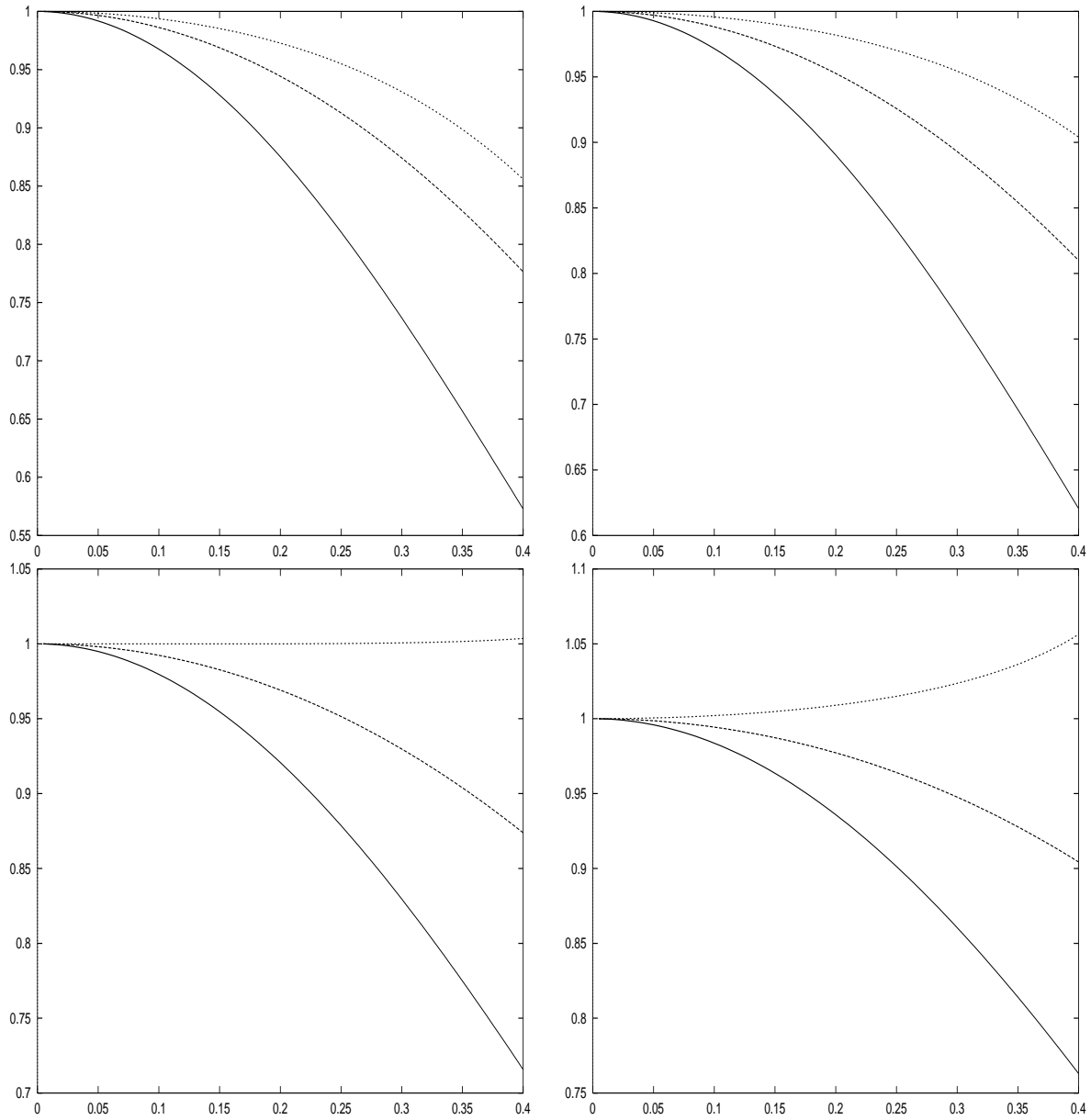


FIG. 51 – Courbes de dispersion pour \mathcal{F}_1 (avec condensation de masse) et l'ordre 2 en temps, avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.789 pour les courbes supérieures, pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

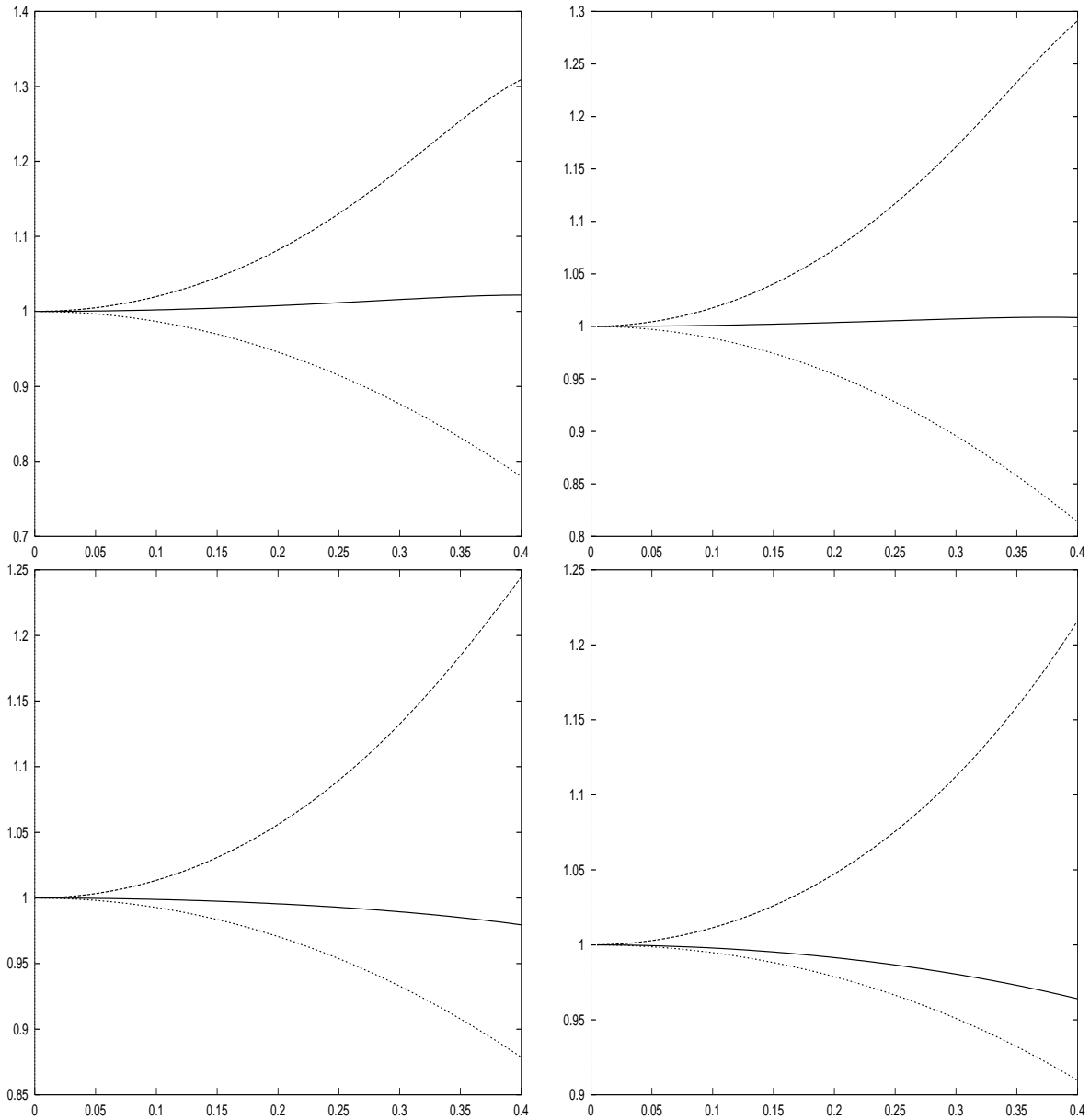


FIG. 52 – Courbes de dispersion comparées (ordre 2 en temps), $\alpha = 0.433$ pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

Comme dans le cas des triangles, la discrétisation en temps améliore encore la précision du nouveau schéma avec condensation de masse qui reste nettement plus précis que les deux autres. Toutefois, il faut remarquer que pour certaines valeurs d'angle ($\psi = 0^\circ$ ou $\psi = 15^\circ$ par exemple), c'est pour la valeur de α moyenne ($\frac{\alpha_{max}}{2}$) qu'on obtient une précision optimum.

6 Les éléments d'ordre supérieur en maillage triangulaire

Lorsque l'on s'intéresse à la résolution numérique des équations de Maxwell en régime transitoire, l'utilisation de méthodes d'ordre élevé présente un intérêt évident, tant du point de vue du coût de calcul que de celui de la dispersion numérique qui est bien connue comme étant le principal facteur limitant les méthodes du second ordre. C'est ce qui nous a conduit à chercher une généralisation de la condensation de masse à des méthodes de type éléments finis d'arête triangulaires d'ordre supérieur. nous aborderons le cas des rectangles dans la section

suivante.

Dans le cadre des éléments finis de Lagrange pour l'équation des ondes scalaire, pour obtenir la condensation de masse, on doit à la fois:

- enrichir l'espace d'éléments finis classique
- chercher une formule d'intégration numérique à poids positifs dont les nœuds coïncident avec les degrés de libertés du nouvel élément

Toutefois, pour ne pas altérer la précision du schéma en espace, on doit respecter le critère suivant: si le nouvel espace de fonctions \tilde{P} est compris, au sens de l'inclusion, entre P_k et $P_{k'}$, la formule de quadrature doit intégrer exactement les polynômes de $P_{k+k'-2}$. Cette condition, que l'on peut trouver dans les travaux de Ciarlet sur les problèmes elliptiques ([1]), relie la précision de la formule d'intégration numérique et le degré des polynômes de l'espace \tilde{P} . Il faudrait donc, a priori, trouver l'analogie de ce critère pour les éléments finis d'arête. Néanmoins, ce critère n'étant pas pour l'instant exhibé, nous avons cherché, dans chaque cas, la formule d'intégration à poids positifs la plus précise possible qui assure la condensation de masse.

6.1 Élément fini d'arête triangulaire du second ordre

On considère le triangle K de sommets S_1, S_2, S_3 . $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont les coordonnées barycentriques associées et on note Γ_1 (resp. Γ_2, Γ_3) l'arête S_2S_3 (resp. S_1S_3, S_1S_2).

Rappelons que pour l'élément fini d'arête triangulaire usuel du second ordre, l'ensemble Σ des degrés de liberté choisis est donné par:

$$\Sigma = \left\{ \int_{\Gamma_i} \vec{u} \vec{\tau} p d\sigma \quad \forall p \in P_1(\Gamma_i), \quad i = 1, 2, 3 \right\} \cup \left\{ \int_K \vec{u} \vec{q} dx \quad \forall \vec{q} \in (P_0(K))^2 \right\}$$

On a $|\Sigma| = 8$. L'espace vectoriel de champs de vecteurs \mathcal{R}_2 défini par:

$$\mathcal{R}_2 = (P_1(K))^2 \oplus \mathcal{S}_2$$

où \mathcal{S}_2 est l'espace vectoriel engendré par les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} x_2^2 \\ -x_1 x_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -x_1 x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \quad (55)$$

est de dimension 8. Il est Σ -unisolvant et l'élément fini qu'on obtient est $H(rot)$ -conforme (cf. [8]). Dans un premier temps, nous allons montrer comment on peut, tout en gardant ces propriétés d'unisolvance et de conformité $H(rot)$, remplacer ces degrés de liberté par des quantités qui se prêtent à l'emploi de formules de quadrature.

Soit (i, j, k) une permutation circulaire de $(1, 2, 3)$. Soit α un paramètre réel, $\alpha \in]0, 1[$. Sur chaque arête Γ_i , on choisit deux points notés $M_{jk}(\alpha)$ et $M_{kj}(\alpha)$ où $M_{jk}(\alpha)$ (resp. $M_{kj}(\alpha)$) est le barycentre de S_j et S_k avec pour poids respectifs α et $(1 - \alpha)$ (resp. $(1 - \alpha)$ et α). On note G le centre de gravité. On considère alors l'ensemble des degrés de liberté suivant:

$$\Sigma' = \{ \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{12}), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{21}), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{13}), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{31}), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{32}), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{23}), \vec{u} \cdot \vec{e}_1(G), \vec{u} \cdot \vec{e}_2(G) \}$$

où (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est la base canonique de \mathbb{R}^2 et le vecteur $\vec{\tau}$ est orienté conformément à la figure 53.

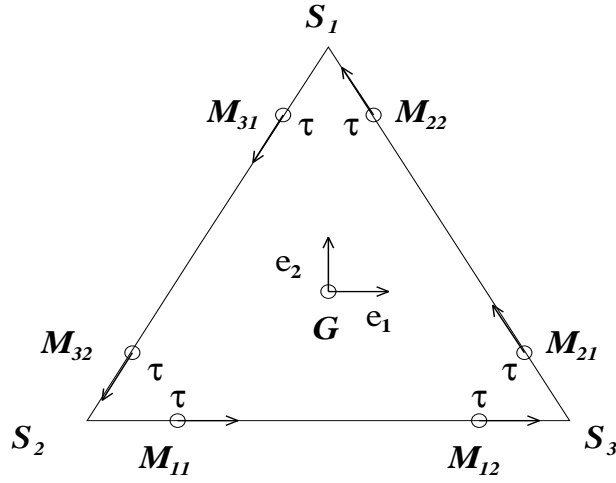


FIG. 53 – Élément fini de référence 2D du second ordre. Arête $\Gamma_1 = S_2S_3$, Arête $\Gamma_2 = S_1S_3$, Arête $\Gamma_3 = S_1S_2$

Avant de démontrer que \mathcal{R}_2 est Σ' -unisolvant, établissons d'abord le

Lemme 6.1 Soit $\vec{u} \in \mathcal{R}_2$ et Γ_i une arête de K . On a équivalence entre:

- (1) $\int_{\Gamma_i} \vec{u} \cdot \vec{\tau} p d\sigma = 0 \quad \forall p \in P_1(\Gamma_i)$
- (2) $\vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{jk}) = \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{kj}) = 0$
- (3) $\vec{u} \cdot \vec{\tau}_{|\Gamma_i} \equiv 0$

Démonstration:

Ce résultat découle directement du fait que, si $\vec{u} \in \mathcal{R}_2$, alors $\vec{u} \cdot \vec{\tau}_{|\Gamma_i} \in P_1(\Gamma_i)$. On démontre alors facilement que (1) \Leftrightarrow (3) et (2) \Leftrightarrow (3).

D'une part, si on munit l'espace vectoriel $P_1(\Gamma_i)$ du produit scalaire $L^2(\Gamma_i)$, on a clairement:

$$\int_{\Gamma_i} \vec{u} \cdot \vec{\tau} p d\sigma = 0 \quad \forall p \in P_1(\Gamma_i) \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{\tau}_{|\Gamma_i} \in P_1(\Gamma_i) \iff \vec{u} \cdot \vec{\tau}_{|\Gamma_i} \equiv 0$$

D'autre part, $\vec{u} \cdot \vec{\tau}_{|\Gamma_i}$ étant un polynôme de degré 1 sur Γ_i , il est identiquement nul sur Γ_i si et seulement si il s'annule en deux points distincts de Γ_i (en l'occurrence $M_{jk}(\alpha)$ et $M_{kj}(\alpha)$). ■

Remarque 6.1 – Ce lemme montre que l'élément fini $(K, \mathcal{R}_2, \Sigma')$, s'il a la propriété d'unisolvance, est $H(\text{rot})$ -conforme.

- Les propriétés de symétries des points situés sur les arêtes et l'introduction du paramètre α seront justifiées, dans le paragraphe qui suit, par les propriétés de la formule de quadrature qui doit assurer la condensation de masse.

On a alors le

Lemme 6.2 L'espace \mathcal{R}_2 est Σ' -unisolvant.

Démonstration:

D'après les propriétés des degrés de liberté de l'élément fini d'arête usuel du second ordre, et compte tenu de l'équivalence établie dans le lemme qui précède, il est clair que l'espace vectoriel

$$W = \{ \vec{u} \in \mathcal{R}_2 / \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{jk}) = 0 \quad \forall j, k \}$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de \mathcal{R}_2 . Or, les degrés de liberté $\vec{u} \cdot \vec{e}_1(G)$ et $\vec{u} \cdot \vec{e}_2(G)$ vus comme des formes linéaires définies sur W sont linéairement indépendantes. Il s'ensuit que l'intersection de leurs noyaux respectifs n'est autre que l'espace vectoriel nul ce qui démontre l'unisolvance.

6.2 Nouvel élément fini d'arête du second ordre

Nous pouvons maintenant construire un nouvel élément fini en suivant la même démarche que celle adoptée pour le cas du premier ordre. Nous choisissons comme degrés de liberté les quantités

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} = & \{ \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{12}), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{21}), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{13}), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{31}), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{32}), \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{23}) \} \cup \\ & \{ \vec{u} \cdot \vec{n}(M_{12}), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_{21}), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_{13}), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_{31}), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_{32}), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_{23}) \} \cup \\ & \{ \vec{u} \cdot \vec{e}_1(G), \vec{u} \cdot \vec{e}_2(G) \} \end{aligned} \quad (56)$$

où le vecteur normal \vec{n} est choisi rentrant par rapport au triangle conformément à la figure 54.

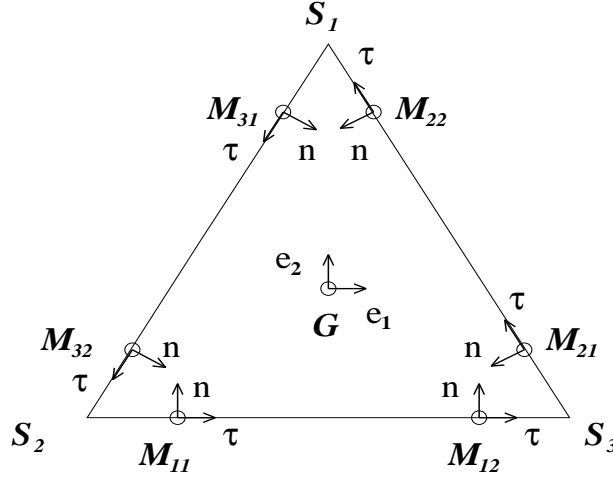


FIG. 54 – *Nouvel Elément fini de référence 2D du second ordre. Arête $\Gamma_1 = S_2S_3$, Arête $\Gamma_2 = S_1S_3$, Arête $\Gamma_3 = S_1S_2$*

Il s'agit maintenant de décrire l'espace de champs de vecteurs 2D qui sera $\tilde{\Sigma}$ -unisolvant. Comme pour le cas du premier ordre, le plus simple consiste à décrire les fonctions de base associées aux nouveaux degrés de liberté.

Pour chaque arête Γ_i , nous considérons les deux fonctions de base:

$$\begin{cases} \vec{w}_{jk} &= \nabla \lambda_i \cdot \lambda_j \lambda_k \phi_{kj} \\ \vec{w}_{kj} &= \nabla \lambda_i \cdot \lambda_j \lambda_k \phi_{jk} \end{cases} \quad (57)$$

où ϕ_{jk} (resp. ϕ_{kj}) est le polynôme de P_1 qui s'annule en G et en M_{jk} (resp. M_{kj}).

On introduit ainsi 6 fonctions. Si \vec{w}_{jk} désigne l'une d'entre elles, elle vérifie:

$$\begin{cases} \vec{w}_{jk} &= \vec{0} \text{ sur les arêtes } \{j, k\} \\ \vec{w}_{jk}(G) &= \vec{0} \\ \vec{w}_{jk}(M_{kj}) &= \vec{0} \\ \vec{w}_{jk} \cdot \vec{\tau} &= 0 \text{ sur l'arête } \{i\} \\ \vec{w}_{jk} \cdot \vec{n} &= \|\nabla \lambda_i\| \lambda_j \lambda_k \phi_{kj} \text{ sur l'arête } \{i\} \end{cases} \quad (58)$$

Nous considérons l'espace de champs de vecteurs suivant:

$$\tilde{\mathcal{R}}_2 = \mathcal{R}_2 \oplus [\vec{w}_{12}, \vec{w}_{21}, \vec{w}_{13}, \vec{w}_{31}, \vec{w}_{32}, \vec{w}_{23}]$$

Nous avons le

Théorème 6.1 *L'espace $\tilde{\mathcal{R}}_2$ est de dimension 14 et l'ensemble $\tilde{\Sigma}$ est $\tilde{\mathcal{R}}_2$ -unisolvant. De plus, $\vec{w} \cdot \vec{\tau}$ est un polynôme de degré 1 sur chaque arête si \vec{w} désigne un élément quelconque de $\tilde{\mathcal{R}}_2$.*

Démonstration:

Comme nous l'avons vu, si $\vec{w} \in \mathcal{R}_2$, $\vec{w} \cdot \vec{\tau}$ est un polynôme de degré 1 sur chaque arête. Puisque $\vec{w}_{ij} \cdot \vec{\tau}$ est identiquement nul sur le bord de K (pour $i, j = 1, 2, 3$), cette propriété est satisfaite pour tout élément \vec{w} de $\widetilde{\mathcal{R}}_2$.

Supposons maintenant que $\vec{w} \in \widetilde{\mathcal{R}}_2$ vérifie:

$$\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{n}(M_{ij}) = 0 \text{ et } \vec{w} \cdot \vec{\tau}(M_{ij}) = 0, & \forall i, j = 1 \dots 3 \\ \vec{w} \cdot \vec{e}_1(G) = 0 \text{ et } \vec{w} \cdot \vec{e}_2(G) = 0 \end{cases} \quad (59)$$

On peut décomposer \vec{w} en écrivant:

$$\vec{w} = \vec{w}_0 + \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij} \vec{w}_{ij} \quad \vec{w}_0 \in \mathcal{R}_2, \beta_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j = 1 \dots 3$$

Or, d'après les propriétés des fonctions \vec{w}_{ij} résumées dans (58), on a:

$$\begin{cases} \vec{w} \cdot \vec{\tau}(M_{ij}) = \vec{w}_0 \cdot \vec{\tau}(M_{ij}) = 0 & \forall i, j = 1 \dots 3 \\ \vec{w} \cdot \vec{e}_1(G) = \vec{w}_0 \cdot \vec{e}_1(G) = 0 \\ \vec{w} \cdot \vec{e}_2(G) = \vec{w}_0 \cdot \vec{e}_2(G) = 0 \end{cases} \quad (60)$$

Puisque $\vec{w}_0 \in \mathcal{R}_2$ qui est Σ' -unisolvant, on en déduit que $\vec{w}_0 = \vec{0}$.

En utilisant encore ces propriétés, on a

$$\vec{w} \cdot \vec{n}(M_{ij}) = \beta_{ij} \vec{w}_{ij} \cdot \vec{n}(M_{ij}) = \beta_{ij} \alpha (1 - \alpha) f_{ji}(M_{ij}) \|\nabla \lambda_k\| = 0$$

c'est-à-dire:

$$\beta_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1 \dots 3$$

ce qui achève la démonstration. ■

6.3 Rappels sur les formules de quadrature symétriques dans un triangle

Il reste à chercher une formule de quadrature à poids positifs qui permettra d'obtenir la condensation de masse pour l'élément fini que nous venons de construire. Nous rappelons d'abord dans ce paragraphe le cadre théorique introduit dans [10] pour l'étude des formules de quadrature sur un triangle K .

De manière générale, une formule de quadrature est définie par

$$E_K(f) = \text{mes}(K) \sum_i \omega_i f(x_i)$$

où ω_i et x_i sont respectivement les poids et les points de quadrature sur K . Nous allons nous limiter dans ce qui suit aux formules de quadrature symétriques. Nous renvoyons à [10] (voir aussi [6]) pour plus de détails.

Pour cela, introduisons S_3 l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3\}$.

A toute fonction de deux variables $f(x, y)$ vue comme une fonction des trois variables $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$, $\lambda_3(x, y)$ que l'on note encore $f(\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y), \lambda_3(x, y))$, et toute permutation $\sigma \in S_3$, on associe la fonction f_σ définie par

$$f_\sigma(x, y) = f(\lambda_{\sigma(1)}(x, y), \lambda_{\sigma(2)}(x, y), \lambda_{\sigma(3)}(x, y))$$

Une formule de quadrature est dite "symétrique" quand

$$\forall \sigma \in S_3, \forall f \in \mathcal{C}_0(K), \quad E_K(f) = E_K(f_\sigma)$$

(cette propriété est vérifiée par l'intégration exacte).

Pour décrire les formules de quadrature symétriques, introduisons l'application qui à tout point de quadrature X de coordonnées barycentriques $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ associe le point X_σ de coordonnées barycentriques $(\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \lambda_{\sigma(3)})$. Cette application permet de définir une relation d'équivalence \mathcal{R} par

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow \exists \sigma \in S_3/Y = X_\sigma$$

Si l'ensemble \mathcal{Q} des points de quadrature est stable par cette application, on dit qu'il est symétrique et en associant un poids ω_C à chaque classe d'équivalence C , on définit une formule de quadrature symétrique:

$$E_K(f) = \text{mes}(K) \sum_C \omega_C \left[\sum_{x \in C} f(x) \right]$$

Soit M_k l'ensemble des monômes de P_k . On définit sur M_k la relation d'équivalence $\widehat{\mathcal{R}}$ par

$$r\widehat{\mathcal{R}}s \Leftrightarrow \exists \sigma \in S_3/s = r_\sigma$$

On montre alors qu'une formule de quadrature symétrique est exacte sur P_k si et seulement si elle est exacte sur un représentant de chaque classe d'équivalence de M_k pour la relation $\widehat{\mathcal{R}}$.

6.4 Formule de quadrature pour l'élément fini du second ordre

L'ensemble \mathcal{Q} est ici un ensemble symétrique à deux classes d'équivalence pour la relation \mathcal{R} :

$$\begin{aligned} C_1 &= \{M_{i,j}(\alpha) \quad i, j = 1 \cdots 3\} \\ C_2 &= \{G\} \end{aligned} \quad (61)$$

La formule de quadrature naturellement candidate pour assurer la condensation de masse pour le second ordre est de la forme

$$E_K(f) = \text{mes}(K) \left\{ \omega_m \left(\sum_{i,j} f(M_{i,j}(\alpha)) \right) + \omega_g f(G) \right\}$$

où ω_m représente le poids associé aux points situés sur les arêtes et ω_g celui associé au barycentre. Nous avons ici trois paramètres ω_m , ω_g et α ce qui permet d'affirmer que cette formule intègre exactement P_3 qui comporte 3 classes d'équivalence pour la relation $\widehat{\mathcal{R}}$:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3\} \\ C_2 &= \{\lambda_1^2\lambda_2, \lambda_1^2\lambda_3, \lambda_2^2\lambda_1, \lambda_2^2\lambda_3, \lambda_3^2\lambda_1, \lambda_3^2\lambda_2\} \\ C_3 &= \{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\} \end{aligned} \quad (62)$$

Il reste à déterminer les paramètres de cette formule de quadrature. En intégrant la fonction $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, on obtient:

$$E_K(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = \text{mes}(K) \omega_g \frac{1}{27} = \int_K \lambda_1\lambda_2\lambda_3 dx = \text{mes}(K) \frac{1}{27}$$

ce qui donne:

$$\omega_g = \frac{9}{40}$$

En intégrant la fonction constante 1, on obtient:

$$E_K(1) = \text{mes}(K)(6\omega_m + \omega_g) = \int_K 1 dx = \text{mes}(K)$$

$$\omega_m = \frac{11}{240}$$

Enfin, en intégrant la fonction $\lambda_1 \lambda_2$, on obtient:

$$E_K(\lambda_1 \lambda_2) = \text{mes}(K) \left(\omega_g \frac{1}{9} + 2\omega_m(\alpha - \alpha^2) \right) = \int_K \lambda_1 \lambda_2 dx = \text{mes}(K) \frac{1}{24}$$

Ainsi, α est solution de

$$11\alpha^2 - 11\alpha + 2 = 0$$

On a donc:

$$\alpha = \frac{11 - \sqrt{33}}{22}$$

On vérifie a posteriori que cette formule intègre exactement un représentant quelconque de chacune des trois classes d'équivalence de P_3 . Notons enfin que les poids obtenus sont strictement positifs, ce que nous désirions obtenir.

6.5 Analyse en maillage triangulaire régulier

6.5.1 Problème semi-discret et dispersion numérique associée

Nous définissons l'espace:

$$\tilde{V}_h = \left\{ \vec{v}_h \in H(\text{rot}, \Omega) / \forall K \in \mathcal{T}_h, \vec{v}_h|_K \in \tilde{\mathcal{R}}_2(K) \right\}$$

où \mathcal{T}_h désigne un maillage régulier de \mathbb{R}^2 en triangles rectangles obtenu à partir d'un maillage de carrés de côté h que l'on coupe par une diagonale parallèle à la seconde bissectrice.(cf. figure 55).

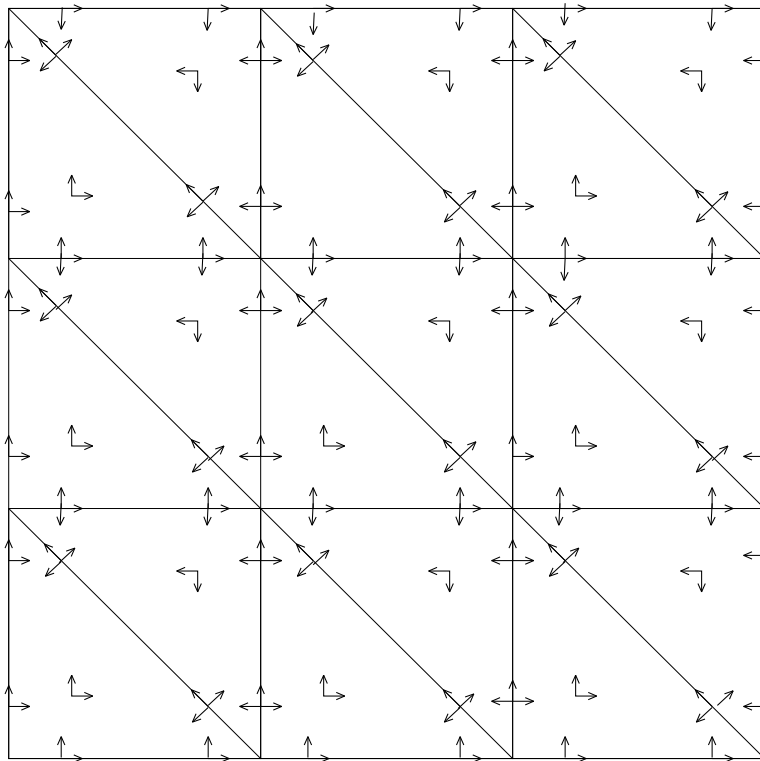


FIG. 55 – Maillage régulier pour $\tilde{\mathcal{R}}_2$ et degrés de liberté associés.

Ici, la régularité du maillage permet de définir un réseau périodique de 22 types de degrés de liberté (cf. figure 56).

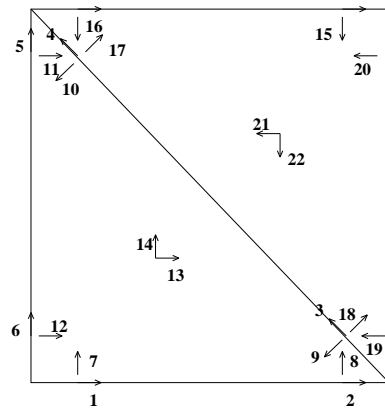


FIG. 56 – La cellule unité pour $\tilde{\mathcal{R}}_2$ et ses 22 types de degrés de liberté.

De manière analogue au cas du premier ordre, le problème semi-discret est équivalent à un système différentiel de dimension 22. Nous n’écrivons pas ce système du fait de sa complexité et de sa taille. D’autre part, la relation de dispersion “physique” s’obtient en résolvant un problème aux valeurs propres de même dimension de la forme

$$\omega_h^2 \widehat{M}_h \vec{E}_0 = \widehat{A}_h \vec{E}_0$$

où M_h est la matrice diagonale définie par

$$M_h = h^2 \text{diag} \left(\underbrace{2\omega_m, \dots, 2\omega_m}_{6 \text{ fois}}, \underbrace{\omega_m, \dots, \omega_m}_{6 \text{ fois}}, \underbrace{\omega_g, \dots, \omega_g}_{2 \text{ fois}}, \underbrace{\omega_m, \dots, \omega_m}_{6 \text{ fois}}, \underbrace{\omega_g, \dots, \omega_g}_{2 \text{ fois}} \right)$$

Nous avons donc tracé, à la même échelle, et pour $\psi = 0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ$, les courbes $\tilde{Q}_h^4 = \tilde{Q}_h^4(K, \psi)$ qui représente l’erreur relative commise sur la vitesse par le nouveau schéma pour le second ordre (cf. figure 57).

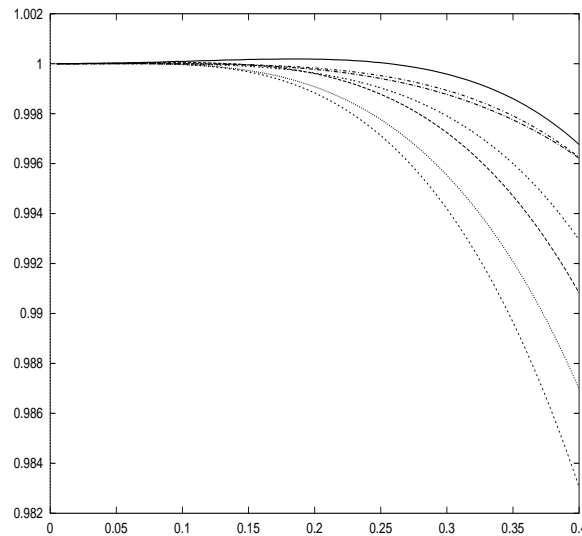


FIG. 57 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{R}}_2$, $\psi = 0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ$.

D'autre part, les courbes de l'erreur en échelle logarithmique (cf. figure 58), permettent d'émettre la conjecture:

Conjecture 6.1 *La valeur propre physique $\omega_h(\vec{k})$ associée au schéma correspondant à $\tilde{\mathcal{R}}_2$ en maillage régulier en triangles rectangles admet le développement limité suivant:*

$$\omega_h(\vec{k}) = |\vec{k}|(1 + O(h^4 |\vec{k}|^4))$$

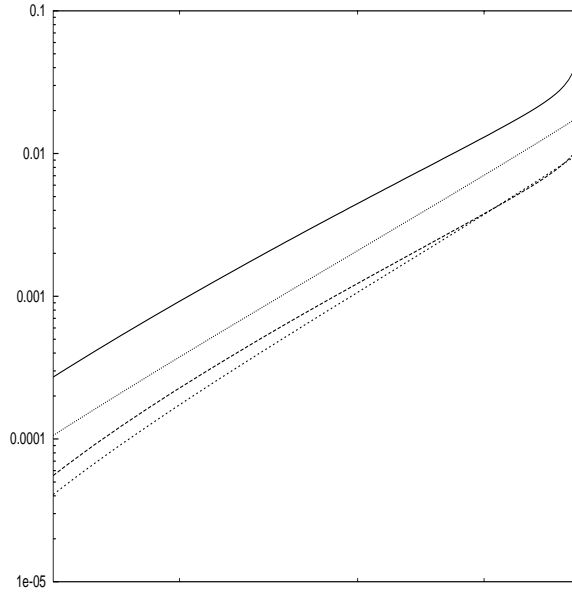


FIG. 58 – Droites en échelle logarithmique pour le second ordre: maillage en triangles rectangles.

Ici aussi, nous avons comparé la dispersion numérique introduite par le nouveau schéma (trait pointillé) avec celle introduite par le schéma analogue sans condensation de masse (trait continu) en traçant à la même échelle les courbes de dispersion associées à ces deux schémas pour une direction de propagation ψ donnée.

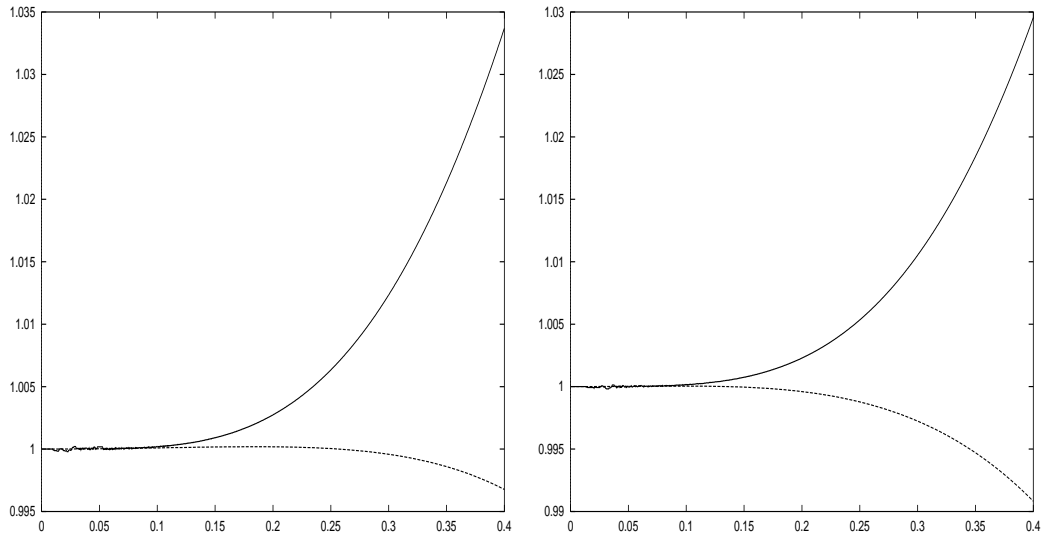


FIG. 59 – Courbes de dispersion comparées: $\psi = -45^\circ$ (à gauche) et $\psi = -30^\circ$ (à droite).

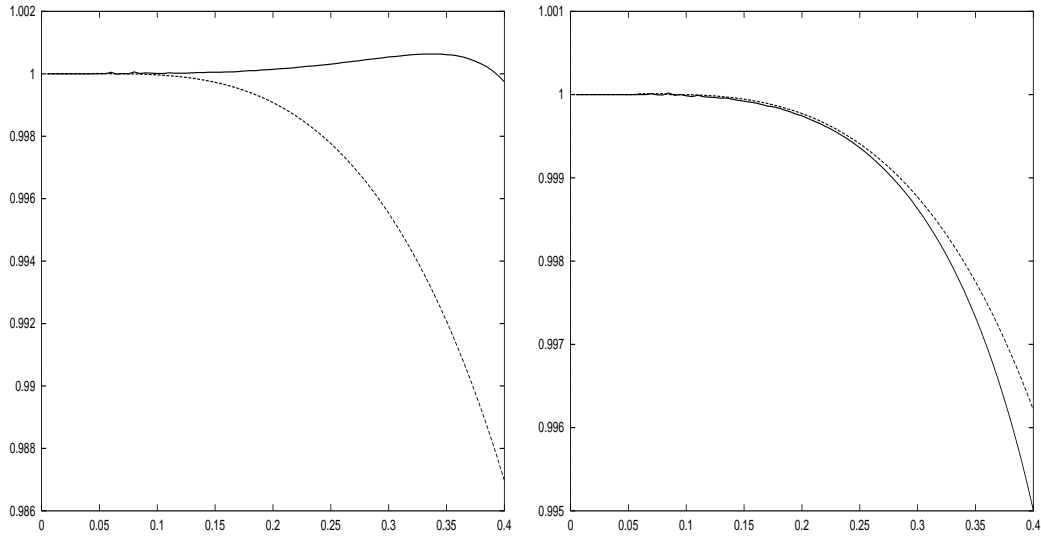


FIG. 60 – Courbes de dispersion comparées: $\psi = 0^\circ$ (à gauche) et $\psi = 15^\circ$ (à droite).

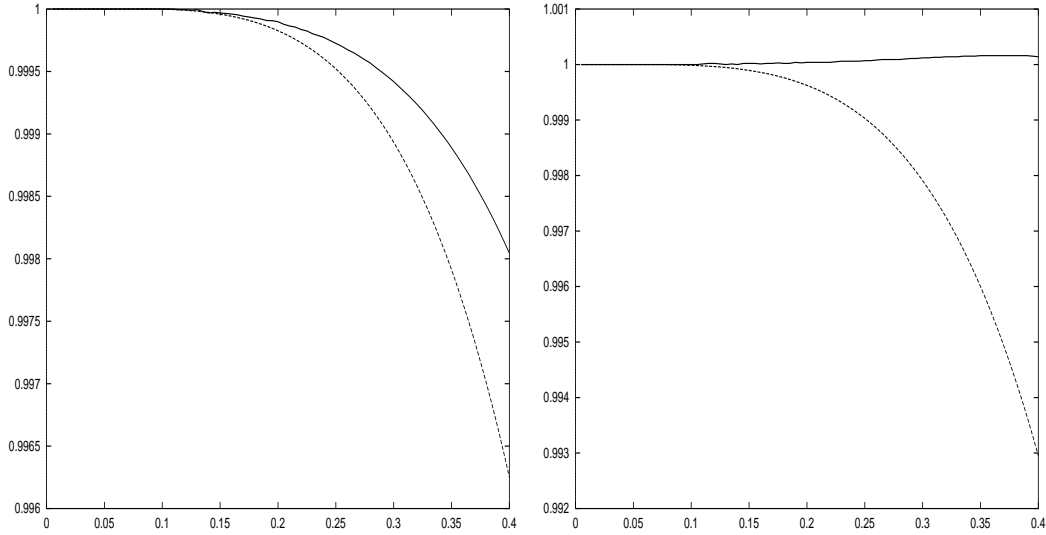


FIG. 61 – Courbes de dispersion comparées: $\psi = 30^\circ$ (à gauche) et $\psi = 45^\circ$ (à droite).

Ces courbes appellent la remarque suivante: dans le cas du premier ordre, le schéma avec condensation de masse introduit une dispersion numérique d'ordre 2. Cependant, on peut constater une perte de précision par rapport au schéma sans condensation de masse et ce, quel que soit l'angle d'incidence ψ considéré. Par contre, pour le second ordre, il apparaît que le schéma avec condensation de masse est, pour certaines valeurs d'angle ($\psi = -15^\circ, -30^\circ, -45^\circ$ par exemple), plus précis du point de vue de la dispersion numérique.

6.5.2 Discrétisation en temps et ordre élevé

Si on met le problème semi-discrétisé obtenu sous la forme:

$$\frac{d^2 E_h}{dt^2} + D_h E_h = 0 \quad (63)$$

où $D_h = M_h^{-1} A_h$, il est clair qu'une discrétisation en temps par un schéma classique saute mouton est insuffisante car d'ordre 2 en temps pour un schéma qui admet une erreur de dispersion en espace en $O(h^4)$. Or, une méthode

de type différences finies d'ordre 4 à 5 pas de temps s'avère inconditionnellement instable. Aussi, nous adopterons l'approche de l'équation modifiée (décrite dans [4] ou [2] par exemple) qui permet de conserver un schéma stable à trois pas de temps. Cette approche consiste à écrire la somme des développements de Taylor de $E_h(t)$ (qui est C^∞) en t^{n+1} et t^{n-1} où $t^n = n\Delta t$ et Δt représente le pas de discrétisation en temps:

$$\frac{E_h(t^{n+1}) - 2E_h(t^n) + E_h(t^{n-1}))}{\Delta t^2} = \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^4 E_h}{\partial t^4}(t^n) + O(\Delta t^4) \quad (64)$$

En utilisant l'équation semi discrète (63), on a:

$$\frac{\partial^4 E_h}{\partial t^4}(t^n) = D_h^2 E_h(t^n)$$

de sorte que si on note $E_h^n = E_h(t^n)$ la solution de (63) au temps t^n , le schéma défini par:

$$\frac{E_h^{n+1} - 2E_h^n + E_h^{n-1}}{\Delta t^2} + D_h E_h^n - \frac{\Delta t^2}{12} D_h^2 E_h^n = 0$$

est d'ordre 4 en temps par construction.

Remarque 6.2 • *Pour obtenir un coût calcul optimal, il faut factoriser cette équation en écrivant:*

$$\frac{E_h^{n+1} - 2E_h^n + E_h^{n-1}}{\Delta t^2} + N_h [E_h^n - \frac{\Delta t^2}{12} N_h E_h^n] = 0$$

Ainsi, à chaque pas de temps, l'expression $E_h^n - \frac{\Delta t^2}{12} N_h E_h^n$ peut être considérée comme une inconnue de calcul intermédiaire. Le coût de programmation d'un pas de temps pour le schéma d'ordre 4 est donc le double de celui associé au schéma saute mouton.

• *Nous pourrions tenir compte d'un second membre dans (63) et appliquer ensuite le principe de l'équation modifiée. Mais l'expérience a montré que sa contribution (lorsqu'il est à support compact) reste négligeable. De ce fait, l'algorithme peut être écrit sans en tenir compte.*

6.5.3 Analyse de la stabilité

Rappelons que pour l'ordre 2 en temps, la stabilité est équivalente à

$$\frac{\Delta t^2 \|D_h\|}{4} \leq 1$$

c'est-à-dire, de manière équivalente,

$$\alpha \leq \frac{2}{\sqrt{\max_{i,K} |\lambda^i(K)|}}$$

où les $\lambda^i(K)$ sont les solutions du problème aux valeurs propres généralisé

$$A_1(K)\vec{w} = \lambda M_1(K)\vec{w}$$

Pour l'ordre 4 en temps, il faut considérer la norme de l'opérateur $D_h(Id - \frac{\Delta t^2}{12} D_h)$, ce qui donne la condition de stabilité:

$$\alpha \leq \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\max_{i,K} |\lambda^i(K)|}}$$

Comme dans le cas du premier ordre, ce maximum est calculé numériquement. On a alors les conditions de stabilité suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 0,1167 \text{ pour l'ordre 2 en temps} \\ \alpha &\leq 0,2021 \text{ pour l'ordre 4 en temps} \end{aligned} \quad (65)$$

Remarque 6.3 *On constate encore que la condition de stabilité associée au nouveau schéma est plus restrictive que celle associée au schéma usuel. D'autre part, ces conditions de stabilité peuvent paraître très contraignantes comparativement à celles que l'on a calculées dans le cas du premier ordre. Toutefois, il faut tenir compte du fait que pour les nouveaux schémas, à un élément du premier ordre correspondent 6 degrés de liberté alors que dans le cas du second ordre correspondent 14 degrés de liberté.*

6.5.4 Analyse de la dispersion numérique pour le schéma discrétisé en temps et en espace

Rappelons que pour l'ordre 2 en temps, la dispersion numérique s'écrit:

$$Q_h = \frac{1}{\pi\alpha K} \arcsin \left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\lambda^0(K)} \right)$$

où λ^0 est la valeur propre physique de A_1 .

Pour l'ordre 4 en temps, on a:

$$Q_h = \frac{1}{\pi\alpha K} \arcsin \left(\frac{\alpha}{2} \sqrt{\lambda^0(K) - \frac{\alpha^2}{12} (\lambda^0(K))^2} \right)$$

Nous allons maintenant visualiser la dispersion numérique. Nous représentons les variations de la vitesse de phase adimensionnelle en fonction de K pour différents coefficients α et différents angles de propagation ψ .

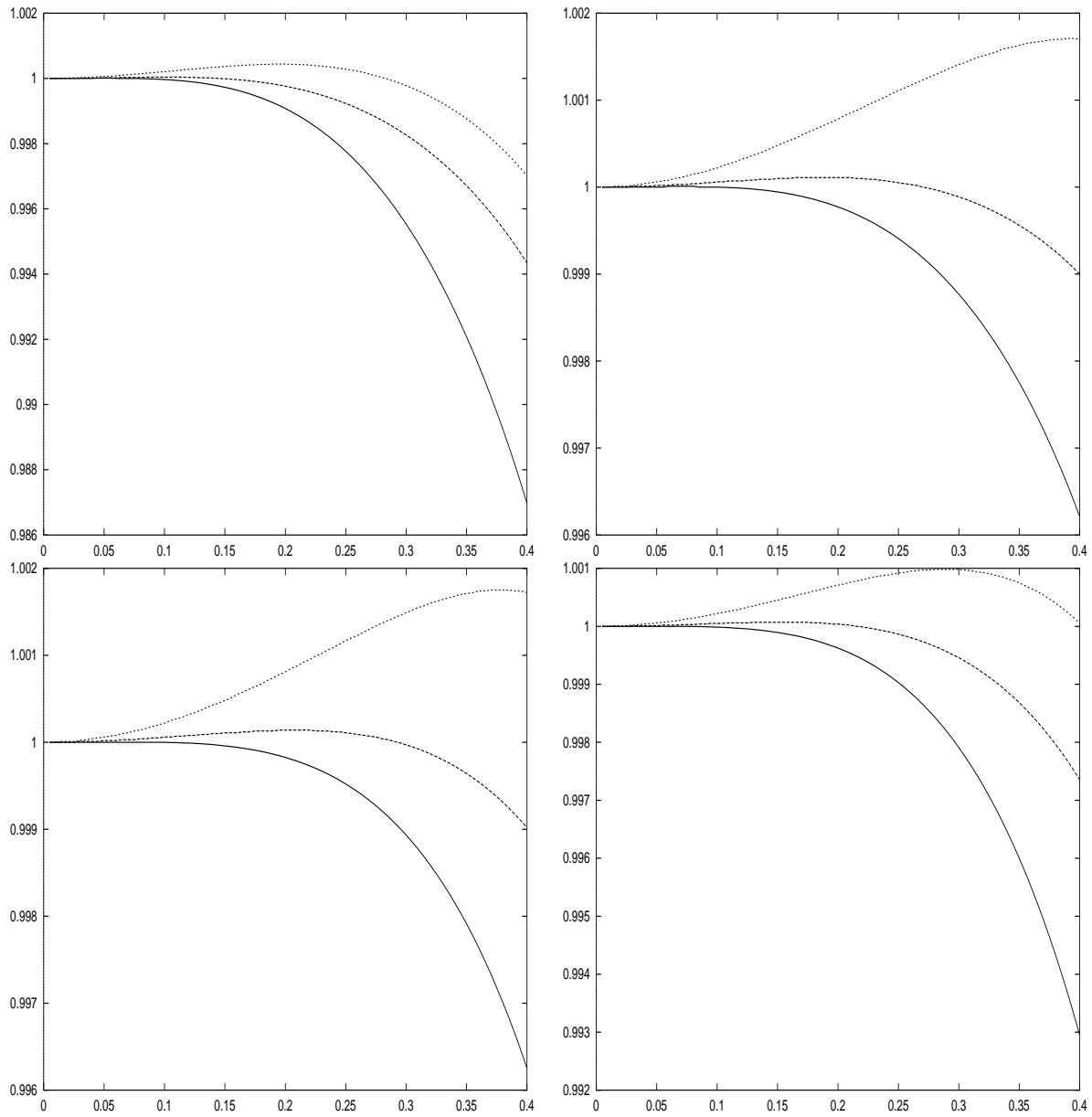


FIG. 62 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{R}}_2$ et l'ordre 2 en temps sur maillage en triangles rectangles, avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.1167 pour les courbes supérieures, pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

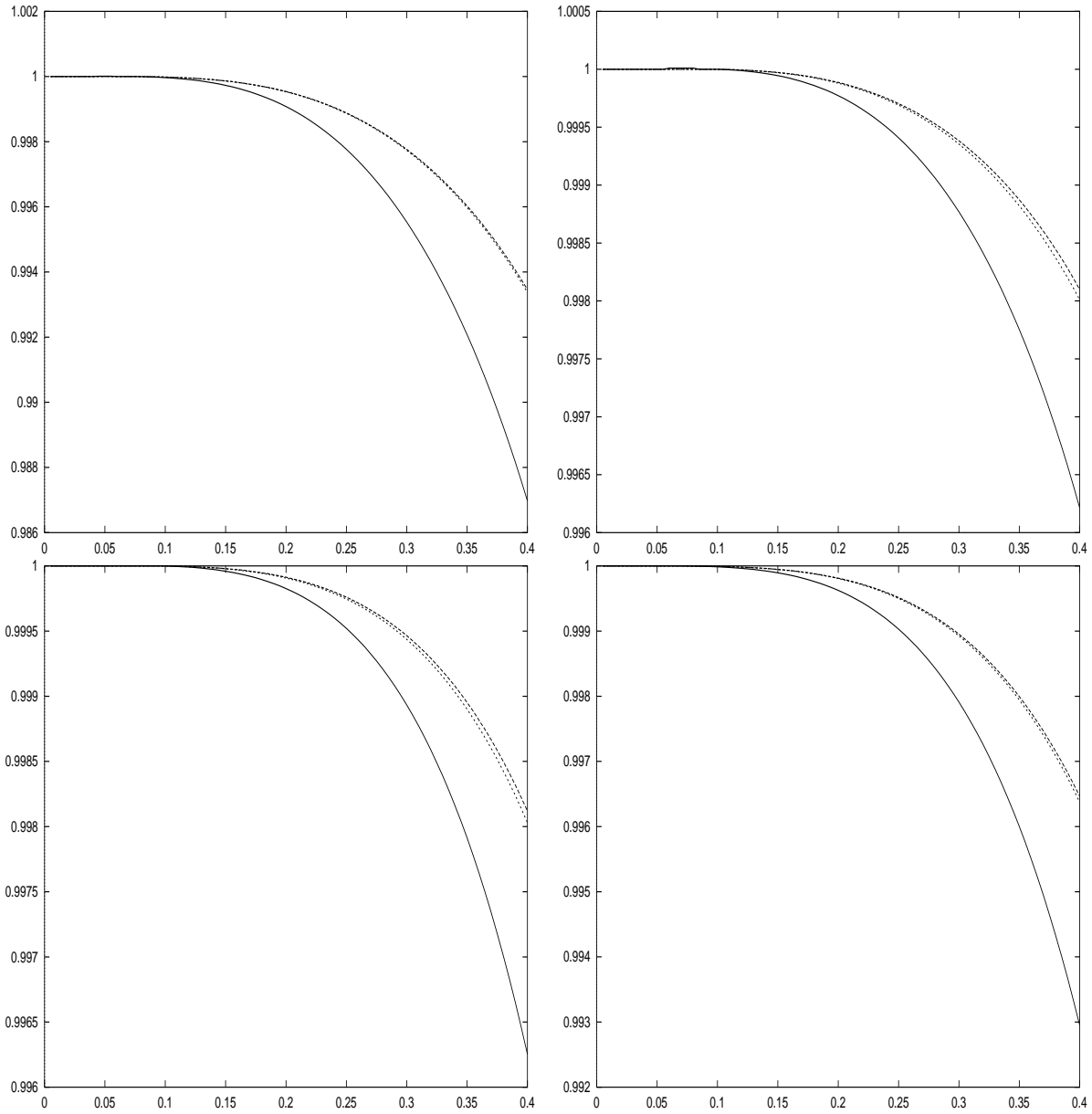


FIG. 63 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{R}}_2$ et l'ordre 4 en temps sur maillage en triangles rectangles, avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.202 pour les courbes supérieures, pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

Comme dans le cas du premier ordre, la précision du schéma est améliorée avec la discrétisation en temps.

6.6 Cas du troisième ordre

6.6.1 Élément fini d'arête triangulaire du troisième ordre

Rappelons que, pour l'élément fini d'arête du second ordre, l'ensemble Σ des degrés de liberté choisis est donné par:

$$\Sigma = \left\{ \int_{\Gamma_i} \vec{u} \cdot \vec{\tau} p d\sigma \quad \forall p \in P_2(\Gamma_i), \quad i = 1, 2, 3 \right\} \cup \left\{ \int_K \vec{u} \cdot \vec{q} dx \quad \forall \vec{q} \in (P_1(K))^2 \right\}$$

On a: $|\Sigma| = 15$. L'espace de champs de vecteurs noté \mathcal{R}_3 qui est Σ -unisolvant est l'espace des champs dont la composante tangentielle, sur chaque arête, est un polynôme de degré 2.

Dans un premier temps, en suivant la même démarche que celle adoptée dans le cas du second ordre, on remplace ces degrés de liberté par des quantités qui se prêtent à l'emploi de formules de quadrature. Ainsi, les moments associés aux arêtes sont remplacés par les degrés de liberté suivants:

$$\{\vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{ij}(\alpha)), \quad \forall i, j = 1 \dots 3\} \cup \{\vec{u} \cdot \vec{\tau}(H_i), \quad \forall i = 1 \dots 3\}$$

où les points $M_{ij}(\alpha)$ sont ceux définis précédemment (α étant un paramètre indéterminé pour l'instant) et les H_i sont les milieux respectifs des arêtes du triangle conformément à la figure 64.

D'autre part, les 6 moments intérieurs sont remplacés par les deux composantes du champ en trois points $G_1(\beta), G_2(\beta), G_3(\beta)$, où $G_i(\beta)$ est le barycentre de S_i, S_j, S_k avec pour poids respectifs $\beta, \frac{1-\beta}{2}, \frac{1-\beta}{2}$ (cf. figure 64).

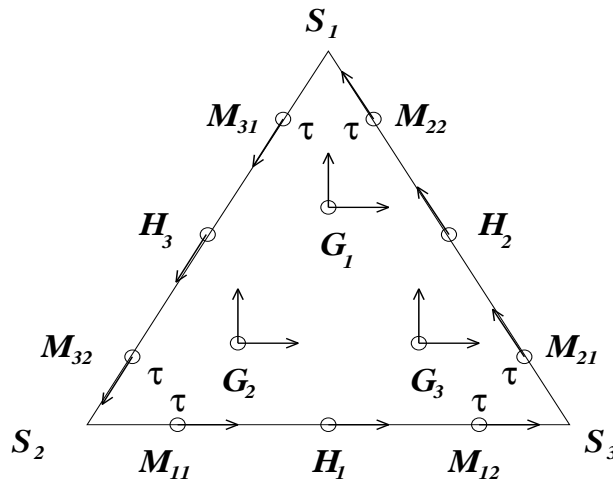


FIG. 64 – *Elément fini de référence 2D du troisième ordre. Arête $\Gamma_1 = S_2S_3$, Arête $\Gamma_2 = S_1S_3$, Arête $\Gamma_3 = S_1S_2$*

On considère donc l'ensemble:

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \{\vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{ij}(\alpha)), \quad \forall i, j = 1 \dots 3\} \cup \{\vec{u} \cdot \vec{\tau}(H_i), \quad \forall i = 1 \dots 3\} \\ &\cup \{\vec{u} \cdot \vec{e}_1(G_i), \vec{u} \cdot \vec{e}_2(G_i), \quad \forall i = 1 \dots 3\} \end{aligned} \quad (66)$$

Une démonstration similaire à celle menée pour le second ordre permettrait d'établir que l'espace \mathcal{R}_3 est bien Σ' -unisolvant. Le nouvel élément fini du troisième ordre est donc obtenu en réintégrant les composantes normales du champs aux points situés sur les arêtes (cf figure 54).

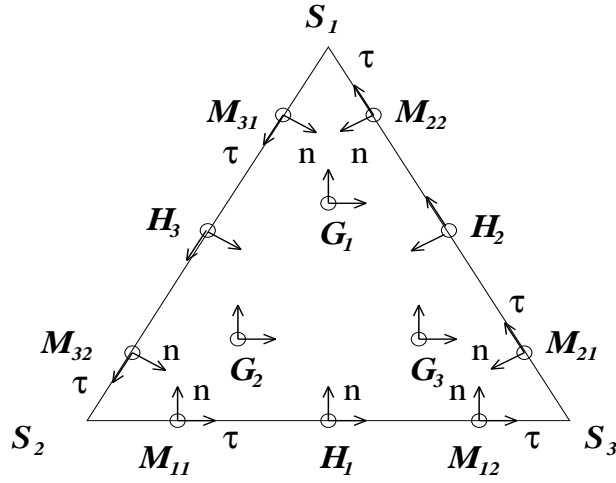


FIG. 65 – *Nouvel élément fini de référence 2D du troisième ordre. Arête $\Gamma_1 = S_2S_3$, Arête $\Gamma_2 = S_1S_3$, Arête $\Gamma_3 = S_1S_2$*

6.6.2 Une formule de quadrature pour l'élément du troisième ordre

On cherche donc une formule de quadrature symétrique de la forme:

$$\int_K \vec{u} \vec{v} dx \simeq \text{mes}(K) \left\{ \omega_m \left(\sum_{i,j} \vec{u}(M_{i,j}) \cdot \vec{v}(M_{i,j}) \right) \right\} + \text{mes}(K) \left\{ \omega_h \left(\sum_i \vec{u}(H_i) \cdot \vec{v}(H_i) \right) \right\} + \text{mes}(K) \left\{ \omega_g \left(\sum_i \vec{u}(G_i) \cdot \vec{v}(H_i) \right) \right\} \quad (67)$$

Cette formule comprenant cinq paramètres, on obtient une formule qui intègre exactement P_5 . En effet, on peut distinguer dans P_5 cinq classes d'équivalence pour la relation $\hat{\mathcal{R}}$ définie précédemment:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{ \lambda_1^5, \lambda_2^5, \lambda_3^5 \} \\ C_2 &= \{ \lambda_1^4 \lambda_2, \lambda_1^4 \lambda_3, \lambda_2^4 \lambda_1, \lambda_2^4 \lambda_3, \lambda_3^4 \lambda_1, \lambda_3^4 \lambda_2 \} \\ C_3 &= \{ \lambda_1^3 \lambda_2^2, \lambda_1^3 \lambda_3^2, \lambda_2^3 \lambda_1^2, \lambda_2^3 \lambda_3^2, \lambda_3^3 \lambda_1^2, \lambda_3^3 \lambda_2^2 \} \\ C_4 &= \{ \lambda_1^3 \lambda_2 \lambda_3, \lambda_2^3 \lambda_1 \lambda_3, \lambda_3^3 \lambda_1 \lambda_2 \} \\ C_5 &= \{ \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3, \lambda_2^2 \lambda_1^2 \lambda_3, \lambda_3^2 \lambda_1^2 \lambda_2 \} \end{aligned} \quad (68)$$

En intégrant des fonctions adéquates, on obtient:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{63 - \sqrt{1785 + 168\sqrt{7}}}{126} \simeq 0,1252 & \beta = \frac{7 + 2\sqrt{7}}{21} \simeq 0,5853 \\ \omega_m = \frac{-441\sqrt{7} + 6174}{285600 + 26880\sqrt{7}} \simeq 0,014 & \omega_h = \frac{-8 + 20\sqrt{7}}{1275 + 120\sqrt{7}} \simeq 0,0282 \\ \omega_g = \frac{98 - 7\sqrt{7}}{720} \simeq 0,1103 \end{cases} \quad (69)$$

Ces poids sont strictement positifs, ce que nous désirions obtenir.

7 Les éléments finis d'ordre supérieur en maillage rectangulaire

7.1 Élément fini d'arête quadrangulaire du second ordre

On considère le carré de référence $K = [0, 1]^2$ de sommets S_1, S_2, S_3, S_4 . On note Γ_1 (resp. $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$) l'arête S_1S_2 (resp. S_2S_3, S_3S_4, S_4S_1). Rappelons que pour l'élément fini d'arête usuel du second ordre, l'ensemble des

degrés de liberté choisi est donné par :

$$\Sigma = \left\{ \int_{\Gamma_i} \vec{u} \cdot \vec{\tau} p d\sigma \quad \forall p \in P_1(\Gamma_i), \quad i = 1, 2, 3, 4 \right\} \cup \left\{ \int_K \vec{u} \cdot \vec{q} dx \quad \forall \vec{q} \in Q_{0,1} \times Q_{1,0} \right\}$$

On a $|\Sigma| = 12$. L'espace vectoriel de champs de vecteurs $\mathcal{F}_2 = Q_{1,2} \times Q_{2,1}$ est de dimension 12. Il est Σ -unisolvant et l'élément fini que l'on obtient est $H(rot)$ conforme (cf [8]).

Nous rappelons d'abord la démarche suivie par G. Cohen et P. Monk (cf [3]) pour obtenir la condensation de masse sur cet élément. Il s'agit de considérer les formules de quadrature monodimensionnelles définies sur $\mathcal{C}^0([0, 1])$ par :

$$E_G(f) = \sum_{i=1}^2 \omega_i^G f(g_i) \quad \text{et} \quad E_{GL}(f) = \sum_{i=1}^3 \omega_i^{GL} f(l_i) \quad (70)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \omega_1^G = \omega_2^G = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad g_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} l_1 = 0 \quad l_2 = \frac{1}{2} \quad l_3 = 1 \\ \omega_1^{GL} = \omega_3^{GL} = \frac{1}{6} \\ \omega_2^{GL} = \frac{2}{3} \end{array} \right. \quad (71)$$

Ces formules étant exactes sur $P_3([0, 1])$, on peut alors construire, par produit tensoriel, les deux formules de quadrature définies sur $\mathcal{C}^0(K)$ par

$$\begin{aligned} E_{G,GL}(f) &= \sum_{i,j} \omega_i^G \omega_j^{GL} f(g_i, l_j) \\ E_{GL,G}(f) &= \sum_{i,j} \omega_i^{GL} \omega_j^G f(l_i, g_j) \end{aligned} \quad (72)$$

qui sont, par construction, exactes sur $Q_3(K)$.

Pour que l'emploi de telles formules de quadrature aboutisse à la condensation de masse, on remplace, de manière équivalente, l'ensemble Σ par des degrés de liberté faisant intervenir la valeur de l'une des composantes du champ aux nœuds des formules de quadrature ci-dessus. Plus précisément, on pose :

$$\Sigma' = \{ \vec{u} \cdot \vec{e}_1(g_i, l_j) \} \cup \{ \vec{u} \cdot \vec{e}_2(l_i, g_j) \}$$

On vérifie que l'espace \mathcal{F}_2 est bien Σ' -unisolvant et que l'élément fini obtenu est bien $H(rot)$ conforme (cf [3]).

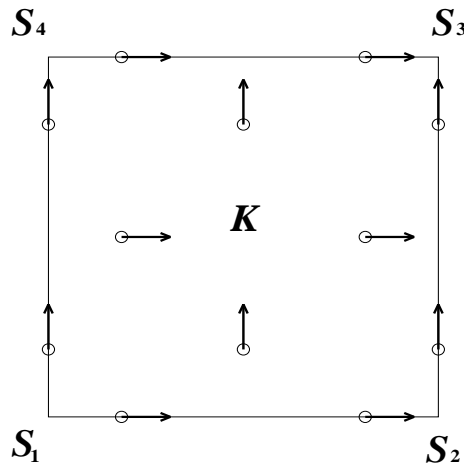


FIG. 66 – Élément fini quadrangulaire du second ordre. Arête $\Gamma_1 = S_1S_2$, Arête $\Gamma_2 = S_2S_3$, Arête $\Gamma_3 = S_3S_4$, Arête $\Gamma_4 = S_4S_1$

Pour condenser la matrice de masse, il suffit de remarquer que, si \vec{u} et \vec{v} sont deux fonctions de base, on a l'alternative suivante:

- Soit \vec{u} et \vec{v} sont associées toutes deux à des degrés de liberté de type $\vec{u} \cdot \vec{e}_1(g_i, l_j)$ (resp. $\vec{u} \cdot \vec{e}_2(l_i, g_j)$) et dans ce cas, elle sont parallèles de direction \vec{e}_1 (resp. \vec{e}_2) et il suffit de calculer $\int \vec{u} \cdot \vec{v}$ par la formule de quadrature faisant intervenir les mêmes points ($E_{G, GL}$ et $E_{GL, G}$ respectivement)
- Soit \vec{u} et \vec{v} ne sont pas associées au même type de degrés de liberté et dans ce cas, elles sont orthogonales.

Toutefois, il est clair que, comme dans le cas du premier ordre, si on considère un milieu anisotrope, les termes de la matrice de masse sont de la forme $\int \varepsilon \vec{u} \cdot \vec{v}$ (cf. sections 1 et 2). Si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonales (deuxième cas), ce n'est plus le cas de $\varepsilon \vec{u}$ et \vec{v} dès que ε est un tenseur non diagonal. La condensation de masse est alors perdue.

7.2 Nouvel élément fini d'arête quadrangulaire du second ordre

Il nous a donc semblé naturel de suivre la même démarche que dans le cas du premier ordre pour obtenir la propriété de condensation de masse y compris en milieu anisotrope. Il s'agit donc de réincorporer la composante normale du champ en chaque point des arêtes. Il faut de plus réincorporer la deuxième composante du champ aux points intérieurs à K de manière à ce que toutes les composantes du champs soient les degrés de liberté. De cette manière, la matrice de masse dans le cas d'un milieu anisotrope restera diagonale par blocs.

Remarque 7.1 Dans le cas des triangles, il a suffit de remplacer les degrés de liberté de type moments par les deux composantes du champs en un ensemble "symétrique" de points intérieurs au triangle. Par contre, dans le cas des carrés, les quatre moments intérieurs peuvent être remplacés par les deux composantes du champs en deux points intérieurs ce qui donne un ensemble de points qui ne respecte pas les symétries du carré.

Introduisons d'abord des notations similaires à celles de la section 6. Soit (i, j, k, l) une permutation circulaire de $(1, 2, 3, 4)$. Sur chaque arête $S_i S_j$, on note $M_{ij}(\alpha)$ et $M_{ji}(\alpha)$ les deux points de quadrature situés sur cette arête vus comme les barycentres de S_i et S_j avec pour poids α et $(1 - \alpha)$ (resp. $(1 - \alpha)$ et α). Les points situés à l'intérieur de K sont notés G_1, G_2, G_3, G_4 (cf. figure 67).

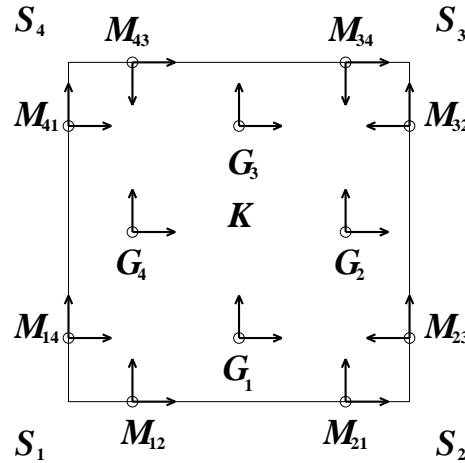


FIG. 67 – Nouvel élément fini quadrangulaire du second ordre. Arête $\Gamma_1 = S_1 S_2$, Arête $\Gamma_2 = S_2 S_3$, Arête $\Gamma_3 = S_3 S_4$, Arête $\Gamma_4 = S_4 S_1$

On introduit alors en chaque point M_{ij} un vecteur tangent $\vec{\tau}$ et un vecteur normal \vec{n} choisi rentrant par rapport au carré K de sorte que le repère $(\vec{\tau}, \vec{n})$ soit orthonormé. On choisit alors comme degrés de liberté l'ensemble:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= \{ \vec{u} \cdot \vec{\tau}(M_{ij}), \vec{u} \cdot \vec{n}(M_{ij}), \quad \forall i, j = 1 \cdots 4 \} \\ &\cup \{ \vec{u} \cdot \vec{e}_1(G_i), \vec{u} \cdot \vec{e}_2(G_i), \quad \forall i = 1 \cdots 4 \} \end{aligned} \quad (73)$$

Il s'agit maintenant de décrire l'espace de champs de vecteurs qui sera $\tilde{\Sigma}$ -unisolvant. Pour chaque arête $S_i S_j$, on considère les deux fonctions de base:

$$\begin{cases} \vec{w}_{ij} &= \nabla f_i \cdot f_j f_k f_l \phi_{ji} \\ \vec{w}_{ji} &= \nabla f_i \cdot f_j f_k f_l \phi_{ij} \end{cases} \quad (74)$$

où le polynôme ϕ_{ji} (resp. ϕ_{ij}) s'annule en $G_l \quad \forall l$ et en M_{ji} (resp. M_{ij}). On introduit ainsi 8 fonctions ayant les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \vec{w}_{ij} &= \vec{0} \text{ sur les arêtes } \{j, k, l\} \\ \vec{w}_{ij}(G_l) &= \vec{0} \quad \forall l = 1, 2, 3, 4 \\ \vec{w}_{ij}(M_{ji}) &= \vec{0} \\ \vec{w}_{ij} \cdot \vec{\tau} &= 0 \text{ sur l'arête } \{i\} \\ \vec{w}_{ij} \cdot \vec{n} &= \|\nabla f_i\| \phi_{kj} f_j f_k f_l \phi_{ji} \text{ sur l'arête } \{i\} \end{cases} \quad (75)$$

D'autre part, si G_i est un point intérieur, on introduit la fonction \vec{b}_i définie par:

$$\vec{b}_i = f_i f_j f_k f_l \psi_i \vec{e}_i \quad (76)$$

où le polynôme ψ_i s'annule en G_j, G_k, G_l et \vec{e}_i désigne la direction orthogonale à celle du degré de liberté de Σ' associé à G_i . On introduit alors 4 fonctions ayant les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \vec{b}_i \cdot \vec{\tau} &= 0 \text{ sur } \partial K \\ \vec{b}_i(G_j) &= \vec{0} \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (77)$$

On considère alors l'espace de champs de vecteurs suivant:

$$\tilde{\mathcal{F}}_2 = \mathcal{F}_2 \oplus [\vec{w}_{ij}, \quad i, j = 1 \dots 4] \oplus [\vec{b}_i, \quad i = 1 \dots 4]$$

Nous avons le

Théorème 7.1 *L'espace $\tilde{\mathcal{F}}_2$ est de dimension 24 et l'ensemble $\tilde{\Sigma}$ est $\tilde{\mathcal{F}}_2$ -unisolvant. De plus, $\vec{w} \cdot \vec{\tau}$ est un polynôme de degré 1 sur chaque arête si \vec{w} désigne un élément quelconque de $\tilde{\mathcal{F}}_2$.*

Démonstration:

Il est bien connu que si $\vec{w} \in \tilde{\mathcal{F}}_2$, $\vec{w} \cdot \vec{\tau}$ est un polynôme de degré 1 sur chaque arête. Puisque $\vec{w}_{ij} \cdot \vec{\tau}$ et $\vec{b}_i \cdot \vec{\tau}$ sont identiquement nul sur le bord de K (pour $i, j = 1, 2, 3, 4$), cette propriété est satisfaite pour tout élément \vec{w} de $\tilde{\mathcal{F}}_2$.

Pour la démonstration de l'unisolvance, elle suit exactement la même démarche que pour les triangles (voir section 6.2), les fonctions introduites étant, ici aussi, les fonctions de base associées aux nouveaux degrés de liberté (à une constante multiplicative près). ■

7.3 Une formule de quadrature pour l'élément fini quadrangulaire du second ordre

Nous sommes donc amenés à chercher une formule de quadrature de la forme:

$$E_K(f) = \text{mes}(K) \left\{ \omega_m \left(\sum_{i,j} f(M_{i,j}(\alpha)) \right) + \omega_g \sum_i f(G_i) \right\}$$

où ω_m représente le poids associé aux points situés sur les arêtes et ω_g celui associé aux points intérieurs au carré K . Nous laissons a priori α comme un paramètre qui sera choisi de telle sorte que la formule E_K soit la plus précise possible. On obtient:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \omega_m = \frac{1}{24} \quad \omega_g = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (78)$$

On remarque que l'on retrouve la valeur correspondant aux points de Gauss et introduite par Cohen et Monk dans leur élément fini. En fait, cette formule peut être vue a posteriori comme une combinaison convexe des deux formules $E_{G,GL}$ et $E_{GL,G}$ au sens suivant. Si δ est un paramètre réel, en posant

$$E_{K,\delta}(f) = \delta E_{G,GL}(f) + (1 - \delta)E_{GL,G}(f)$$

on obtient encore une formule de quadrature ayant la même précision que $E_{G,GL}$ et $E_{GL,G}$, c'est-à-dire Q_3 . Pour des raisons de symétrie, on choisit $\delta = \frac{1}{2}$, ce qui attribue aux points M_{ij} et aux points G_i un même poids. On retrouve alors la formule qui vient d'être exhibée.

Remarque 7.2 Une étude de dispersion numérique permet de constater que le schéma obtenu en intégrant les termes de la matrice de masse par la formule E_K est plus précis que ceux obtenus en intégrant au moyen de la formule $E_{K,\delta}$.

7.4 Analyse en maillage quadrangulaire régulier

7.4.1 Problème semi-discret et dispersion numérique associée

Nous définissons l'espace:

$$\tilde{V}_h = \left\{ \vec{v}_h \in H(\text{rot}, \Omega) / \forall K \in \mathcal{T}_h, \vec{v}_h|_K \in \tilde{\mathcal{F}}_2(K) \right\}$$

où \mathcal{T}_h désigne un maillage régulier de \mathbb{R}^2 en carrés de côté h (cf. figure 68).

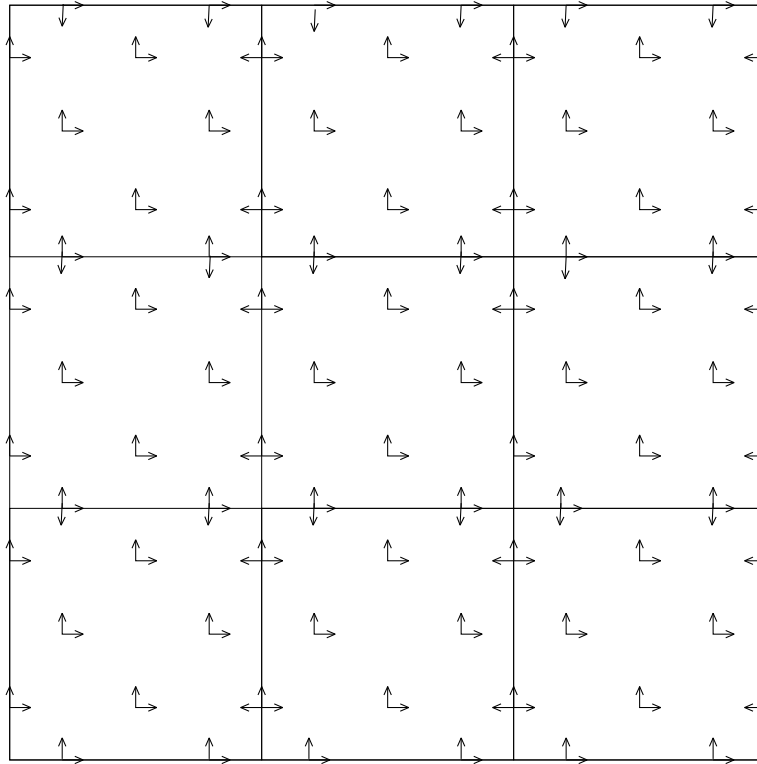


FIG. 68 – Maillage régulier pour $\tilde{\mathcal{F}}_2$ et degrés de liberté associés.

Ici, la régularité du maillage permet de définir un réseau périodique de 20 types de degrés de liberté (cf. figure 69).

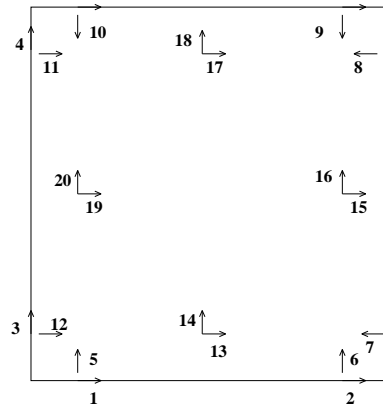


FIG. 69 – La cellule unité pour $\tilde{\mathcal{F}}_2$ et ses 20 types de degrés de liberté.

De manière analogue au cas du premier ordre, le problème semi-discret est équivalent à un système différentiel de dimension 20. Ici aussi, nous n'écrivons pas ce système du fait de sa complexité et de sa taille. D'autre part, la relation de dispersion "physique" s'obtient en résolvant un problème aux valeurs propres de même dimension de la forme

$$\omega_h^2 \widehat{M}_h \vec{E}_0 = \widehat{A}_h \vec{E}_0$$

où M_h est la matrice diagonale définie par

$$M_h = h^2 \text{diag} \left(\underbrace{2\omega_m, \dots, 2\omega_m}_{4 \text{ fois}}, \underbrace{\omega_m, \dots, \omega_m}_{8 \text{ fois}}, \underbrace{\omega_g, \dots, \omega_g}_{8 \text{ fois}} \right)$$

Nous avons donc tracé, à la même échelle, et pour $\psi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$, les courbes de dispersion qui représentent l'erreur relative commise sur la vitesse par le nouveau schéma pour le second ordre (cf. figure 70).

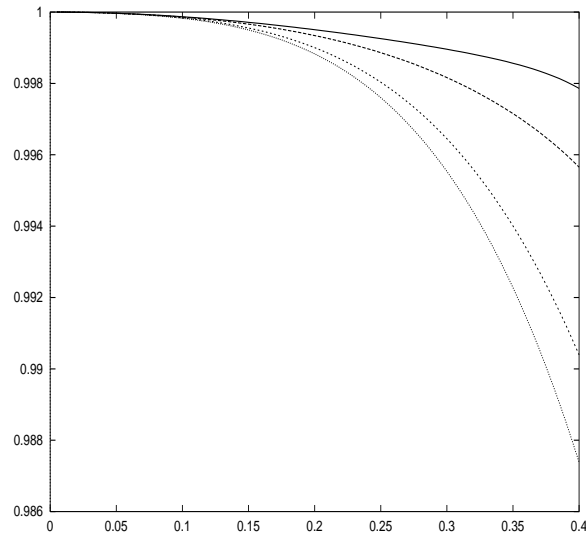


FIG. 70 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{F}}_2$, $\psi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$.

D'autre part, les courbes de l'erreur en échelle logarithmique (cf. figure 71), permettent d'émettre la conjecture:

Conjecture 7.1 *La valeur propre physique $\omega_h(\vec{k})$ associée au schéma correspondant à $\tilde{\mathcal{R}}_2$ en maillage régulier en carrés admet le développement limité suivant:*

$$\omega_h(\vec{k}) = |\vec{k}|(1 + O(h^4 |\vec{k}|^4))$$

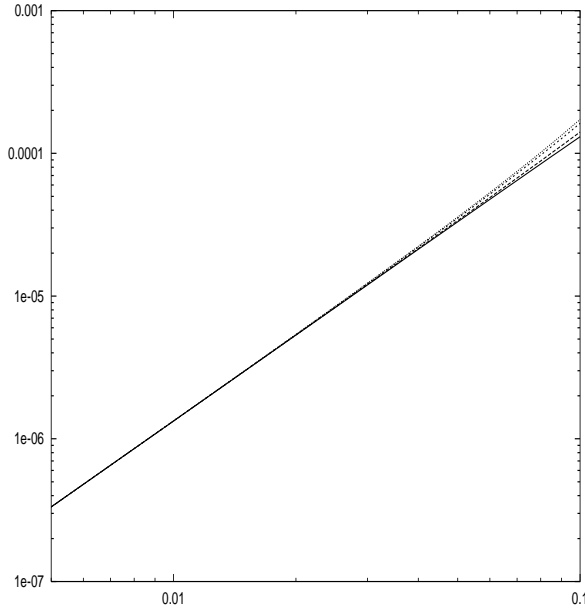


FIG. 71 – Droites en échelle logarithmique pour le second ordre: maillage en carrés.

Ici aussi, nous avons comparé la dispersion numérique introduite par le nouveau schéma (trait pointillé) avec celle introduite par le schéma analogue sans condensation de masse (courbe supérieure) et le schéma avec condensation de masse de Cohen-Monk (courbe inférieure) en traçant à la même échelle les courbes de dispersion associées à ces deux schémas pour une direction de propagation ψ donnée.

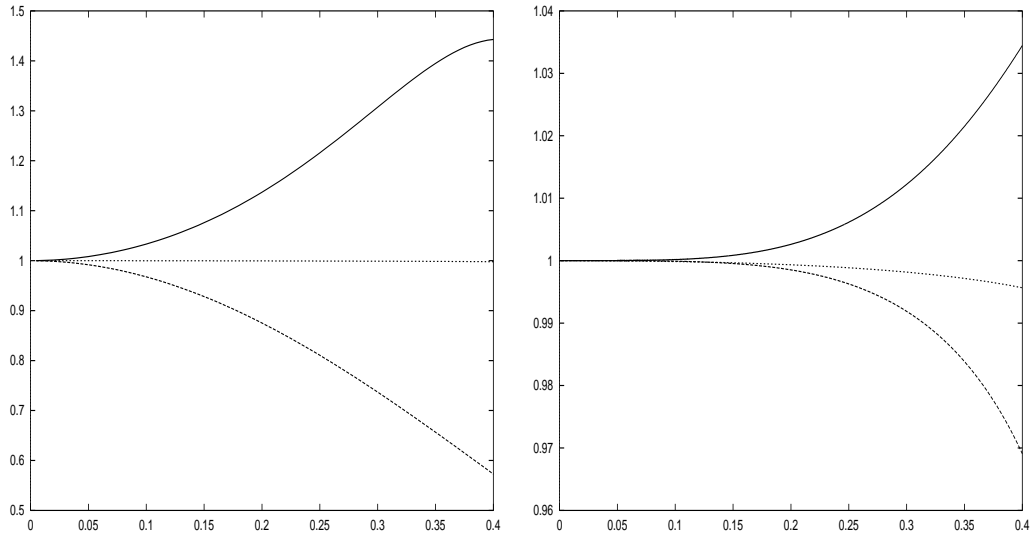


FIG. 72 – Courbes de dispersion comparées: $\psi = 0^\circ$ (à gauche) et $\psi = 15^\circ$ (à droite).

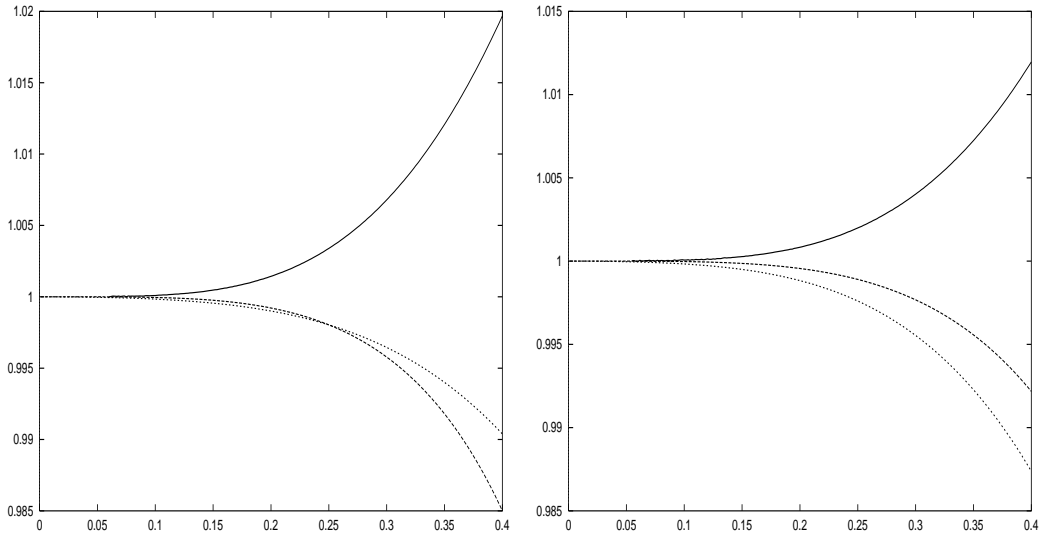


FIG. 73 – Courbes de dispersion comparées: $\psi = 30^\circ$ (à gauche) et $\psi = 45^\circ$ (à droite).

De manière analogue au cas du premier ordre, la précision du schéma s’avère excellente dans la mesure où la dispersion numérique augmente très lentement, ce qui permet en particulier de traiter de manière “robuste” des signaux à large bande de fréquence .

7.4.2 Discrétisation en temps d’ordre élevé

Comme dans le cas des éléments finis d’arête triangulaires d’ordre élevé, une discrétisation en temps classique d’ordre 2 (schéma “saute mouton”) est insuffisante. L’approche de l’équation modifiée permet cependant de construire un schéma en temps d’ordre 4 dont nous étudions la stabilité et la dispersion numérique dans cette partie.

7.4.3 Analyse de stabilité

Comme dans le cas des triangles, la norme de l’opérateur discret permettant d’obtenir la condition de stabilité du schéma obtenu est calculée numériquement. On a alors les conditions de stabilité suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 0,1455 \text{ pour l'ordre 2 en temps} \\ \alpha &\leq 0,2521 \text{ pour l'ordre 4 en temps} \end{aligned} \quad (79)$$

alors que pour le schéma usuel sans condensation de masse, on a les conditions:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 0,1825 \text{ pour l'ordre 2 en temps} \\ \alpha &\leq 0,3162 \text{ pour l'ordre 4 en temps} \end{aligned} \quad (80)$$

et pour le schéma obtenu par Cohen-Monk avec condensation de masse

$$\begin{aligned} \alpha &\leq 0,2886 \text{ pour l'ordre 2 en temps} \\ \alpha &\leq 0,5 \text{ pour l'ordre 4 en temps} \end{aligned} \quad (81)$$

Comme dans le cas des triangles, la condition de stabilité associé au nouveau schéma est plus restrictive que celle associée aux schémas usuels.

7.4.4 Analyse de la dispersion numérique pour le schéma discrétisé en temps et en espace

Comme dans le cas des triangles, nous avons étudié et comparé la dispersion numérique introduite par les différents schémas discrétisés en temps et en espace. Dans la figure 74, on a tracé, à valeur d’angle fixée, les courbes de dispersion correspondant à une discrétisation en temps d’ordre 2 et à 3 valeurs de α : $\alpha = 0$ (semi discret), $\alpha = 0.07$ (valeur de α “moyenne”) et $\alpha = 0.1455$ (valeur “maximale”). Il ressort que dans chaque cas,

la courbe inférieure correspond la valeur $\alpha = 0$, la courbe médiane à la valeur $\alpha = 0.07$, et la courbe supérieure à la valeur $\alpha = 0.1455$. C'est donc la valeur de α "moyenne" qui donne la meilleure précision. La figure 75 présente suivant le même schéma les courbes de dispersion correspondant à une discrétisation en temps d'ordre 4. Dans ce cas aussi, à chaque fois, c'est la valeur de α "moyenne" qui donne la meilleure précision. Comme dans le cas du premier ordre, la précision du schéma est améliorée avec la discrétisation en temps.

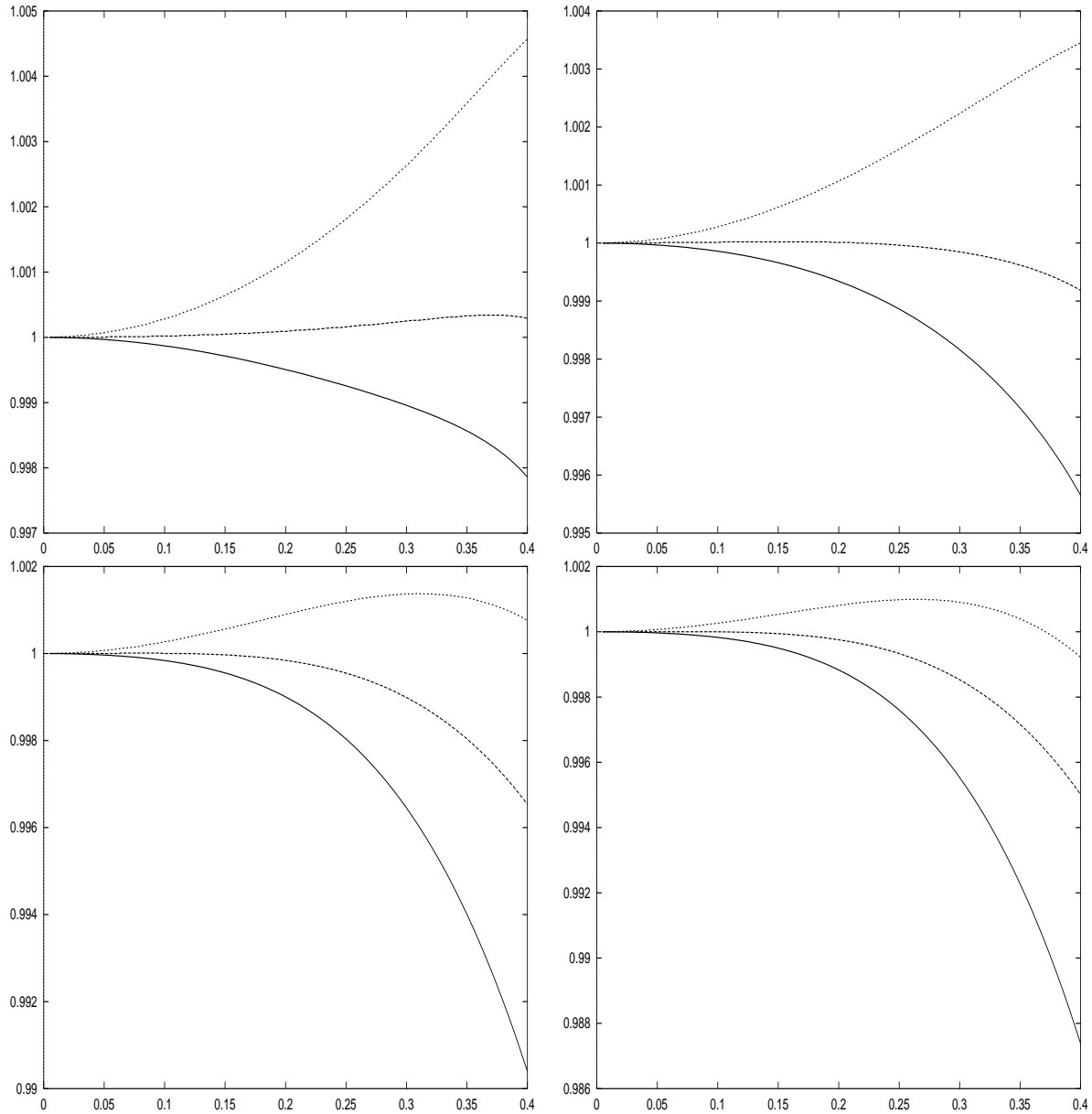


FIG. 74 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{F}}_2$ et l'ordre 2 en temps sur maillage en carrés, avec $\alpha = 0$ (semi-discret) pour les courbes inférieures et allant jusqu'à 0.1455 pour les courbes supérieures, pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

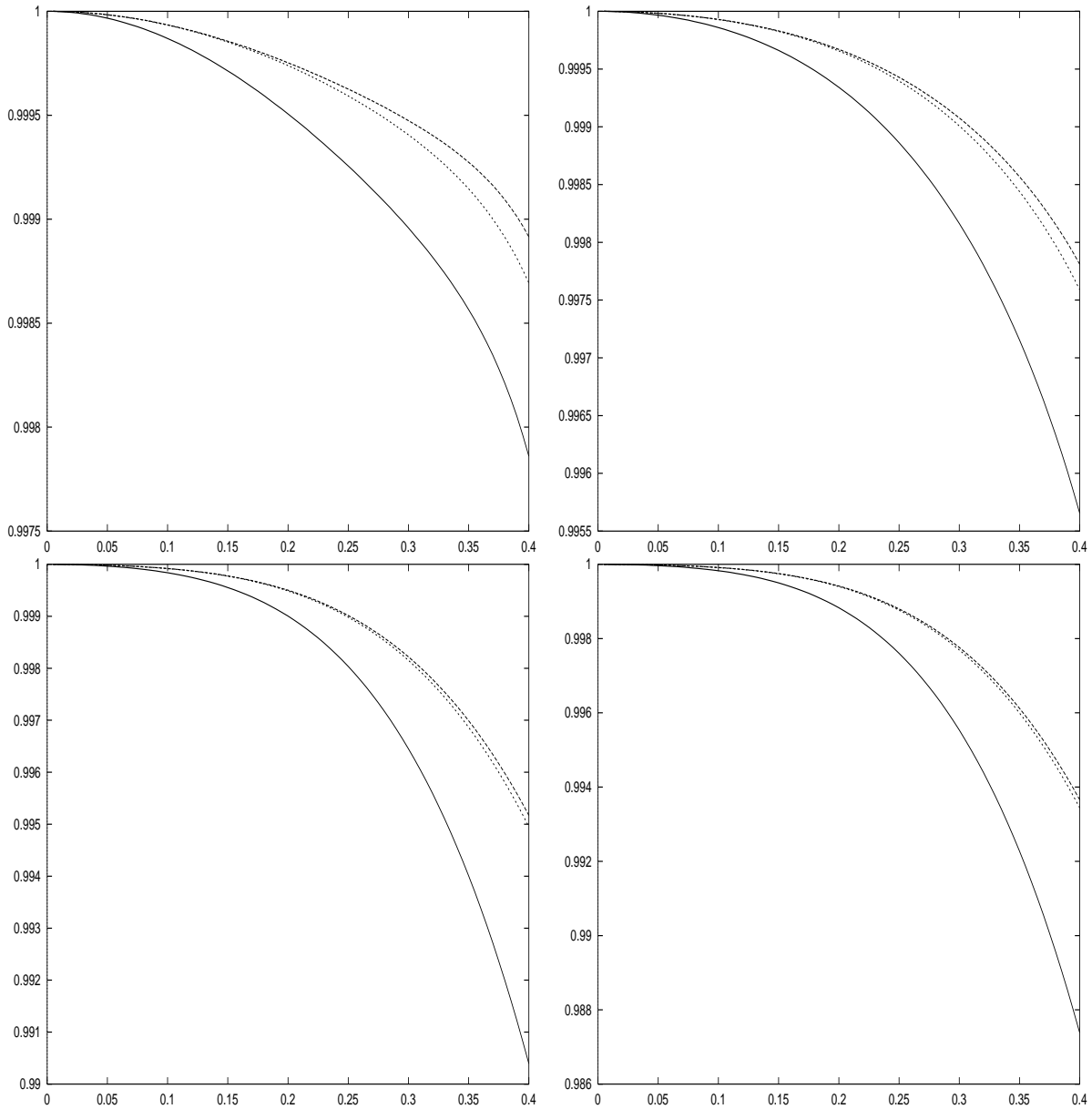


FIG. 75 – Courbes de dispersion pour $\tilde{\mathcal{F}}_2$ et l'ordre 4 en temps sur maillage en carrés, avec $\alpha = 0$ (semi-discret, courbes inférieure), $\alpha = 0.2521$ (courbes médianes) et $\alpha = 0.126$ (courbes supérieures) pour différentes valeurs d'angle: en haut à gauche: $\psi = 0^\circ$, en haut à droite: $\psi = 15^\circ$, en bas à gauche: $\psi = 30^\circ$ et en bas à droite: $\psi = 45^\circ$.

7.5 Cas du troisième ordre

7.5.1 Élément fini d'arête quadrangulaire du troisième ordre

Rappelons que, pour l'élément fini d'arête quadrangulaire du troisième ordre, l'ensemble Σ des degrés de liberté choisis est donné par:

$$\Sigma = \left\{ \int_{\Gamma_i} \vec{u} \cdot \vec{\tau} p d\sigma \quad \forall p \in P_2(\Gamma_i), \quad i = 1, 2, 3, 4 \right\} \cup \left\{ \int_K \vec{u} \cdot \vec{q} dx \quad \forall \vec{q} \in Q_{1,2} \times Q_{2,1}(K) \right\}$$

On a $|\Sigma| = 24$. L'espace vectoriel de champs de vecteurs $\mathcal{F}_3 = Q_{2,3} \times Q_{3,2}$ est de dimension 24. Il est Σ -unisolvant et l'élément fini que l'on obtient est $H(\text{rot})$ conforme (cf [8]).

Pour obtenir la condensation de masse, G. Cohen et P. Monk introduisent les formules de quadrature monodimensionnelles définies sur $\mathcal{C}^0([0, 1])$ par :

$$E_G(f) = \sum_{i=1}^3 \omega_i^G f(g_i) \quad \text{et} \quad E_{GL}(f) = \sum_{i=1}^4 \omega_i^{GL} f(l_i) \quad (82)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10} \quad g_2 = \frac{1}{2} \quad g_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10} \\ \omega_1^G = \omega_3^G = \frac{5}{18} \quad \omega_2^G = \frac{4}{9} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} l_1 = 0 \quad l_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \quad l_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} \quad l_4 = 1 \\ \omega_1^{GL} = \omega_4^{GL} = \frac{1}{12} \\ \omega_2^{GL} = \omega_3^{GL} = \frac{5}{12} \end{array} \right. \quad (83)$$

Ces formules étant exactes sur $P_5([0, 1])$, on peut alors construire, par produit tensoriel, les deux formules de quadrature définies sur $\mathcal{C}^0(K)$ par

$$\begin{aligned} E_{G,GL}(f) &= \sum_{i,j} \omega_i^G \omega_j^{GL} f(g_i, l_j) \\ E_{GL,G}(f) &= \sum_{i,j} \omega_i^{GL} \omega_j^G f(l_i, g_j) \end{aligned} \quad (84)$$

qui sont, par construction, exactes sur $Q_5(K)$.

De manière similaire au cas du second ordre, on remplace, de manière équivalente, l'ensemble Σ par des degrés de liberté adéquats. Plus précisément, on pose :

$$\Sigma' = \{\vec{u} \cdot \vec{e}_1(g_i, l_j)\} \cup \{\vec{u} \cdot \vec{e}_2(l_i, g_j)\}$$

On vérifie que l'espace \mathcal{F}_3 est bien Σ' -unisolvant et que l'élément fini obtenu est bien $H(\text{rot})$ conforme (cf [3]).

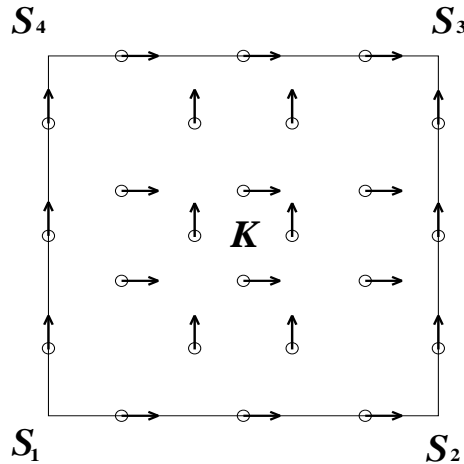


FIG. 76 – Élément fini quadrangulaire du troisième ordre. Arête $\Gamma_1 = S_1S_2$, Arête $\Gamma_2 = S_2S_3$, Arête $\Gamma_3 = S_3S_4$, Arête $\Gamma_4 = S_4S_1$

En utilisant, suivant la direction des fonctions de base à intégrer, la formule de quadrature adéquate, on obtient une propriété de condensation de masse qui, dans le cas d'un milieu anisotrope, est perdue.

7.6 Nouvel élément fini d'arête quadrangulaire du troisième ordre

En suivant la même démarche que dans le cas du second ordre, on construit un élément fini qui permet d'obtenir la condensation de masse y compris en milieu anisotrope. Il s'agit donc de réincorporer la composante normale du champ aux points de quadrature situés sur les arêtes et la deuxième composante du champ aux points situés à l'intérieur de K (cf. figure 77).

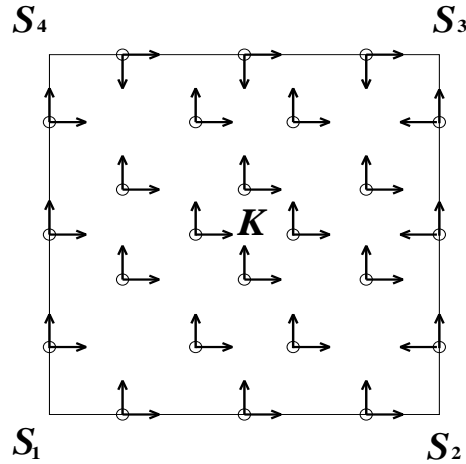


FIG. 77 – *Nouvel élément fini quadrangulaire du troisième ordre. Arête $\Gamma_1 = S_1S_2$, Arête $\Gamma_2 = S_2S_3$, Arête $\Gamma_3 = S_3S_4$, Arête $\Gamma_4 = S_4S_1$*

7.7 Une formule de quadrature pour l'élément fini quadrangulaire du troisième ordre

Il apparaît alors clairement qu'en posant a priori:

$$E_K(f) = \frac{1}{2}E_{G,GL}(f) + \frac{1}{2}E_{GL,G}(f)$$

on obtient une formule de quadrature définie sur $C^0(K)$, exacte sur $P_5(K)$, qui permet d'aboutir à la condensation de la matrice de masse pour l'élément fini décrit dans le paragraphe précédent.

8 Conclusion et perspectives

Nous avons construit dans cet article une nouvelle famille d'éléments finis d'arêtes en dimension 2 qui résoud le délicat problème de la condensation de masse et ceci, même en milieu anisotrope. Nous avons considéré les maillages triangulaires et rectangulaires. Nous nous sommes limités aux éléments d'ordre le plus bas en maillage rectangulaire mais avons pu construire des éléments d'ordre 1, 2 et 3 en maillage triangulaire et rectangulaire. Ce résultat est une première à notre connaissance. Il faut toutefois reconnaître que la condensation de masse s'obtient en payant le prix d'une augmentation du nombre de degrés de liberté, d'une condition de stabilité légèrement plus restrictive et d'une perte de précision dans le cas des triangles (nous parlons ici de la dispersion numérique). Signalons toutefois que, de façon inexplicable pour l'instant, la précision obtenue avec les maillages rectangulaires s'avère excellente.

Il reste dans le futur à parfaire l'analyse théorique de ces éléments et à construire des éléments finis d'ordre supérieur pour les maillages rectangulaires. Enfin, l'extension de ces éléments à la dimension 3 est en cours et fera l'objet d'une prochaine publication.

Références

- [1] P.G. CIARLET. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1978.

- [2] G. COHEN and P. JOLY. Fourth order schemes for the heterogeneous acoustics equation. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engin.*, 80:397–407, 1990.
- [3] G. COHEN and P. MONK. Efficient edge finite element schemes in computational electromagnetism. In *Proc. of the 3rd Int. Conf. on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena*. SIAM, april 1995. To appear.
- [4] M.A. DABLAIN. The application of high order differencing for the scalar wave equation. *Geophysics*, 1(51):54–66, 1986.
- [5] R. DAUTRAY et J.L. LIONS. *Analyse Mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, 1988.
- [6] G.COHEN P. JOLY and N. TORDJMAN. Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation. *Rapport de recherche INRIA (à paraître)*.
- [7] P. LACOSTE. *Les éléments finis des équations de Maxwell dans le code PALAS. Éléments finis nouveaux pour le cadre axisymétrique. La condensation des matrices masses*. PhD thesis, Université de Bordeaux 1, 1994.
- [8] J.C. NEDELEC. Mixed finite element in \mathbb{R}^3 . *Numerische Mathematik*, 35:315–341, 1980.
- [9] J.C. NEDELEC. A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numerische Mathematik*, 50:57–81, 1980.
- [10] N. TORDJMAN. *Éléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes*. PhD thesis, Université de Paris 9, 1995.



Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399