



**HAL**  
open science

# Analyse numérique d'un modèle de coques de Koiter discrétisé en base cartésienne par éléments finis DKT

Patrick Le Tallec, Saloua Mani

► **To cite this version:**

Patrick Le Tallec, Saloua Mani. Analyse numérique d'un modèle de coques de Koiter discrétisé en base cartésienne par éléments finis DKT. [Rapport de recherche] RR-3073, INRIA. 1996. inria-00073619

**HAL Id: inria-00073619**

**<https://inria.hal.science/inria-00073619>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Analyse Numérique d'un Modèle de Coques de  
Koiter discrétisé en base cartésienne par  
Eléments Finis DKT*

Patrick Le Tallec , Saloua Mani

**N° 3073**

Décembre 1996

\_\_\_\_\_ THÈME 4 \_\_\_\_\_



*apport  
de recherche*

---



## Analyse Numérique d'un Modèle de Coques de Koiter discrétisé en base cartésienne par Eléments Finis DKT

Patrick Le Tallec<sup>\*</sup>, Saloua Mani<sup>†</sup>

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet M3N

Rapport de recherche n° 3073 — Décembre 1996 — 21 pages

**Résumé :** Cet article propose et analyse une formulation variationnelle du problème de coque de Koiter dans laquelle le déplacement est exprimé puis discrétisé en base cartésienne. De manière plus précise, les composantes cartésiennes du champ de déplacement  $u$  sont approchées par des éléments finis mixtes non conformes de type DKT. On démontre que cette stratégie d'approximation conduit à des formulations discrètes qui sont consistantes et qui convergent de manière optimale. Par rapport à l'approche suivie classiquement dans la littérature, le choix d'une approximation en base cartésienne permet de relaxer les hypothèses de régularité sur la carte  $\varphi$  et conduit de manière plus concise à des résultats de stabilité et de convergence plus forts.

**Mots-clé :** coques minces, base cartésienne, élément finis DKT, inégalité inverse, erreur de consistance, convergence.

*(Abstract: pto)*

<sup>\*</sup> INRIA, B.P. 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France, email: patrick.letallec@inria.fr

<sup>†</sup> Faculté des Sciences de Tunis Département de Mathématiques Campus Universitaire, 1060 Le Belvédère Tunis, Tunisie

# Numerical Analysis of a Koiter Thin Shell Model approximated in a Cartesian Basis by DKT Finite Elements.

**Abstract:** This paper describes and studies a variational formulation of a Koiter thin shell model in which the unknown displacement field is expressed and approximated in a fixed cartesian basis. More precisely, the proposed method approximates each Cartesian component of the displacement field by DKT (Discrete Kirchhoff Triangles) finite elements. Using a functional framework proposed by Blouza and Le Dret, and appropriate inverse inequalities, we prove that the corresponding discrete formulation is consistent and that its solution converge in  $0(h)$  towards the unique solution of the continuous problem. Compared to more standard approaches written in a local basis, the approximation in a Cartesian basis is simpler and requires less regularity on the configuration  $\varphi$  of the shell surface or on the underlying mesh.

**Key-words:** thin shells, Cartesian basis, DKT finite element, inverse inequality, consistency error, convergence.

## 1 Introduction

Cet article propose et analyse une formulation variationnelle du modèle de coque mince de Koiter, et son approximation par des éléments finis mixtes de bas degré. Le modèle de Koiter est le modèle de référence pour l'étude de coques rigides en cisaillement mais pouvant subir des déformations de flexion ou de membrane. Il s'écrit traditionnellement sous la forme d'un problème elliptique du quatrième ordre par rapport à la composante normale du déplacement de la surface moyenne et du second ordre par rapport aux composantes tangentielles de ce même déplacement. L'analyse numérique de ce type de problème se heurte alors à deux difficultés :

- l'écriture en base locale qui est de gestion numérique compliquée, surtout pour les problèmes en grands déplacements,
- l'approximation par des éléments finis de bas degré associés à des degrés de liberté facilement identifiables par l'ingénieur.

Trois développements récents permettent d'améliorer cette analyse. D'une part, les formulations de type "coques géométriquement exactes" permettent de calculer les tenseurs de déformations indépendamment de toute base locale ([9], [11]). Ensuite, le problème mathématique peut être écrit dans un espace produit dont la définition ne fait pas non plus référence à ces bases locales [4]. Enfin, les éléments finis de type DKT [7] ont pu être appliqués avec succès dans de nombreuses situations industrielles [9].

Dans ce cadre, cet article propose et analyse une formulation variationnelle du problème de coque de Koiter dans laquelle le déplacement est exprimé puis discrétisé en base cartésienne indépendamment de toute base locale. De manière plus précise, on approche chaque composante cartésienne du champ de déplacement  $u$  par un espace d'éléments finis DKT. En se plaçant dans le cadre fonctionnel proposé dans [4], et à l'aide d'inégalités inverses spécialement développées pour l'occasion, on démontre que cette stratégie d'approximation non conforme conduit à des formulations discrètes qui sont consistantes et qui convergent de manière optimale, ceci pour des cartes assez peu régulières et sans hypothèse sur la taille  $h$  du maillage

On considère donc dans cet article l'analyse numérique du modèle de coque mince de Koiter utilisé dans [1],[12], [2] ou [4] et retrouvé dans [8]. Dans ces modèles, la coque au repos est un milieu continu qui occupe la partie de l'espace tridimensionnel définie par

$$C = \{M \in E^3, OM = \phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varphi(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 a_3(\xi_1, \xi_2), \\ (\xi_1, \xi_2) \in \Omega, -\frac{1}{2}\epsilon(\xi_1, \xi_2) \leq \xi_3 \leq \frac{1}{2}\epsilon(\xi_1, \xi_2)\}.$$

L'épaisseur  $\epsilon$  de la coque est supposée bornée supérieurement ( $\epsilon \in L^\infty(\Omega)$ ) et inférieurement ( $\epsilon(\xi_1, \xi_2) \geq c > 0$  pour tout  $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega$ ). Sa surface moyenne  $S$  est l'image dans l'espace euclidien  $E^3$  d'un sous-ensemble borné  $\Omega$  du plan  $E^2$  de frontière  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$  par

l'application  $\varphi$

$$\begin{aligned}\varphi & : \bar{\Omega} \subset E^2 \rightarrow \bar{S} \subset E^3, \\ \xi & = (\xi_1, \xi_2) \rightarrow \varphi(\xi_1, \xi_2).\end{aligned}$$

On suppose que tous les points de la surface moyenne sont réguliers de sorte que les vecteurs tangents et normal

$$\begin{aligned}a_\alpha & = \varphi_{,\alpha}, \alpha = 1, 2, \\ a_3 & = \frac{a_1 \wedge a_2}{|a_1 \wedge a_2|}, \quad || \text{étant la norme euclidienne sur } \mathbb{R}^3,\end{aligned}$$

soient bien définis dans  $W^{1,\infty}(\Omega)$  et forment une base en tout point de  $\bar{S}$ . On note aussi que la mesure euclidienne d'aire sur  $S$  est donnée par la formule

$$dS = |a_1 \wedge a_2| d\xi_1 d\xi_2 = \sqrt{a} d\xi_1 d\xi_2$$

avec

$$\begin{aligned}\sqrt{a} & = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 \neq 0, \\ a_{\alpha,\beta} & = a_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Sur cette coque, on définit les gradients tridimensionnels de déformation et de déplacement

$$\begin{aligned}F & = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi_3=0} = a_\alpha \otimes e^\alpha + a_3 \otimes e^3. \\ \nabla u & = \frac{\partial u}{\partial \xi} = u_{,\alpha} \otimes e^\alpha + u_{,\beta} \otimes e^\beta + 0e^3.\end{aligned}$$

Tous les autres gradients seront rapportés à la variable bidimensionnelle  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ .

D'un point de vue mécanique, nous faisons l'hypothèse que la coque au cours de son mouvement satisfait les conditions de Kirchhoff-Love :

- i) les normales restent normales à la surface moyenne et ne changent pas de longueur ;
- ii) les contraintes sont approximativement planes et parallèles au plan tangent à la surface moyenne.

La première hypothèse implique que le déplacement  $U$  d'un point de la coque tridimensionnelle est donné par superposition d'un déplacement  $u = \delta\varphi$  de la surface moyenne et d'une variation  $\delta a_3$  du vecteur normal

$$\begin{aligned}U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) & = \delta\varphi(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \delta a_3(\xi_1, \xi_2) \\ & = u(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \beta(\xi_1, \xi_2).\end{aligned} \tag{1}$$

Dans cette écriture, le vecteur de variation de normale  $\beta = \delta a_3$  se calcule à partir des conditions de Kirchhoff-Love qui permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\delta a_3.F &= \delta a_3.a_\alpha e^\alpha + \delta a_3.a_3 e^3 \\ &= \delta a_3.\nabla\varphi \\ &= \delta(a_3.\nabla\varphi) - a_3\nabla\delta\varphi \\ &= -a_3.\nabla u\end{aligned}$$

d'où on tire

$$\beta = \delta a_3 = -a_3.\nabla u.F^{-1} = -(a_3.u,\alpha)a^\alpha.$$

La seule inconnue du problème de Koiter est donc le déplacement  $u$  de la surface moyenne qui peut être exprimé soit en base covariante  $(a_1, a_2, a_3)$  ce qui est le choix classique, soit en base cartésienne qui est l'approche suivie dans cet article.

## 2 Définition du problème

### 2.1 Formulation faible

La formulation variationnelle du problème de Koiter pour les coques minces s'écrit classiquement ([1], [10])

$$(P) \begin{cases} \text{trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = f(v), \forall v \in V. \end{cases}$$

Dans cette formulation, la forme bilinéaire  $a$  définissant la puissance des efforts intérieurs est donnée par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \epsilon E \gamma(u) : \gamma(v) + \frac{\epsilon^3}{12} E \rho(u) : \rho(v) \right) \sqrt{ad} d\xi_1 d\xi_2 \quad (2)$$

et fait intervenir le tenseur d'élasticité  $E \in L^\infty(\Omega)$  supposé symétrique et uniformément strictement positif, le tenseur des déformations de membrane

$$\gamma(u) = \frac{\nabla u^t . \nabla \varphi + \nabla \varphi^t . \nabla u}{2} = \left( \frac{u_{,\alpha} . a_\beta + u_{,\beta} . a_\alpha}{2} \right) e^\alpha \otimes e^\beta \quad (3)$$

la variation de normale

$$\beta = -a_3 . \nabla u . F^{-1} \quad (4)$$

le tenseur de changement de courbure

$$\begin{aligned}\rho(u) = \rho(u, \beta) &= \frac{\nabla u^t . \nabla a_3 + \nabla a_3^t . \nabla u + \nabla \beta^t . \nabla \varphi + \nabla \varphi^t . \nabla \beta}{2} \\ &= [(u_{,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_{,\sigma}) . a_3] e^\alpha \otimes e^\beta.\end{aligned} \quad (5)$$



Le chargement extérieur est caractérisé par la forme linéaire

$$f(v) = f(v, \delta) = \int_{\Omega} P \cdot v d\xi_1 d\xi_2 + \int_{\Gamma_1} (N \cdot v - M \cdot \delta) d\sigma, \quad \delta = -a_3 \cdot \nabla v \cdot F^{-1}. \quad (6)$$

Les symboles de Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  introduits ci-dessus ne servent qu'à faire le lien entre les définitions intrinsèques  $(a_3, dS, \rho, \varepsilon)$  qui seront utilisées dans tout l'article et qui caractérisent la géométrie de la surface moyenne, et leur expression en base locale utilisée en théorie classique des coques. Ils sont définis à partir de la base contravariante  $a^i$  :

$$a^{\alpha} \cdot a_{\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

et

$$a^3 = a_3,$$

par :

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot a_{\gamma,\beta} = a^{\alpha} \cdot a_{\beta,\gamma}.$$

Ce problème variationnel de coques est défini sur l'espace fonctionnel des déplacements cinématiquement admissibles

$$V = \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3), a_3 \cdot \nabla^2 v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^4), \\ v = a_3 \cdot \nabla v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_o\} \quad (7)$$

muni de sa norme naturelle :

$$\|v\|^2 = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|a_3 \cdot \nabla^2 v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Cette norme est équivalente sur  $V$  à la norme :

$$\|v\|_0^2 = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|a_3 \cdot \nabla^2 v\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

On montre dans [4] que  $(V, \|\cdot\|)$  est un espace de Hilbert, et que la forme bilinéaire  $a$  est continue coercive sur  $V$ . On en déduit par application du lemme de Lax-Milgram le théorème d'existence :

**Théorème 2.1** *Si les forces extérieures vérifient  $P \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ,  $N \in L^2(\Gamma_1, \mathbb{R}^3)$  et  $M \in L^2(\Gamma_1, \mathbb{R}^3)$ , alors le problème variationnel  $(P)$  admet une solution unique.*

Remarquons que dans le problème posé, le terme  $\nabla^2 u$  n'apparaît dans l'expression de  $a$  que dans la partie du tenseur de changement de courbure  $\nabla \varphi^i \cdot \nabla \beta$ , d'où l'intérêt de l'introduction d'un problème  $(P')$  équivalent au problème  $(P)$  mais faisant apparaître directement  $\beta$  comme variable du problème. Cette nouvelle formulation permet alors de traiter de manière indépendante les termes  $\nabla u$  et  $\nabla^2 u$  dans la discrétisation du problème  $(P)$  et autorise l'approximation du problème par éléments finis non conformes de type DKT.

Le problème  $(P')$  s'écrit

$$(P') \begin{cases} \text{Trouver } (u, \beta) \in Z, \\ a((u, \beta), (v, \delta)) = f(v, \delta), \forall (v, \delta) \in Z \end{cases}$$

avec

$$a((u, \beta), (v, \delta)) = \int_{\Omega} (\epsilon E \gamma(u) : \gamma(v) + \frac{\epsilon^3}{12} E \rho(u, \beta) : \rho(v, \delta)) \sqrt{a} d\xi$$

$$Z = \{(v, \delta) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \times H^1(\Omega, \mathbb{R}^3), \delta = -a_3 \cdot \nabla v \cdot F^{-1} \text{ sur } \Omega, v = \delta = 0 \text{ sur } \Gamma_o\}.$$

Ci-dessus, la forme  $f$  est toujours définie par (6), et les tenseurs de déformation  $\gamma$  et  $\rho$  sont définis par (3) et (5). Le problème  $(P')$  est clairement équivalent au problème  $(P)$  et admet donc une solution unique dans  $Z$ . Par construction de  $\delta$ , l'espace  $Z$  correspond aux champs de déplacements  $U = u + \xi_3 \delta$  qui conservent les normales et donc qui se font à cisaillement nul.

## 2.2 Formulation forte

L'interprétation du problème  $(P')$  sous forme d'équation différentielle se fait en deux étapes. On relâche d'abord la contrainte de cisaillement nul

$$(v, \delta) \in Z = \text{Ker}(\delta \cdot \nabla \varphi + a_3 \cdot \nabla v).$$

D'après  $(P')$ , la forme linéaire  $a((u, \beta), \cdot) - f$  est dans l'espace orthogonal  $Z^\perp$  et donc, par le théorème de l'image fermée, il existe un multiplicateur de Lagrange  $q \in L^2(\Omega)$  (l'effort de cisaillement) tel que l'on ait

$$\begin{aligned} a((u, \beta), (v, \delta)) - f(v, \delta) + \int_{\Omega} (\delta \cdot \nabla \varphi + a_3 \cdot \nabla v) \cdot q d\xi &= 0, \\ \forall (v, \delta) \in H^1(\Omega), \quad v = \delta = 0 \text{ sur } \Gamma_o. \end{aligned}$$

On introduit alors les tenseurs des efforts de membrane et de flexion

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{a} \epsilon E \gamma(u), \\ m &= \sqrt{a} \frac{\epsilon^3}{12} E \rho(u). \end{aligned}$$

Par définition de  $\gamma(v)$  et  $\rho(v, \delta)$ , et d'après la symétrie des tenseurs  $m$  et  $n$ , l'équation variationnelle précédente s'écrit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{n : (\nabla \varphi^t \cdot \nabla v) + m : (\nabla \varphi^t \cdot \nabla \delta + \nabla a_3^t \cdot \nabla v) + q \cdot (a_3 \cdot \nabla v + \delta \cdot \nabla \varphi)\} d\xi \\ = \int_{\Omega} P \cdot v d\xi + \int_{\Gamma_1} (N \cdot v - M \cdot \delta) d\sigma, \quad \forall (v, \delta) \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

ou encore par transposition

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{(\nabla\varphi \cdot n + \nabla a_3 \cdot m + a_3 \otimes q) : \nabla v - P \cdot v\} d\xi - \int_{\Gamma_1} N \cdot v d\sigma \\ & + \int_{\Omega} \{(\nabla\varphi \cdot m) : \nabla\delta + \delta \cdot (\nabla\varphi \cdot q)\} d\xi + \int_{\Gamma_1} M \cdot \delta d\sigma = 0, \quad \forall (v, \delta). \end{aligned}$$

Après intégration par parties, il reste donc finalement

$$\begin{aligned} - & \operatorname{Div}(\nabla\varphi \cdot n + \nabla a_3 \cdot m + a_3 \otimes q) = P \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ & (\nabla\varphi \cdot n + \nabla a_3 \cdot m + a_3 \otimes q) \cdot \nu = N \quad \text{dans } H^{-1/2}(\Gamma_1), \\ - & \operatorname{Div}(\nabla\varphi \cdot m) + \nabla\varphi \cdot q = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \\ & (\nabla\varphi \cdot m) \cdot \nu = M \quad \text{dans } H^{-1/2}(\Gamma_1), \end{aligned}$$

ce qui correspond à la formulation forte de notre problème de coques.

### 3 Définition du problème approché

#### 3.1 Construction de l'espace discret

On se propose d'utiliser une approximation par éléments finis mixtes non conformes du type DKT (Discrete Kirchhoff-triangle). Cette méthode introduite par [7] a été déjà utilisée pour les problèmes de coques ([9], [2]) et est très largement utilisée en milieu industriel. Le principe de la méthode consiste à approcher le déplacement admissible  $u$  et son gradient indépendamment l'un de l'autre et à imposer des contraintes du type Kirchhoff-Love sur l'espace discret. L'originalité de notre approche est d'utiliser ici ces éléments finis pour approcher les composantes cartésiennes de  $u$ , et non ses composantes en base locale, et les gradients de  $u$  au lieu de la rotation  $\beta$ .

On suppose que le domaine  $\Omega$  est polygonal et on considère une triangulation régulière  $\mathcal{T}$  de  $\Omega$ , dans le sens

- i)  $\Omega = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$ ,  $\mathcal{T}$  vérifie les règles d'assemblage,
- ii) il existe une constante  $\sigma > 0$  telle que

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \text{ pour tout } T$$

où  $h_T$  est le diamètre du triangle  $T$  et  $\rho_T$  le diamètre du cercle inscrit.

On choisit d'approcher l'espace  $Z$  par  $Z_h$  (non inclus dans  $Z$ ) défini sur chaque triangle à partir de l'élément fini  $P'_3$ -Hermite par

$$\begin{aligned} Z_h &= \{(v_h, \delta_h) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3), v_h|_T \in P'_3(T, \mathbb{R}^3), \\ & \quad \nabla v_h \text{ continu aux sommets}, \delta_h = -a_3 \cdot \theta^h \cdot F^{-1}, \theta^h \text{ continu}, \end{aligned}$$

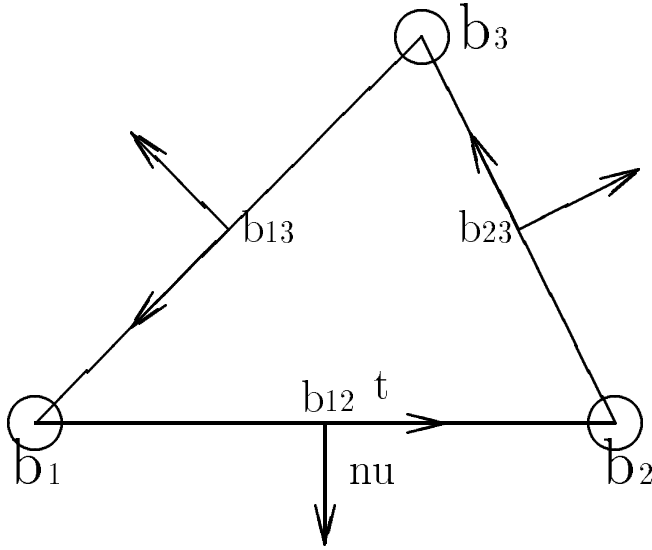


FIG. 1 - Description du Triangle DKT: les trois déplacements et leurs dérivées sont définies en chaque sommet  $b_i$ .

$$\begin{aligned} \theta^h|_T \in P_2(T), \forall T, \quad \text{et } \theta^h \text{ vérifie les contraintes DKT,} \\ (v_h, \delta_h) \text{ vérifie les conditions aux limites discrètes}. \end{aligned} \quad (8)$$

#### Les contraintes DKT de Kirchhoff-Love

Soit  $T = (b_1, b_2, b_3)$  un triangle de  $\mathcal{T}$  et soient  $b_{ij} = \frac{b_i + b_j}{2}$ ,  $i < j$ , les milieux respectifs des côtés  $b_i b_j$ . Soient  $\nu_{ij}$  et  $t_{ij}$  la normale et la tangente au côté  $b_i b_j$ ,  $i < j$ .

Alors les contraintes DKT qui interviennent dans la définition de  $Z_h$  s'écrivent

$$a) \quad \theta^h(b_i) = \nabla v_h(b_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (9)$$

$$b) \quad \theta^h(b_{ij}) \cdot t_{ij} = \nabla v_h(b_{ij}) \cdot t_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i < j, \quad (10)$$

$$c) \quad \theta^h(b_{ij}) \cdot \nu_{ij} = \frac{1}{2} [\nabla v_h(b_i) + \nabla v_h(b_j)] \cdot \nu_{ij}, \quad i < j = 1, 3. \quad (11)$$

Elles expriment que  $\theta_h$  est égal au gradient de  $v_h$  en chaque sommet, que la composante tangentielle de  $\theta_h$  est égale à la composante tangentielle de  $\nabla v_h$  sur chaque côté, et que la composante normale de  $\theta_h$  y est égale à la "moyenne" du gradient normal de  $v_h$ .

**Remarque 3.1** La non conformité du problème porte sur deux aspects :

i) l'espace discret  $Z$  n'est pas inclus dans l'espace continu  $Z_h \not\subset Z$  car  $\theta_h$  n'est pas égal à  $\nabla v_h$ ,

ii) la forme bilinéaire  $a_h$  ne sera pas forcément égale à la restriction de  $a$  sur  $Z_h$ .

**Remarque 3.2** On n'impose pas les contraintes de Kirchhoff-Love aux milieux  $b_{ij}$  car  $\nabla_h v_h = \theta^h$  est continue et  $\nabla v_h$  ne l'est pas.

**Remarque 3.3** Par construction,  $\theta_h$  est un polynôme d'ordre 2, et est donc caractérisé par ses valeurs aux sommets et aux milieux des côtés. Les contraintes DKT permettent alors de vérifier que  $\theta^h$  s'écrit en fonction des degrés de liberté de  $v_h$  sous la forme

$$\theta|_T^h = \sum_i (\nabla v_h(b_i) \lambda_i + 6 \nabla_{i+1} v_h \otimes t_{i+1} |b_{i+1} b_{i+2}| \lambda_{i+1} \lambda_{i+2})$$

avec

$$\nabla_{ij} v_h = \frac{1}{|b_i b_j|} \left[ v_h(b_i) - v_h(b_j) - \frac{1}{2} [\nabla v_h(b_i) + \nabla v_h(b_j)] \cdot b_j b_i \right]$$

L'élément fini a donc au total neuf degrés de liberté par sommet  $b_i$  : trois pour caractériser  $v_h(b_i)$ , six pour caractériser son gradient  $\nabla v_h(b_i)$ .

### 3.2 Propriétés de l'espace discret

Avant l'aller plus loin, il est nécessaire d'estimer l'erreur commise par l'élément DKT quand il remplace le gradient exact  $\nabla u_h$  par le gradient approché  $\theta_h$ . Ceci fait l'objet du lemme suivant.

**Lemme 3.1** Soit un triangle  $T = (b_1, b_2, b_3) \in \mathcal{T}$ , soit  $\nu_{ij}$  la normale au côté  $b_i b_j$  et soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les coordonnées barycentriques d'un point  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  de  $T$ .

Alors pour tout  $(u_h, \beta_h) \in Z_h$ , nous avons

$$(\theta^h - \nabla u_h)|_T = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1,3 \\ i < j}} \lambda_i \lambda_j D^3 u_h|_T \cdot (b_i - b_j, b_i - b_j, \nu_{ij}) \otimes \nu_{ij}. \quad (12)$$

**Démonstration:** Pour  $T = (b_1, b_2, b_3)$ , on note  $b_{ij} = \frac{b_i + b_j}{2}$ . On a  $u_h \in V_h$  donc  $u_h|_T$  est un polynôme de degré 3. La formule de Taylor au voisinage de  $b_{ij}$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \nabla u_h|_T(b_i) &= \nabla u_h|_T(b_{ij}) + D^2 u_h|_T(b_{ij}) \frac{b_i - b_j}{2} + \frac{1}{2} D^3 u_h|_T \left( \frac{b_i - b_j}{2} \right)^2, \\ \nabla u_h|_T(b_j) &= \nabla u_h|_T(b_{ij}) + D^2 u_h|_T(b_{ij}) \frac{b_j - b_i}{2} + \frac{1}{2} D^3 u_h|_T \left( \frac{b_j - b_i}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Comme  $D^3 u(b_{ij})$  est trilineaire, on en déduit :

$$\frac{\nabla u_h|_T(b_i) + \nabla u_h|_T(b_j)}{2} = \nabla u_h|_T(b_{ij}) + \frac{1}{8} D^3 u_h|_T (b_i - b_j, b_i - b_j). \quad (13)$$

On multiplie (13) par  $\nu_{ij}$  et  $t_{ij}$ . En utilisant les contraintes DKT (10) et (11), on obtient :

$$\theta^h(b_{ij}) \cdot \nu_{ij} = \nabla u_h|_T(b_{ij}) \cdot \nu_{ij} + \frac{1}{8} D^3 u_h|_T (b_i - b_j, b_i - b_j, \nu_{ij}) \quad (14)$$

$$\theta^h(b_{ij}) \cdot t_{ij} = \nabla u_h|_T(b_{ij}) \cdot t_{ij}. \quad (15)$$

Mais tout  $v$  dans le plan de  $\Omega$  s'écrit  $v = \alpha t_{ij} + \beta \nu_{ij}$ , ce qui implique

$$\begin{aligned} \theta^h(b_{ij}) \cdot v &= \alpha \theta^h(b_{ij}) \cdot t_{ij} + \beta \theta^h(b_{ij}) \cdot \nu_{ij} \\ &= \alpha \nabla u_h|_T(b_{ij}) \cdot t_{ij} + \beta [\nabla u_h|_T(b_{ij}) \cdot \nu_{ij} + \frac{1}{8} D^3 u_h|_T(b_i - b_j, b_i - b_j, \nu_{ij})] \\ &= \nabla u_h|_T(b_{ij}) \cdot v + v \cdot \nu_{ij} \frac{1}{8} D^3 u_h|_T(b_i - b_j, b_i - b_j, \nu_{ij}). \end{aligned}$$

Ceci s'écrit encore

$$\theta^h(b_{ij}) = \nabla u_h|_T(b_{ij}) + \frac{1}{8} D^3 u_h|_T(b_i - b_j, b_i - b_j, \nu_{ij}) \otimes \nu_{ij}. \quad (16)$$

Par construction,  $\theta^h$  et  $\nabla u_h$  sont des polynômes de degré 2, et donc peuvent s'écrire sous la forme de Lagrange ([6])

$$\begin{aligned} \theta^h(\xi) &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i (2\lambda_i - 1) \theta^h(b_i) + 4 \sum_{\substack{i < j \\ i=1,3}} \lambda_i \lambda_j \theta^h(b_{ij}) \\ \nabla u_h(\xi) &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i (2\lambda_i - 1) \nabla u_h(b_i) + 4 \sum_{\substack{i < j \\ i=1,3}} \lambda_i \lambda_j \nabla u_h(b_{ij}). \end{aligned}$$

Par différence, et après prise en compte des contraintes DKT (9) et de (16), il reste

$$\theta^h - \nabla u_h = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1,3 \\ i < j}} \lambda_i \lambda_j D^3 u_h|_T(b_i - b_j, b_i - b_j, \nu_{ij}) \otimes \nu_{ij}, \quad (17)$$

ce qui est le résultat cherché.

### 3.3 Le problème discret

Pour  $(u_h, \beta_h) \in Z_h$ , on définit les tenseurs de déformation continus et discrets

$$\begin{aligned} \gamma(u_h) &= \frac{1}{2} (\nabla u_h^t \cdot \nabla \varphi + \nabla \varphi^t \cdot \nabla u_h), \\ \beta(u_h) &= -a_3 \cdot \nabla u_h \cdot F^{-1}, \\ \chi_h(u_h, \beta_h) &= a_3 \cdot (\nabla u_h - \theta_h), \\ \rho(u_h)|_T &= \frac{1}{2} (\nabla u_h^t \cdot \nabla a_3 + \nabla a_3^t \cdot \nabla u_h + \nabla \beta^t \cdot \nabla \varphi + \nabla \varphi^t \cdot \nabla \beta)|_T \\ \rho_h(u_h, \beta_h) &= \frac{1}{2} (\nabla u_h^t \cdot \nabla a_3 + \nabla a_3^t \cdot \nabla u_h + \nabla \beta_h^t \cdot \nabla \varphi + \nabla \varphi^t \cdot \nabla \beta_h) \end{aligned}$$

et la forme bilinéaire discrète

$$a_h((u_h, \beta_h), (v_h, \delta_h)) = \int \left\{ eE\gamma(u_h) : \gamma(v_h) + \frac{e^3}{12} E\rho_h(u_h, \beta_h) : \rho_h(v_h, \delta_h) + C_h\chi_h(u_h, \beta_h) \cdot \chi_h(v_h, \delta_h) \right\} d\xi$$

où  $C_0 \leq C_{h|T} \leq \frac{C_1}{h_T}$  est une constante définie par l'utilisateur sur chaque triangle  $T$  de la triangulation.

Le problème discret s'écrit alors

$$(P_h) \begin{cases} \text{Trouver } (u_h, \beta_h) \in Z_h \text{ tel que} \\ a_h((u_h, \beta_h), (v_h, \delta_h)) = f(v_h, \delta_h), \quad \forall (v_h, \delta_h) \in Z_h. \end{cases}$$

Pour analyser ce problème discret, on munit l'espace  $Z_h$  de la norme globale

$$\|(v_h, \delta_h)\|_Z^2 = \|v_h\|_{1,2,\Omega}^2 + |\delta_h|_{1,2,\Omega}^2,$$

et locale

$$\|(v_h, \delta_h)\|_{Z,T}^2 = \|v_h\|_{1,2,T}^2 + |\delta_h|_{1,2,T}^2.$$

**Remarque 3.4** *L'ajout du terme de cisaillement  $C_h\chi_h^2$  permet de garantir la coercivité de la forme  $a_h$  sur tout l'espace  $H^1 \times H^1$ . Ce terme correcteur a cependant très peu d'influence sur la qualité des résultats numériques.*

## 4 Résultat de convergence

### 4.1 Inégalités inverses

Pour simplifier les notations, et comme  $\delta_h$  est une fonction explicite de  $v_h$  pour tout  $(v_h, \delta_h) \in Z_h$ , on notera souvent  $v_h \in Z_h$  au lieu de  $(v_h, \delta_h) \in Z_h$ . Les lettres  $C$  dénoteront dorénavant des constantes qui peuvent changer d'une inégalité à l'autre, mais qui sont indépendantes du triangle  $T$ . Enfin,  $a_3^{\text{moy}}$  dénote la moyenne arithmétique de  $a_3$  sur le triangle  $T$ . Sous cette notation, on démontre les inégalités inverses

**Lemme 4.1** *Pour tout  $(w_h, \delta_h = -a_3 \cdot \theta_h \cdot F^{-1}) \in Z_h$  et pour tout triangle  $T$ , on a*

$$\begin{aligned} \|D^3 w_h\|_{\infty,T} &\leq \frac{C}{h_T^3} |w_h|_{1,2,T}, \\ |\theta_h|_{m,2,T} &\leq C h_T^{-m} |w_h|_{1,2,T}, \quad \forall m = 0, 1, \\ \|a_3^{\text{moy}} \cdot D^3 w_h\|_{\infty,T} &\leq \frac{C}{h_T^2} \|a_3^{\text{moy}} \cdot D\theta_h\|_{2,T}. \end{aligned}$$

**Preuve:** Ces résultats se démontrent de manière classique par passage à un triangle de référence  $\hat{T}$  et équivalence de normes discrètes sur  $\hat{T}$ .

Soit  $B : \hat{T} \rightarrow T$  l'application affine qui envoie  $\hat{T}$  sur  $T$ . Sur  $\hat{T}$ , on définit les fonctions

$$\begin{aligned}\hat{w}_h &= w_h \circ B, \\ \hat{a}_3 &= a_3 \circ B, \\ \hat{\theta}_h &= B^t \cdot (\theta_h \circ B).\end{aligned}$$

On a alors par construction

$$\begin{aligned}\|D^3 w_h\|_{\infty, T} &= \|(B^{-t})^3 \cdot \hat{D}^3 \hat{w}_h\|_{\infty, \hat{T}} \leq \frac{C}{\rho_T^3} \|\hat{D}^3 \hat{w}_h\|_{\infty, \hat{T}}, \\ \|\theta_h\|_{2, T} &= \|B^{-t} \cdot \hat{\theta}_h\|_{2, T} \leq \frac{C\sqrt{\det B}}{\rho_T} \|\hat{\theta}_h\|_{2, \hat{T}} \leq C \|\hat{\theta}_h\|_{2, \hat{T}}, \\ |\theta_h|_{1, 2, T} &= \|(B^{-t})^2 \cdot \hat{D} \hat{\theta}_h\|_{2, T} \leq \frac{C\sqrt{\det B}}{\rho_T^2} |\hat{\theta}_h|_{1, 2, \hat{T}}, \\ \|a_3^{\text{moy}} \cdot D^3 w_h\|_{\infty, T} &\leq \frac{C}{\rho_T^3} \|a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{D}^3 \hat{w}_h\|_{\infty, \hat{T}}.\end{aligned}$$

Maintenant, sur  $\hat{T}$ , les fonctions  $\hat{w}_h$ ,  $\hat{\theta}_h$ ,  $a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{D} \hat{w}_h$  et  $a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{D} \hat{\theta}_h$  appartiennent à des espaces polynomiaux fixes de dimension finie. Par ailleurs, sur ces espaces  $\|\hat{D}^3 \hat{w}_h\|_{\infty, T}$  est nul dès que  $\|\hat{D} \hat{w}_h\|_{2, \hat{T}}$  est nul, et  $|\hat{\theta}_h|_{m, 2, \hat{T}}$  est nul dès que  $\hat{D} \hat{w}_h$  est nul (Remarque 3.3). Donc, il existe des constantes  $C$  tel que

$$\begin{aligned}\|\hat{D}^3 \hat{w}_h\|_{\infty, T} &\leq C \|\hat{D} \hat{w}_h\|_{2, \hat{T}}, \\ |\hat{\theta}_h|_{m, 2, \hat{T}} &\leq C_m \|\hat{D} \hat{w}_h\|_{2, \hat{T}}.\end{aligned}$$

De même, si  $\|a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{D} \hat{\theta}_h\|_{2, \hat{T}} = \|\hat{D}(a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{\theta}_h)\|_{2, \hat{T}}$  est nul, alors  $a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{\theta}_h$  est constant sur le triangle et donc d'après les contraintes DKT et la Remarque 3.3 :

$$a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{D} \hat{w}_h(b_i) = a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{\theta}_h(b_i) = \text{cte} = a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{\theta}_0,$$

et ses coefficients d'ordre deux  $a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{\nabla}_{ij} \hat{w}_h$  sont aussi nuls. On en déduit, après multiplication par  $|\hat{b}_i \hat{b}_j|$ , et par construction de  $\hat{\nabla}_{ij} \hat{w}_h$

$$a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{w}_h(b_i) = a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{w}_h(b_j) + a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{\theta}_0 \cdot \hat{b}_i \hat{b}_j.$$

Autrement dit, les degrés de liberté caractérisant  $a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{w}_h$  sont alors ceux du champ linéaire

$$\hat{v}_h(\hat{x}) = \text{cte} + a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{\theta}_0 \cdot \hat{x}.$$

Or par construction,  $a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{w}_h \in P^3$  est caractérisé par ses degrés de liberté, donc on a nécessairement

$$a_3^{\text{moy}} \cdot \hat{w}_h = \hat{v}_h \in P^1,$$



d'où on déduit  $\hat{a}_3^{\text{moy}} \cdot \hat{D}^3 \hat{w}_h = 0$ .

Il existe donc là encore une constante telle que

$$\|\hat{a}_3^{\text{moy}} \cdot \hat{D}^3 \hat{w}_h\|_{\infty, T} \leq C \|\hat{a}_3^{\text{moy}} \cdot \hat{D} \hat{\theta}_h\|_{2, \hat{T}}.$$

Le résultat final se déduit alors immédiatement en repassant dans ces inégalités du triangle de référence  $\hat{T}$  au triangle courant  $T$ . Observons enfin que la démonstration utilise à plusieurs reprises la constance de  $a_3^{\text{moy}}$  par triangle, ce qui explique que l'inégalité inverse a été démontrée sur le vecteur normal moyen  $a_3^{\text{moy}}$  et non sur le vecteur normal local  $a_3$ .

## 4.2 Erreur de courbure

Les inégalités inverses locales de la section précédente permettent d'estimer l'erreur entre variation de normale exacte  $\beta(w_h)$  et variation de normale approchée  $\beta_h$  pour tout élément  $(w_h, \beta_h)$  dans l'espace "DKT"  $Z_h$ . Plus précisément, nous avons le résultat fondamental suivant, justifiant l'utilisation des éléments finis DKT :

**Lemme 4.2** *On suppose que la carte  $\varphi$  est dans  $W^{2,\infty}(\Omega)$ . Pour tout  $(w_h, \beta_h)$  dans  $Z_h$ , on a alors*

$$|\beta(w_h) - \beta_h|_{m, 2, T} \leq C h^{1-m} \|(w_h, \beta_h)\|_{Z, T},$$

$$\|\chi_h(w_h, \beta_h)\|_{2, T} \leq C h \|(w_h, \beta_h)\|_{Z, T}.$$

**Preuve** Par construction, nous avons (Lemme 3.1)

$$\begin{aligned} \beta(w_h) - \beta_h &= -a_3 \cdot (\nabla w_h - \theta_h) \cdot F^{-1} \\ &= - \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j a_3 \cdot D^3 w_h(b_i - b_j, b_i - b_j, \nu_{ij}) \nu_{ij} \cdot F^{-1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $|\lambda_i \lambda_j|_{m, 2, T} \leq C h_T^{1-m}$  et  $|b_i - b_j| \leq h_T$ . On en déduit

$$\begin{aligned} \|\beta - \beta_h\|_{2, T} &\leq \sum_{i < j} \|\lambda_i \lambda_j\|_{2, T} \|a_3 \cdot D^3 w_h(b_i - b_j, b_i - b_j, \nu_{ij})\|_{\infty, T} \|\nu_{ij}\|_{\infty, T} \|F^{-1}\|_{\infty} \\ &\leq C h_T^3 \|a_3 \cdot D^3 w_h\|_{\infty, T}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} |\beta - \beta_h|_{1, 2, T} &\leq \sum_{i < j} (\|D(\lambda_i \lambda_j)\|_{2, T} \|\nu_{ij}\| \|F^{-1}\|_{\infty, T} \|a_3 \cdot D^3 w_h(b_i - b_j, b_i - b_j, \nu_{ij})\|_{\infty, T} \\ &\quad + \|\lambda_i \lambda_j\|_{2, T} \|Da_3\|_{\infty, T} \|D^3 w_h(b_i - b_j, b_i - b_j, \nu_{ij})\| \|\nu_{ij}\| \|F^{-1}\|_{\infty, T} \\ &\quad + \|\lambda_i \lambda_j\|_{2, T} \|a_3 \cdot D^3 w_h(b_i - b_j, b_i - b_j, \nu_{ij})\|_{\infty, T} \|\nu_{ij}\| \|DF^{-1}\|_{\infty, T}, \\ &\leq C h_T^2 \|a_3 \cdot D^3 w_h\|_{\infty, T} + C h_T^3 \|Da_3\|_{\infty, T} \|D^3 w_h\|_{\infty, T}. \end{aligned} \tag{19}$$

Nous avons aussi d'après les inégalités inverses de la section précédente et par développement de  $DF^{-1} = -F^{-1} \cdot DF \cdot F^{-1}$

$$\begin{aligned} \|a_3.D^3w_h\|_{\infty,T} &\leq \|(a_3 - a_3^{\text{moy}}).D^3w_h\|_{\infty,T} + \|a_3^{\text{moy}}.D^3w_h\|_{\infty,T} \\ &\leq Ch_T \|Da_3\|_{\infty,T} \|D^3w_h\|_{\infty,T} + \frac{C}{h_T^2} \|a_3^{\text{moy}}.D\theta_h\|_{2,T}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|a_3^{\text{moy}}.D\theta_h\|_{2,T} &= \|D(a_3.\theta_h.F^{-1}).F + a_3.\theta_h.F^{-1}.DF - Da_3.\theta_h + (a_3^{\text{moy}} - a_3).D\theta_h\|_{2,T} \\ &\leq C(\|D\beta_h\|_{2,T} + \|\theta_h\|_{2,T} + \|a_3^{\text{moy}} - a_3\|_{\infty,T} \|D\theta_h\|_{2,T}) \\ &\leq C(\|D\beta_h\|_{2,T} + |w_h|_{1,2,T} + Ch_T \|Da_3\|_{\infty,T} \frac{|w_h|_{1,2,T}}{h_T}). \end{aligned}$$

Après report et majoration de  $\|D^3w_h\|_{\infty,T}$ , il reste finalement

$$\|a_3.D^3w_h\|_{\infty,T} \leq \frac{C}{h_T^2} \{|w_h|_{1,2,T} + \|D\beta_h\|_{2,T}\} \leq \frac{C}{h_T^2} \|(w_h, \beta_h)\|_{Z,T}.$$

En revenant aux estimations (18)-(19), on en déduit

$$\begin{aligned} \|\beta - \beta_h\|_{2,T} &\leq Ch_T \|(w_h, \beta_h)\|_{Z,T}, \\ \|\beta - \beta_h\|_{1,2,T} &\leq C \|(w_h, \beta_h)\|_{Z,T} + C \|Da_3\|_{\infty,T} |w_h|_{1,2,T} \leq C \|(w_h, \beta_h)\|_{Z,T} \\ \|\chi_h(w_h)\|_{2,T} &= \|(\beta - \beta_h).F\|_{2,T} \leq \|\beta - \beta_h\|_{2,T} \|F\|_{\infty,T} \leq Ch_T \|(w_h, \beta_h)\|_{Z,T}. \end{aligned}$$

### 4.3 Erreur de consistance

La non conformité du problème discret peut maintenant être évaluée par le théorème suivant :

**Théorème 4.1** *Soit  $(u^*, \beta^*)$  la solution du problème continu et  $q$  l'effort de cisaillement associé. Si la carte  $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ , il existe une constante  $C$  indépendante de la triangulation telle que*

$$\sup_{w_h \in Z_h} \frac{|a((u^*, \beta^*), (w_h, \beta_h)) - f(w_h, \beta_h)|}{\|(w_h, \beta_h)\|_Z} \leq Ch \|\nabla \varphi . q\|_{2,\Omega}.$$

**Preuve.** Sous la notation  $n = \sqrt{a} \varepsilon E \gamma(u^*) =$  tenseur des efforts de membrane,  $m = \sqrt{a} \frac{e^3}{12} E \rho(u^*, \beta^*) =$  tenseur des efforts de flexion, la forme bilinéaire  $a$  s'écrit

$$\begin{aligned} a((u^*, \beta^*), (w_h, \beta_h)) &= \sum_{T \in \tau} \int_T \{n : \gamma(w_h) + m : \rho(w_h) \\ &\quad + m : (\rho(w_h, \beta_h) - \rho(w_h))\} d\xi. \end{aligned}$$

Introduisant le tenseur des efforts de cisaillement  $q$  intervenant dans les équations d'équilibre fortes, utilisant la définition de  $\gamma(w_h), \rho(w_h)$ , l'identité

$$\begin{aligned}\chi(w_h) &= a_3 \cdot \nabla w_h + \beta(w_h) \cdot \nabla \varphi \\ &= a_3 \cdot \nabla w_h - a_3 \cdot \nabla w_h \cdot F^{-1} \cdot \nabla \varphi = 0,\end{aligned}$$

et la symétrie de  $m$  et  $n$ , cette forme peut s'écrire

$$\begin{aligned}a((u^*, \beta^*), (w_h, \beta_h)) &= \sum_T \int_T \{n : \nabla \varphi^t \cdot \nabla w_h \\ &+ m : (\nabla a_3^t \cdot \nabla w_h + \nabla \varphi^t \cdot \nabla \beta) \\ &+ q \cdot (a_3 \cdot \nabla w_h + \beta \cdot \nabla \varphi) \\ &+ m : (\nabla \varphi^t \cdot \nabla (\beta_h - \beta))\} d\xi.\end{aligned}$$

Après intégration par parties sur chacun des triangles  $T$  et prise en compte des équations d'équilibre fortes satisfaites par  $m, n$  et  $q$ , il reste ( $w_h$  étant continue aux interfaces)

$$\begin{aligned}&a((u^*, \beta^*), (w_h, \beta_h)) - f(w_h, \beta_h) \\ &= \sum_T \int_{\partial T} (\nabla \varphi \cdot m \cdot \nu_T) \cdot \beta d\sigma + \int_T \nabla \varphi \cdot m : (\nabla \beta_h - \nabla \beta) d\xi - \int_{\Gamma_1} M \cdot \beta_h d\sigma.\end{aligned}$$

D'après la continuité de  $\beta_h$  sur les arêtes des triangles, on peut retrancher  $\beta_h$  à toutes les intégrales de bord interne car les termes ainsi ajoutés s'annuleront deux à deux.

Après prise en compte de la condition aux limites sur  $M$ , on peut alors écrire

$$\begin{aligned}a((u^*, \beta^*), (w_h, \beta_h)) - f(w_h, \beta_h) &= \sum_T \int_{\partial T} (\nabla \varphi \cdot m \cdot \nu_T) \cdot (\beta - \beta_h) \\ &+ \int_T \nabla \varphi \cdot m : (\nabla \beta_h - \nabla \beta) d\xi.\end{aligned}$$

Après intégration par parties du second terme, on obtient alors

$$a((u^*, \beta^*), (w_h, \beta_h)) - f(w_h, \beta_h) = - \sum_T \int_T \operatorname{div}(\nabla \varphi \cdot m) \cdot (\beta_h - \beta) d\xi.$$

On en déduit d'après nos estimations sur l'erreur de courbure et les équations d'équilibre fortes

$$\begin{aligned}|a((u^*, \beta^*), (w_h, \beta_h)) - f(w_h, \beta_h)| &\leq \sum_T \|\operatorname{div}(\nabla \varphi \cdot m)\|_{2,T} \|\beta_h - \beta(w_h)\|_{2,T} \\ &\leq \sum_T C \|\nabla \varphi \cdot q\|_{2,T} h_T \|(w_h, \beta_h)\|_{Z,T} \\ &\leq Ch \|\nabla \varphi \cdot q\|_{2,\Omega} \|(w_h, \beta_h)\|_Z.\end{aligned}$$

#### 4.4 Résultat de convergence

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer le résultat fondamental garantissant la convergence de la solution DKT discrète vers la solution continue

**Théorème 4.2** *Si  $\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega)$ , l'erreur entre la solution  $(u^*, \beta^*)$  du problème (P') et la solution  $(u_h, \beta_h)$  du problème discret est bornée par*

$$\|(u^* - u_h, \beta^* - \beta_h)\|_Z \leq Ch \|\nabla \varphi . q\|_{2,\Omega} + \inf_{(v_h, \delta_h) \in Z_h} \|(u^* - v_h, \beta^* - \delta_h)\|_Z.$$

**Preuve.** Par construction, comme  $C_{h|T}$  est minorée par une constante uniforme  $C_o$ , on a

$$\begin{aligned} a_h((v_h, \delta_h), (v_h, \delta_h)) &\geq \int_{\Omega} \{eE\gamma(v_h) : \gamma(v_h) \\ &\quad + \frac{\epsilon^3}{12} E\rho_h(v_h, \delta_h) : \rho_h(v_h, \delta_h) + C_o |\chi_h(v_h, \delta_h)|^2\} dS. \end{aligned}$$

D'après [4], le terme de droite définit une forme bilinéaire coercive sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  muni de la norme  $Z$ . Il existe donc une constante  $C$  telle que

$$a_h((v_h, \delta_h), (v_h, \delta_h)) \geq C \|(v_h, \delta_h)\|_Z^2, \forall (v_h, \delta_h) \in H^1 \times H^1, v_h|_{\Gamma_o} = 0.$$

Soit maintenant  $(u_h, \beta_h)$  la solution discrète et  $(v_h, \delta_h)$  un élément quelconque de  $Z_h$ . D'après l'inégalité de coercivité précédente appliquée à  $(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)$ , et par construction de  $(u_h, \beta_h)$  on a

$$\begin{aligned} C \|(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)\|_Z^2 &\leq a_h((u_h - v_h, \beta_h - \delta_h), (u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)) \\ &\leq f(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h) - a((u^*, \beta^*), (u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)) \\ &\quad + a((u^*, \beta^*), (u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)) \\ &\quad - a_h((v_h, \delta_h), (u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)). \end{aligned} \tag{20}$$

Le premier terme de droite est borné par l'inégalité de consistance :

$$B_1 \leq Ch \|\nabla \varphi . q\|_{2,\Omega} \|(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)\|_Z.$$

Le second terme s'écrit après développement

$$\begin{aligned} |B_2| &= \left| \int \{eE\gamma(u^* - v_h) : \gamma(u_h - v_h) \right. \\ &\quad + \frac{\epsilon^3}{12} (\rho(u^*, \beta^*) - \rho_h(v_h, \delta_h)) : \rho_h(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h) \\ &\quad \left. - C_h \chi_h(v_h, \delta_h) . \chi_h(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)\} . dS \right| \\ &\leq C [ \|\gamma(u^* - v_h)\|_{2,\Omega} \|\gamma(u_h - v_h)\|_{2,\Omega} \\ &\quad + \|\rho(u^*, \beta^*) - \rho_h(v_h, \delta_h)\|_{2,\Omega} \|\rho_h(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)\|_{2,\Omega} \\ &\quad + \sum_T \frac{c_1}{h_T} \|\chi_h(v_h, \delta_h)\|_{2,T} \|\chi_h(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)\|_{2,T} ]. \end{aligned}$$

Mais par construction, on a

$$\begin{aligned} \|\gamma(u^* - v_h)\|_{2,\Omega} &\leq C|u^* - v_h|_{1,2,\Omega}, \\ \|\gamma(u_h - v_h)\|_{2,\Omega} &\leq C|u_h - v_h|_{1,2,\Omega}, \\ \|\rho_h(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)\|_{2,\Omega} &\leq C(|u_h - v_h|_{1,2,\Omega} + |\beta_h - \delta_h|_{1,2,\Omega}) \\ &\leq C\|(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)\|_Z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\chi_h(v_h, \delta_h)\|_{2,T} &= \|a_3 \cdot (\nabla v_h - \theta_h)\|_{2,T} \\ &= \|a_3 \cdot \nabla(v_h - u^*) - a_3 \cdot \theta_h + a_3 \cdot \nabla u^*\|_{2,T} \\ &\leq |v_h - u^*|_{1,2,T} + \|(\beta^* - \delta_h) \cdot F\|_{2,T} \\ &\leq C\|(u^* - v_h, \beta^* - \delta_h)\|_{Z,T}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après le lemme de courbure, nous avons

$$\|\chi_h(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)\|_{2,T} \leq Ch_T \|(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)\|_{Z,T}.$$

Il reste à estimer

$$\begin{aligned} &\|\rho(u^*, \beta^*) - \rho_h(v_h, \delta_h)\|_{2,\Omega} \\ &= \left\| \frac{1}{2} [\nabla a_3^t \cdot \nabla(u^* - v_h) + \nabla(u^* - v_h)^t \cdot \nabla a_3] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} [\nabla \varphi^t \cdot \nabla(\beta^* - \delta_h) + \nabla(\beta^* - \delta_h)^t \cdot \nabla \varphi] \right\|_{2,\Omega} \\ &\leq C(|u^* - v_h|_{1,2,\Omega} + |\beta^* - \delta_h|_{1,2,\Omega}) \\ &\leq C\|(u^* - v_h, \beta^* - \delta_h)\|_Z. \end{aligned}$$

Par addition, on obtient finalement

$$|B_2| \leq C\|(u^* - v_h, \beta^* - \delta_h)\|_Z \|(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)\|_Z.$$

Reporté dans (20) et après division par  $\|(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)\|_Z$ , il reste

$$\|(u_h - v_h, \beta_h - \delta_h)\|_Z \leq C(h\|\nabla \varphi \cdot q\|_{2,\Omega} + \|(u^* - v_h, \beta^* - \delta_h)\|_Z)$$

ce qui implique le résultat cherché :

$$\begin{aligned} \|(u^* - u_h, \beta^* - \beta_h)\|_Z &\leq \|(u^* - v_h, \beta^* - \delta_h)\|_Z + \|(v_h - u_h, \delta_h - \beta_h)\|_Z \\ &\leq C(h\|\nabla \varphi \cdot q\|_{2,\Omega} + \|(u^* - v_h, \beta^* - \delta_h)\|_Z), \forall (v_h, \delta_h) \in Z_h. \end{aligned}$$

#### 4.5 Estimation finale

L'estimation de l'erreur  $(u^* - u_h)$  nécessite maintenant d'estimer l'erreur d'approximation

$$\inf_{(v_h, \delta_h) \in Z_h} \|u^* - v_h, \beta^* - \delta_h\|_Z.$$

Ceci peut se faire à partir de résultats classiques d'interpolation et permet ainsi de déduire

**Théorème 4.3** *L'erreur d'approximation vérifie*

$$\inf_{(v_h, \delta_h) \in Z_h} \|u^* - v_h, \beta^* - \delta_h\|_Z \leq Ch \|u^*\|_{3,2,\Omega},$$

et donc l'écart entre solution discrète  $(u_h, \beta_h)$  et solution continue  $(u^*, \beta^*)$  est majoré par

$$\|(u^* - u_h, \beta^* - \beta_h)\|_z \leq Ch (\|\nabla \varphi \cdot q\|_{2,\Omega} + \|u^*\|_{3,2,\Omega}).$$

**Preuve.** Il suffit d'adapter les techniques classiques d'estimation d'erreurs d'interpolation dans les espaces d'éléments finis ([6]). Soit  $v_h = \Pi_h u^*$  l'interpolée  $P'_3$  Hermite de  $u^*$  et  $\theta_h = \theta_h(v_h)$  le gradient discret associé par les contraintes DKT

$$\theta_h|_T = \sum_i (\nabla v_h(b_i) \lambda_i + 6 \nabla_{i+1i+2} v_h \otimes t_{i+1i+2} |b_{i+1} b_{i+2}| \lambda_{i+1} \lambda_{i+2}).$$

Après transport sur le triangle de référence, et utilisation du théorème d'injection de Sobolev ( $H^3(\hat{T})$  continûment inclus dans  $C^1(\hat{T})$ ), on observe que l'application linéaire

$$\begin{aligned} \hat{L} &: H^3(\hat{T}) \rightarrow H^1(\hat{T}) \times H^1(\hat{T}) \\ \hat{v} &\rightarrow (\hat{v} - \hat{\Pi}_h \hat{v}, \hat{\nabla} \hat{v} - \hat{\theta}_h(\hat{\Pi}_h \hat{v})) \end{aligned}$$

est continue. Par ailleurs, par construction, cette application linéaire est nulle sur  $P_2(\hat{T})$  car, d'après le Lemme 3.1, l'interpolation DKT  $(\hat{\Pi}_h \hat{v}, \hat{\theta}_h(\hat{\Pi}_h \hat{v}))$  est exacte pour les polynômes d'ordre 2. Il existe donc une constante  $C$  telle que

$$\begin{aligned} \|\hat{L}(\hat{v})\|_{H^1(\hat{T})}^2 &\leq C \|\hat{v}\|_{H^3(\hat{T})/P_2(\hat{T})}^2 = C |\hat{v}|_{3,2,\hat{T}}^2 \\ &\leq C \|B^t\|^6 |v|_{3,2,T}^2 |\det B^{-1}| \\ &\leq Ch_T^4 |v|_{3,2,T}^2. \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a par construction

$$\begin{aligned} \|L(v)\|_{H^1(T)}^2 &= \|v - \Pi_h v\|_{2,T}^2 + \|\nabla v - \nabla(\Pi_h v)\|_{2,T}^2 \\ &+ \|\nabla v - \theta_h\|_{2,T}^2 + \|\nabla^2 v - \nabla \theta_h\|_{2,T}^2 \\ &\leq (\|\hat{v} - \hat{\Pi}_h \hat{v}\|_{2,\hat{T}}^2 + \|B^{-1}\|^2 \|\hat{\nabla} \hat{v} - \hat{\nabla}(\hat{\Pi}_h \hat{v})\|_{2,\hat{T}}^2) \\ &+ \|B^{-1}\|^2 \|\hat{\nabla} \hat{v} - \hat{\theta}_h\|^2 + \|B^{-1}\|^4 \|\hat{\nabla}^2 \hat{v} - \hat{\nabla} \hat{\theta}_h\|_{2,\hat{T}}^2 |\det B| \\ &\leq Ch_T^{-2} \|\hat{L}(\hat{v})\|_{H^1(\hat{T})}^2. \end{aligned}$$

En combinant ces deux inégalités, il vient

$$\begin{aligned}
\|L(v)\|_{H^1(T)}^2 &\leq Ch_T^2 |v|_{3,2,T}^2, \\
\|(u^* - v_h, \beta^* - \theta_h)\|_{Z,T}^2 &= \|u^* - \Pi_h u^*\|_{1,2,T}^2 + |a_3 \cdot (\nabla u^* - \theta_h) \cdot F^{-1}|_{1,2,T}^2 \\
&\leq C \|L(u^*)\|_{H^1(T)}^2 \\
&\leq Ch_T^2 |u^*|_{3,2,T}^2,
\end{aligned}$$

d'où le résultat final par addition sur les triangles.

**Remarque 4.1** *Le même type de démonstration (en enlevant le terme  $(\hat{\nabla}^2 \hat{v} - \hat{\nabla} \hat{\theta}_h)$ ) permet de vérifier au passage que le couple  $(v_h, \theta_h) = (\Pi_h u^*, \theta_h(v_h))$  vérifie l'inégalité*

$$\begin{aligned}
\|\chi(v_h, \beta_h)\|_{2,T}^2 &\leq \|a_3 \cdot \nabla(u^* - v_h)\|_{2,T}^2 + \|a_3 \cdot (\nabla u^* - \theta_h)\|_{2,T}^2 \\
&\leq Ch_T^4 |u^*|_{3,2,T}^2.
\end{aligned}$$

*Cette superconvergence du terme de cisaillement permet en fait d'utiliser des constantes de cisaillement  $C_{h|T}$  en  $O(h_T^{-2})$  dans l'énergie discrète sans affecter le taux de convergence du problème discret associé.*

## 5 Conclusion

Par rapport à l'approche suivie classiquement dans la littérature, notre choix d'une approximation en base cartésienne nous a permis d'obtenir par une méthode originale et directe une convergence au même ordre que pour les problèmes de plaque, tout en relaxant les hypothèses de régularité sur la carte  $\varphi(\varphi \in W^{2,\infty}(\Omega))$  et en réduisant les hypothèses sur le maillage à une unique condition de régularité locale. En particulier, le pas du maillage  $h$  peut être quelconque et non uniforme. Ce type de résultat s'étend sans difficulté au cas des quadrilatères.

Trois restrictions subsistent :

- comme pour tous les résultats connus sur le modèle de Koiter, les constantes de coercivité utilisées dans cet article (Théorème 4.1) dépendent de l'épaisseur de la coque ;
- comme pour les plaques, la convergence de l'élément DKT est d'ordre  $h$  alors que les rotations sont approchées par des polynômes du second degré ;
- le résultat d'interpolation démontré (Théorème 4.3) n'est pas optimal. Il exige une régularité  $H^3$  de toutes les composantes de  $u^*$  et démontre en contrepartie une convergence forte de  $(\nabla u^* - \theta_h)$  dans  $H^1$ . Il suffirait en fait de pouvoir démontrer la convergence forte de la composante normale  $a_3 \cdot (\nabla u^* - \theta_h)$  dans  $H^1$ .

## Références

- [1] M. Bernadou [1994], "Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces", Masson.

- 
- [2] M. Bernadou, P. Maito-Eirora, P. Trouvé [1994], "On the convergence of a discrete Kirchhoff triangle method valid for shells of arbitrary shape". *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 118, pp. 373-391.
  - [3] M. Bernadou, P.G. Ciarlet [1976], "Sur l'efficacité du modèle linéaire de coques de W.T. Koiter". *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol. 134, pp. 89-136, Springer-Verlag, Berlin.
  - [4] A. Blouza, H. Le Dret [1994], "Existence et Unicité pour le Modèle de Koiter pour une Coque peu Régulière", *C.R. Acad. Sci., Paris*, 319, pp. 1127-1132.
  - [5] A. Blouza, H. Le Dret [1994], "Sur le Lemme du Mouvement Rigide", *C.R. Acad. Sci., Paris*, 319, Série I, pp. 1015-1020.
  - [6] P.G. Ciarlet [1976], "The finite element method for elliptic problems". *Studies in Mathematics and its Applications*, Volume 4. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New-York-Oxford.
  - [7] G.S. Dhatt [1970], "An Efficient triangular shell element", *AIAA J.*, 8, pp. 2100-2102.
  - [8] M. Carrive [1995], "Modélisation intrinsèque et analyse numérique d'un problème de coque mince en grands déplacements". Thèse de l'Université Paris-Dauphine, Juin 1995.
  - [9] M. Carrive, P. Le Tallec, J. Mouro [1995], "Approximation par éléments finis d'un modèle de coques minces géométriquement exact", *Revue Européenne des Eléments Finis* 4, 5-6, pp. 633-662.
  - [10] W.T. Koiter [1966], "On the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells", *Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen*, série B, 69, pp. 1-54.
  - [11] J.C. Simo, D.D. Fox, M.S. Rifai [1989], "On a stress resultant geometrically exact shell model, Part I: Formulation and Optimal parametrization", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 72, pp. 267-304.
  - [12] P. Trouvé [1990], "Sur la convergence des méthodes d'éléments finis non-conformes pour des problèmes linéaires de coques minces". *Num. Math.*, Vol. 57, pp. 481-524, Springer-Verlag.





---

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

 diteur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399