Le schéma de MacCormack sur l'équation d'advection bidimensionnelle. Application au cas test C1 de l'ONERA

Romuald Carpentier

▶ **To cite this version:**

Romuald Carpentier. Le schéma de MacCormack sur l'équation d'advection bidimensionnelle. Application au cas test C1 de l'ONERA. RR-3076, INRIA. 1996. inria-00073616

HAL Id: inria-00073616
https://inria.hal.science/inria-00073616

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Le schéma de MacCormack sur l'équation d'advection bidimensionnelle. Application au cas test C1 de l'ONERA.

Romuald CARPENTIER

N° 3076

décembre 1996

THÈME 4

ISSN 0249-6399

INRIA
SOPHIA ANTIPOLIS

Le schéma de MacCormack sur l'équation d'advection bidimensionnelle. Application au cas test C1 de l'ONERA.

Romuald CARPENTIER

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet SINUS

Rapport de recherche n° 3076 — décembre 1996 — 29 pages

Résumé : L'étude présentée dans ce papier a pour but l'analyse d'une méthode numérique utilisée dans le code de mécanique des fluides SIERRA développé par l'ONERA. Le schéma de base utilisé par ce code est le schéma de MacCormack d'ordre 2, en version explicite prédicteur correcteur avec une formulation de volumes finis sur maillage quadrangulaire.
Dans un premier temps, nous réalisons une étude linéaire sur l'équation d'advection bidimensionnelle en envisageant les quatre configurations possibles du schéma de MacCormack. En parallèle, nous confrontons ces résultats à ceux obtenus par le schéma décentré de Roe précis à l'ordre 2, en version explicite avec une intégration temporelle de Runge Kutta 2.
Dans un second temps, nous abordons un calcul non linéaire sur le cas test C1 de l'ONERA (programme ASSM) où, sur le modèle des équations d'Euler, nous voulons rendre compte d'un phénomène de tourbillons détachés dans un régime instationnaire périodique établi. Nous n'analyserons pas les causes physiques de ce phénomène, mais chercherons à identifier la nature du régime oscillant prédit en fonction du type des erreurs introduites par l'approximation.

Mots-clé : MacCormack - dispersion - dissipation - tourbillon

(Abstract: pto)

The MacCormack scheme on the two dimensional wave equation. Application to the C1 test case of ONERA.

Abstract: The study presented in this paper is focusing on the analysis of a numerical scheme use in the CFD code SIERRA developed at ONERA. The basic scheme used in this code is the explicit predictor corrector version at second order accuracy of the MacCormack scheme with a finite volume formulation on a quadrangular mesh.
First, we realize a linear study on the two dimensional wave equation. We consider the four possible configurations of MacCormack scheme. We compare also these results with those obtained with the second-order accurate Roe upwind scheme, explicit version, when a Runge Kutta 2 temporal integration is used.
Second, we perform a non-linear calculation on the C1 ONERA test case (ASSM program) where, on the model of Euler's equations, we want report on a phenomenon of vortex shedding in a bench periodic unsteady state. We do not analyse physical principle of this phenomenon, but we seek to identify the nature of oscillating rules predicted in relation with the type of errors introduced by the approximation.

Key-words: MacCormack - dispersive - dissipative - vortex

1 LA METHODE DE CALCUL

1.1 L'équation modèle:

Nous voulons résoudre l'équation d'advection 2D scalaire suivante:

$$U_t + c\cos\theta U_x + c\sin\theta U_y = 0 \tag{1}$$

où c est le module de la vitesse d'advection, θ son incidence vue dans un repère et U la valeur scalaire advectée.
Si nous spécifions un état initial: $U(t = 0, x, y) = U_0(x, y)$ alors la solution de (1) est: $U_0(x - ct\cos\theta, y - ct\sin\theta)$ signifiant que l'état initial va se translater au cours du temps à une vitesse de composantes $(c\cos\theta, c\sin\theta)$.

1.2 Maillage:

Nous utilisons un maillage régulier quadrangulaire de manière à ne faire aucune différence entre un calcul "cell centered" et "vertex centered" et nous considérons notre domaine comme périodique pour éviter les conditions de bords. Nous ferons référence à I pour le point de calcul et à J pour ses voisins. Par ailleurs, ces points seront repérés par les indices discrets $S_{i+k,j+l}$ stipulant leurs coordonnées: $x = (i + k)\Delta x$ et $y = (j + l)\Delta y$ avec Δx et Δy les infinitésimaux spatiaux. Nous construisons sur un tel maillage la cellule C_I associée au noeud I définie par le contour ∂C_I, réalisé par l'union sucessive des milieux des segments liant I à J aux barycentres des quadrangles (voir figure FIG.1).

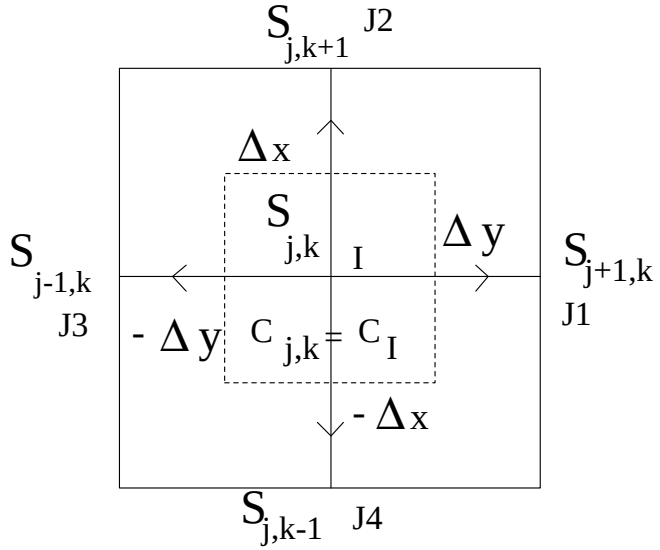


FIG. 1 – *Maillage quadrangle*

1.3 Formulation en volumes finis:

Nous intégrons (1) sur la cellule C_I et en utilisant la formule de GREEN, nous obtenons:

$$\int\int_{C_I} U_t \, dxdy = -\int_{\partial C_I} (F(U).n_x + G(U).n_y)ds$$

avec: $F(U) = c\cos\theta \; U$ et $G(U) = c\sin\theta \; U$ et (n_x, n_y) les composantes du vecteur local unitaire orthogonal à ∂C_I, contour de la cellule C_I.

1.4 Approximation par prédicteur et correcteur:

Le calcul de la nouvelle valeur discrète de U_I au temps $t = (n+1)\Delta t$, s'obtient par une première estimation, notée $\tilde{U}_I$ dans une étape de prédiction suivie par une étape de correction donnant U_I^{n+1}.

– Prédiction:

$$\tilde{U}_I = U_I^n - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \sum_J (F^{\pm}(U_I^n).\Delta^x + G^{\pm}(U_I^n).\Delta^y)$$

– Correction:

$$U_I^{n+1} = \frac{1}{2}[\tilde{U}_I + U_I^n - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \sum_J (F^{\pm}(\tilde{U}_I).\Delta^x + G^{\pm}(\tilde{U}_I).\Delta^y)]$$

$\Delta x \Delta y$ provient de l'aire de la cellule et (Δ^x, Δ^y) les coordonnées du vecteur normal intégré. Les indices supérieurs "$\pm$" correspondent à la façon dont le flux est calculé par rapport à la cellule considérée: "+" au delà de l'interface et "-" en deçà. Il en résulte les quatre possibilités suivantes:

	prédicteur		correcteur	
CAS I	F^+	G^+	F^-	G^-
	F^-	G^-	F^+	G^+
CAS II	F^+	G^-	F^-	G^+
	F^-	G^+	F^+	G^-

Seuls, les cas I et II vont se différencier dans le cadre linéaire que nous abordons. En effet, nous parvenons à un même résultat quant à l'expression du flux discrétisé pour les deux premières lignes du tableau et nous faisons le même constat pour les deux dernières.

2 ETUDE DE LA STABILITE

Nous souhaitons après discrétisation du flux, trouver l'expression du gain ou facteur d'amplification et donner selon les cas (I ou II) les critères de stabilité d'un tel schéma.

2.1 Le flux discrétisé:

Posons $\chi_1 = c\Delta y \cos\theta$ et $\chi_2 = c\Delta x \sin\theta$, il vient:

CAS I	CAS II
$U_{i,j}^{n+1}$	
$=$	
$U_{i,j}^{n}$	
$+$	
$\frac{\Delta t}{2\Delta x \Delta y}$	
$*$	
$\left\{\chi_1(U_{i-1,j}^n - U_{i+1,j}^n) + \chi_2(U_{i,j-1}^n - U_{i,j+1}^n)\right\}$	
$+$	
$\frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2 \Delta y^2}$	
$*$	
$\left\{-2(\chi_1^2 + \chi_1\chi_2 + \chi_2^2)U_{i,j}^n\right.$	$\left\{-2(\chi_1^2 - \chi_1\chi_2 + \chi_2^2)U_{i,j}^n\right.$
$+\chi_1(\chi_1 + \chi_2)(U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n)$	$+\chi_1(\chi_1 - \chi_2)(U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n)$
$+\chi_2(\chi_1 + \chi_2)(U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n)$	$-\chi_2(\chi_1 - \chi_2)(U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n)$
$\left.-\chi_1\chi_2(U_{i-1,j+1}^n + U_{i+1,j-1}^n)\right\}$	$\left.+\chi_1\chi_2(U_{i-1,j-1}^n + U_{i+1,j+1}^n)\right\}$

2.2 Le facteur d'amplification:

Nous déduisons de l'expression du flux discrétisé, le facteur d'amplification $G(\xi_1, \xi_2)$ par l'introduction des modes de Fourier en écrivant chaque $U_{i+k,j+l}^n$ comme:

$$G(\xi_1, \xi_2)^n exp\ \iota(k\xi_1 + l\xi_2)$$

où $\iota^2 = -1$ et $\xi_1 = 2\pi\Delta x\ m\ \ \xi_2 = 2\pi\Delta y\ n$ avec m et n les nombres d'ondes respectivement en x et en y. Par ailleurs, nous simplifierons notre étude en considérant:

$$\Delta x = \Delta y = \Delta$$

et nous définirons ν comme le rapport $\frac{c\Delta t}{\Delta}$, il suit:

– CAS I:

$$\begin{aligned} G(\nu, \theta, \xi_1, \xi_2) &= 1 \\ +\nu^2 \{&-1 - \sin\theta\cos\theta(1 + \cos(\xi_1 - \xi_2)) + (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta\cos\xi_1 + \sin\theta\cos\xi_2)\} \\ &-\iota\nu \{\cos\theta\sin\xi_1 + \sin\theta\sin\xi_2\} \end{aligned} \quad (2)$$

– CAS II:

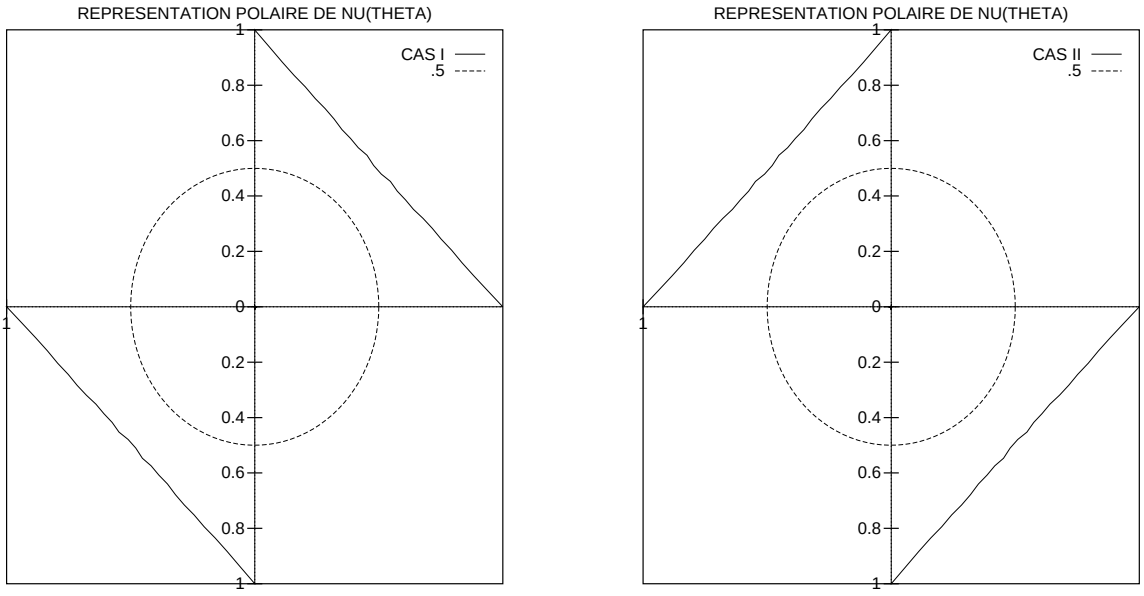
$$\begin{aligned} G(\nu, \theta, \xi_1, \xi_2) &= 1 \\ +\nu^2 \{&-1 + \sin\theta\cos\theta(1 + \cos(\xi_1 + \xi_2)) + (\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta\cos\xi_1 - \sin\theta\cos\xi_2)\} \\ &-\iota\nu \{\cos\theta\sin\xi_1 + \sin\theta\sin\xi_2\} \end{aligned} \quad (3)$$

2.3 La stabilité:

Nous voulons trouver numériquement la valeur maximale du nombre de Courant ν associée à chaque direction θ nommée $\nu_c(\theta)$ qui vérifie pour tous les modes de Fourier (ξ_1, ξ_2) la condition critique de Von Neumann:

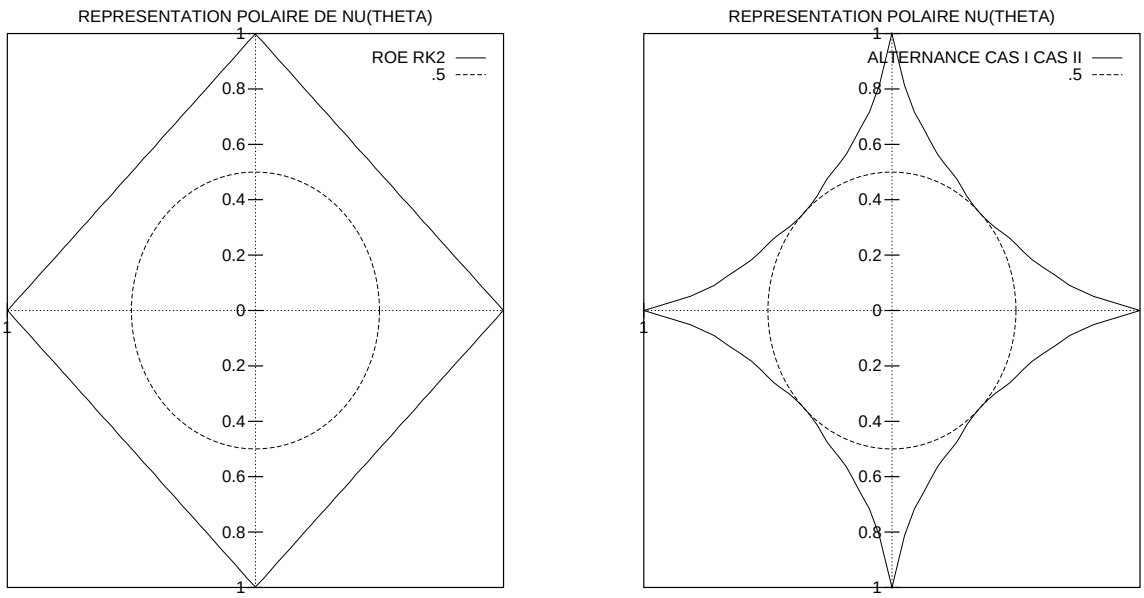
$$\nu_c(\theta) \text{ tel que: } MAX_{\xi_1,\xi_2 \in [0,2\pi]} \; G(\nu_c(\theta), \theta, \xi_1, \xi_2) = 1$$

Nous allons ainsi pouvoir tracer en fonction de l'incidence θ et de manière polaire, la limite du nombre de Courant au delà de laquelle le schéma n'est plus stable. Nous traçons de plus le nombre de Courant de valeur $\frac{1}{2}$ que nous prendrons pour lier $c\Delta t$ à Δ.



Représentation polaire de $\nu_c(\theta)$: zones de stabilités complémentaires entre le CAS I et le CAS II. Situation d'instabilité par choix exclusif du CAS I ou du CAS II.

Nous notons alors que le schéma de MacCormack dans une configuration donnée (CAS I ou CAS II) n'est pas stable pour tout θ mais qu'il a la faculté de l'être si l'on peut choisir le CAS I pour une incidence selon le premier et troisième quart du cercle ou le CAS II pour une incidence selon le deuxième quart et dernier quart du cercle. Si nous avons cette polyvalence d'approche en fonction de θ pour le schéma de MacCormack, alors, le domaine de stabilité sera identique à celui déterminé pour le schéma de Roe sur ce même maillage quadrangulaire avec une intégration temporelle de Runge Kutta 2.
Par ailleurs, si nous ne désirons pas analyser l'incidence de la vitesse d'advection, nous pouvons alterner à chaque itération, le CAS I et le CAS II. Nous obtenons alors une zone de stabilité plus réduite dont les représentations polaires sont:



Une possibilité de stabilité assurée pour tout θ, représentation polaire de $\nu_c(\theta)$:
à gauche, CAS I ou CAS II en fonction de θ ($\Leftrightarrow$ ROE RK2) - à droite, CAS I et CAS II par alternance.

2.4 Exemple d'instabilité:

Plaçons nous dans la configuration du CAS I et prenons $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Calculons alors $||G||^2$ à partir de (2):

$$||G||^2 = 1 + \nu^2[-1 + \cos(\xi_1 - \xi_2)] + \frac{\nu^2}{2}[\sin\xi_1 - \sin\xi_2]^2 + \frac{\nu^4}{4}[-1 + \cos(\xi_1 - \xi_2)]^2 \qquad (4)$$

Considérons le(s) cas: $\xi_1 = \frac{\pi}{2}$(ou $\frac{3\pi}{2}$) et $\xi_2 = \frac{3\pi}{2}$(ou $\frac{\pi}{2}$). De (4), $||G||^2$ devient une valeur supérieure à 1 s'écrivant:

$$||G||^2 = 1 + \nu^4$$

Cette situation place alors le schéma en situation d'instabilité d'autant plus grande que le nombre de Courant choisi est élevé. Notons que les modes de Fourier déclenchant cette instabilité sont peu communs et, dans cet exemple, de très hautes fréquences. Cependant, même si nous ne travaillons pas avec de telles fréquences, l'approximation numérique fait qu'elles existent toujours et sont en mesure de se développer parfois au bout d'un très long temps de calcul comme nous pourrons le constater dans le paragraphe alloué aux applications numériques.

3 ETUDE DES ERREURS NUMERIQUES

Par le biais des équations équivalentes, calculées jusqu'à l'ordre 4, nous allons pouvoir évaluer les caractéristiques dispersives et dissipatives du schéma de MacCormack en les comparant à celles du schéma de Roe [6].

3.1 Les équations équivalentes:

Nous faisons référence ici à [7], pour calculer aisément les équations équivalentes, d'où il ressort les expressions suivantes pour le CAS I et le CAS II:

CAS I	CAS II
$U_t + c\cos\theta U_x + c\sin\theta U_y$	
$=$	
$U_{xxx}\left\{c^3\Delta t^2\cos^3\theta - c\Delta x^2\cos\theta\right\}/6$	
$+$	
$U_{xxy}\left\{3c^3\Delta t^2\cos^2\theta\sin\theta\right\}/6$	
$+$	
$U_{xyy}\left\{3c^3\Delta t^2\cos\theta\sin^2\theta\right\}/6$	
$U_{yyy}\left\{c^3\Delta t^2\sin^3\theta - c\Delta y^2\sin\theta\right\}/6$	
$+$	$+$
$U_{xxxx}\left\{c^4\Delta t^3\cos^4\theta - c^2\Delta t\Delta x^2\cos^2\theta\right\}/8$	
$U_{xxxy}\left\{4c^4\Delta t^3\cos^3\theta\sin\theta\right\}/8$	
$U_{xxyy}\left\{6c^4\Delta t^3\cos^2\theta\sin^2\theta\right\}/8$	
$-U_{xxyy}\left\{c^2\Delta t\Delta x\Delta y\cos\theta\sin\theta\right\}/8$	$+U_{xxyy}\left\{c^2\Delta t\Delta x\Delta y\cos\theta\sin\theta\right\}/8$
$U_{xyyy}\left\{4c^4\Delta t^3\cos\theta\sin^3\theta\right\}/8$	
$U_{yyyy}\left\{c^4\Delta t^3\sin^4\theta - c^2\Delta t\Delta y^2\sin^2\theta\right\}/8$	
$O(4)$	

Nous avons dissocié dans le tableau, les erreurs d'ordre 2 à celles d'ordre 3. Les erreurs d'ordre 2 sont liées à des dérivées troisièmes correspondant à des erreurs dispersives, tandis que les erreurs d'ordre 3 sont associées à des dérivées quatrièmes correspondant à des erreurs dissipatives.

3.2 Les erreurs purement temporelles:

Parmis toutes ces erreurs, certaines sont exclusivement gouvernées par Δt^2 ou Δt^3. Il s'agit des erreurs temporelles résultant d'une intégration de Runge Kutta 2 pour ce modèle d'équation d'advection bidimensionnelle. Nous savons déjà que ces erreurs induisent sur un mode (m,n) de Fourier ($U_0(x,y) = \cos(2\pi[mx+ny])$), les effets suivants:

- Dispersion (Δt^2):
  Elle a toujours tendance à **augmenter** la vitesse d'advection apparente pour toutes les directions θ. Elle s'exprime par un déplacement excessif de valeur:

$$\frac{(2\pi)^2}{\sqrt{m^2+n^2}}.\frac{(c\Delta t)^2}{6}.c(m\cos\theta + n\sin\theta)^3.t$$

– Dissipation (Δt^3):
Elle agit par **amplification** de l'amplitude (déstabilisation) de tout mode de Fourier de manière exponentielle par le facteur:

$$exp\left\{(c\Delta t)^3.\frac{(2\pi)^4}{8}.(m\cos\theta + n\sin\theta)^4.t\right\}$$

Notons cependant que ces erreurs de nature purement temporelles sont de faibles effets en comparaisons des erreurs où interviennent les termes spatiaux Δx et Δy lorsque nous choisissons un nombre de Courant ν égale à $\frac{1}{2}$.

3.3 Les erreurs "spatiales":

Pour les erreurs restantes d'ordre 3, le facteur Δt est parfois encore présent. Nous allons par abus de langage le faire disparaître de manière à pouvoir les comparer aux erreurs spatiales issues du schéma de Roe, en posant:

$$\Delta x = \Delta y = \Delta \text{ et } c\Delta t = \frac{\Delta}{2}$$

– La dispersion d'ordre 2:
Parmis les erreurs d'ordre 2 "spatiales", nous constatons l'absence de dérivées croisées si bien qu'un mode composé ($mn \neq 0$) n'est pas plus affecté qu'un mode simple ($mn = 0$).

DISPERSION SPATIALE D'ORDRE 2		
FACTEUR	MAC CORMACK	ROE
$\frac{c\Delta^2\cos\theta}{12}U_{xxx}$	-2	1
$\frac{c\Delta^2\sin\theta}{12}U_{yyy}$	-2	1

L'erreur spatiale issue du schéma de MacCormack se traduit par un retard apparent de l'advection, sous incidence θ, au bout d'un temps t, pour un mode (m, n) donné, de valeur:

$$-2\,\frac{\pi^2}{3}\frac{c\Delta^2}{\sqrt{m^2+n^2}}\left\{m^3 cos\theta + n^3 sin\theta\right\}t$$

alors que l'erreur spatiale issue du schéma de Roe se traduit par une avance:

$$\frac{\pi^2}{3}\frac{c\Delta^2}{\sqrt{m^2+n^2}}\left\{m^3 cos\theta + n^3 sin\theta\right\}t$$

C'est affirmer ici qu'**au niveau de l'erreur spatiale d'ordre 2**, quelque soit le mode de Fourier considéré, quelque soit l'incidence choisie, **le schéma de MacCormack retarde 2 fois plus l'advection que le schéma de Roe ne l'avance.** A titre d'information et de comparaison avec [9], le schéma de MacCormack a une dispersion de nature spatiale semblable à un $\beta\gamma$ schéma de Roe où $\beta = 0$! C'est à dire au $\beta\gamma$ schéma retardant le plus l'advection!

– La dissipation d'ordre 3:
Nous percevons ici la distinction entre le CAS I et le CAS II par un terme de dérivée croisée (n'affectant donc que les modes composés) pouvant agir au sens de l'atténuation de l'amplitude comme au sens de son amplification, simplement par le signe du produit $sin\theta \cos\theta$.
Le fait de choisir le CAS I ou le CAS II pour rester toujours stable, revient à considérer ce produit comme toujours positif avec pour effet d'atténuer un peu plus l'amplitude des modes composés.
Le fait de choisir l'alternance entre le CAS I et le CAS II permet alors, en considérant le déplacement sur 2 itérations comme étant une translation, d'inhiber le terme de dérivée croisée et donc d'atténuer un peu moins l'amplitude des modes composés.

DISSIPATION SPATIALE D'ORDRE 3			
FACTEUR	MAC CORMACK		ROE
	CAS I ou CAS II	CAS I et CAS II	
$-\frac{c\Delta^3}{16}U_{xxxx}$	$\cos^2\theta$		$2\lvert\cos\theta\rvert$
$-\frac{c\Delta^3}{16}U_{xxyy}$	$\lvert sin\theta\cos\theta\rvert$	~ 0	0
$-\frac{c\Delta^3}{16}U_{yyyy}$	$\sin^2\theta$		$2\lvert\sin\theta\rvert$

Numériquement, celà se traduit par une atténuation de l'amplitude d'un mode (m,n) de Fourier dans la direction θ au bout d'un temps t par les facteurs multiplicatifs suivant:

– MAC CORMACK - CAS I OU CAS II:

$$exp\left\{-c\Delta^3\pi^4(m^4\cos^2\theta + m^2n^2|\sin\theta\cos\theta| + n^4\sin^2\theta)t\right\}$$

– MAC CORMACK - CAS I ET CAS II:

$$exp\left\{-c\Delta^3\pi^4(m^4\cos^2\theta + n^4\sin^2\theta)t\right\}$$

– ROE:

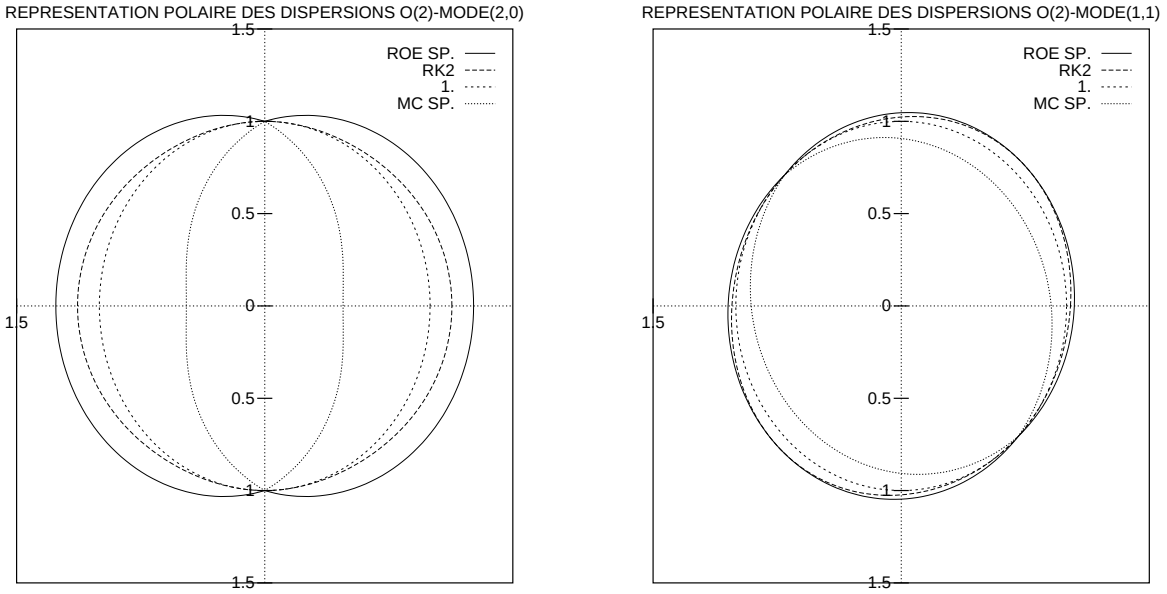
$$(exp\left\{-c\Delta^3\pi^4(m^4|\cos\theta| + n^4|\sin\theta|)t\right\})^2$$

En oubliant le terme de dérivée croisée, c'est à dire en nous plaçant dans la situation d'un mode simple ou bien du schéma de Mac Cornack dans la version CASI et II en alternance, nous constatons (dans la mesure où la valeur absolue d'une fonction trigonométrique est toujours supérieure ou égale à son carré) que **l'atténuation spatiale dûe au schéma de Roe est supérieure ou égale à une double atténuation issue du schéma de MacCormack!**
Quant au terme de dérivée croisée lorsqu'il est présent, il agit au sens de l'atténuation mais de manière toujours plus faible par rapport aux termes de même ordre.

3.4 Exemples et bilan:

Nous voulons appuyer nos propos sur quelques représentations polaires de l'erreur dispersive et dissipative jusqu'à l'ordre 4 en fonction de l'angle d'incidence de l'advection θ pour un mode simple $(2,0)$ et un mode composé $(1,1)$. Nous nous plaçons dans les circonstances d'une translation à une vitesse de module $c = 1$ sur un maillage régulier carré de coté $\Delta = 0.02$ ($\Delta t = 0.01$) durant un temps $t = 50$. Sur chacune des figures nous dissocierons les erreurs de nature purement temporelles (RK2) car elles sont d'abord communes au schéma de MacCormack et à celui de Roe, ensuite, pour montrer l'importance de leur influence par rapport aux erreurs de nature plus spatiales (SP.).

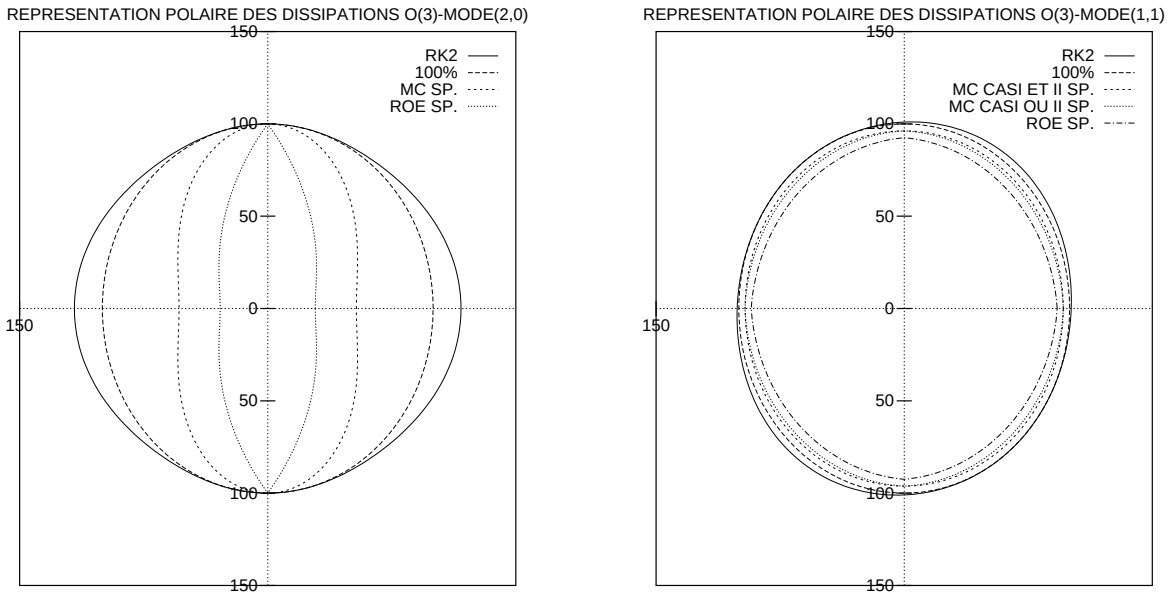
– La dispersion d'ordre 2:
Nous allons affecter à chaque direction θ, un rayon de taille 1 qui va être raccourci de la distance erronée si le schéma retarde l'advection ou allongé de la même façon dans le cas contraire. En conséquence, un schéma parfait décrirait le cercle de rayon 1.



Erreurs dispersives O(2) spatiales et temporelle référencées par rapport au cercle de rayon 1 (<1 = retard, >1 = avance). A gauche, mode simple (2,0) - A droite, mode composé (1,1) - (N.B.: $t = 50$, $\Delta = 0.02$, $c = 1$, $\nu = .5$).

Nous vérifions bien qu'une intégration de Runge Kutta 2 engendre une erreur dispersive augmentant la vitesse d'advection mais toujours de manière inférieur à l'erreur spatiale dispersive du schéma de Roe. Nous constatons également que l'erreur spatiale dispersive du schéma de MacCormack retarde la vitesse d'advection et ce, 2 fois plus que l'erreur spatiale du schéma de Roe ne l'avance.

– La dissipation d'ordre 3:
Nous allons affecter à chaque direction θ, un rayon représentant le pourcentage de l'amplitude qu'il préserve au mode de Fourier considéré. En conséquence, un schéma parfait décrirait le cercle de rayon 100 (%).



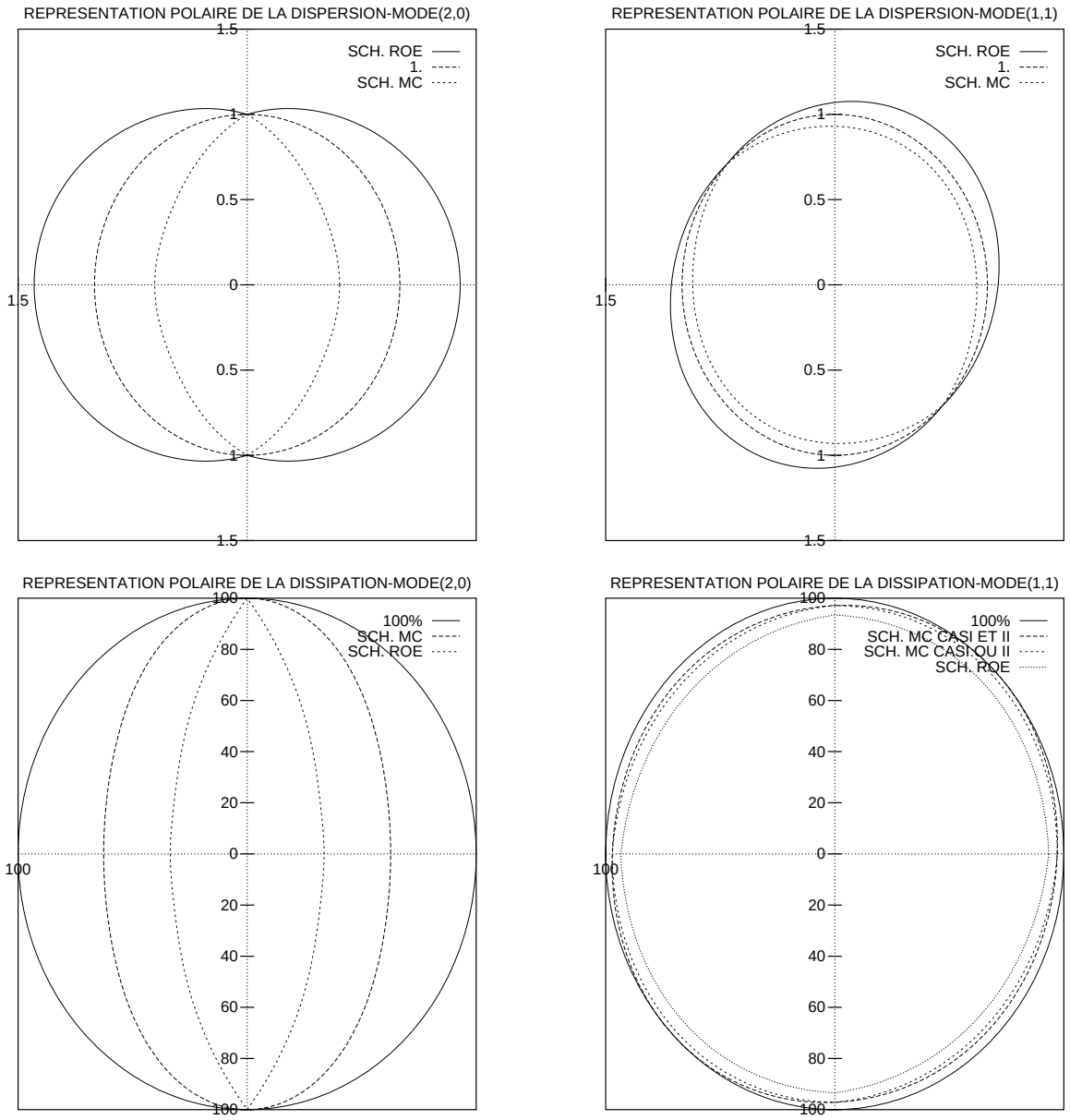
Erreurs dissipatives O(3) spatiales et temporelle référencées par rapport au cercle de rayon 100 (<100 = atténuation, >100 = amplification). A gauche, mode simple (2,0) - A droite, mode composé (1,1) - (N.B.: $t = 50$, $\Delta = 0.02$, $c = 1$, $\nu = .5$).

Nous vérifions que l'usage d'une intégration de Runge Kutta 2 occasionne un effet anti-dissipatif. L'erreur spatiale dissipative du schéma de Roe est conforme à notre prédiction: prenons, par exemple, $\theta = 0$, l'erreur spatiale dissipative du schéma de MacCormack atténue l'amplitude d'environ 50%. Une double atténuation de cette nature atténuerait l'amplitude d'environ 25% or ceci est justement l'atténuation due à l'erreur spatiale dissipative du schéma de Roe. Par ailleurs, nous pouvons noter que les effets dissipatifs des versions présentées du schéma de MacCormack sur le mode composé sont difficilement distinguables.

Il est clair et pour faire le bilan, que les phénomènes dispersifs d'ordre 2 et dissipatifs d'ordre 3 associés à chaque schéma sera la somme des dispersions et dissipations temporelles (communes aux schémas) et spatiales associées à chacun de ces schémas. Nous proposons donc de présenter sur les mêmes exemples les erreurs totales dispersives d'ordre 2 et dissipatives d'ordres 3 avec les mêmes concepts de représentation.

- La dispersion totale d'ordre 2:
  Globalement, par le biais de la dispersion de nature temporelle, le schéma de Roe augmente la vitesse d'advection autant voire un peu plus pour les modes composés que le schéma de MacCormack ne la diminue (voir figures ci -contre).

- La dissipation totale d'ordre 3:
  Globalement, les schémas envisagés ont une dissipation moins importante que leur dissapation spatiale respective. Ils bénéficient du caractère anti-dissipatif d'une intégration Runge Kutta 2 (voir figures ci-contre).



Erreurs dispervives O(2) (en haut) et dissipatives O(3) (en bas) des schémas numériques sur le mode simple (2,0) (à gauche) et composé (1,1) (à droite) - (N.B.: $t = 50$**,** $\Delta = .02$**,** $c = 1$**,** $\nu = .5$**).**

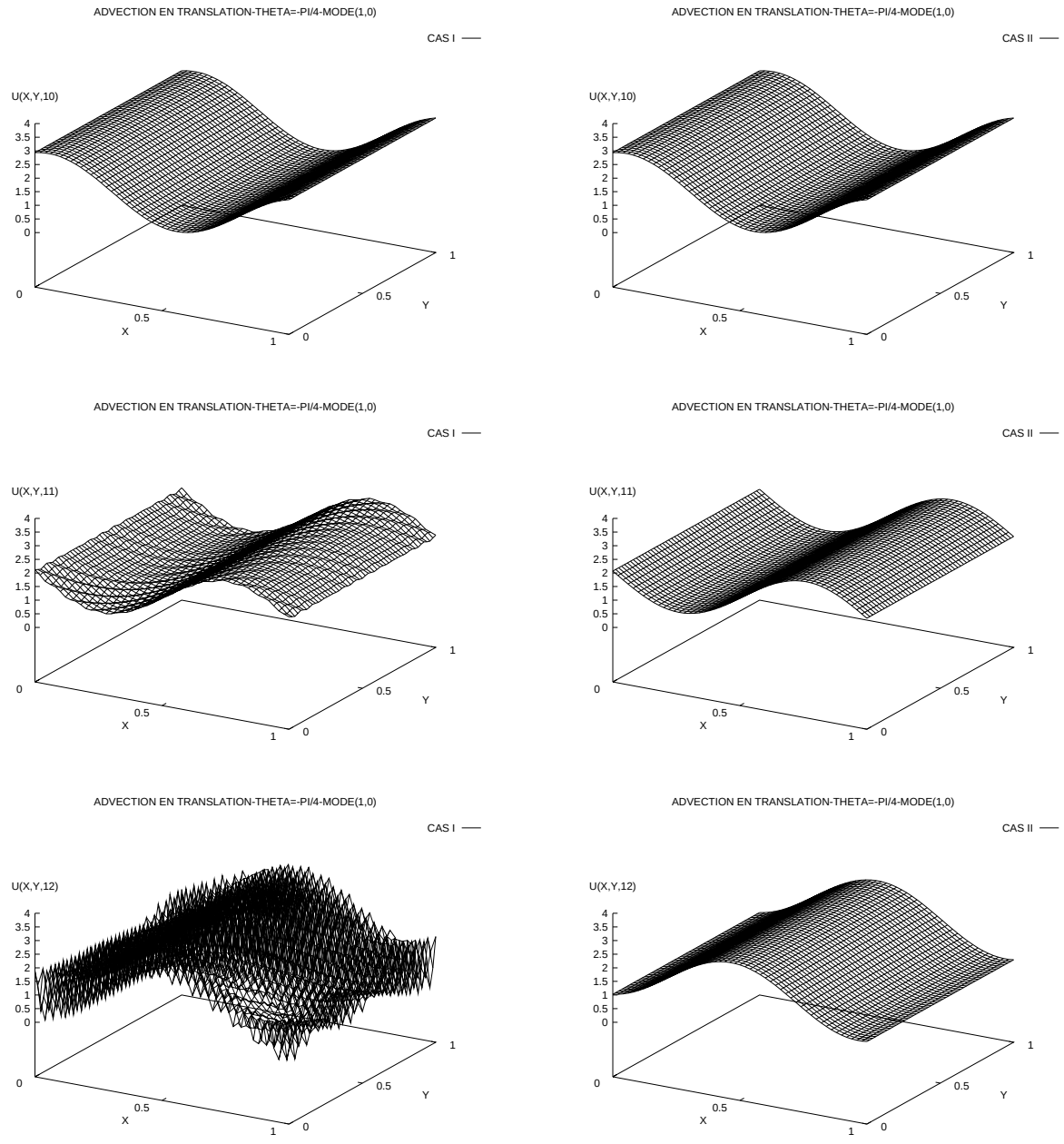
4 APPLICATIONS NUMERIQUES

Dans les applications qui vont suivre, nous resterons avec une vitesse $c = 1$ sur une grille de 51 points sur 51 avec $\Delta = 0.02$, $\nu = 0.5$ et des conditions de bords périodiques.

4.1 Instabilité du schéma de MacCormack:

•**Translation du mode (1,0) selon $\theta = -\frac{\pi}{4}$:**

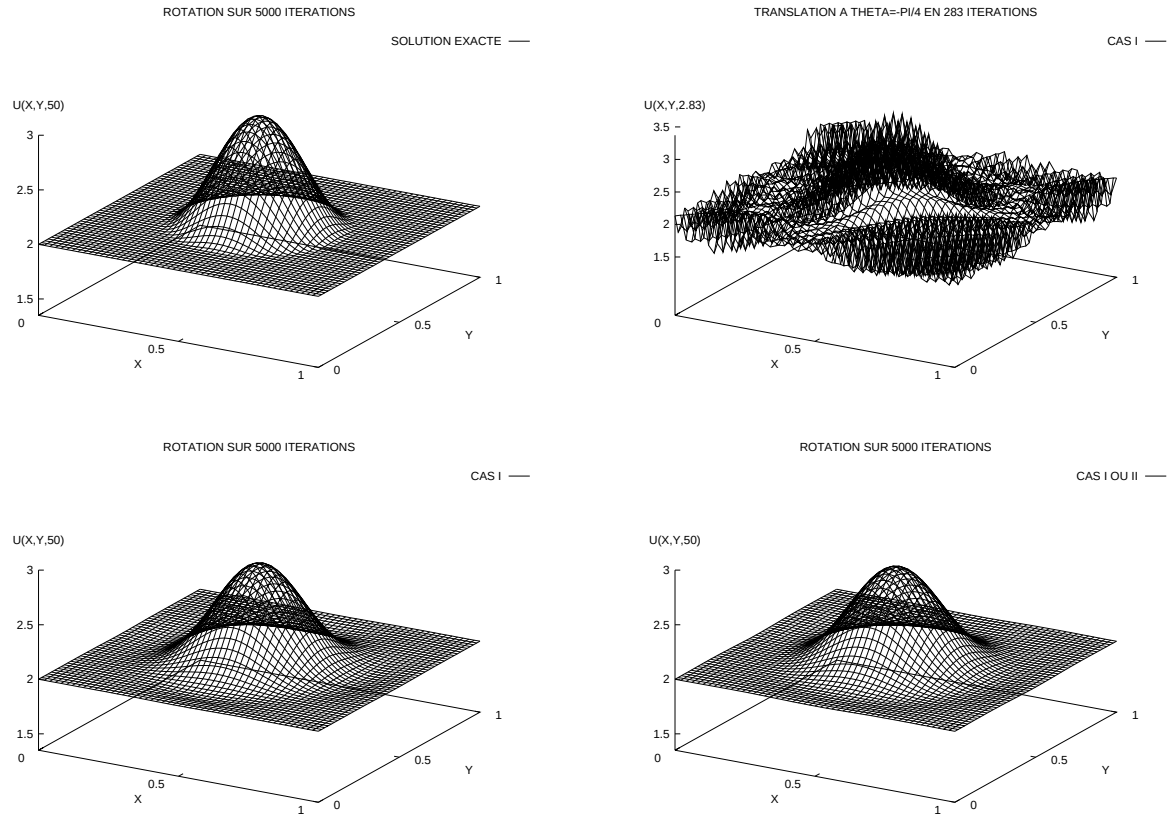
Le mode de Fourier (1,0) choisi n'est en rien une haute fréquence et pourtant nous montrons la dégénérécence à long terme (2400 itérations) de ce mode dans la situation de calcul du CAS I (instable) par rapport au CAS II (stable) pour cette incidence.



Evolution au cours du temps de haut en bas du CAS I (à gauche) et du CAS II (à droite)
Translation du mode (1,0) - $\theta = -\frac{\pi}{4}$ - CAS I instable - CAS II stable

Les erreurs d'approximations numériques de hautes fréquences finissent donc toujours par apparaître en translation par le jeu des erreurs d'arrondi.

•Rotation d'une cloche de Gauss:
Nous nous proposons maintenant de prendre une cloche de Gauss et de lui faire parcourir un large cercle de périmètre 50 (5000 itérations). Nous optons pour deux types de calculs: l'un reposant exclusivement sur le CAS I (donnant un même résultat que l'alternance entre CAS I et CAS II une fois sur deux) et l'autre choisissant le CAS I ou le CAS II en fonction de l'incidence θ de manière à rester toujours stable. Auparavant, nous pouvons constater qu'une telle condition initiale, riche en modes de Fourier, advectée en translation dans une configuration définie comme étant instable, dégénère très rapidement. Que se passe-t-il en rotation?



Cloche de Gauss (de gauche à droite et de haut en bas): Etat final exact - Translation en situation d'instabilité (CAS I, $\theta = -\frac{\pi}{4}$) - Rotation en situation d'instabilité (CAS I exclusif) - Rotation en situation de stabilité (CAS I ou II selon θ)

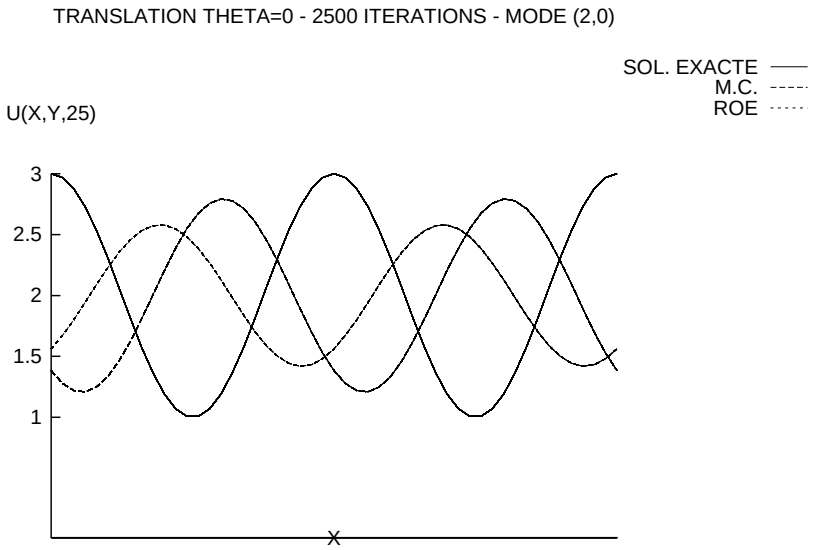
En rotation, l'instabilité numérique semble ne pas réussir à s'établir. Celà provient sans doute du fait que les quelques modes instables sont très mouvants avec θ et que le gain bien que supérieur à 1 ne prend pas une valeur démesurée. A cet égard, rappelons nous, par exemple,

que le dépassement est en $\nu^4 = \frac{1}{16}$ pour $\theta = -\frac{\pi}{4}$.
Ainsi, en rotation, il est notable autant que surprenant d'obtenir une solution très correcte dans une situation instable, voire même, presque meilleure car sensiblement moins dissipative (de l'ordre d'1%)!

4.2 Comparaison des schémas MAC CORMACK et ROE:

Nous voulons souligner ici les aspects dispersifs et dissipatifs sans troncature du schéma de MacCormack par rapport au schéma de Roe avec pour ce dernier une intégration temporelle de Runge Kutta 2.

•Translation du mode (2,0) selon $\theta = 0$:
Nous visualisons les résultats dans un plan perpendiculaire au plan d'espace et orienté suivant la direction de la normale aux isovaleurs de ce mode simple c'est à dire suivant l'axe des x. Toujours dans les mêmes conditions, nous itérons 2500 fois. Dans la figure ci-dessous, les légendes sont par ordre décroissant d'amplitude.



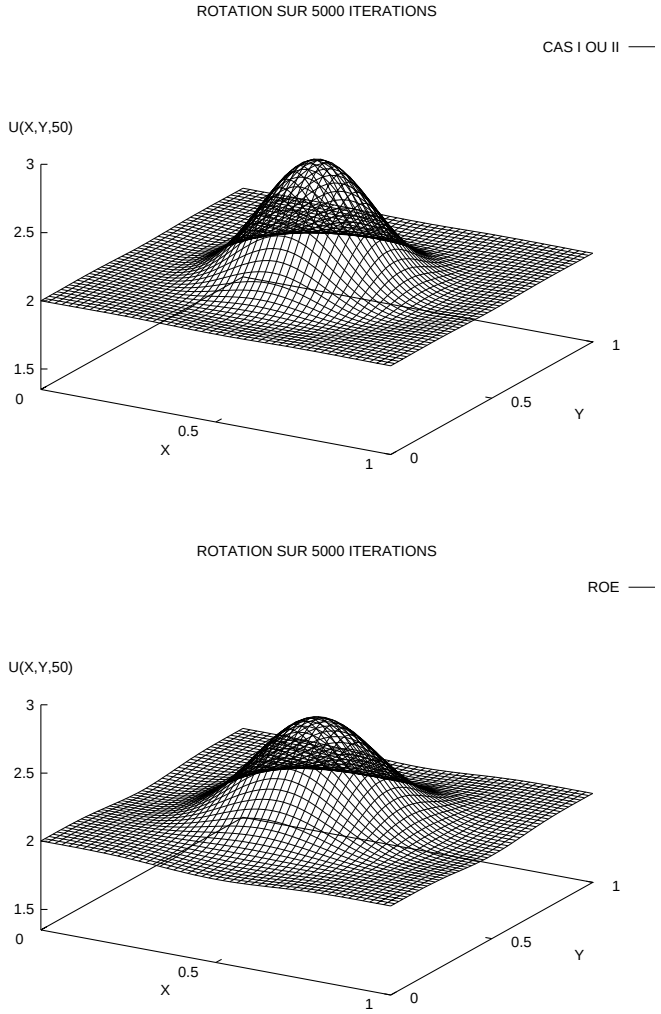
Le schéma de Roe avance autant que le schéma de Mac Cormack retarde.

Le schéma de Roe dissipe 2 fois plus que le schéma de MacCormack.

- La dispersion:
  Dans une situation de dispersion maximale, si le schéma de MacCormack retarde l'advection, le schéma de Roe l'avance d'autant. Ceci conforte l'étude des dispersions faites à l'ordre 2 dans le paragraphe précédent. Ces schémas ont donc des comportements dispersifs diamétralement opposés.

- La dissipation:
  Dans une situation de dissipation maximale, le schéma de Roe occasionne bien une dissipation double par rapport à la dissipation du schéma de MacCormack. Ceci conforte l'étude des dissipations faites à l'ordre 3 dans le paragraphe précédent. Le schéma de MacCormack est donc nettement moins dissipatif que le schéma de Roe.

• Rotation d'une cloche de Gauss:
Nous revenons sur cette situation faisant ainsi appel à la diversité des modes de Fourier contenus par une telle initialisation ainsi que la prise en compte de toutes les directions d'advections θ en décrivant un tour complet en 5000 itérations. Il est clair que nous n'observerons pas le phénomène dispersif car ces erreurs s'annullent après avoir que le signal ait décrit entièrement le cercle. Par contre sur le plan de la dissipation, le constat d'une moindre viscosité artificielle du schéma de MacCormack (même stable...) par rapport au schéma de Roe est flagrant.



En rotation, une cloche de Gauss est moins atténuée par le schéma de MacCormack (ici CAS I ou CAS II mais vrai en général) que par le schéma de Roe.

La valeur maximale obtenue par le schéma de MacCormack est d'environ de $2,86$ pour seulement $2,72$ pour le schéma de Roe soit 5% d'écart. Nous pouvons vérifier aussi que la dissipation de Roe revient à une dissipation double de celle de MacCormack:

$$3\frac{2.86}{3}\frac{2.86}{3} \simeq 2.72$$

5 PERSPECTIVES

5.1 A propos de la stabilité:

Le schéma de MacCormack est en mesure de montrer sur l'équation d'advection bidimensionnelle une instabilité envers des modes de Fourier de hautes fréquences selon l'incidence θ. Cette instabilité est sournoise car elle peut passer complètement inaperçue. Par chance, les différentes approches du schéma de MacCormack dans la façon de calculer le flux, permettent d'obtenir deux versions toujours stables de ce schéma pour toutes les directions θ avec une condition sur le nombre de Courant ν ne devant pas être supérieur à ν_c:

- CAS I OU II en fonction de θ avec $\nu_c = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- CAS I ET II en alternance une itération sur deux avec $\nu_c = \frac{1}{2}$.

Le code SIERRA de l'ONERA s'intéressant aux équations de la mécanique des fluides n'a pas toute la souplesse pour réaliser les diverses approches de configuration du schéma de MacCormack et peut donc vraisemblablement se trouver en situation d'instabilité.
Des développements du code SIERRA ont été réalisés de manière à pouvoir introduire le CAS II et bâtir les deux versions du schéma suivantes:

- CAS I OU II en fonction de la vitesse (U, V) associé à chaque cellule:

$$UV \geq 0 \Rightarrow CASI, \;\; UV \leq 0 \Rightarrow CASII$$

- CAS I ET II en alternance une itération sur deux.

5.2 A propos des erreurs numériques:

Le schéma de MacCormack, comparativement au schéma de Roe pour l'équation d'advection bidimensionnelle, se révèle être nettement moins dissipatif. De plus, il engendre une erreur dispersive visant à retarder l'advection ce qui est parfaitement contraire à la tendance du schéma de Roe classique.
Nous attendons donc beaucoup du code SIERRA appliqué au cas test C1 si la nature de ses erreurs linéaires observées sur l'advection est quelque peu préservée sur le système des équations d'Euler. En effet, une faible dissipation est propre à faire apparaître le phénomène de tourbillon détaché et une erreur dispersive déphasant avec retard est suspectée comme étant en mesure de faire bifurquer la solution instationnaire établie à $3500Hz$ vers la fréquence de $2600Hz$ [5][9].

6 LE CAS TEST C1

Par ce cas test, nous nous intéressons au système non linéaire formé par les équations d'Euler. Tous les calculs que nous avons effectués, ont été réalisés avec un CFL de 0,5. De plus le pas de temps a été constant lorsque des analyses spectrales ont été effectuées.

6.1 Un point délicat

Quelque soit l'état initial choisi, le type de schéma de MacCormack envisagé, il génère à plus ou moins long terme une pression "négative" au coin de coordonnées (84,1). En ce point, nous avons deux discontinuités:

- celle du traitement de la condition de bord débitant (à gauche) et glissant (à droite).
- celle de la géométrie du maillage représentant le point d'angle.

Même en modifiant le cas test, en considérant une zone débitante réduite aux 80 premiers points (ce qui nous a permis de ne pas avoir cette double singularité au point (84,1)), le schéma de MacCormack s'est toujours montré incapable de mener à bien un calcul, sans un apport de **viscosité artificielle**.

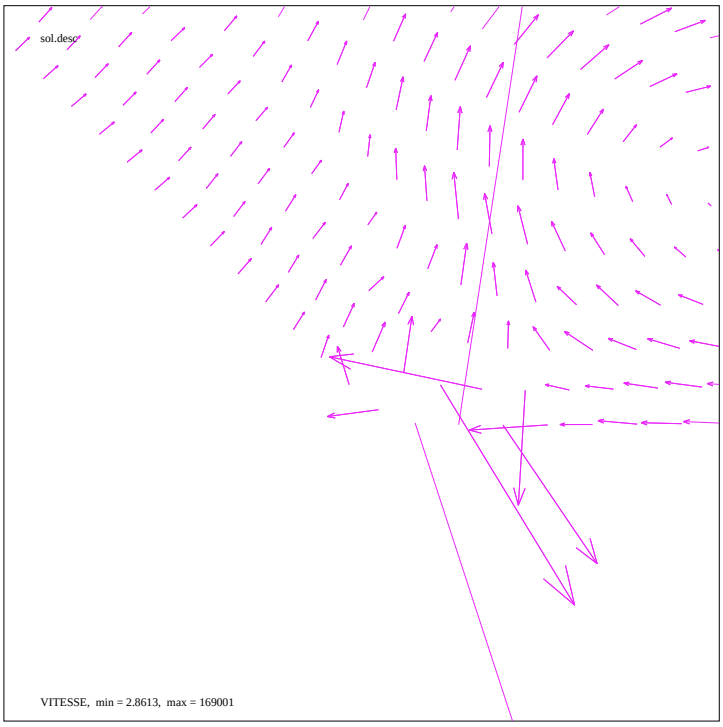


FIG. 2 – **Représentation des vecteurs vitesse - Problème d'une zone délicate: géométrie + conditions de bords**

6.2 Nature de la viscosité artificielle:

Le code SIERRA de l'ONERA comporte un terme de viscosité artificielle issu de la méthode de Jameson et Schmidt [1] dont la construction théorique est développée dans [2, 3, 4]. Elle est en mesure d'apporter une dissipation d'ordre 2 et 4 de manière très ponctuelle en fonction des discontinuités de pression ou de vitesse selon notre convenance par la variable α ($0 \leq \alpha \leq 1$). Ces viscosités artificielles sont proportionnelles aux coefficients $0 < k2 < 2$ et $0 < k4 < 1/32$ respectivement pour les ordres 2 et 4. Nous constatons alors que l'erreur dispersive que peut amener une telle correction n'est au minimum que d'ordre 3, c'est à dire négligeable par rapport aux effets dispersifs propres au schéma de MacCormack, lui conservant donc son caractère **"retardateur"**.

6.3 Seuil d'instationnarité:

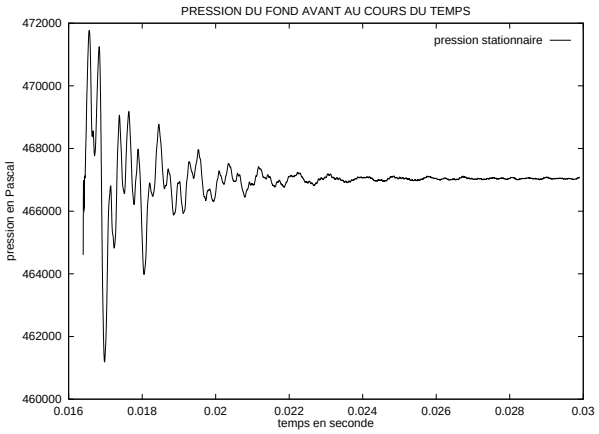
Avant de comparer les différents types de schémas de MacCormack, il convient de déterminer les valeurs à donner aux paramètres $k2$ et $k4$ pour les viscosités artificielles d'ordre 2 et 4 de manière à préserver une solution instationnaire dans un phénomène de tourbillons détachés.
Pour obtenir ces valeurs, nous avons fixé α à la valeur $\frac{1}{2}$ de manière à laisser agir la viscosité artificielle tant par les discontinuités de pression que par celles de la vitesse. Nous sommes partis d'une solution établie à la fréquence de $3500Hz$ et avons obtenu après 100000 itérations une solution stationnaire dans les deux expériences suivantes:

SOLUTIONS STATIONNAIRES		
$k2$	$k4$	Pression Fond Avant
1.00	0.010	467080 ± 10
0.25	0.005	466800 ± 50

Viscosité artificielle $\nearrow$

$\Rightarrow$ **Solution stationnaire**

$\Rightarrow$ **Pression Fond Avant** $\nearrow$



Nous constatons donc qu'utiliser de tels coefficients pour la viscosité artificielle conduit à établir un régime non oscillant, détruisant en particulier le tourbillon secondaire propre à l'état initial établi à une fréquence de $3500Hz$.
Finalement, nous avons opté dans un premier temps, de comparer les différents types du schéma de MacCormack avec pour valeurs des coefficients $k2$ et $k4$, les quantités numériques suivantes:

k2=0.01 et k4=0.0002

préservant le caractère instationnaire de la solution. Dans un second temps, nous aurons un regard sur l'effet de la variation de la viscosité artificielle. Quant au choix du paramètre α, nous n'avons pas constaté de comportements notablement différents ($FIG.3$) selon que la viscosité artificielle était basée plus sur la vitesse ($\alpha = 0$) que sur la pression ($\alpha = 1$). En

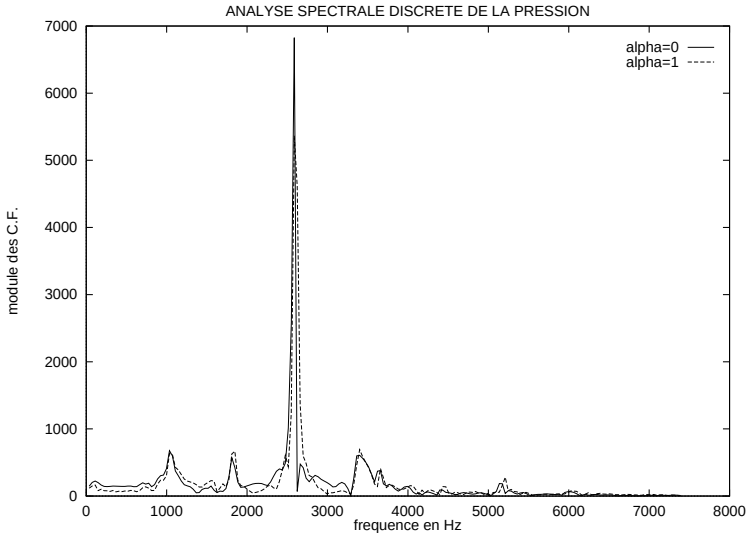


FIG. 3 – **Pas de modification notable par choix du censeur α**

conséquence et de manière à nous fixer cette variable, tous les calculs à venir ont été réalisés avec:

$$\boxed{\alpha = 1}$$

6.4 Les différents types de schémas de MacCormack:

Tous les calculs numériques effectués ont eu pour état initial la solution instationnaire oscillant à la fréquence de $3500Hz$. Les résultats donnés sont ceux obtenus après 200000 itérations de cet état initial. Les calculs sont réalisés sur le maillage de 9858 points (318× 31).

- Choix du CAS I ou II en fonction de la vitesse
  Cette option ne s'est pas montrée viable occasionnant à chaque fois des instabilités sur les bords à l'image du "point délicat" ($FIG.2$). Nous voyons deux raisons pour expliquer une pareille mésaventure. D'abord l'orientation de la vitesse est fortement mouvante (zone de recirculation, de tourbillon), nous plaçant dans la situation embarrassante et non étudiée de cellules voisines n'ayant pas la même façon d'estimer le flux qu'elles s'échangent (perte d'informations? problème de conservation?). Ensuite, l'étude réalisée précédemment prenait en compte un maillage orthogonal, établissant des zones de stabilité selon des secteurs d'angles spécifiques que l'on ne retrouve pas toujours dans le maillage plus alambiqué du cas test C1.

- Choix du CAS I
  C'est la version du code SIERRA la plus fréquemment utilisée par l'ONERA. En partant d'un état initial oscillant à 3500 Hz, nous constatons une bifurcation rapide de la pression du fond avant sur la fréquence de 2600 Hz ($FIG.4$)) ainsi qu'une disparition progressive du tourbillon secondaire le long de la paroi glissante ($FIG.9-10$).

- Choix de l'alternance CAS I et CAS II
  Du même état initial, en choisissant d'alterner une itération sur deux entre le CAS I et le CAS II, ici encore, nous observons une bifurcation de l'oscillation de la pression du fond avant passant de 3500 Hz à 2600 Hz (même plus rapide: $FIG.5$). Quant au tourbillon secondaire le long de la paroi glissante, il a complètement disparu (($FIG.9-10$).

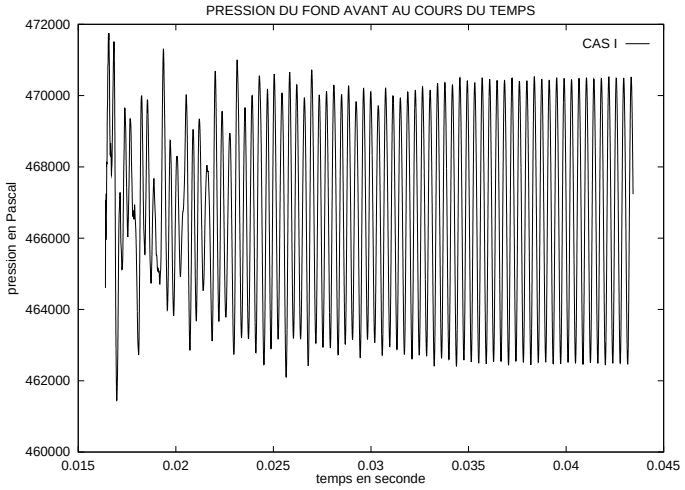


FIG. 4 – **CAS I: bifurcation rapide 2600Hz → 3500Hz**

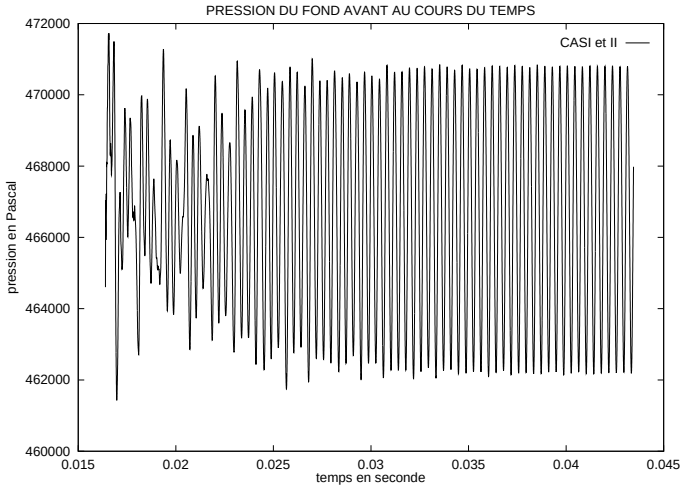


FIG. 5 – **CAS I et CAS II: bifurcation encore + rapide 2600Hz → 3500Hz**

6.5 Comparaison des types de schémas de MacCormack:

La comparaison porte sur le choix de calcul dans la configuration du CAS I avec l'alternance, un pas sur deux, du CAS I et du CAS II.
Sur la figure $FIG.6$, nous constatons que le choix de l'alternance permet:

- d'avoir, à viscosité artificielle identique, une moindre dissipation;
- d'obtenir, à même CFL de 0.5 et pour un même nombre d'itérations, un pas de temps plus grand.

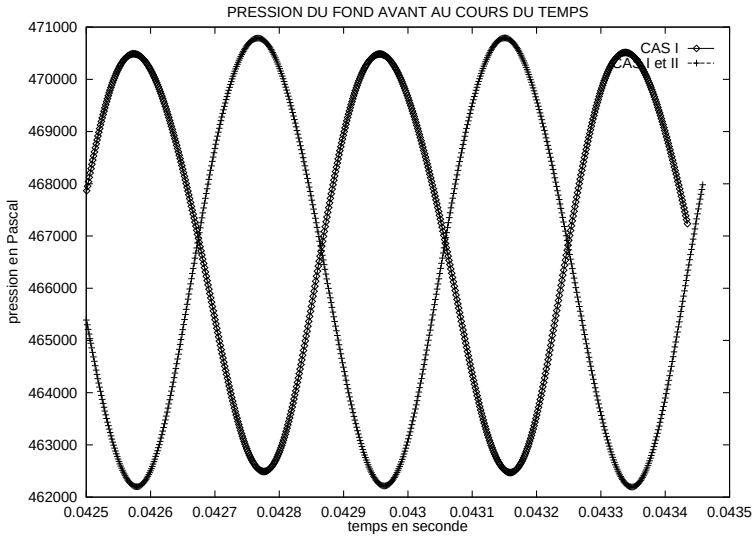


FIG. 6 – **CAS I <CAS I & II: a/ - dissipatif; b/ Δt + grand**

Par ailleurs, l'alternance entre CAS I et CAS II permet d'éliminer plus efficacement le tourbillon secondaire le long de la paroi glissante comme nous pouvons le constater sur les figures $FIG.9-10$.
En conséquence, nous retiendrons le schéma de MacCormack alterné dans la version du CAS I et du CAS II une itération sur deux pour la suite de nos calculs.

6.6 Maillage plus fin:

Pour valider la solution instationnaire établie par le schéma de Mac Cormack à une fréquence de $2600Hz$, nous avons réalisé un calcul toujours initialisé par une solution instationnaire établie à la fréquence de $3500Hz$, sur un maillage plus fin de $454 \times 43 = 19522$ points. Nous observons alors la persistance d'une solution instationnaire à la fréquence de $3500Hz$ après une longue hésitation avant de s'établir. Nous pouvons expliquer ce long établissement par le fait que l'état initial est une copie d'une solution à $3500Hz$ du maillage plus grossier ($FIG.7$). La fréquence de $3500Hz$ persiste donc. Nous pouvons noter sur l'analyse

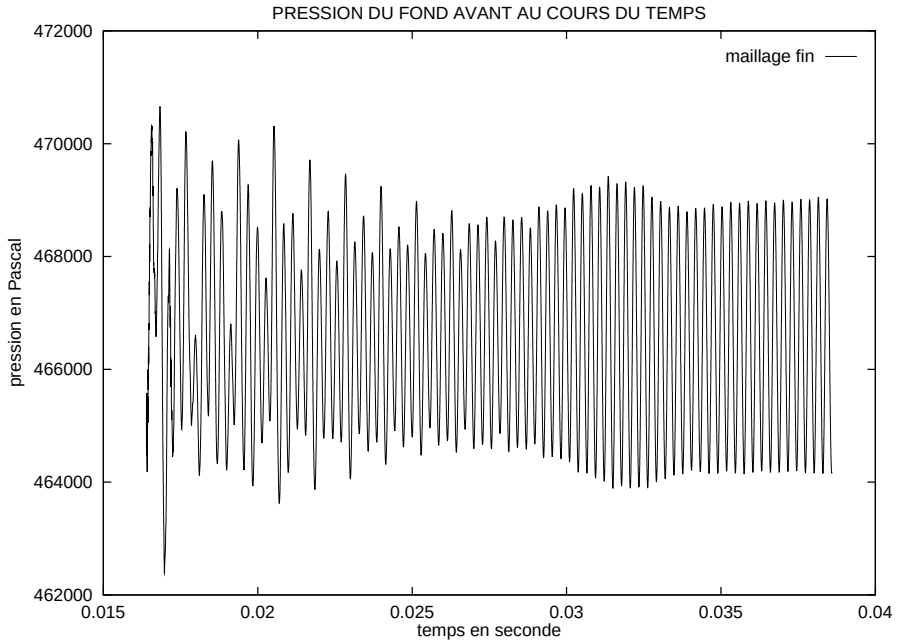


FIG. 7 – **Maillage fin ⇒ 3500Hz persiste**

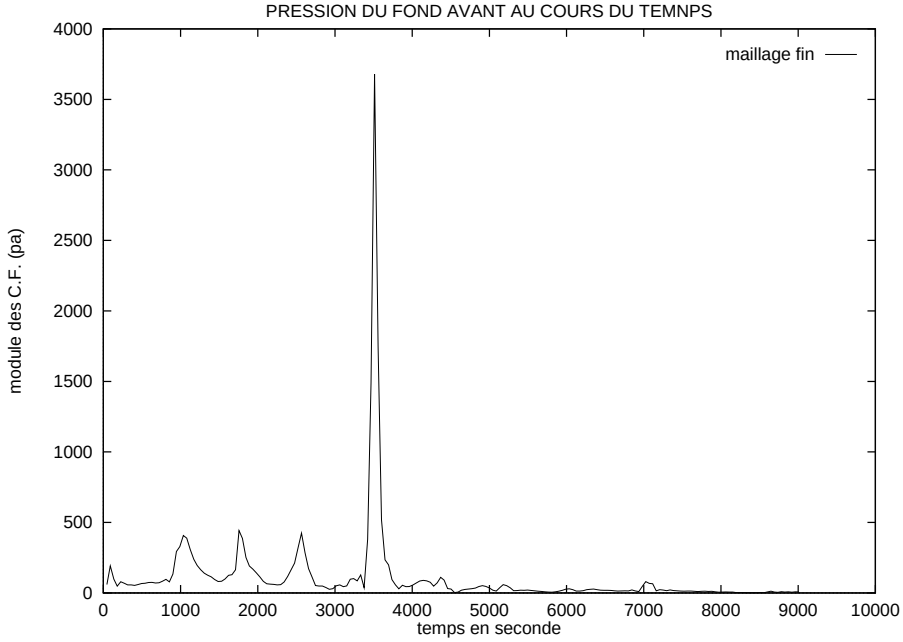


FIG. 8 – **Maillage fin: toutes les fréquences sous-jacentes**

spectrale ($FIG.8$) que toutes les fréquences recensées depuis notre étude sur ce cas test sont présentes. En parallèle, la région pariétale du propulseur est encore le siège d'une large zone de recirculation comme l'indique les figures $FIG.9-10$.

Ce résultat, de prime abord assez déconcertant, demande à être approfondi. L'usage d'un maillage plus fin diminue l'erreur dissipative modifiant en particulier l'amplitude de l'onde de pression mais contribue également à l'erreur dispersive supposée comme étant la source de la bifurcation vers $2600Hz$. En prenant un maillage plus fin, nous diminuons l'erreur dispersive qui retarde l'advection des modes de Fourier, et c'est, à notre avis, nous priver de la possibilité de bifurquer. Pour donner plus de crédit à cette hypothèse, nous avons mené quelques calculs sur le maillage plus grossier à $318 \times 31 = 9858$ points en diminuant la viscosité artificielle, c'est à dire en atténuant l'erreur dissipative tout en préservant l'erreur dispersive. Si, en partant d'un état initial oscillant à $3500Hz$ nous bifurquons de nouveau vers la fréquence de $2600Hz$ quelque soit la viscosité artificielle prise (mais permettant tout de même l'obtention d'une solution instationnaire), la nature dispersive avec retard de phase du schéma de MacCormack, nous permettra de présenter cette erreur comme responsable de la bifurcation.

6.7 Diminution de la viscosité artificielle

Motivés par la discussion du paragraphe précédent, nous avons fait une campagne de calculs en diminuant la viscosité artificielle et avons transcrit nos résultats dans le tableau suivant:

EFFET DE LA VISCOSITE ARTIFICIELLE				
$k2$	$k4$	P. moy.(Pa)	Amp. cr. cr.(Pa)	Fréquence(Hz)
0.010	0.0002	466673	5365	2586
0.005	0.0002	466673	5366	2586
0.001	0.0002	466673	5367	2586
0.010	0.0000	466745	5947	2623

P.moy.: la pression moyenne prise sur le fond avant du propulseur.
Amp. cr. cr.: l'amplitude crête à crête de l'onde de pression.

Le principal résultat réside dans le constat que la période initiale correspondant à une fréquence de $3500Hz$ se trouve à chaque fois modifiée, aboutissant à une solution oscillant à la fréquence d'environ $2600Hz$. La bifurcation observée de la fréquence n'est donc pas liée à la viscosité artificielle et renforce l'idée qu'elle serait plutôt en relation avec l'erreur dispersive. Par ailleurs, nous constatons que la variation de la viscosité d'ordre 2 d'un facteur du $1/100$ à $1/1000$ n'induit pas de modifications fondamentales dans la nature de l'écoulement mais permet juste de stabiliser le schéma. Dans le même ordre d'idée, une suppression de la viscosité artificielle d'ordre 4 semble avoir plus de conséquences sur l'écoulement (pression moyenne, amplitude) que celle d'ordre 2, indiquant par là que ce cas test est le siège de hautes fréquences comme nous pouvons le constater sur les figures $FIG.9-10$ où la solution devient très perturbée dans la région pariétale du propulseur.

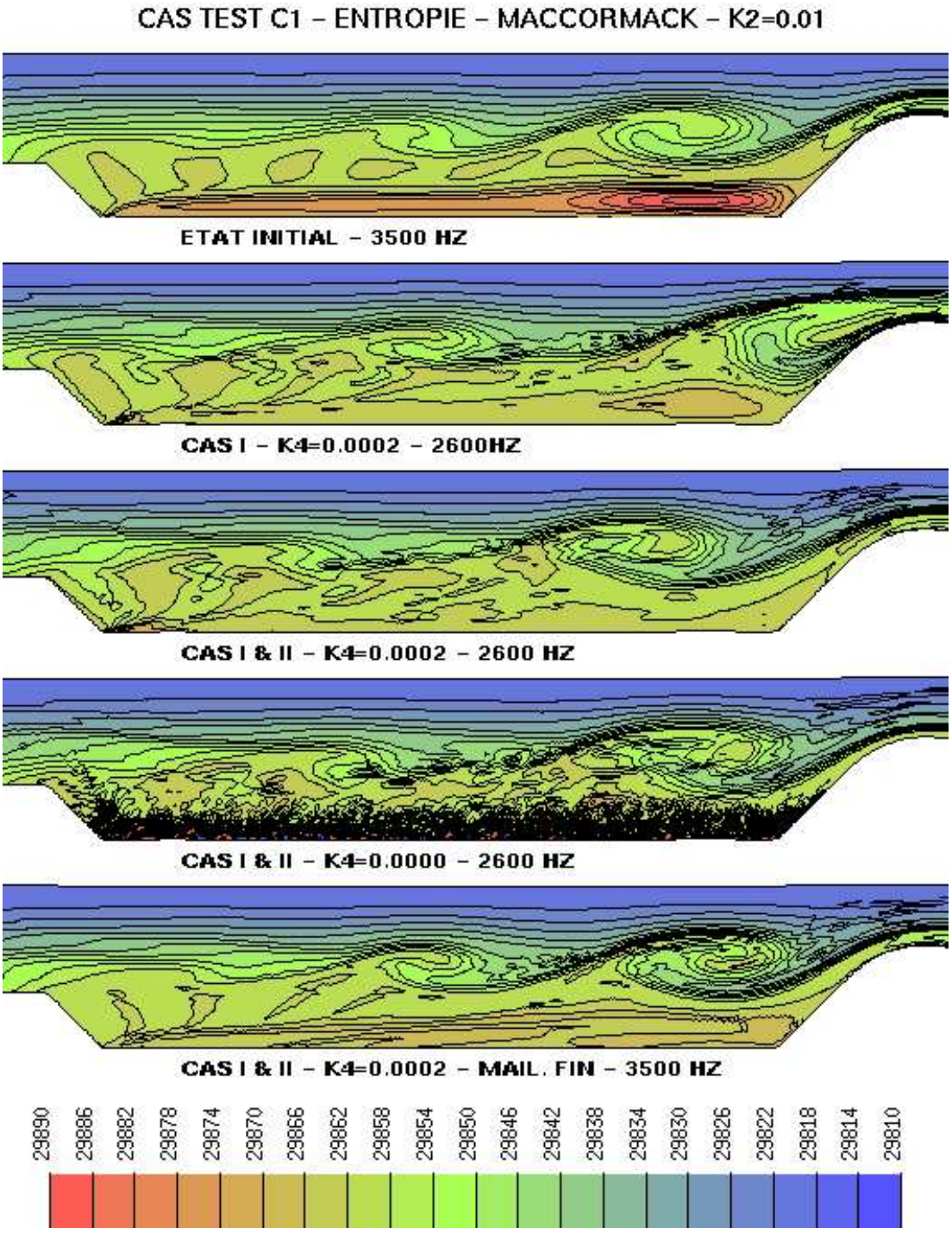


FIG. 9 – **Représentations de l'entropie dans differentes configurations:** *état initial - CAS I (k2=0.01, k4=0.0002) - CAS I et II (k2=0.01, k4=0.0002) - CAS I et II (k2=0.01, k4=0.) - CAS I et II (k2=0.01, k4=0.0002, maillage fin)*

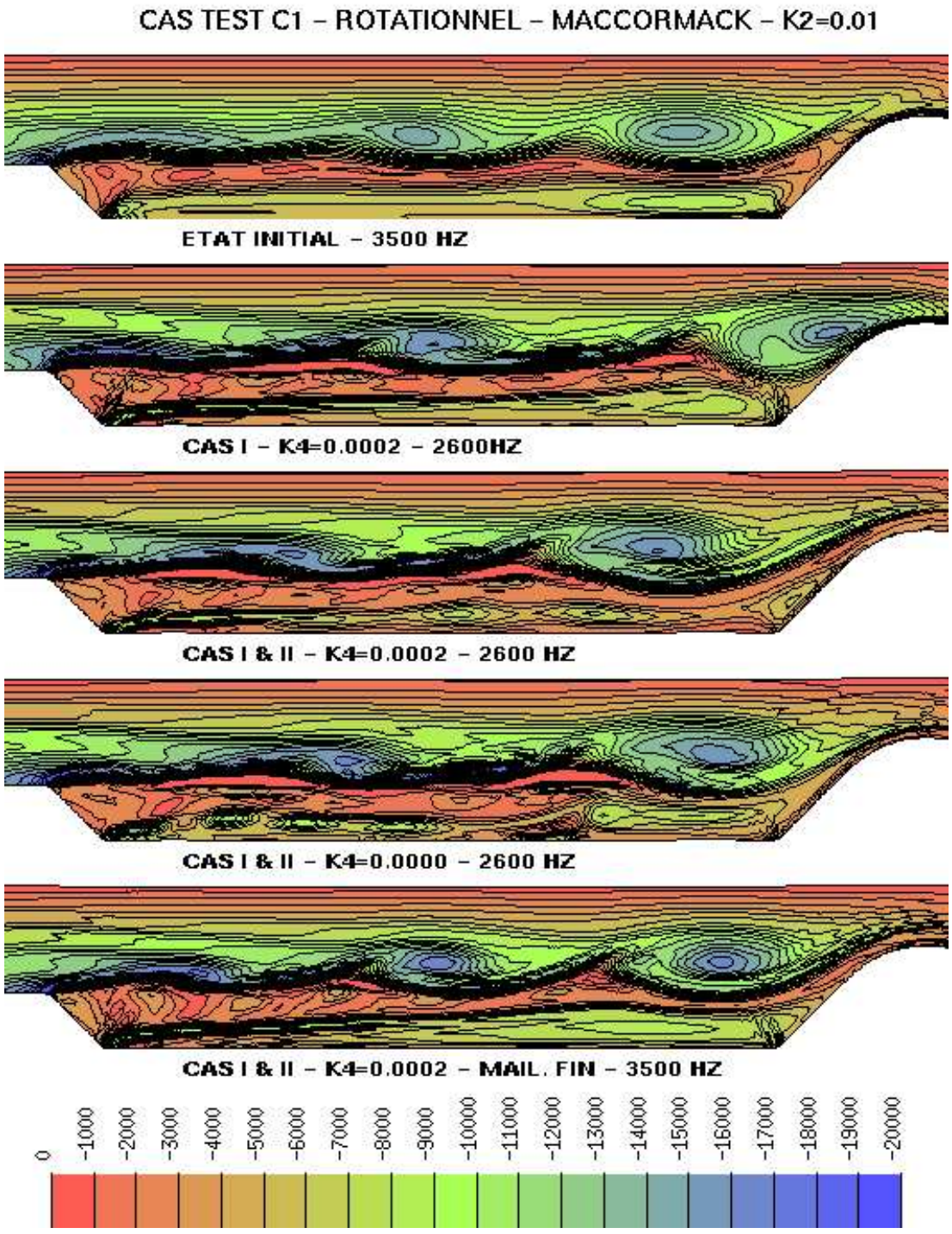


FIG. 10 – **Représentations du rotationnel dans differentes configurations:** *état initial - CAS I (k2=0.01, k4=0.0002) - CAS I et II (k2=0.01, k4=0.0002) - CAS I et II (k2=0.01, k4=0.) - CAS I et II (k2=0.01, k4=0.0002, maillage fin)*

7 Conclusion

Des analyses linéaires montrent que le schéma de MacCormack présente:

- une forte erreur dispersive d'ordre 2 retardant l'advection des modes de Fourier. Le *retard* occasionné par le schéma de MacCormack sur les modes de Fourier est comparable en grandeur à l'*avance* que génère le schéma de Roe classique avec une intégration temporelle de Runge Kutta 2.

- une erreur dissipative pour des modes simples en x ou en y, 2 fois moindre que celle liée au schéma de Roe classique.

- en relation avec cette faible dissipation, le schéma de MacCormack peut se trouver en situation d'instabilité quelque soit le pas de temps choisi pour des modes de hautes fréquences, s'il est utilisé *exclusivement* dans les versions du CAS I ou du CAS II. Une parade viable à ces instabilités est l'alternance (une itération sur deux) du CAS I et du CAS II.

Sur le code SIERRA résolvant les équations d'Euler, les caractéristiques numériques du schéma de MacCormack mettent en évidence:

- la nécessité d'apporter au schéma de la viscosité artificielle présente aux ordres 2 et 4.

- l'intérêt d'une formulation alternée (une itération sur deux) entre une version du CAS I et une version du CAS II.

Sur le cas test C1, nous observons que:

- le phénomène de tourbillon détaché est en mesure de disparaître ou de ne jamais apparaître en fonction de la présence d'une trop forte erreur de dissipation qu'elle soit inhérente au schéma numérique comme pour le schéma de Roe en triangle [8] ou ajoutée via l'introduction de viscosité artificielle excessive (k2$\geq$0.25).

- Sur le maillage à 9858 points, la fréquence d'oscillation de l'onde de pression du fond avant associée à l'écoulement est de $2600Hz$ avec une amplitude crête à crête ne dépassant pas 6000 Pa pour une pression moyenne de l'ordre de 466500 Pa. La présence d'autres modes n'est pas écartée (en particulier 3500 Hz, obtenu sur le maillage plus fin), mais il semble que la fréquence à 2600 Hz est en mesure d'être prépondérante à cause de l'erreur dispersive du schéma de MacCormack. Cette affirmation assez brutale est renforcée par les résultats de [5] et [9], où, déjà avec le schéma de Roe paramétré de manière à retarder l'advection, nous avions déjà constaté la bifurcation de la fréquence d'oscillation de 3500 Hz vers 2600 Hz.

- Reste et il est utile de le souligner, que la fréquence de $3500Hz$ n'est "naturellement" observable qu'à partir d'une situation initiale de repos ($pression = p0$; $\rho = 1$; $vitesse = 0$) permettant la formation du tourbillon secondaire sur le côté pariétal de

la chambre de combustion. Or, le schéma de MacCormack ne permet d'envisager une telle initialisation (vitesse $\simeq 0$) qu'à la condition de prendre une viscosité artificielle importante, laquelle conduit le calcul à une solution stationnaire, détruisant donc tous les tourbillons. En conséquence, sans l'artifice d'un état initial oscillant à $3500Hz$, le schéma de MacCormack semble ne pas être en mesure de rendre compte de cette fréquence de manière prépondérante.

Références

[1] LUPOGLAZOFF N. and VUILLOT F. Ariane V MPS Combustion Stability Assessment. Full Numerical Approach: Substask TN1 "*Preliminary Unsteady Computations of Vortex Shedding Phenomenon*". ONERA RT 10/6133 EY, April 1991.

[2] JAMESON A. SCHMIDT W. and TURKEL E. "*Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes*". AIAA 81-1259, AIAA 14th Fluid and Plasma Dyn. Conf., June 81, Palo Alto, Ca USA.

[3] JAMESON A. and BAKER J. "*Solutions of the Euler equations for complex configurations*" AIAA 83-1929.

[4] JAMESON A. and SCHMIDT W. "*Some recent development in numerical methods for transonic flows*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 51 (1985) 467-493, North Holland.

[5] R. CARPENTIER, "*Approximation et analyse numérique d'écoulements instationnaires. - Application à des instabilités tourbillonnaires.*", Thèse, Université de Nice Sophia Antipolis, 1995.

[6] P. L. ROE, "*Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*", J. Comp. Phys., **43**, pp. 357-372, 1981.

[7] R. CARPENTIER, A. de LA BOURDONNAYE & B. LARROUTUROU, "*Sur le calcul des équations équivalentes pour l'analyse des méthodes numériques linéaires*", C.R. Acad. Sci. Paris, t.319, Série I, p. 757-760, 1994.

[8] R. CARPENTIER, "*Comparaison entre des schémas 2D de type Roe sur maillage régulier triangle ou quadrangle. I: calcul au sommet - pentes centrées*", rapport INRIA N^o2824, mars 1996.

[9] R. CARPENTIER, "*Comparaison entre des schémas 2D de type Roe sur maillage régulier triangle ou quadrangle. II: calcul au sommet - Le $\beta\gamma$ schéma*", rapport INRIA à paraître.

Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399