Stabilisation d'une équation de vibrations

Boumediène Chentouf, Cheng-Zhong Xu, Gauthier Sallet

▶ **To cite this version:**

Boumediène Chentouf, Cheng-Zhong Xu, Gauthier Sallet. Stabilisation d'une équation de vibrations. [Rapport de recherche] RR-3085, INRIA. 1997, pp.19. inria-00073606

HAL Id: inria-00073606
https://inria.hal.science/inria-00073606

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Stabilisation d'une équation de vibrations

Boumediène Chentouf , Cheng-Zhong Xu et Gauthier Sallet

N° 3085

Janvier 1997

THÈME 4

ISSN 0249-6399

Stabilisation d'une équation de vibrations

Boumediène Chentouf , Cheng-Zhong Xu et Gauthier Sallet

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Congé

Rapport de recherche n° 3085 — Janvier 1997 — 19 pages

Résumé : Cet article traite la stabilisation frontière d'une équation de vibrations. On démontre que le système peut être stabilisé fortement ou exponentiellement par des feedbacks frontières non linéaires.

Mots-clé : Contrôle non lineaire, Système en boucle fermé, Semi-groupe de contractions non linéaire, Stabilité forte, Principe d'invariance de Lasalle, Stabilité exponentielle, Multiplicateur.

(Abstract: pto)

INRIA-Lorraine (projet Congé) & URA CNRS 399 (MMAS)
ISGMP, Bât. A, Université de Metz, Ile de Saulcy
57045 Metz cedex 01
tél.: 03 87 31 54 14 – fax: 03 87 54 72 77
e-mail: {chentouf — xu — sallet}@saulcy.loria.fr

Unité de recherche INRIA Lorraine
Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue de Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY (France)
Téléphone : (33) 83 59 30 30 – Télécopie : (33) 83 27 83 19
Antenne de Metz, technopôle de Metz 2000, 4 rue Marconi, 55070 METZ
Téléphone : (33) 87 20 35 00 – Télécopie : (33) 87 76 39 77

Stabilization of a vibrating equation

Abstract: This paper deals with boundary stabilisation of a vibrating equation. It is proved that the system can be strongly or exponentially stabilized by general dissipative non linear boundary feedback of velocity.

Key-words: Nonlinear control, Closed-loop system, Nonlinear contractions semi-group, Asymptotic stability, Lasalle's invariance principle, Exponential stability, Multiplier.

1 Introduction et résultats principaux:

On considère dans cette note l'équation suivante:

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) - (ay_x)_x(x,t) + \alpha y_t(x,t) + \beta y(x,t) = 0, \quad (*) & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ (ay_x)(0,t) = \epsilon_1 U_1(t), & t > 0, \\ (ay_x)(1,t) = \epsilon_2 U_2(t), & t > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

où

$$\begin{cases} \alpha \geq 0, \quad \beta > 0, \\ \epsilon_1, \epsilon_2 \in (0, +\infty) \text{ non simultanément nulles}, \\ a \in W^{1,\infty}(0,1) \text{ telle } a(x) \geq a_0 > 0 \text{ pour tout } x \in [0,1]. \end{cases} \tag{1.2}$$

De plus, U_1 et U_2 sont deux lois de feedbacks à déterminer telles que le système en boucle fermé soit asymptotiquement stable, i.e,

$$(y(.,t), y_t(.,t)) \longrightarrow 0, \qquad \text{lorsque } t \longrightarrow +\infty$$

dans un certain espace fonctionnel.
Il est important de noter que si $\beta = 0$ et si les lois de feedbacks dépendent seulement de la vitesse, alors le système en boucle fermé n'est pas bien posé au sens des semi-groupes dans l'espace $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ où

$$H_0^m(0,1) = \left\{ f \in H^m(0,1); \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\} \qquad \text{pour tout } m = 1, 2, ...$$

En effet, prenons $U_1(t) = ky_t(0,t), U_2(t) = -ky_t(1,t)$ et considérons le système suivant:

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) - y_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ y_x(0,t) = ky_t(0,t), & t > 0, \\ y_x(1,t) = -ky_t(1,t), & t > 0. \end{cases}$$

Soit l'opérateur linéaire $\tilde{A}$ défini par:

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \left\{ (y,z) \in H_0^2(0,1) \times H_0^1(0,1);\ y_x(0) = kz(0),\ y_x(1) = -kz(1) \right\}$$
$$\tilde{A}(y,z) = (z, y_{xx}) \quad \text{pour tout } (y,z) \in \mathcal{D}(\tilde{A})$$

On munit $H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$ du produit scalaire suivant:

$$\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \rangle = \int_0^1 f_{1x} f_{2x} + g_1 g_2 dx.$$

Il est facile de voir que l'opérateur $\tilde{A}$ est dissipatif.
Soit f et g deux fonctions définies sur (0,1) comme suit:

$$\begin{cases} f(x) = 6x^2 - 6x + 1, \\ g(x) = 1 - f(x). \end{cases}$$

On peut vérifier que $(f,g) \in H_0^1(0,1) \times L^2(0,1)$. Cependant il n'existe pas (y,z) dans $\mathcal{D}(\tilde{A})$ tel que $(I-\tilde{A})(y,z) = (f,g)$. Par conséquent, la condition de maximalité de l'opérateur $\tilde{A}$ n'est pas satisfaite.

Dans le cas où $\beta = 0$, le problème de stabilisation frontière de l'équation $(*)$ a été étudié par de nombreux auteurs.
Rao [12] a montré que la loi de feedback

$$\begin{cases} U_1(t) = \alpha y(0,t) + F(y_t(0,t), \\ U_2(t) = -M y_{tt}(1,t), \quad M, \alpha > 0. \end{cases}$$

stabilise asymptotiquement le système par un choix approprié de F.
Un résultat de stabilisation a été aussi obtenu par Conrad et Rao [5] moyennant les feedbacks suivants:

$$\begin{cases} U_1(t) = \alpha y(0,t) + F(y_t(0,t), \\ U_2(t) = -\alpha y(1,t) - F(y_t(1,t), \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

Dans l'article [1], d'Andréa-Novel et al ont démontré que le système est asymptotiquement stabilisé par la loi de feedback

$$\begin{cases} U_1(t) = 0, \\ U_2(t) = -k_1 y(1,t) - h(y_t(1,t)). \end{cases}$$

avec $k_1 > 0$ et h étant proprement choisies. La stabilisation asymptotique du système a été démontré dans [8] et [3] par la loi suivante:

$$\begin{cases} U_1(t) = k_p y(0,t) + k_v y_t(0,t) + \displaystyle\int_0^1 G(x) y(x,t) dx + \frac{k_v}{k_p} \int_0^1 G(x) y_t(x,t) dx, \\ U_2(t) = 0. \end{cases}$$

avec $k_p,\ k_v > 0$ et $G(x)$ étant une fonction choisie dans $L^2(0,1)$.
Enfin, notons les résultats variés de Komornik [10] où il a traité la question de stabilisation dans des différents cas. On constate que les lois de feedbacks proposées ci-dessus contiennent non seulement un terme en vitesse mais aussi un terme linéaire de position.

Dans cette article, nous montrons que pour tout $\beta > 0$, l'équation $(*)$ peut être asymptotiquement stabilisée par les lois suivantes:

$$\begin{cases} U_1(t) = f(y_t(0,t)), \\ U_2(t) = g(y_t(1,t)). \end{cases} \qquad (F)$$

avec f et g deux fonctions réelles bien choisies (voir l'hypothèse (H)).
La preuve est basée sur le Théorème de Lasalle [6], [9].
En distinguant le cas où $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$, nous montrons -sous des conditions supplémentaires sur f et g- que le système en boucle fermé est exponentiellement stable et cela par la méthode

du multiplicateur.
Considérons pour le système(1.1) l'énergie suivante

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \beta y^2(x,t) + y_t^2(x,t) + a(x)y_x^2(x,t)dx.$$

En calculant formellement la différentielle de $E(t)$ suivant une trajectoire de (1.1), on obtient

$$E_t(t) = \epsilon_2 U_2(t) y_t(1,t) - \epsilon_1 U_1(t) y_t(0,t) - \alpha \int_0^1 y_t^2(x,t)dx. \tag{1.3}$$

Insérons la loi de feedback (F) dans l'expression ci-dessus; il s'en suit que

$$E_t(t) = \epsilon_2 y_t(1,t) g(y_t(1,t)) - \epsilon_1 y_t(0,t) f(y_t(0,t)) - \alpha \int_0^1 y_t^2(x,t)dx.$$

Pour rendre la fonction $E(t)$ décroissante, nous supposons dans la loi de feedback (F) que

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est croissante continue telle que } f(0)=0, \quad f(\eta)\eta > 0 \ \ \forall \eta \neq 0, \\ g \text{ est décroissante continue telle que } g(0)=0, \quad g(\eta)\eta < 0 \ \ \forall \eta \neq 0. \end{array} \right. \tag{H}$$

Le système (1.1) en boucle fermée s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_{tt}(x,t) - (ay_x)_x(x,t) + \alpha y_t(x,t) + \beta y(x,t) = 0, & 0 < x < 1, \ t > 0, \\ (ay_x)(0,t) = \epsilon_1 f(y_t(0,t)), & t > 0, \\ (ay_x)(1,t) = \epsilon_2 g(y_t(1,t)), & t > 0. \end{array} \right. \tag{1.4}$$

Considérons maintenant l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = H^1(0,1) \times L^2(0,1),$$

muni du produit scalaire

$$\langle (f_1, g_1), (f_2, g_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 a f_{1x} f_{2x} + \beta f_1 f_2 + g_1 g_2 \ dx.$$

Avec des conditions intiales $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, le système en boucle fermé (1.4) peut se mettre sous la forme d'équation d'évolution

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Phi}(t) + A\Phi(t) = 0, \\ \Phi(0) = \phi. \end{array} \right. \tag{Σ}$$

où $\Phi(t) = (y(.,t), y_t(.,t))$, A est un opérateur non borné tel que

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ (y,z); y \in H^2(0,1), \quad z \in H^1(0,1), \quad \begin{array}{l} (ay_x)(0) = \epsilon_1 f(z(0)) \\ (ay_x)(1) = \epsilon_2 g(z(1)) \end{array} \right\},$$

et pour tout $(y,z) \in \mathcal{D}(A)$

$$A(y,z)(x) = (-z, -(ay_x)_x + \beta y + \alpha z)\,.$$

On suppose dans la suite que les hypothèses (1.2) et (H) sont satisfaites. La proposition suivante peut être démontrée à partir de la théorie de Brezis [2].

Proposition 1 *: i) Pour toute condition initiale $(\phi_1,\phi_2) \in \mathcal{D}(A)$, le système (Σ) admet une solution forte unique $(y,z) \in \mathcal{D}(A)$ donnée par*

$$(y,z) = S(t)(\phi_1,\phi_2), \quad \forall t \geq 0$$

où $S(t)$ est le semi-groupe de contractions engendré par l'opérateur A. De plus,

$$\frac{d}{dt}(y,z) \in L^\infty(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}).$$

ii) Pour toute condition initiale $(\phi_1,\phi_2) \in \mathcal{D}(A)$, la fonction

$$t \longmapsto ||(y,z)||_{\mathcal{D}(A)}$$

est décroissante, où $||(y,z)||_{\mathcal{D}(A)} = ||A(y,z)||_{\mathcal{H}}$ pour tout $(y,z) \in \mathcal{D}(A)$.

iii) Pour toute condition initiale $(\phi_1,\phi_2) \in \mathcal{H}$, le système (Σ) admet une solution faible unique $(y,z) \in \mathcal{H}$ telle que:

$$(y,z) \in C^0(\mathbb{R}^+;\mathcal{H}).$$

Nos résultas principaux sont énoncés dans les théorèmes suivants:

Théorème 1 *: Pour toute donnée initiale (ϕ_1,ϕ_2) dans $\mathcal{H}$, la solution $\Phi(t) = (y,z)$ de (Σ) tend asymptotiquement vers zéro dans $\mathcal{H}$ lorsque t tend vers $+\infty$*

Théorème 2 *: Soit (y,z) la solution de (Σ) issue de la condition initiale (ϕ_1,ϕ_2) dans $\mathcal{H}$. On suppose l'existence de quatre constantes positives k_1, k_2, k_3 et k_4 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$*

$$k_1 \mid x \mid \leq \mid f(x) \mid \leq k_2 \mid x \mid, \qquad k_3 \mid x \mid \leq \mid g(x) \mid \leq k_4 \mid x \mid . \qquad (H^+)$$

Si $\alpha = 0$ et si $a(x)$ est monotone, alors il existe une constante $\omega > 0$ telle que

$$\| (y,z) \|_{\mathcal{H}} \leq \exp(1 - \frac{t}{\omega}) ||(\phi_1,\phi_2)||_{\mathcal{H}}, \qquad \forall t \geq \omega.$$

Théorème 3 *: Soit (y,z) la solution de (Σ) issue de la condition initiale (ϕ_1,ϕ_2) dans $\mathcal{H}$. Supposons que $\alpha > 0$ et que l'hypothèse (H^+) est satisfaite; il existe alors une constante $\omega^* > 0$ telle que*

$$\| (y,z) \|_{\mathcal{H}} \leq \exp(1 - \frac{t}{\omega^*}) ||(\phi_1,\phi_2)||_{\mathcal{H}}, \qquad \forall t \geq \omega^*.$$

2 Preuves des résultats:

Démontrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 1 *: L'opérateur A est maximal monotone.*

Preuve: soit $(y,z),(\hat{y},\hat{z}) \in \mathcal{D}(A)$. Un simple calcul permet d'obtenir l'expression suivante:

$$\langle\, A(y,z) - A(\hat{y},\hat{z}), (y,z) - (\hat{y},\hat{z})\,\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= -\epsilon_2\,(z(1)-\hat{z}(1)\,)\,(\,g(z(1))-g(\hat{z}(1))\,) + \epsilon_1\,(z(0)-\hat{z}(0))\,(\,f(z(0))-f(\hat{z}(0)\,))$$

$$+\,\alpha\int_0^1 (z-\hat{z})^2\,dx.$$

La monotonie de A est alors une conséquence directe des hypothèses (1.2) et (H).

Il s'agit maintenant de démontrer la maximalité de A, i.e, $\mathrm{Im}(I+A)=\mathcal{H}$.
Soit

$$(U,V) \in \mathcal{H}. \tag{2.1}$$

On cherche $(y,z) \in \mathcal{D}(A)$ tel que:

$$(I+A)(y,z) = (U,V).$$

Ce qui est équivalent à résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} y - z = U, \\ z - (ay_x)_x + \alpha z + \beta y = V, \\ (ay_x)\,(0) = \epsilon_1 f(z(0)), \\ (ay_x)\,(1) = \epsilon_2 g(z(1)), \\ y \in H^2(0,1), z \in H^1(0,1). \end{cases} \tag{2.2}$$

En éliminant z dans la première équation de (2.2), on a:

$$\begin{cases} (\alpha+\beta+1)y - (ay_x)_x = (\alpha+1)U + V, \\ (ay_x)\,(0) = \epsilon_1 f(y(0)-U(0)), \\ (ay_x)\,(1) = \epsilon_2 g(y(1)-U(1)), \\ y \in H^2(0,1). \end{cases} \tag{2.3}$$

On définit la fonctionnelle J par:

$$\begin{aligned} J : H^1(0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\longmapsto J(\psi) \end{aligned}$$

avec

$$J(\psi) = \frac{1}{2}\int_0^1 [a\psi_x^2 + (\alpha+\beta+1)\psi^2]\ dx - \int_0^1 [(\alpha+1)U+V]\ \psi\ dx$$

$$+F(\psi(0)-U(0)) - G(\psi(1)-U(1)),$$

où

$$F(x) = \epsilon_1 \int_0^x f(\xi)d\xi \quad \text{et} \quad G(x) = \epsilon_2 \int_0^x g(\xi)d\xi, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

On déduit de (H) et (2.4) que:
i)F est convexe, $F \in C^1(\mathbb{R})$ et $F(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

ii)$-G$ est convexe, $G \in C^1(\mathbb{R})$ et $G(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

iii)J est une fonctionnelle convexe, coercive et continue dans $H^1(0,1)$.

D'aprés un théorème de minimisation [13], il existe $y \in H^1(0,1)$ telle que

$$J(y) = \inf_{\psi \in H^1(0,1)} J(\psi).$$

Autrement dit la fonction

$$\Theta : \lambda \longrightarrow \Theta(\lambda) = J(y+\lambda\psi)$$

admet un minimum en $\lambda = 0$. Ceci implique que pour tout $\psi \in H^1(0,1)$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(J(y+\lambda\psi)\right)|_{\lambda=0} = 0.$$

Donc y vérifie le système (2.3) au sens faible, i.e,

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta+1)\int_0^1 y\psi\ dx + \int_0^1 a y_x \psi_x\ dx - \int_0^1 [(\alpha+1)U+V]\ \psi\ dx \\ &+\epsilon_1\psi(0)\ f(y(0)-U(0)) - \epsilon_2\psi(1)\ g(y(1)-U(1)) = 0.\end{aligned} \tag{2.5}$$

En particulier, pour tout $\psi \in C_0^\infty(0,1)$

$$-\int_0^1 a y_x \psi_x\ dx = \int_0^1 [(\alpha+\beta+1)y - (\alpha+1)U+V]\ \psi\ dx. \tag{2.6}$$

Il découle de (2.6) que

$$\begin{cases} y \in H^2(0,1), \\ (\alpha+\beta+1)y - (a y_x)_x = (\alpha+1)U+V. \end{cases} \tag{2.7}$$

En faisant une intégration par partie dans (2.5), on obtient grâce à (2.7) les conditions frontières

$$\begin{cases} (a y_x)(0) = \epsilon_1 f(y(0)-U(0)), \\ (a y_x)(1) = \epsilon_2 g(y(1)-U(1)). \end{cases} \tag{2.8}$$

En combinant (2.1), (2.7) et (2.8), on en déduit que y est solution de (2.3) et que l'élément $z = y - U \in H^1(0,1)$. Ainsi (y,z) vérifie (2.2). L'opérateur $(I+A)$ est donc surjective. La preuve du Lemme 1 est complète.

Remarque 1 *: La densité du domaine $\mathcal{D}(A)$ dans $\mathcal{H}$ est due au fait que A est maximal monotone et que $f(0) = g(0) = 0$.*

Preuve du Théorème 1: Comme $\mathcal{D}(A)$ est dense dans $\mathcal{H}$ et que $S(t)$ est un semi-groupe de contractions, il suffit de démontrer le résultat pour toute donnée initiale dans $\mathcal{D}(A)$. Soit $(\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{D}(A)$. D'après la Proposition 1, la trajectoire des solutions $\{(y,z)\}_{t\geq 0}$ est bornée pour la norme du graphe. De plus, il est facile de voir que l'injection $i : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ est compacte et par conséquent la trajectoire est précompacte dans $\mathcal{H}$.
D'après le principe d'invariance de Lasalle [6], on peut affirmer que l'ensemble ω-limite $\omega(\phi_1, \phi_2)$ est un compact non vide invariant par le semi-groupe $S(t)$ et que plus

$$S(t)(\phi_1, \phi_2) \longrightarrow \omega(\phi_1, \phi_2) \qquad \text{quand } t \to +\infty.$$

Pour démontrer la stabilité asymptotique, il nous suffit de vérifier que $\omega(\phi_1, \phi_2)$ est réduit à $\{0\}$ [9].
Pour cela, prenons $(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2) \in \omega(\phi_1, \phi_2)$. En vertu de la Proposition 1, l'élément $(\tilde{y}, \tilde{z})$ défini par:

$$(\tilde{y}, \tilde{z}) = S(t)(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2) \subset \omega(\phi_1, \phi_2) \subset \mathcal{D}(A)$$

est une solution au sens fort du système (Σ). D'autre part, $\|S(t)(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2)\|_{\mathcal{H}} = \|(\tilde{y}, \tilde{z})\|_{\mathcal{H}}$ est une constante [7].
Donc

$$\frac{d}{dt}\|(\tilde{y}, \tilde{z})\|^2_{\mathcal{H}} = 0.$$

Ce qui est équivalent à dire que

$$\langle\, A(\tilde{y}, \tilde{z}), (\tilde{y}, \tilde{z})\,\rangle_{\mathcal{H}} = 0. \tag{2.9}$$

Or

$$\begin{aligned} \langle\, A(\tilde{y}, \tilde{z}), (\tilde{y}, \tilde{z})\,\rangle_{\mathcal{H}} &= \epsilon_1(\tilde{z}(0)) \cdot f(\tilde{z}(0)) \\ &- \epsilon_2(\tilde{z}(1)) \cdot g(\tilde{z}(1)) + \alpha \| \tilde{y} \|^2_{L^2(0,1)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Supposons, sans perte de généralité, que $\epsilon_1 \epsilon_2 \neq 0$. Il suit de (1.2), (H) et (2.10) que $\tilde{y}$ est solution du système suivant:

$$\begin{cases} \tilde{y}_{tt}(x,t) - (a\tilde{y}_x)_x(x,t) + \beta\tilde{y}(x,t) = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ \tilde{y}_x(0,t) = \tilde{y}_x(1,t) = 0, & t > 0, \\ \tilde{y}_t(0,t) = \tilde{y}_t(1,t) = 0, & t > 0, \\ (\tilde{y}(0), \tilde{y}_t(0)) = (\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2) \in \omega(\phi_1, \phi_2). \end{cases} \tag{2.11}$$

Considérons l'opérateur linéaire A_0 défini par :

$$\mathcal{D}(A_0) = \left\{(y,z);\ y \in H^2(0,1),\ \ z \in H^1(0,1),\ \ y_x(0) = y_x(1) = 0\right\},$$

et pour tout $(y,z) \in \mathcal{D}(A_0)$

$$A(y,z)(x) = (z, (ay_x)_x - \beta y).$$

Un nombre complexe μ est une valeur propre de A_0 si et seulement si il existe $(y,z) \in \mathcal{D}(A_0)$ non nul tel que $(\mu - A_0)(y,z) = 0$, i.e,

$$\begin{cases} \mu y = z, \\ (ay_x)_x - \beta y = \mu^2 y, \\ y_x(0) = y_x(1) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

D'après un résultat classique de Mikhaïlov [11], le système spectral suivant

$$\begin{cases} (ay_x)_x - \beta y = \lambda y, \\ y_x(0) = y_x(1) = 0. \end{cases}$$

admet une infinité dénombrable de valeurs propres $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > .....$, telles que $(\lambda_n) \longrightarrow -\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$ et les vecteurs propres correspondants $v_1, v_2, ...$ forment une base orthonormée de $L^2(0,1)$.
Par conséquent, les valeurs propres de A_0 sont:

$$\mu_n = \pm i\sqrt{-\lambda_n},$$

et les fonctions propres correspondantes sont

$$V_n^\star = \left(v_n,\ \pm i\sqrt{-\lambda_n}\, v_n\right),\ \ n = 1, 2, ..$$

On remarque que pour tout $n = 1, 2, ...$

$$\| V_n^\star \|_{\mathcal{H}}^2 = -2\lambda_n.$$

On prend alors $\begin{cases} V_n = \dfrac{1}{\sqrt{-2\lambda_n}} \left(v_n,\ -i\sqrt{-\lambda_n}\, v_n\right),\ n = 1, 2, ... \\ V_{-n} = \dfrac{1}{\sqrt{-2\lambda_n}} \left(v_n,\ i\sqrt{-\lambda_n}\, v_n\right),\ n = -1, -2, ... \end{cases}$

La solution de (2.11) est donnée par

$$(\tilde{y}, \tilde{y}_t)(t) = \sum_{n \in Z} C_n e^{-\mu_n t} V_n. \tag{2.13}$$

avec $C_n = \langle\ (\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2), V_n\ \rangle_{\mathcal{H}}$, pour tout $n \in Z$.
On peut aisément vérifier que

$$\begin{cases} C_n = a_n + ib_n, & n = 1, 2, ... \\ C_{-n} = a_{-n} - ib_{-n}, & n = -1, -2, ... \end{cases}$$

où

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{-2\lambda_n}} \int_0^1 a\tilde{\phi}_{1x} v_{nx} + \beta\tilde{\phi}_1 v_n \ dx \quad \text{et} \quad b_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \tilde{\phi}_2 v_n dx. \tag{2.14}$$

Après un simple calcul, on déduit de (2.13) et (2.14) que:

$$\begin{cases} \tilde{y}(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\sqrt{-\lambda_n} t) - b_n \sin(\sqrt{-\lambda_n} t) \right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-\lambda_n}} v_n, \\ \tilde{y}_t(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin(\sqrt{-\lambda_n} t) + b_n \cos(\sqrt{-\lambda_n} t) \right) \sqrt{2} v_n. \end{cases} \tag{2.15}$$

Il est clair que $v_n(0) \neq 0$ pour tout $n = 1, 2, ...$ En s'inspirant de la technique utilisée dans [4], on démontre que les coefficients a_n et b_n sont nuls pour tout $n = 1, 2, ..$ et donc en vertu de (2.15) la solution $(\tilde{y}(t), \tilde{y}_t(t))$ est nulle; ce qui implique que $(\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2)$ l'est aussi. Ceci termine la preuve de la stabilité asymptotique.

Preuve du Théorème 2: Supposons que $a(x)$ est monotone non croissante. Multiplions l'équation $(*)$ par $\phi y_x + C_0 y$ où ϕ est une fonction dans $W^{1,\infty}(0,1)$ et C_0 une constante positive qu'on déterminera ultérieurement(voir (2.17) et (2.25)). Après un calcul direct, il en résulte que:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[\left(\frac{\phi_x}{2}-C_0\right)y_t^2+\left(\frac{a}{2}\left(\frac{\phi}{a}\right)_x+C_0\right)ay_x^2+\left(C_0-\frac{\phi_x}{2}\right)\beta y^2\right]dxdt\\
&+\frac{\phi(1)}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left[-y_t^2(1,t)-\frac{\epsilon_2}{a(1)}g^2\left(y_t(1,t)\right)+\beta y^2(1,t)\right]dt\\
&+\frac{\phi(0)}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left[y_t^2(0,t)+\frac{\epsilon_1}{a(0)}f^2\left(y_t(0,t)\right)-\beta y^2(0,t)\right]dt \qquad (2.16)\\
&=-\int_0^1\left[\phi y_t y_x+C_0 y_t y\right]_{t=T_1}^{t=T_2}dx\\
&+C_0\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right)y(1,t)-\epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right)y(0,t)\right]dt.
\end{aligned}$$

Choisissons ϕ telle que:

$$\begin{cases}\phi_x=2\left(C_0+\delta\right),\\ \phi(0)=0.\end{cases}$$

où δ est une constante positive (voir (2.29)).
Ce qui est équivalent à écrire

$$\phi(x)=2\left(C_0+\delta\right)x. \qquad (2.17)$$

Compte tenu de (2.17), l'égalité (2.16) s'écrit:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1\left[\delta y_t^2+\left(\frac{a}{2}\left(\frac{\phi}{a}\right)_x+C_0\right)ay_x^2-\delta\beta y^2\right]dxdt\\
&+\left(C_0+\delta\right)\int_{T_1}^{T_2}\left[-y_t^2(1,t)-\frac{\epsilon_2}{a(1)}g^2\left(y_t(1,t)\right)+\beta y^2(1,t)\right]dt\\
&=-\int_0^1\left[2\left(C_0+\delta\right)xy_t y_x+C_0 y_t y\right]_{t=T_1}^{t=T_2}dx \qquad (2.18)\\
&+C_0\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right)y(1,t)-\epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right)y(0,t)\right]dt.
\end{aligned}$$

De l'inégalité de Young et la décroissance de l'énergie, on obtient l'inégalité suivante:

$$-\int_0^1\left[2\left(C_0+\delta\right)xy_t y_x+C_0 y_t y\right]_{t=T_1}^{t=T_2}dx\le M_1E(T_1), \qquad (2.19)$$

avec

$$M_1 = \max\left(2\frac{C_0+\delta}{\sqrt{a_0}}, \frac{C_0}{\sqrt{\beta}}\right).$$

D'autre part, il est facile de vérifier que pour tout $\theta > 1$, on a:

$$\int_0^1 y^2(x,t)dx \leq \left(\frac{\theta^2}{\theta^2-1}\right) y^2(1,t) + \frac{\theta^4}{\theta^2-1}\int_0^1 y_x^2(x,t)dx. \tag{2.20}$$

Ce qui implique que:

$$-\delta\beta\int_0^1 y^2(x,t)dx \geq -\left(\frac{\delta\beta\theta^2}{\theta^2-1}\right) y^2(1,t) - \frac{\delta\beta\theta^4}{a_0(\theta^2-1)}\int_0^1 a y_x^2(x,t)dx. \tag{2.21}$$

D'où d'après (2.18), (2.19) et (2.21) on a:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[\delta y_t^2 + \left(\frac{a}{2}\left(\frac{\phi}{a}\right)_x + C_0 - \frac{\delta\beta\theta^4}{a_0(\theta^2-1)}\right) a y_x^2\right] dxdt \\
&+\left(C_0+\delta-\delta\frac{\delta\theta^2}{\theta^2-1}\right)\int_{T_1}^{T_2}\beta y^2(1,t)dt \\
&\leq M_1 E(T_1) + (C_0+\delta)\int_{T_1}^{T_2}\left[y_t^2(1,t) + \frac{\epsilon_2}{a(1)}g^2\left(y_t(1,t)\right)\right]dt \\
&+C_0\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right)y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right)y(0,t)\right]dt.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

En utilisant (2.17) et la décroissance de $a(x)$, on peut déduire que:

$$\frac{a}{2}\left(\frac{\phi}{a}\right)_x + C_0 - \frac{\delta\beta\theta^4}{a_0(\theta^2-1)} \geq 2C_0 + \delta - \frac{\delta\beta\theta^4}{a_0(\theta^2-1)}. \tag{2.23}$$

Reportons (2.23) dans (2.22); il s'en suit que:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[\delta y_t^2 + \left(2C_0 + \delta - \frac{\delta\beta\theta^4}{a_0(\theta^2-1)}\right) a y_x^2\right] dxdt \\
&+\left(C_0+\delta-\frac{\delta\theta^2}{\theta^2-1}\right)\int_{T_1}^{T_2}\beta y^2(1,t)dt \\
&\leq M_1 E(T_1) + (C_0+\delta)\int_{T_1}^{T_2}\left[y_t^2(1,t) + \frac{\epsilon_2}{a(1)}g^2\left(y_t(1,t)\right)\right]dt \\
&+C_0\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right)y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right)y(0,t)\right]dt.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

On choisit C_0 assez grand tel que:

$$\begin{cases} 2C_0 + \delta - \dfrac{\delta\beta\theta^4}{a_0(\theta^2-1)} \geq \delta, \\ C_0 + \delta - \dfrac{\delta\theta^2}{\theta^2-1} \geq 3. \end{cases}$$

On prend par exemple

$$C_0 = \sup\left(\frac{\delta\beta\theta^4}{2a_0(\theta^2-1)}, 3 + \frac{\delta}{\theta^2-1}\right). \tag{2.25}$$

Par suite, (2.24) s'écrit:

$$\begin{aligned} &\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \delta y_t^2 + \delta a y_x^2 \, dxdt + 3\beta \int_{T_1}^{T_2} y^2(1,t)dt \\ &\leq M_1 E(T_1) + (C_0+\delta)\int_{T_1}^{T_2}\left[y_t^2(1,t) + \frac{\epsilon_2}{a(1)} g^2\left(y_t(1,t)\right)\right] dt \\ &+C_0\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right) y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right) y(0,t)\right] dt. \end{aligned} \tag{2.26}$$

L'inégalité de Young implique que pour tout $C_3, C_4 > 0$, on a:

$$\begin{cases} C_0\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right) y(1,t) \leq \dfrac{1}{2}\left[C_0^2\epsilon_2^2 C_3^2 g^2\left(y_t(1,t)\right) + \dfrac{1}{C_3^2} y^2(1,t)\right], \\ -C_0\epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right) y(0,t) \leq \dfrac{1}{2}\left[C_0^2\epsilon_1^2 C_4^2 f^2\left(y_t(0,t)\right) + \dfrac{1}{C_4^2} y^2(0,t)\right]. \end{cases} \tag{2.27}$$

De plus, il est facile de vérifier que:

$$y^2(0,t) \leq y^2(1,t) + \int_0^1 \left[y^2(x,t) + \frac{1}{a_0} a y_x^2(x,t)\right] dx.$$

Ce qui implique d'après (2.20) que:

$$y^2(0,t) \leq \left(1 + \frac{\theta^2}{\theta^2-1}\right) y^2(1,t) + \frac{1}{a_0}\left(1 + \frac{\theta^4}{\theta^2-1}\right)\int_0^1 a y_x^2(x,t)dx.$$

En combinant cette dernière inégalité avec (2.27), on a:

$$\begin{aligned} &C_0\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right) y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right) y(0,t)\right] dt \\ &\leq \frac{1}{2a_0 C_4^2}\left(1 + \frac{\theta^4}{\theta^2-1}\right)\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 a y_x^2 dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_3^2} + \frac{1}{C_4^2}(1 + \frac{\theta^2}{\theta^2-1})\right)\int_{T_1}^{T_2} y^2(1,t)dt \\ &+\frac{C_0^2}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2^2 C_3^2 g^2\left(y_t(1,t)\right) + \epsilon_1^2 C_4^2 f^2\left(y_t(0,t)\right)\right] dt. \end{aligned}$$

Reportons l'inégalité ci-dessus dans (2.26); il découle que:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \delta y_t^2 + \left(\delta - \frac{1}{2a_0C_4^2}(1+\frac{\theta^4}{\theta^2-1})\right) a y_x^2 \, dxdt \\
&+ \left(3\beta - \frac{1}{2C_3^2} - \frac{1}{2C_4^2}(1+\frac{\theta^2}{\theta^2-1})\right)\int_{T_1}^{T_2} y^2(1,t)dt \\
&\leq M_1 E(T_1) + \int_{T_1}^{T_2}\left[(C_0+\delta)y_t^2(1,t) + \left(\frac{(C_0+\delta)\epsilon_2}{a(1)} + \frac{C_0^2\epsilon_2^2C_3^2}{2}\right) g^2\left(y_t(1,t)\right)\right] dt \\
&+ \frac{C_0^2\epsilon_1^2C_4^2}{2}\int_{T_1}^{T_2} f^2\left(y_t(0,t)\right) dt.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Prenons C_3 et C_4 assez grands tels que:

$$\begin{cases}
\delta - \dfrac{1}{2a_0C_4^2}\left(1+\dfrac{\theta^4}{\theta^2-1}\right) \geq \delta/2, \\
3\beta - \dfrac{1}{2C_3^2} - \dfrac{1}{2C_4^2}(1+\dfrac{\theta^2}{\theta^2-1}) \geq \beta/2.
\end{cases}$$

On pourra prendre

$$\begin{cases}
\delta = \dfrac{4\beta}{a_0}\left(1+\dfrac{\theta^4}{\theta^2-1}\right)\left(1+\dfrac{\theta^2}{\theta^2-1}\right)^{-1}, \\
C_3^2 \geq 1/\beta, \\
C_4^2 \geq \dfrac{1}{a_0\delta}\left(1+\dfrac{\theta^4}{\theta^2-1}\right).
\end{cases} \tag{2.29}$$

Donc (2.28) devient:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \delta y_t^2 + \frac{\delta}{2} a y_x^2 \, dxdt + \frac{\beta}{2}\int_{T_1}^{T_2} y^2(1,t)dt \\
&\leq M_1 E(T_1) + \int_{T_1}^{T_2}\left[(C_0+\delta)y_t^2(1,t) + \left(\frac{(C_0+\delta)\epsilon_2}{a(1)} + \frac{C_0^2\epsilon_2^2C_3^2}{2}\right) g^2\left(y_t(1,t)\right)\right] dt \\
&+ \frac{C_0^2\epsilon_1^2C_4^2}{2}\int_{T_1}^{T_2} f^2\left(y_t(0,t)\right) dt.
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure d'après l'hypothèse (H^+) que:

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \delta y_t^2 + \frac{\delta}{2} a y_x^2 \, dxdt + \frac{\beta}{2}\int_{T_1}^{T_2} y^2(1,t)dt \\
&\leq M_1 E(T_1) + \int_{T_1}^{T_2}\left[M_2 y_t(0,t) f(y_t(0,t)) - M_3 y_t(1,t) g(y_t(1,t))\right] dt.
\end{aligned}$$

avec

$$M_2 = \frac{C_0^2\epsilon_1^2 C_4^2 k_2^2}{2k_1}, \quad M_3 = \frac{(C_0+\delta)}{k_3} + \frac{k_4^2}{k_3}\left(\frac{(C_0+\delta)\epsilon_2}{a(1)} + \frac{C_0^2\epsilon_2^2 C_3^2}{2}\right).$$

En réutilisant (2.20), on peut démontrer que:

$$\beta y^2(1,t) + \delta \int_0^1 a y_x^2 dx \geq M_4 \int_0^1 \beta y^2 + a y_x^2 dx,$$

où

$$M_4 = 4\beta\left(\frac{\theta^2}{\theta^2-1}+1\right)^{-1} \min\left(1/\beta, 1/\|a\|_\infty\right).$$

Sans perte de généralité, on suppose que $\epsilon_1\epsilon_2 \neq 0$. On déduit des deux dernières inégalités obtenues que

$$\int_{T_1}^{T_2} E(t)dt \leq \frac{M}{C} E(T_1),$$

où

$$C = \min(2\delta, M_4), \quad M = M_1 + \max\left(\frac{M_2}{\epsilon_1}, \frac{M_3}{\epsilon_2}\right).$$

Ceci, grâce à un résultat classique [10] (Théorème 8.1 p. 103) , entraîne

$$E(t) \leq \exp(1 - \frac{Ct}{K}) E(0), \quad \forall t \geq \frac{M}{C}.$$

Pour le cas où $a(x)$ est monotone non décroissante, on démontre la stabilité exponentielle de la même manière que precédemment mais en choisissant ϕ telle que:

$$\begin{cases} \phi_x = 2\left(C_0+\delta\right), \\ \phi(1) = 0. \end{cases}$$

Preuve du Théorème 3: Soit ϕ^* la fonction réelle sur $[0,1]$ définie par:

$$\phi^*(x) = \int_0^x \exp\left(\int_\sigma^x \left|\frac{a_x}{a}\right| d\xi\right) d\sigma.$$

Il est clair que ϕ^* vérifie les propriétés suivantes:

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, \quad \phi(x) > 0 \text{ pour } x \in (0,1], \\ \phi_x \geq 1, \quad a\left(\frac{\phi}{a}\right)_x \geq 1. \end{cases}$$

De la même façon que dans la preuve du Théorème 2, on peut aisément vérifier que le multiplicateur $\phi^* y_x + C_0^* y$ permet d'avoir le résultat suivant:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[\phi_x^* y_t^2 + a\left(\frac{\phi^*}{a}\right)_x a y_x^2 + C_0^*\beta y^2\right] dxdt \\
&= \frac{\phi^*(1)}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left[y_t^2(1,t) + \frac{\epsilon_2}{a(1)}g^2\left(y_t(1,t)\right) - \beta y^2(1,t)\right] dt \\
&+ \int_0^1 \left[-\phi^* y_t y_x - C_0^* y_t y - \frac{\alpha C_0^*}{2}\right]_{t=T_1}^{t=T_2} dx + \int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[C_0^* y_t^2 - \alpha\phi^* y_t y_x\right] dxdt \qquad (2.30) \\
&+ \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \beta\left(\phi_x^* - C_0^*\right) y^2 dxdt - C_0^*\int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 a y_x^2 dxdt \\
&+ C_0^*\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right) y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right) y(0,t)\right] dt.
\end{aligned}$$

Vu l'inégalité de Young et l'hypothèse (H^+), on a:

$$\begin{aligned}
&C_0^*\int_{T_1}^{T_2}\left[\epsilon_2 g\left(y_t(1,t)\right) y(1,t) - \epsilon_1 f\left(y_t(0,t)\right) y(0,t)\right] dt \\
&\leq \frac{C_0^*}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left(\frac{\epsilon_1^2 k_2^2}{k_1} y_t(0,t) f(y_t(0,t)) - \frac{\epsilon_2^2 k_4^2}{k_3} y_t(1,t) g(y_t(1,t)\right) dt \\
&+ \frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left(y^2(1,t) + y^2(0,t)\right) dt.
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2}\left(y^2(1,t) + y^2(0,t)\right) dt \leq 2\int_0^1\left(y^2 + \frac{1}{a_0} a y_x^2\right) dx.$$

En utilisant les propriétés de ϕ^* et en reportant les deux dernières inégalités dans (2.30), il découle que

$$\begin{aligned}
&\int_{T_1}^{T_2} E(t)dt \leq K E(T_1) \\
&+ \int_{T_1}^{T_2}\int_0^1 \left[\frac{\beta}{2}\left(\phi_x^* - C_0^*\right) + 2\right] y^2 + \left(-C_0^* + \frac{2}{a_0} + \frac{\alpha\phi^*(1)}{2a_0}\right) a y_x^2 dxdt.
\end{aligned}$$

où K est une constante positive.
Prenons C_0^* tel que

$$C_0^* = \sup\left(1, \|\phi_x\|_\infty + 4/\beta, \frac{4 + \alpha\phi(1)}{2a_0}\right).$$

Dès lors, la stabilité exponentielle est facilement obtenue.

Remarque 2 *: Dans certains problèmes physiques, on rencontre des densités de masse $a(x)$ qui ne sont monotones que par morceaux. Citons par exemple la densité de masse donnée par l'expression suivante:*

$$a(x) = \sqrt{p^2 + (x - 1/2)^2} \qquad \forall x \in (0,1).$$

où p est une constante positive.
Il est clair que $a(x)$ est monotone sur chacun des intervalles $(0, 1/2)$ et $(1/2, 1)$. Il est donc intéressant de traiter ce genre de cas.
Supposons alors qu'il existe $x_0 \in (0,1)$ tel que $a(x)$ est monotone croissante (resp. décroissante) sur $(0, x_0)$ (resp. sur $(x_0, 1)$). On définit sur [0,1] une fonction continue θ telle que:

$$\begin{cases} \theta_x = 2\,(C_1 + \delta_1)\,, \\ \theta(x_0) = 0. \end{cases}$$

avec C_1 et δ_1 deux constantes positives.
On remarque que ϕ est srictement négative(resp. positive) sur $(0, x_0)$ (resp. sur $(x_0, 1)$). Avec un choix approprié de C_1 et δ_1, on démontre dans ce cas que le multiplicateur $\theta y_x + C_1 y$ permet d'avoir la stabilité exponentielle. La preuve est identique à celle du Théorème 2.

Références

[1] B. d'Andrea-Novel, F. Boustany, B. Rao, *Feedback stabilisation of a hybrid PDE-ODE system: Application to an overhead crane*, MCSS 7 (1994) 1-22.

[2] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, London, (1973).

[3] M. Cherkaoui, *Sur la stabilisation d'une poutre déformable en torsion ou en fléxion par une classe de contrôle frontière*, Thèse, Université de Nancy1 (1994).

[4] F. Conrad; M.Pierre, *Stabilisation of Euler-Bernoulli beam by nonlinear boundary feedback*, Rapport de recherche INRIA 1235 (1990).

[5] F. Conrad, B. Rao, *Decay of solutions of the wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback*, Asymptotic Analysis 7 (1993) 159-177.

[6] C. M. Dafermos; M. Slemrod, *Asymptotic behavior of non linear contractions semigroups*, J. Func. Anal 14 (1973) 97-106.

[7] A. Haraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications* , collection RMA(17) (1991).

[8] S. Icart, J. Leblond, C.Samson, *Some results on feedback stabilisation of a one-link flexible arm*, rapport de recherche INRIA-Sophia Antipolis 1682 (1992).

[9] V. Jurdjevic; J. P. Quin, *Controlability and stability*, J. Diff. Equations, vol28, no.3 (1978) 381-389.

[10] V. Komornik, *Exact controllability and stabilisation. The multiplier method*, Masson and John Wiley (1994).

[11] V. Mikhaïlov, *Equations aux dérivées partielles*, Mir, Moscou (1980).

[12] B. Rao, *Decay estimate of solution for hybrid system of flexible structures*, Euro. J. Appl. Math 4 (1993) 303-319.

[13] A. Zeidler, Non linear functional analysis and its applications, vol2. Springer Verlag, New york (1986).

Unit´e de recherche INRIA Lorraine, Technopˆole de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit´e de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit´e de recherche INRIA Rhˆone-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unit´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399