



Sur quelques schémas numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles pour le traitement d'images

Laurence Lucido, Rachid Deriche, Luis J. Alvarez, Vincent Rigaud

► To cite this version:

Laurence Lucido, Rachid Deriche, Luis J. Alvarez, Vincent Rigaud. Sur quelques schémas numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles pour le traitement d'images. RR-3192, INRIA. 1997. inria-00073497

HAL Id: inria-00073497

<https://inria.hal.science/inria-00073497>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Unité de recherche INRIA Lorraine, technopôle de Nancy-Brabois, 615 rue du jardin botanique, BP 101, 54600 VILLERS-LÈS-NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, IRISA, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN 93,
06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur

INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105 LE CHESNAY Cedex (France)

ISSN 0249-6399

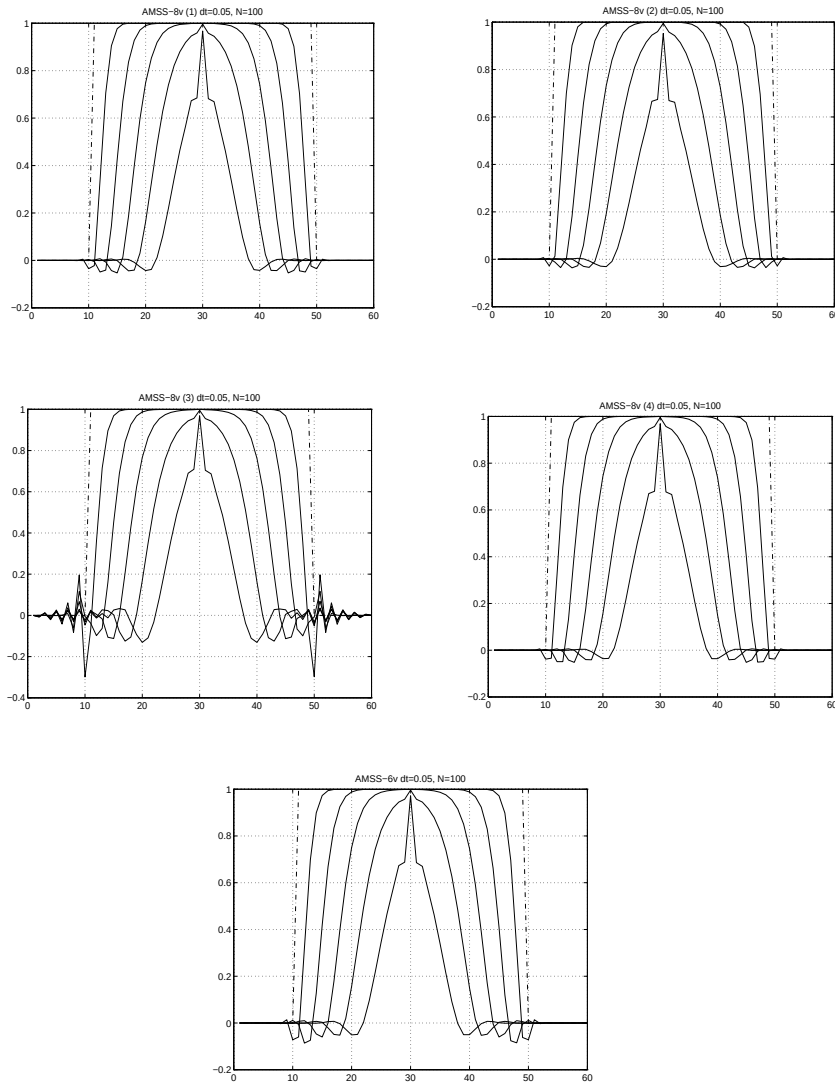


Figure 58. Vues en coupe de l'ellipse selon son grand axe pour les 4 choix possible de λ_0 pour AMSS-8v et pour AMSS-6v

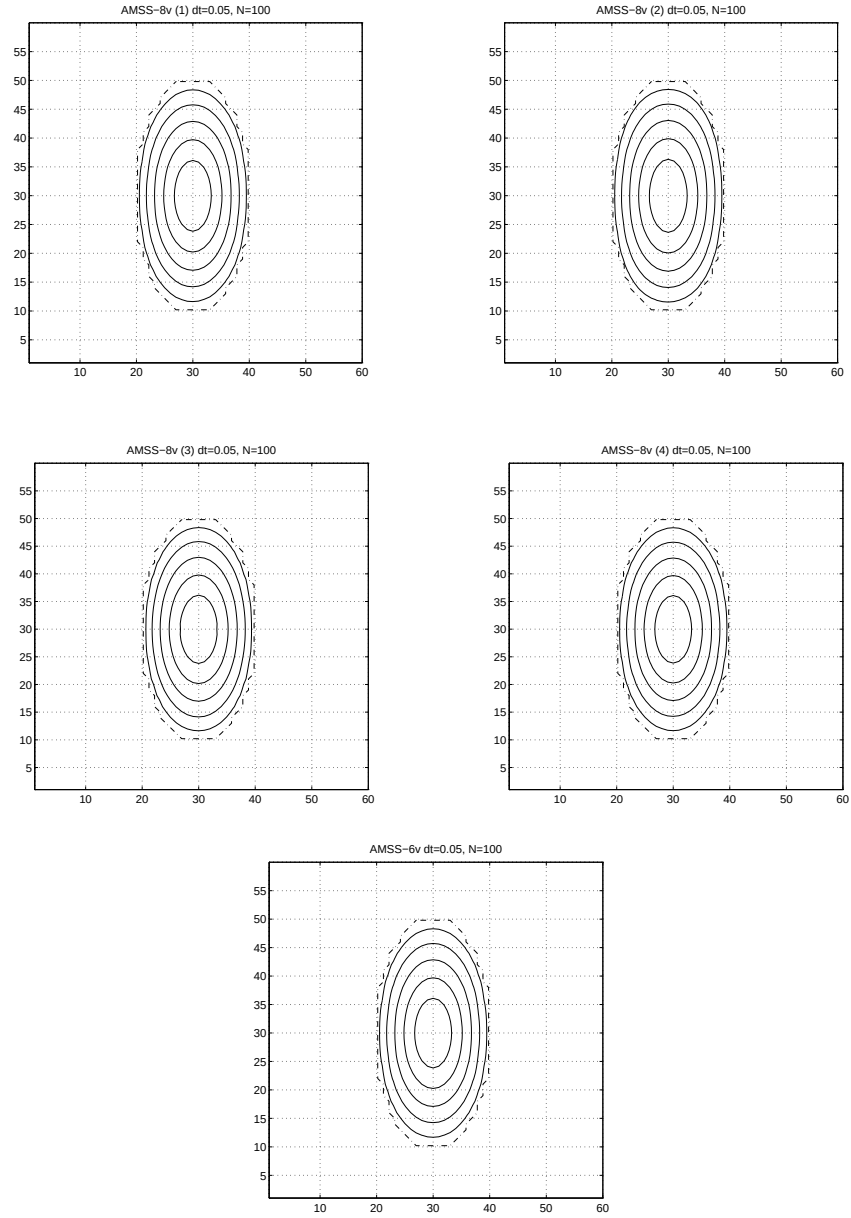


Figure 57. Evolution de l'ellipse selon les 5 schémas possibles ($dt = 0.05$)

ANNEXE E

Illustration des analyses multi-échelles

**Comparaison des cinq implémentations de
l'AMSS
en fonction du choix du paramètre λ_0**

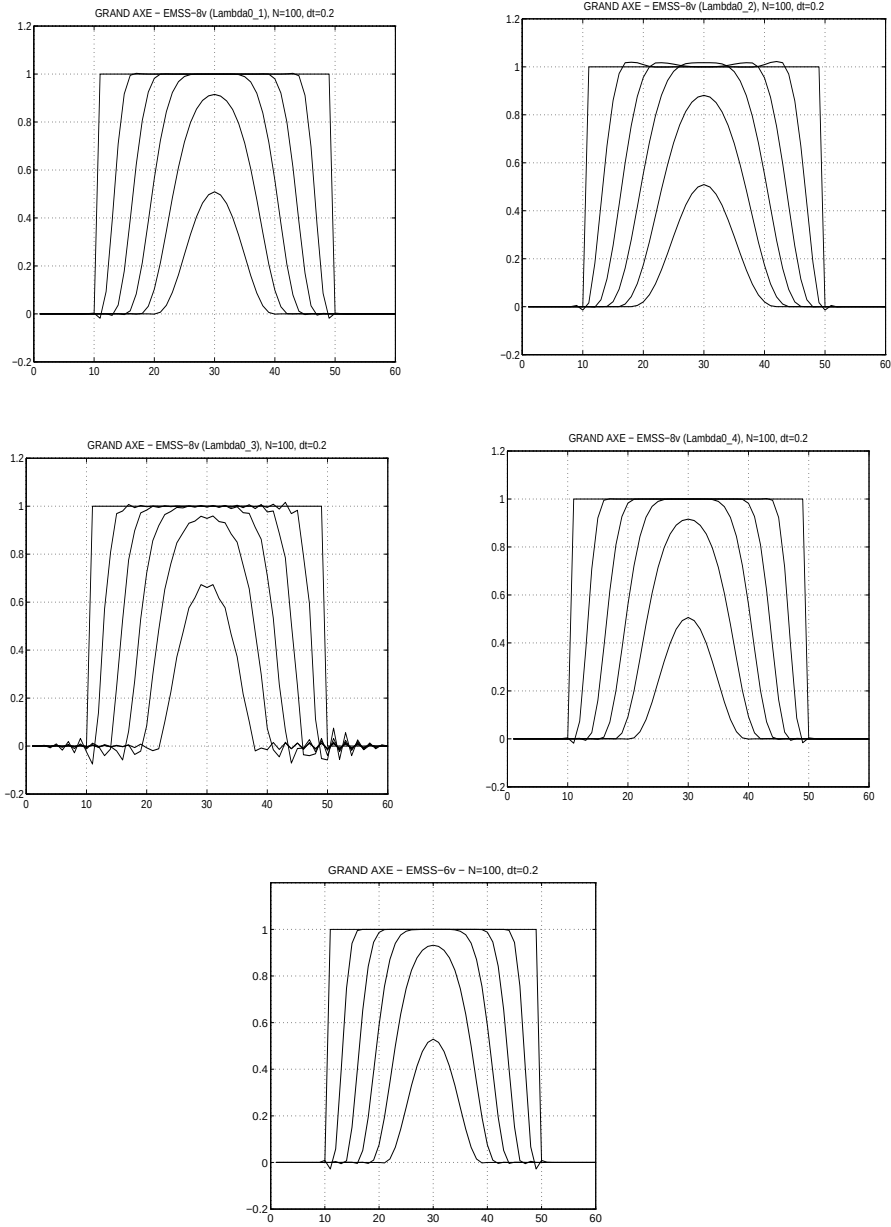


Figure 56. Vues en coupe de l'ellipse selon son grand axe pour les 4 choix possible de λ_0 pour EMSS-8v et pour EMSS-6v

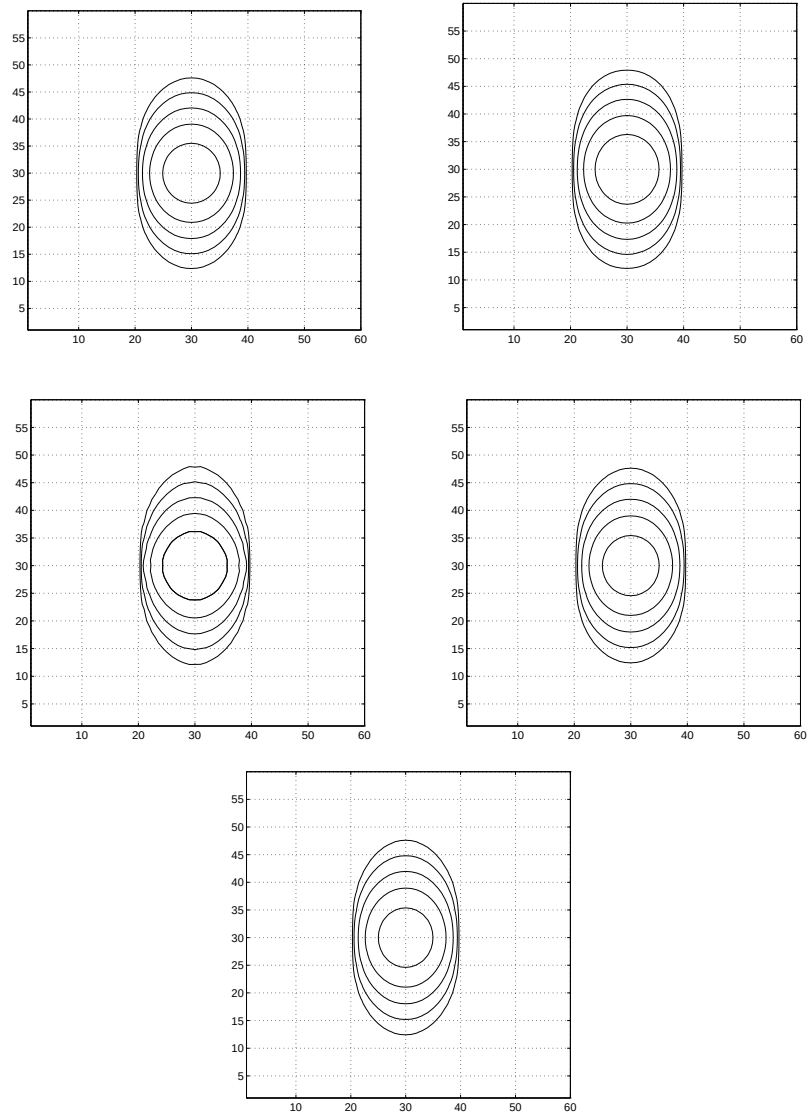


Figure 55. Evolution de l'ellipse selon les 5 schémas possibles ($dt = 0.2$)

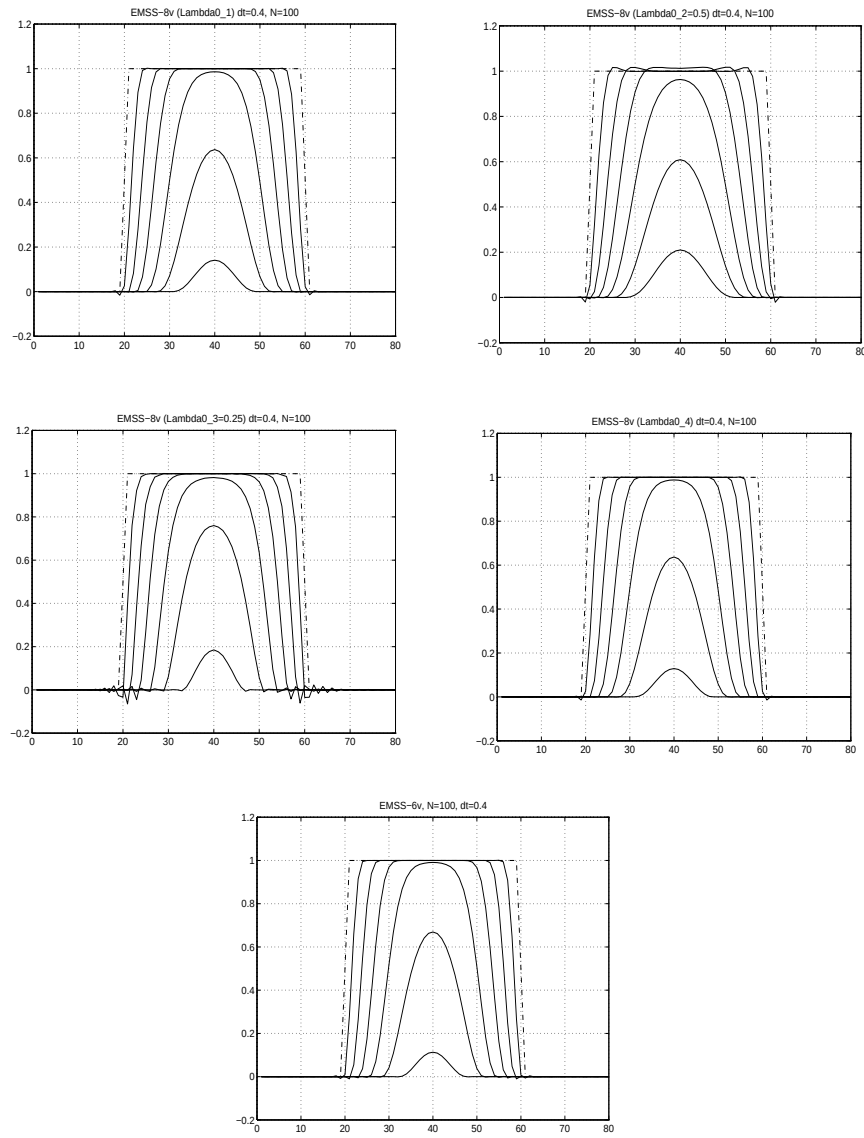


Figure 54. Vues en coupe du disque pour les 4 choix possible de λ_0 pour EMSS-8v et pour EMSS-6v

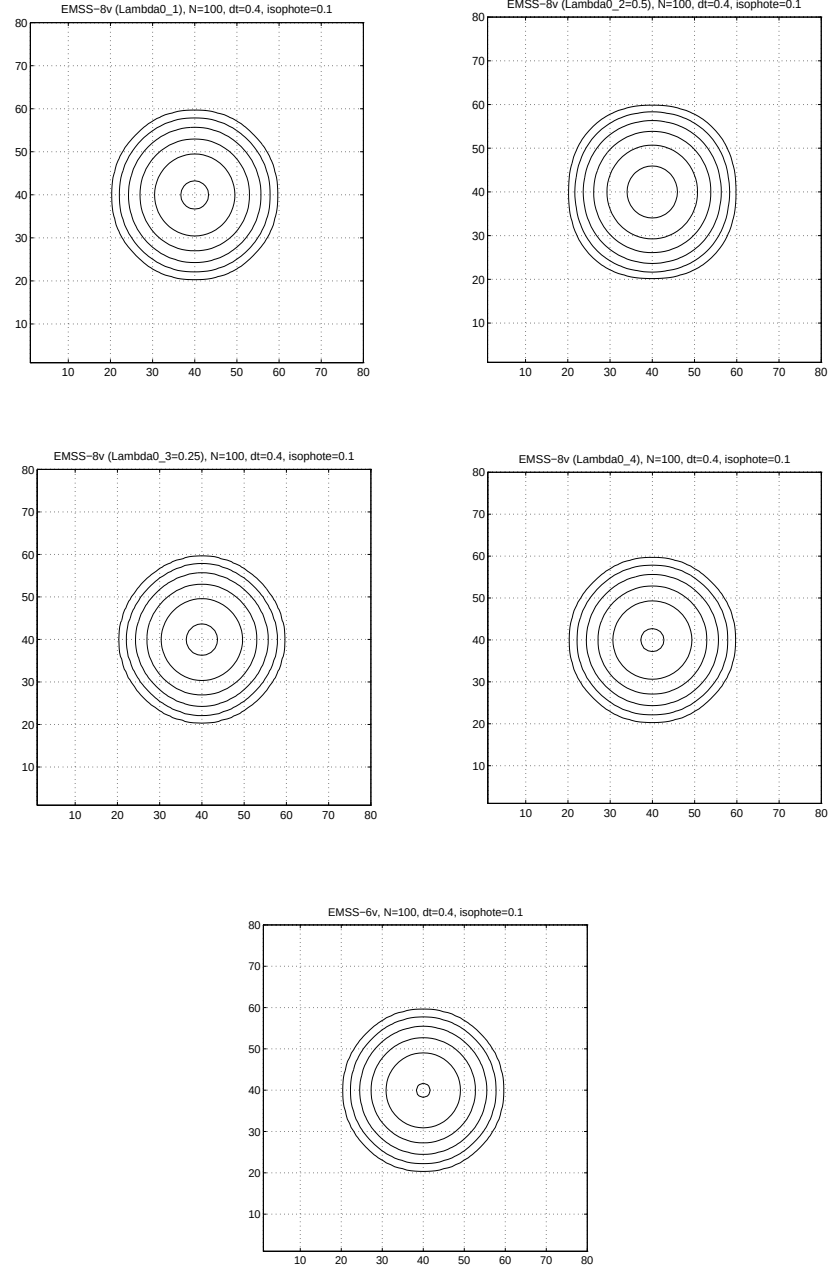


Figure 53. Evolution du disque selon les 5 schémas possibles ($dt = 0.4$)

ANNEXE D

Illustration des analyses multi-échelles**Comparaison des cinq implémentations de l'EMSS en fonction du choix du paramètre λ_0**

Rappel des différents choix possibles pour le paramètre libre λ_0 , dans le cas de l'analyse euclidienne (EMSS) implémentée selon le schéma 8 voisins :

■ 1er cas, d'après (Alvarez et al., 1994) :

$$\lambda_0 = \frac{u_x^2 + 2u_y^2 - |u_x \cdot u_y|}{4}, |u_y| \geq |u_x|$$

$$\lambda_0 = \frac{u_y^2 + 2u_x^2 - |u_x \cdot u_y|}{4}, |u_y| < |u_x|$$
(69)

■ 2ème cas, d'après (Sapiro et al., 1993) :

$$\lambda_0 = 0,5 \cdot |\nabla u|^2 = 0,5 \cdot (u_x^2 + u_y^2)$$
(70)

■ 3ème cas, d'après (Alvarez, 1996) :

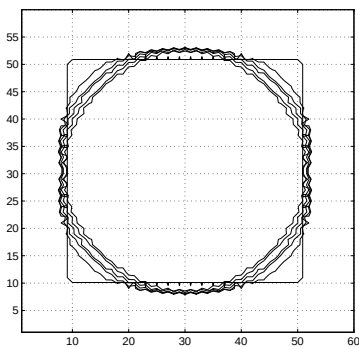
$$\lambda_0 = 0,25 \cdot |\nabla u|^2 = 0,25 \cdot (u_x^2 + u_y^2)$$
(71)

■ 4ème cas, d'après (Cohignac et al., 1993) :

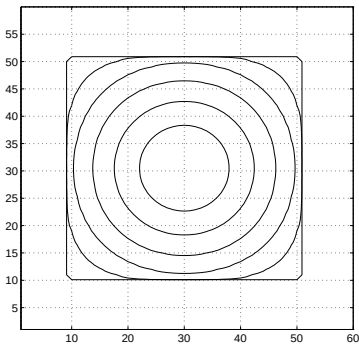
$$\lambda_0 = 0,5 \cdot (u_x^2 + u_y^2) - u_x^2 + \frac{u_x^4}{u_x^2 + u_y^2}$$
(72)

Enfin, un dernier cas d'implémentation de l'analyse euclidienne (EMSS) est le schéma 6 voisins pour lequel il n'y a plus de paramètre libre.

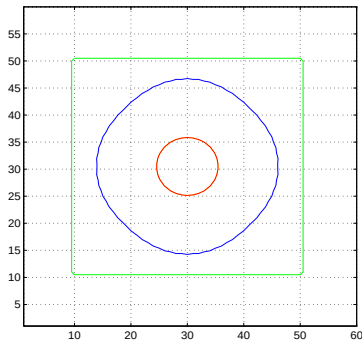
AMSS - schéma 6 voisins



$dt=0.5, N=100 \text{ à } 500$

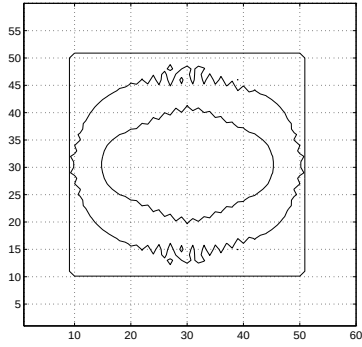
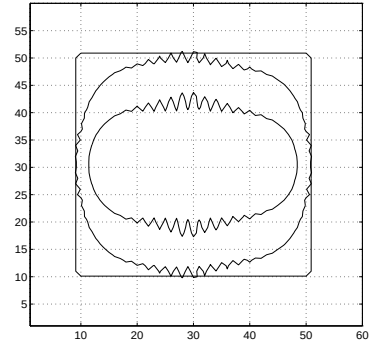
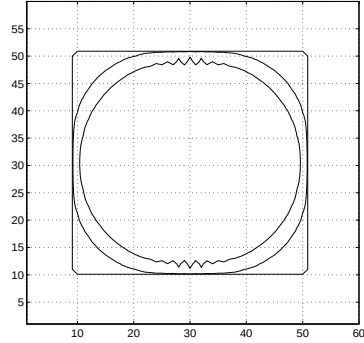
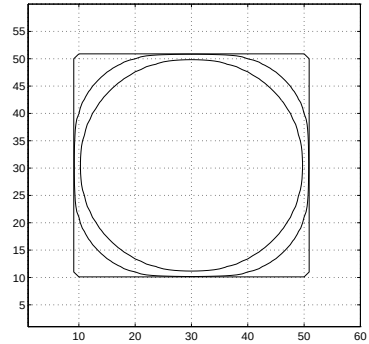


$dt=0.1, N=100 \text{ à } 500$



- image initiale
- $dt = 0.1$
- $dt = 0.2$

Figure 52. Stabilité de l'AMSS - 6 voisins

 **$dt=0.6$, $N=100$ et $N=200$**  **$Dt=0.55$, $N=100$ et $N=200$**  **$dt=0.52$, $N=100$ et $N=200$**  **$Dt=0.5$, $N=100$ et $N=200$** **Figure 51. Stabilité de l'EMSS - 6 voisins**

ANNEXE C

Illustration des analyses multi-échelles

Tests de stabilité

EMSS - schéma 6 voisins

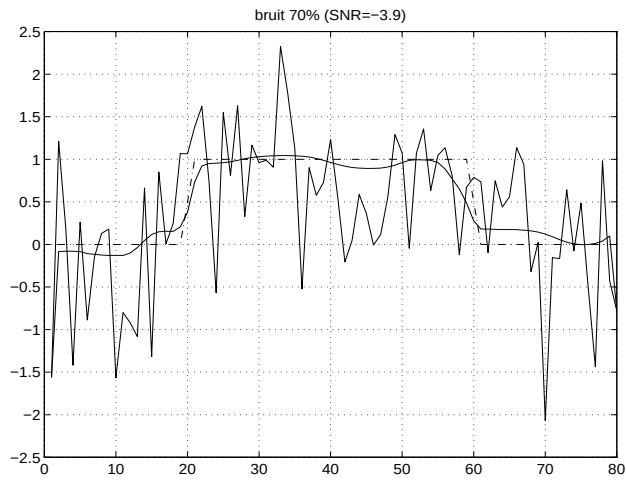


Figure 49. Vue en coupe du disque bruité (70%) avant et après EMSS ($N=100$, $dt=0.2$)

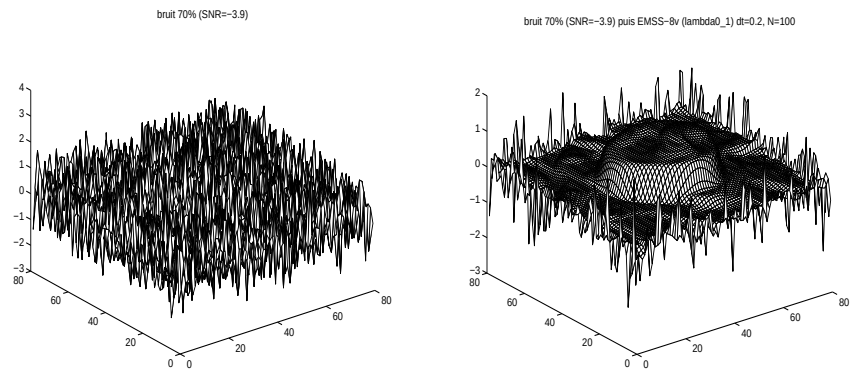


Figure 50. Avant (gauche, bruit 70%) et après (droite) EMSS-8 voisins

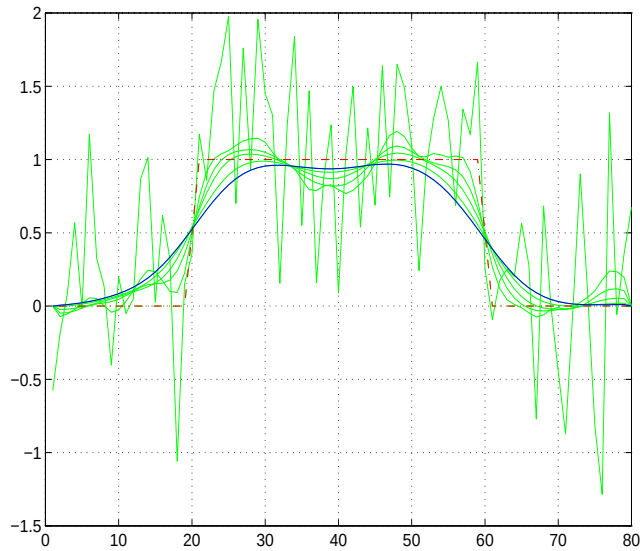


Figure 47. *Vue en coupe du disque après lissage gaussien pour différentes valeurs de la variance (en bleu, $\sigma^2=30$; en rouge, image non bruitée)*

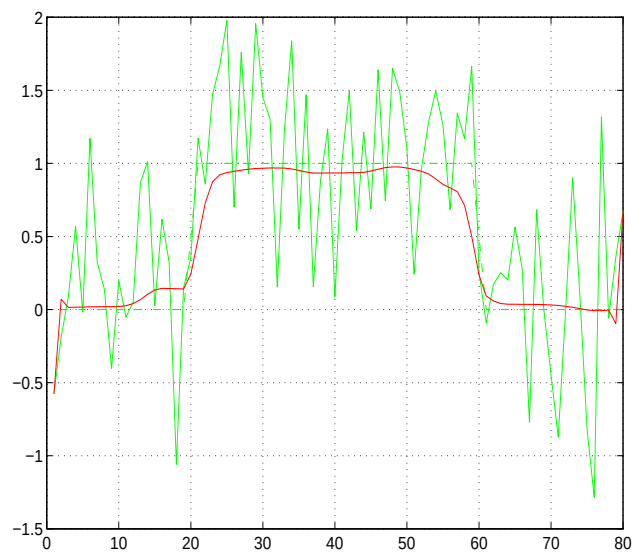


Figure 48. *Vue en coupe du disque après EMSS (en rouge, $dt=0.3$, $N=100$)*

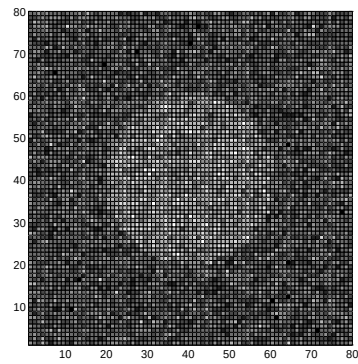
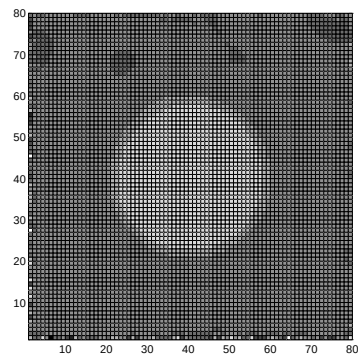
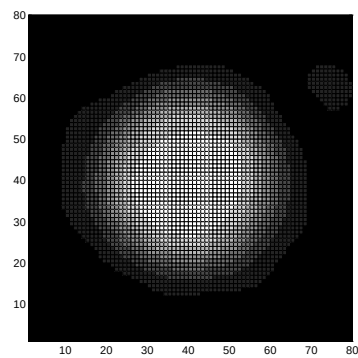


Image bruitée
(50 %)



Après EMSS
($dt=0.3$, $N=100$)



Après gaussienne
($\sigma^2=30$, $M=16$)

Figure 46. Comparaisons EMSS-Gaussienne pour le filtrage

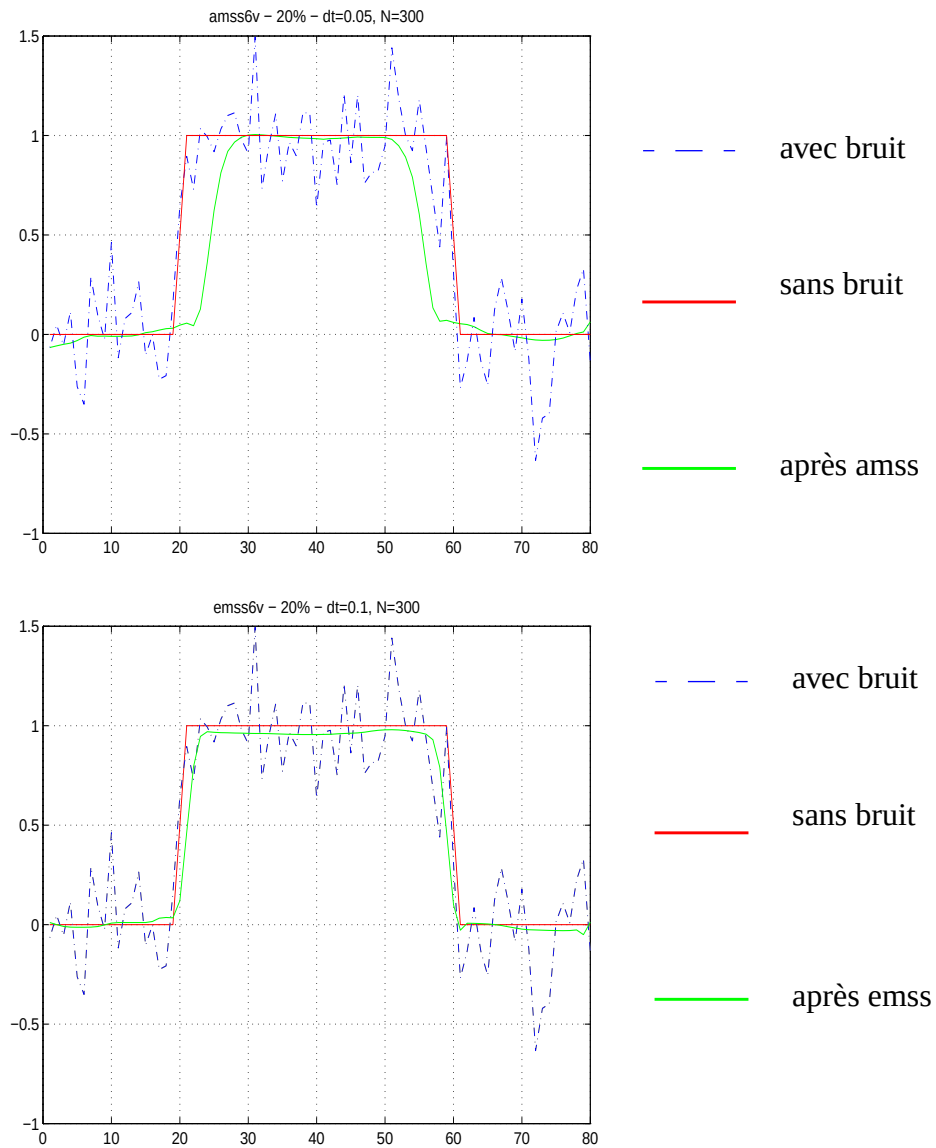


Figure 45. Vues en coupe du disque après AMSS et EMSS

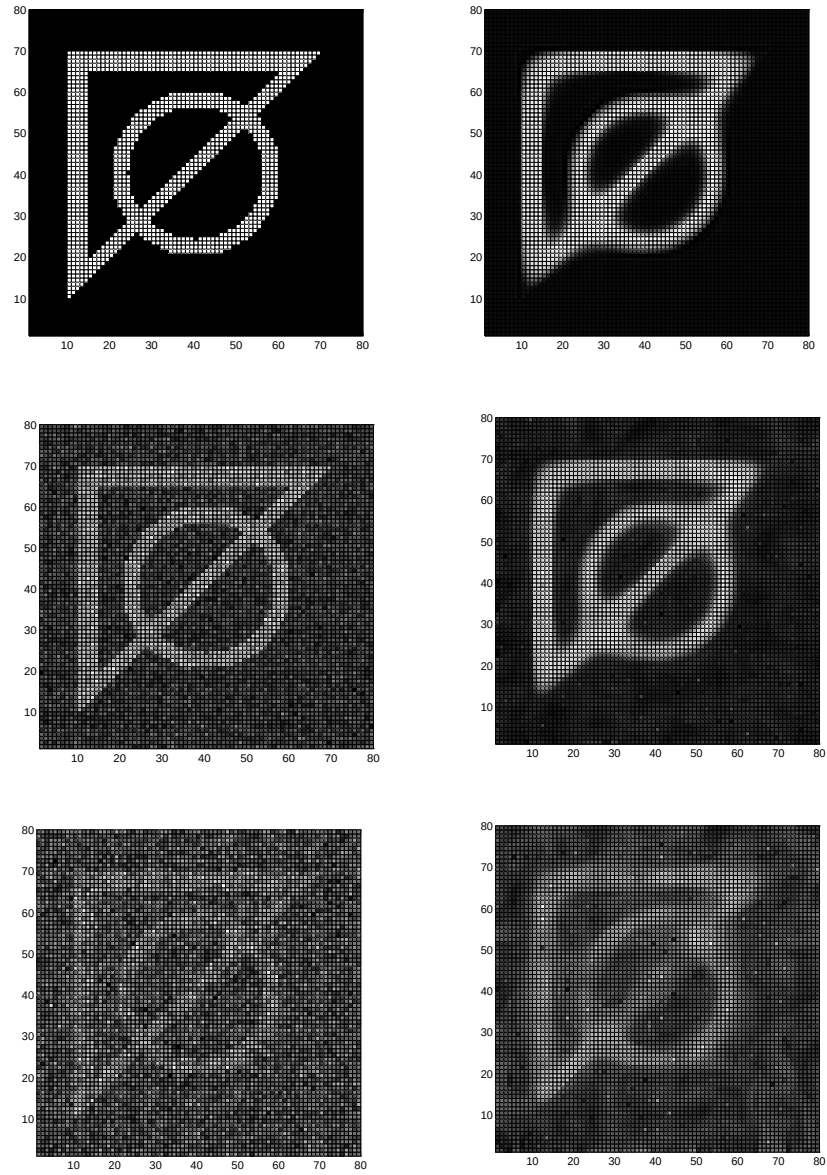


Figure 44. Colonne de gauche : images initiales, de haut en bas, sans bruit, 20%, 60% de bruit, colonne de droite, après analyse affine (AMSS - 6 voisins), pour $dt=0.05$ et 100 itérations.

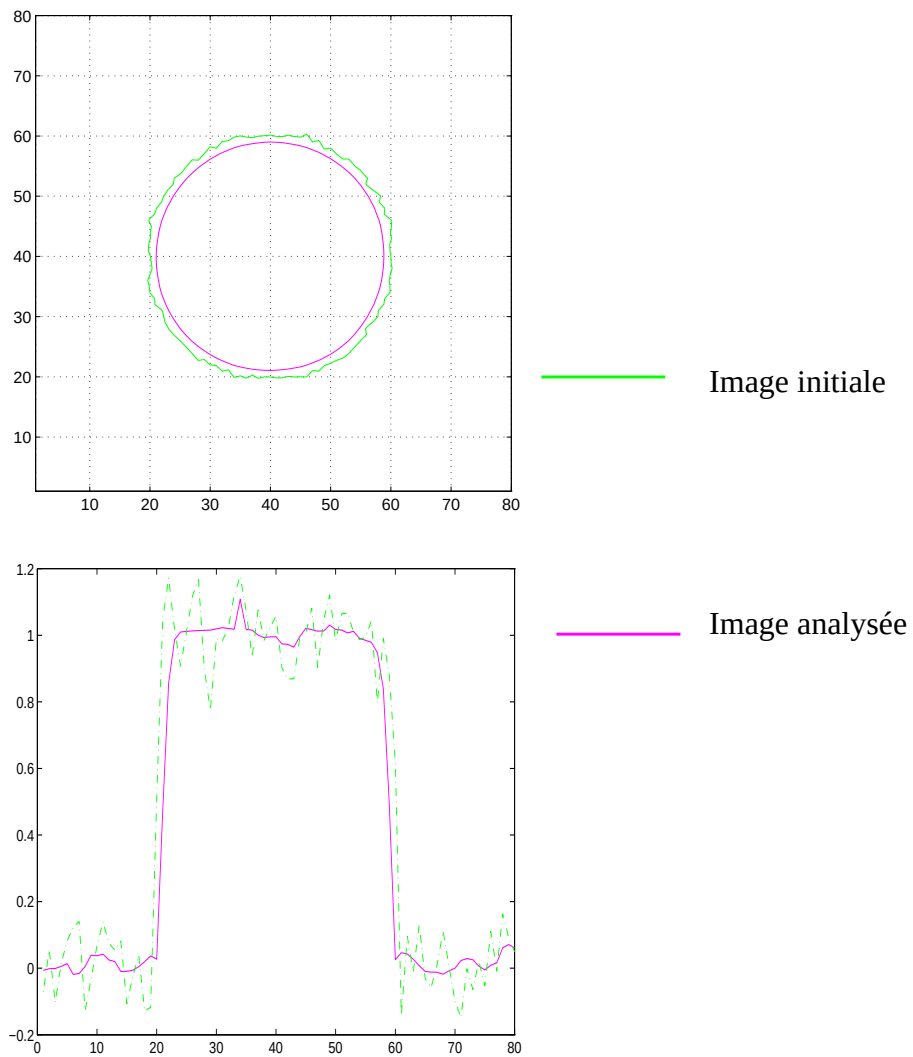


Figure 43. En haut contour image bruitée (10%) avant et après analyse affine (AMSS - 6 voisins) pour $dt=0.05$ et 100 itérations ; en bas, vue en coupe

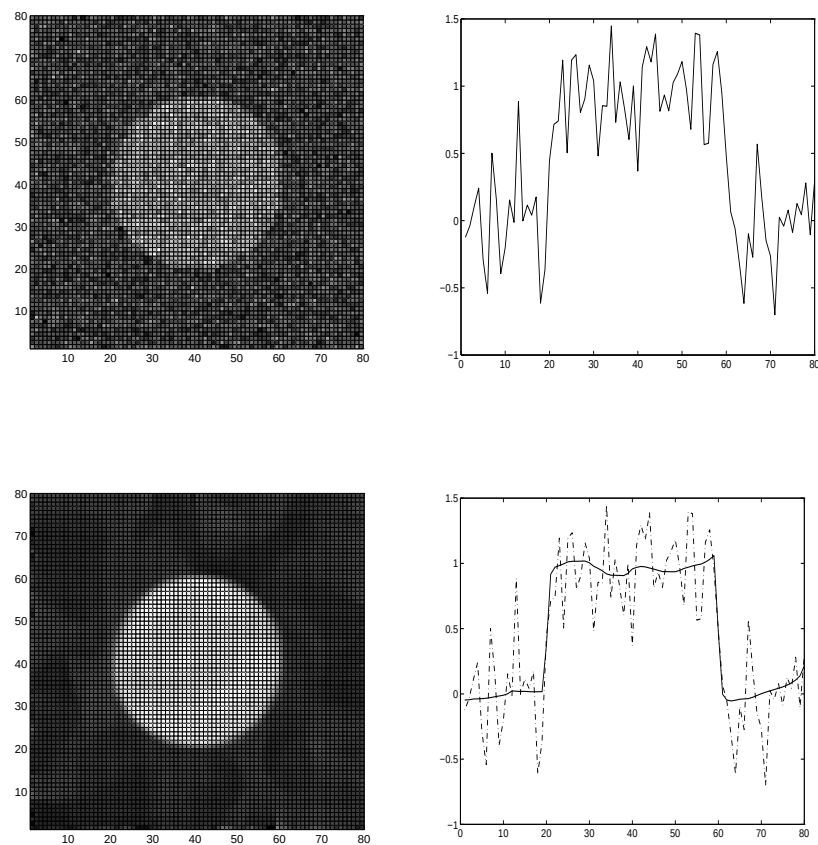


Figure 42. En haut à gauche, image bruitée (30%), à droite, vue d'une coupe. Figures du bas, après analyse euclidienne (EMSS - 6 voisins) pour $dt=0.1$ et 100 itérations.

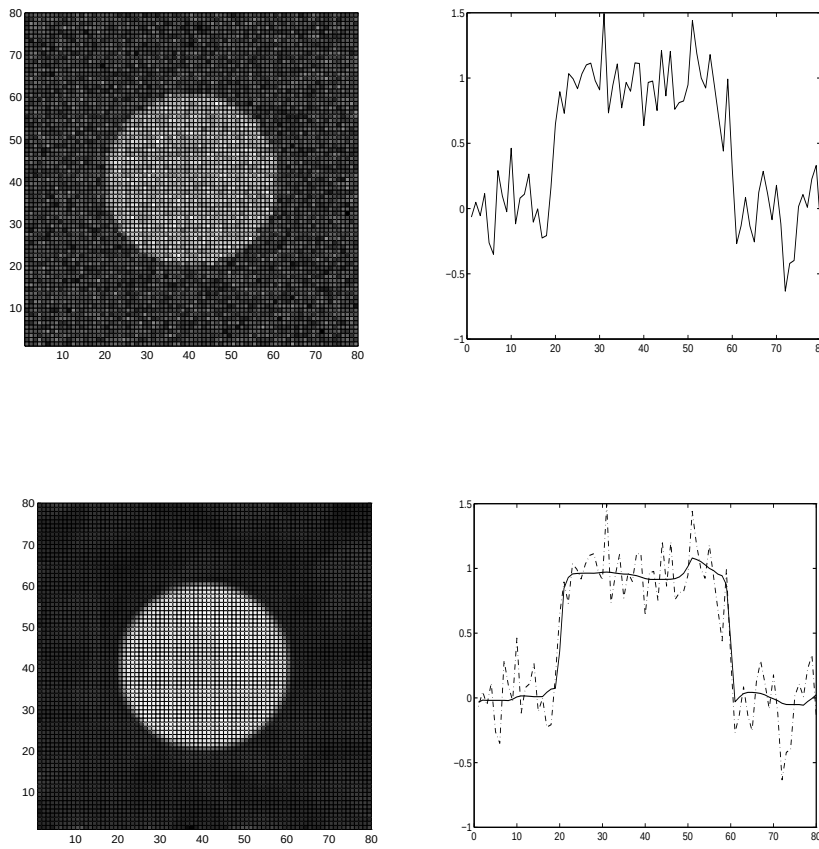


Figure 41. En haut à gauche, image bruitée (20%), à droite, vue d'une coupe. Figures du bas, après analyse euclidienne (EMSS - 6 voisins) pour $dt=0.1$ et 100 itérations.

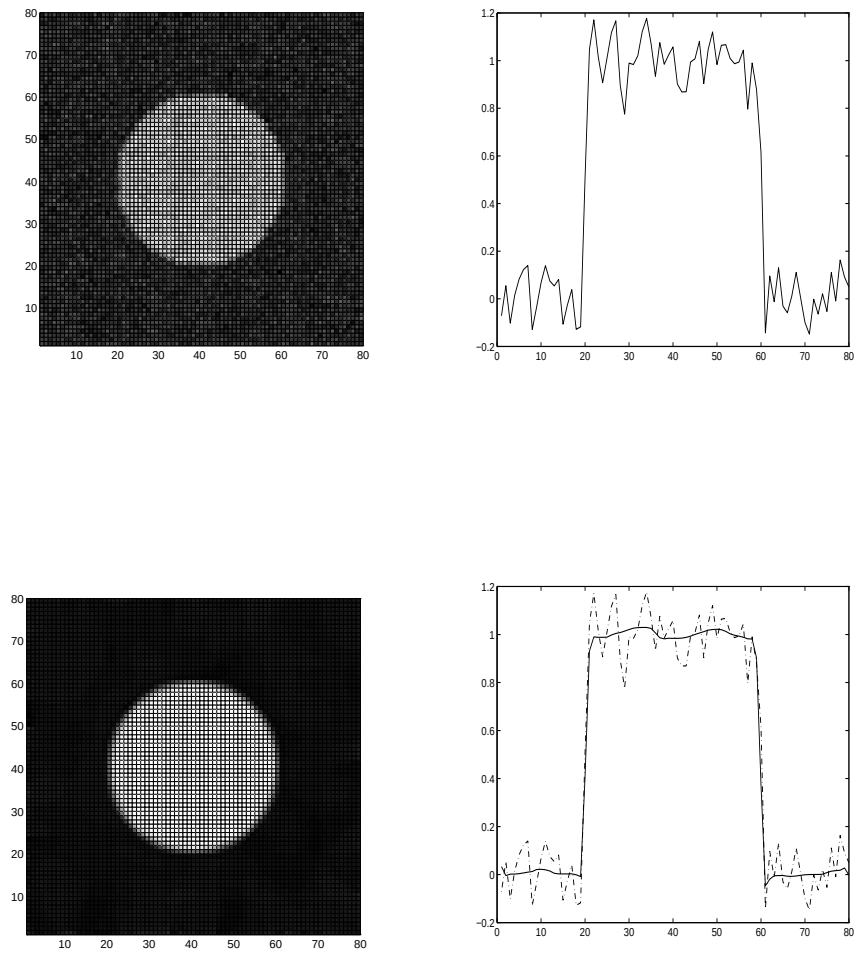


Figure 40. En haut à gauche, image bruitée (10%), à droite, vue d'une coupe. Figures du bas, après analyse euclidienne (EMSS - 6 voisins) pour $dt=0.1$ et 100 itérations.

ANNEXE B

Illustration des analyses multi-échelles

Tests sur des images synthétiques bruitées

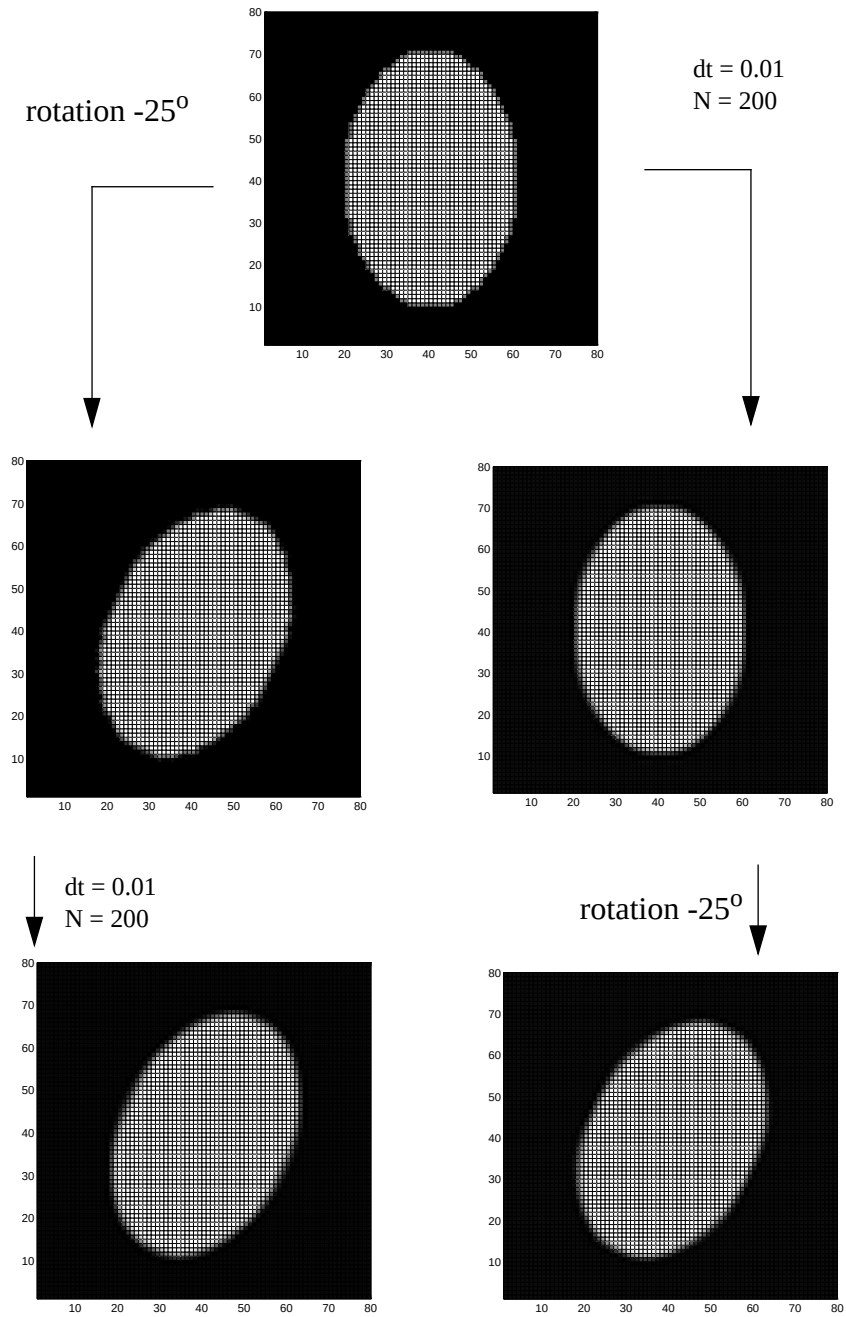


Figure 39. Invariance euclidienne AMSS 6 voisins

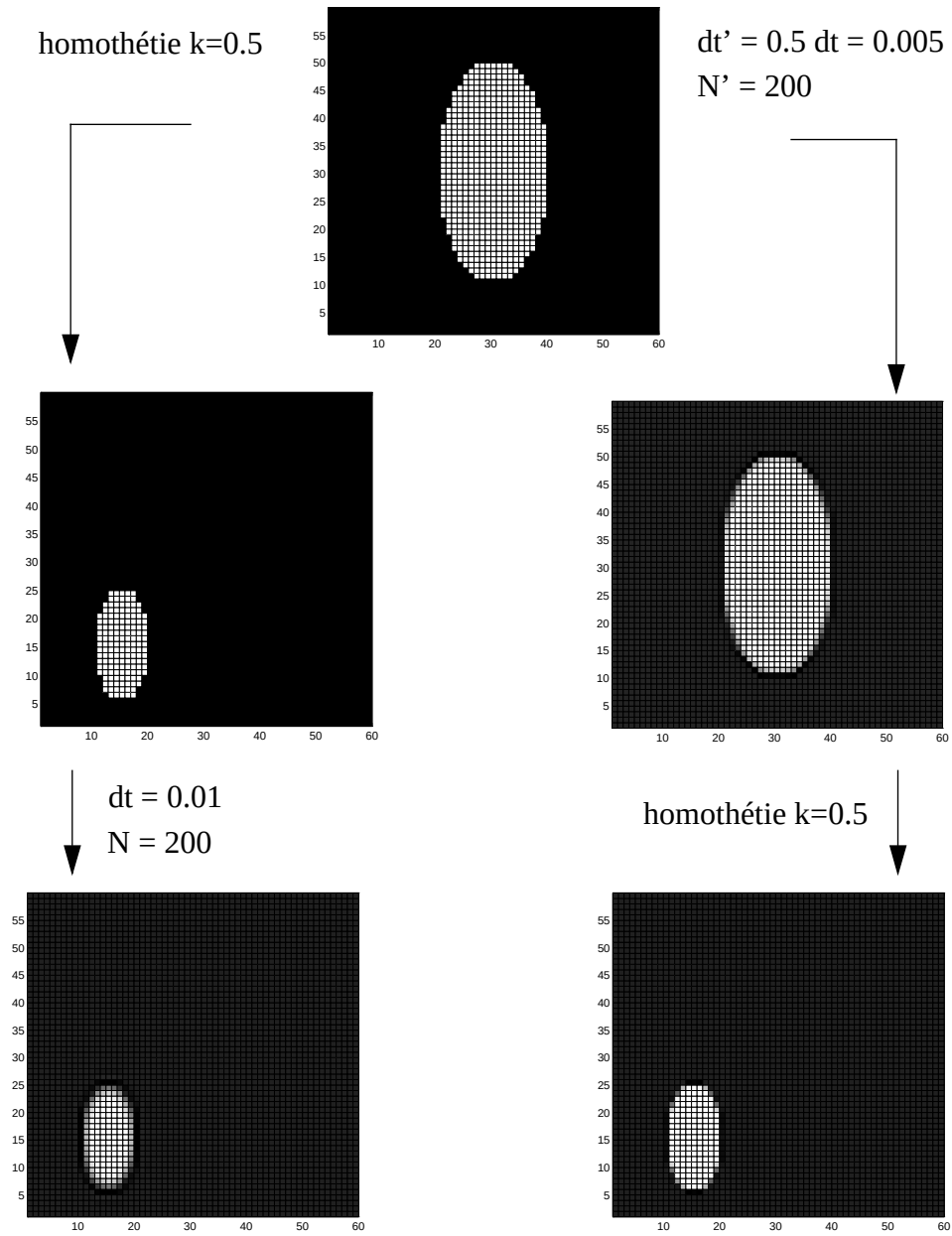


Figure 38. Invariance affine AMSS 6 voisins : illustration de $t' = \sqrt{|\det(A)|} \cdot t$

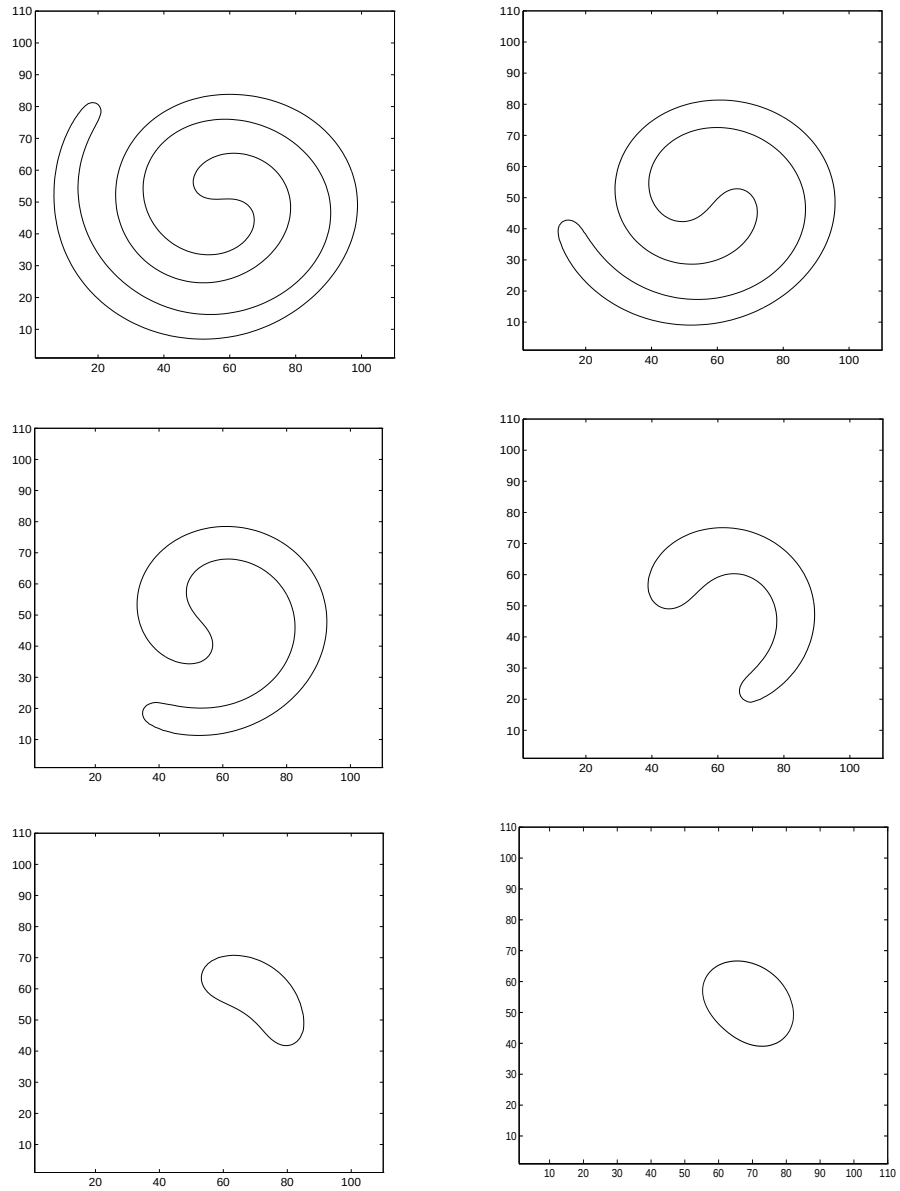


Figure 37. EMSS - 6 voisins ($dt=0.5$, 200 itérations entre deux images successives, de gauche à droite, de haut en bas)

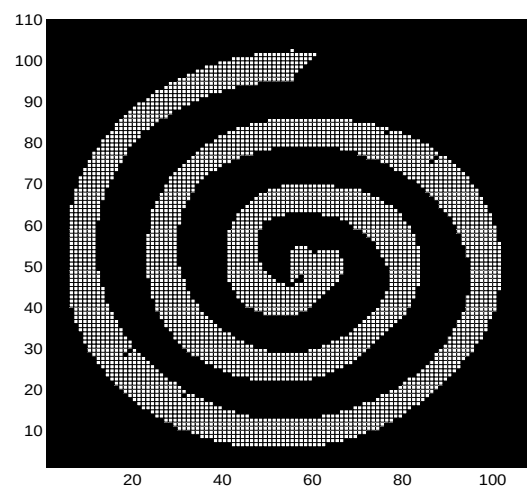


Figure 36. Image synthétique de test 3

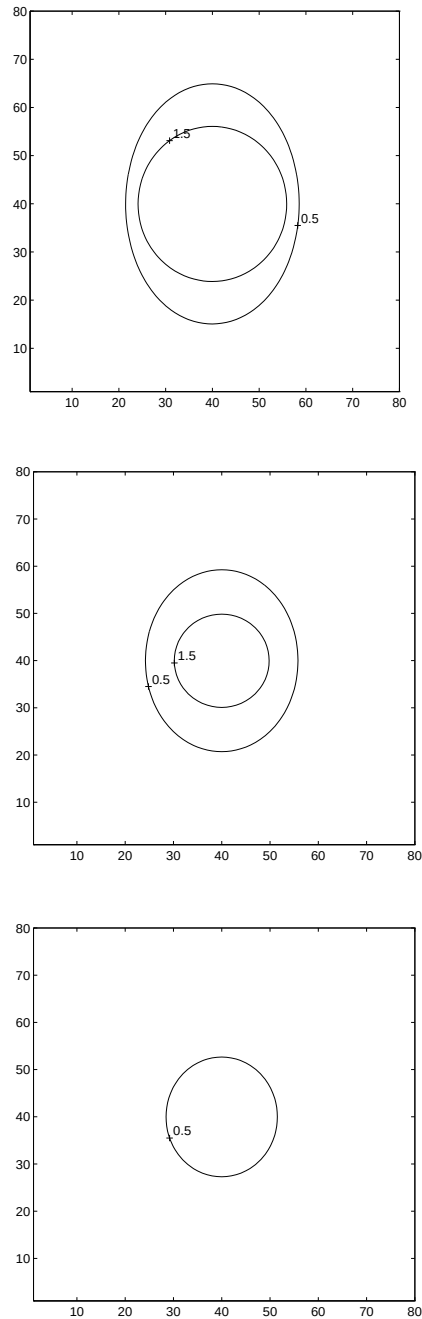


Figure 35. EMSS - 6 voisins ($dt=0.2$, 400 itérations entre deux images successives)

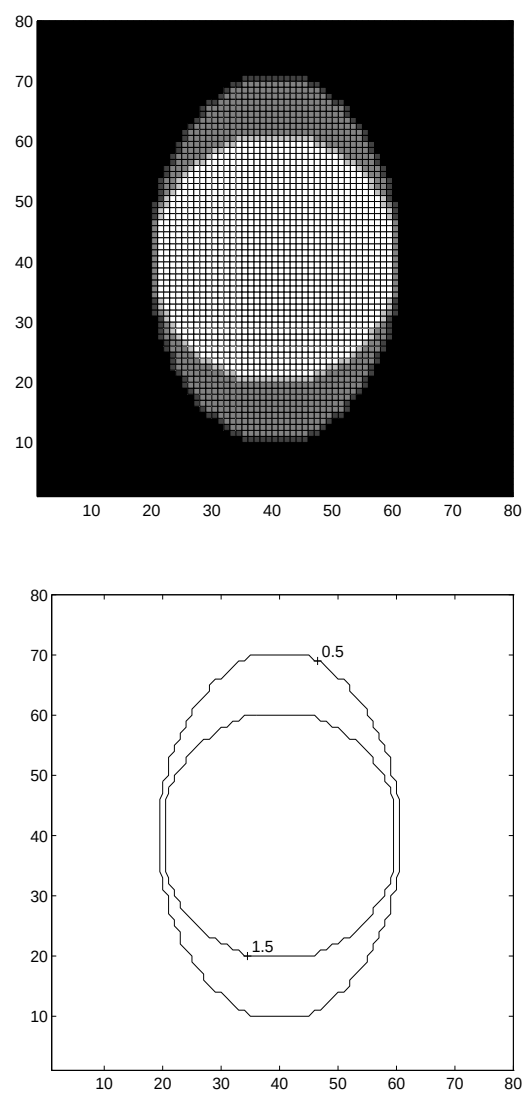


Figure 34. Image synthétique de test 2

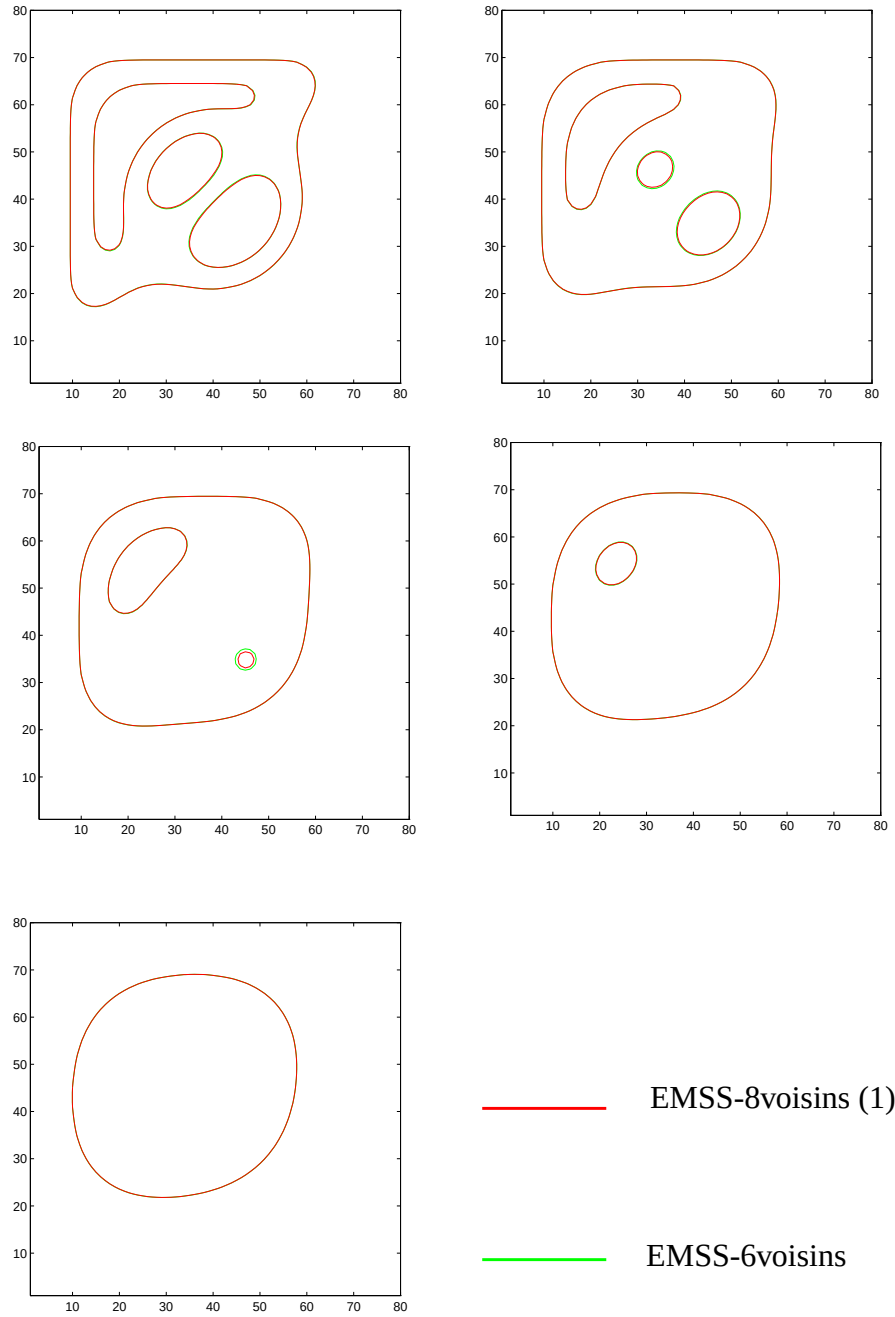


Figure 33. Evolution du contour 0.5 par EMSS ($dt=0.2$ 100 itérations entre deux images successives, de gauche à droite, de haut en bas)

ANNEXE A

Illustration des analyses multi-échelles

Tests sur des images synthétiques

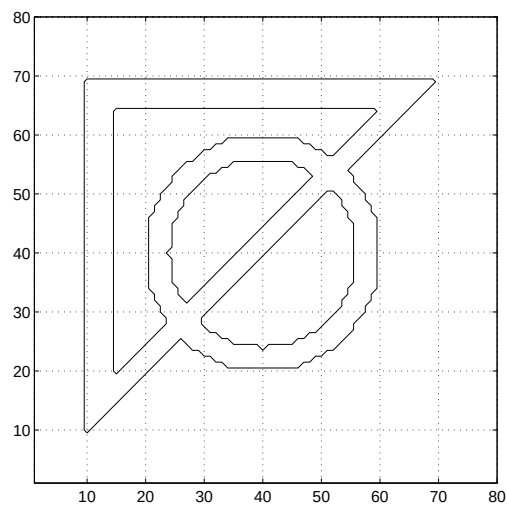


Figure 32. Image synthétique de test 1

(Koenderink, 1990)

J.J. Koenderink, «Solid Shape», MIT press (Cambridge, Ma), 1990.

(Rodriguez et al., 1989)

Rodriguez, J.J. et Aggarwal, J.K., «Navigation using Image Sequence Analysis and 3D Terrain Matching», Workshop on Interpretation of 3D scenes, Austin (Texas), 1989.

(Deriche, 1987)

R. Deriche, «Separable recursive filtering for efficient multi-scale edge detection», Proc. Int. Workshop on Machine Vision and Machine Intelligence, Tokyo (Japon), pp.18-23, Février 1989.

(Asada et al., 1986)

H. Asada, M. Brady, «The curvature primal sketch», IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.8, No.1, Janvier 1986.

(Koenderink, 1984)

J.J. Koenderink, «The structure of images», Biol. Cybern., pp.363-370, 1984.

(Witkin, 1983)

A.P. Witkin, «Scale-space filtering», Proc. of AJCAI, Karlsruhe, 1983.

(Kitchen et al., 1982)

L. Kitchen, A. Rosenfeld, «Gray-level corner detection», Pattern recognition letters, pp.95-102, 1982.

(Marr, 1982)

D. Marr, «Vision», Ed. Freeman & Co., 1982.

BIBLIOGRAPHIE

(Deriche et al., 1997)

R. Deriche, O. Faugeras, «Les EDP en traitement d'images et vision par ordinateur», *Traitement du Signal*, Vol.13 (6) (version préliminaire parue comme Rapport de recherche INRIA No 2697, Novembre 1995).

(Alvarez, 1996)

L. Alvarez, «Images and PDE's», ICAOS'96, 12th International Conference on Analysis and optimization of systems, Paris, 26-28 Juin, 1996.

(Lucido et al., 1996)

L. Lucido, J. Opderbecke, V. Rigaud, R. Deriche, Z. Zhang, «An integrated multi-scale approach for terrain referenced underwater navigation», *Proc. ICIP'96*, Lausanne (Suisse), Sept. 1996.

(Alvarez et al., 1994)

L. Alvarez, J.-M. Morel, «Formalization and computational aspects of image analysis», *Acta Numerica*, pp.1-59, 1994.

(Sapiro et al., 1993)

G. Sapiro, A. Tannenbaum, «Affine invariant and scale-space», *Int. Journal Computer Science*, 11:1, pp.25-44, 1993.

(Morel et al., 1993)

J.-M. Morel, C. Lopez, «Formalisation mathématique et équation fondamentale de la pyramide visuelle», CEREMADE, Univ. Paris-Dauphine, rapport 9303, Février 1993.

(Cohignac et al., 1993)

T. Cohignac, F. Eve, F. Guichard, C. Lopez, J.-M. Morel, «Affine Morphological Scale-Space : Numerical analysis of its fundamental equation», CEREMADE, Univ. Paris-Dauphine, Mai 1993.

(Alvarez et al., 1992)

L. Alvarez, F. Guichard, P.-L. Lions, J.-M. Morel, « Axioms and fundamental equations of images processing», CEREMADE, Univ. Paris-Dauphine, rapport 9231, Mars 1992. Paru dans *Arch. for Rat. Mechanics*, 123(3), pp. 199-257, 1993.

8 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé un bilan, qui se veut autonome, des analyses multi-échelles des images faisant intervenir le formalisme mathématique des équations aux dérivées partielles. Il s'agissait de présenter les résultats théoriques essentiels à la compréhension et l'utilisation de ces techniques mais aussi leur implémentation en illustrant leurs comportements sur des images synthétiques. Nous avons implémenté, pour les analyses multi-échelles euclidienne et affine, cinq schémas numériques différents, et nous les avons comparés, notamment du point de vue de leur comportement face au bruit sur des images synthétiques en calculant le rapport signal à bruit, mais aussi - pour fixer les idées - en utilisant le critère d'évolution du rayon d'un disque, pour lequel nous connaissons la loi théorique. De plus, il nous a semblé important d'attribuer un poids non négligeable au critère visuel dans la comparaison de ces schémas numériques et dans la détermination de la stabilité des processus.

Enfin, nous devons préciser que le formalisme des équations aux dérivées partielles pour l'analyse multi-échelles des images nous ouvre une nouvelle voie de recherche dans le cadre de notre étude concernant la mise en correspondance d'images bathymétriques sous-marines, en ce qui concerne la segmentation de nos cartes de profondeur, mais aussi en apportant un cadre théorique solide à l'ensemble de la méthode, notamment quant aux qualités d'invariances morphologique et euclidienne (ou affine) des opérateurs.

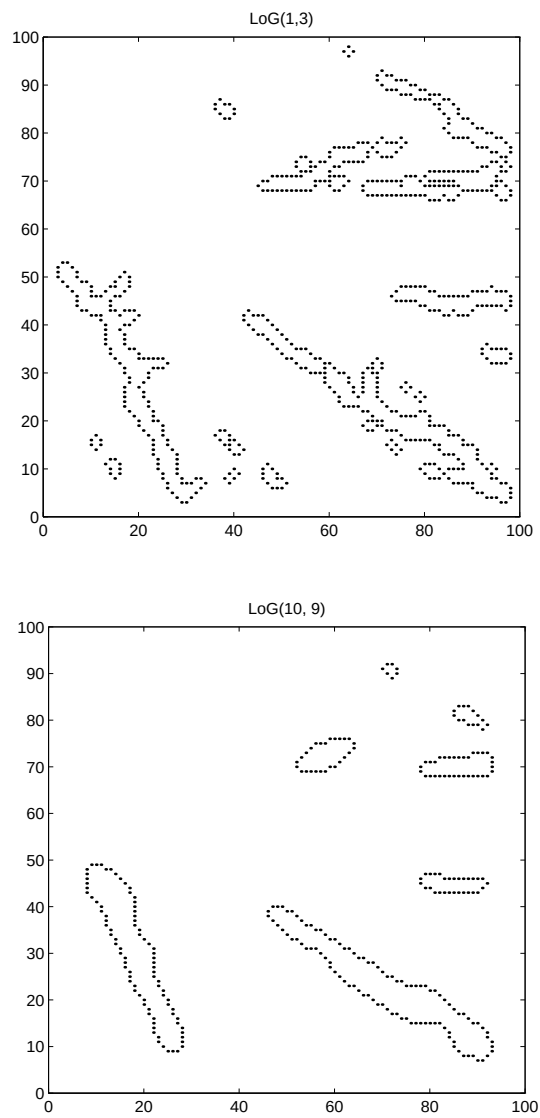


Figure 31. Passages par zéro du LoG - Cas D

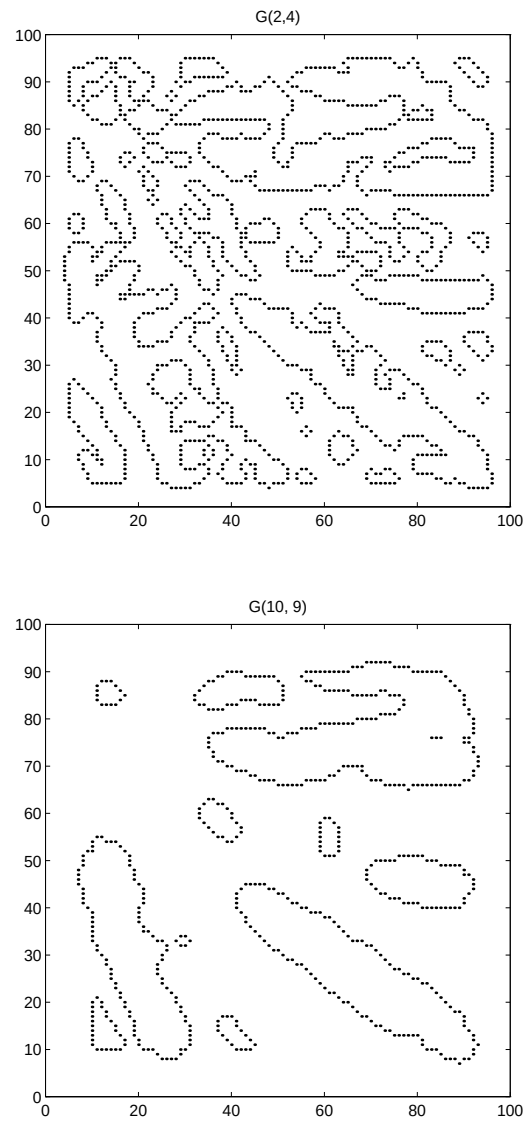


Figure 30. Passages par zéro du laplacien d'une image lissée par une gaussienne - Cas C

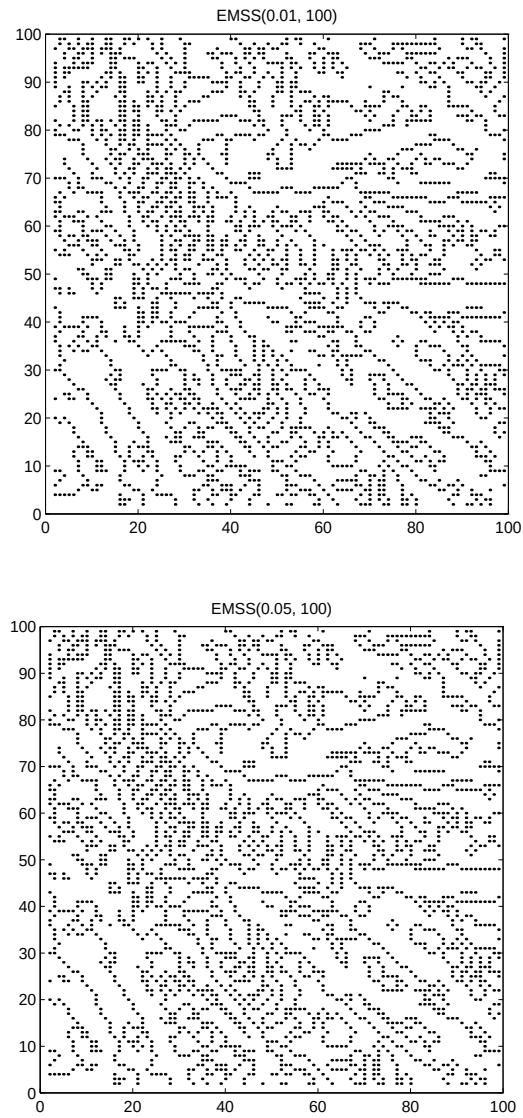


Figure 29. Passages par zéro du laplacien d'une image analysée par EMSS (dt, N) - Cas B

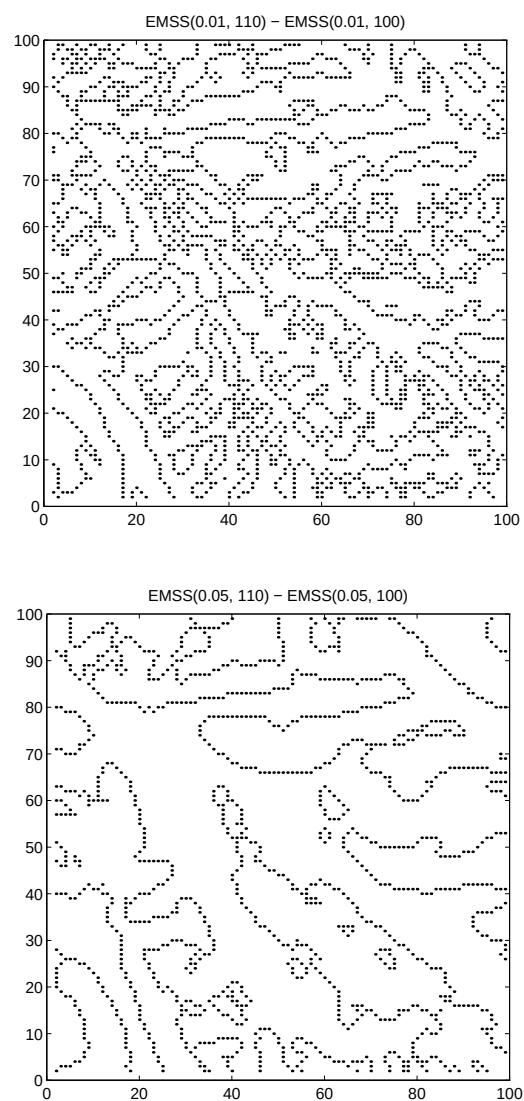


Figure 28. Passages par zéro de la différence de deux images après EMSS - Cas A

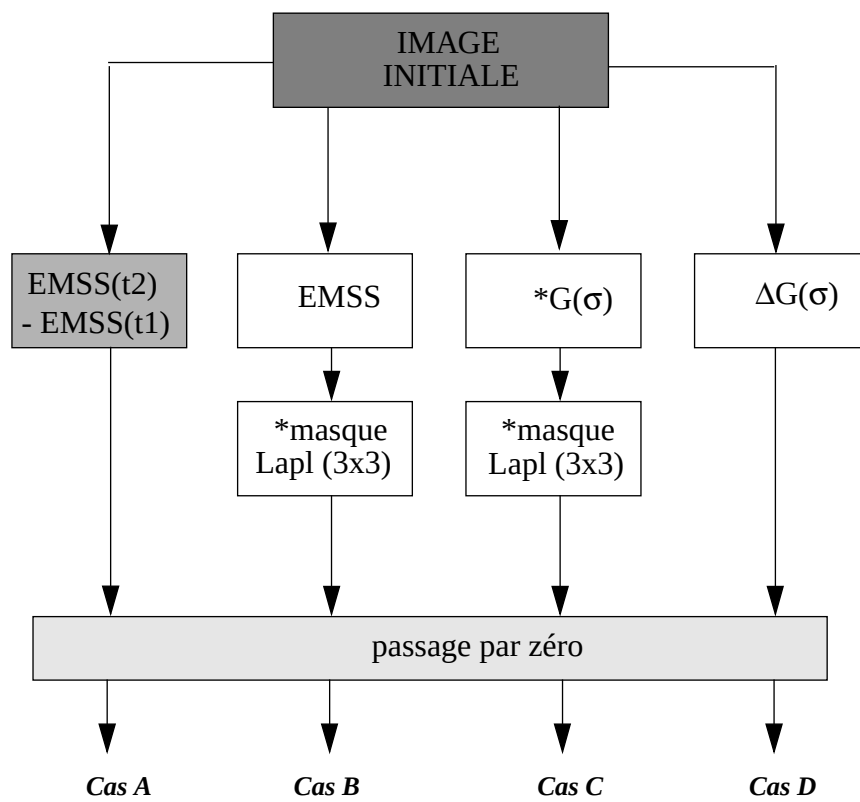


Figure 27. Schéma de principe

Dans le cadre d'une représentation multi-échelle (Koenderink, 1984), la convolution de l'image originale avec des gaussiennes de variances différentes est la solution de l'équation aux dérivées partielles suivante (*équation de la chaleur* - éqt. (67)) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} I(x, y, t) = \nabla^2 I(x, y, t) \\ I(x, y, 0) = I_0(x, y) \end{cases} \quad (67)$$

Dans ce cas, les axiomes de linéarité, invariance euclidienne, structure pyramidale et comparaison locale sont vérifiés. Rappelons que, si l'on souhaite de plus satisfaire à l'invariance morphologique, alors l'opérateur -qui n'est plus une gaussienne- est solution de l'EDP suivante (68):

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial t} = |\nabla u| \cdot G\left(\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right), t\right) \\ I(x, y, 0) = I_0(x, y) \end{cases} \quad (68)$$

Cet opérateur (*Euclidian Morphological Scale-Space*) vérifie non seulement les propriétés de la gaussienne mais aussi il est invariant morphologiquement. En outre, une approximation du Laplacien d'une gaussienne peut s'exprimer par la différence de deux gaussiennes successives (Deriche, 1989) ; qu'en est-il si nous effectuons la différence de deux images à des échelles successives obtenues par l'opérateur EMSS?

C'est la comparaison, dans le cadre de la détection de caractéristiques, que nous proposons dans cette application. Le schéma de principe suivant résume ces quatre algorithmes de détection.

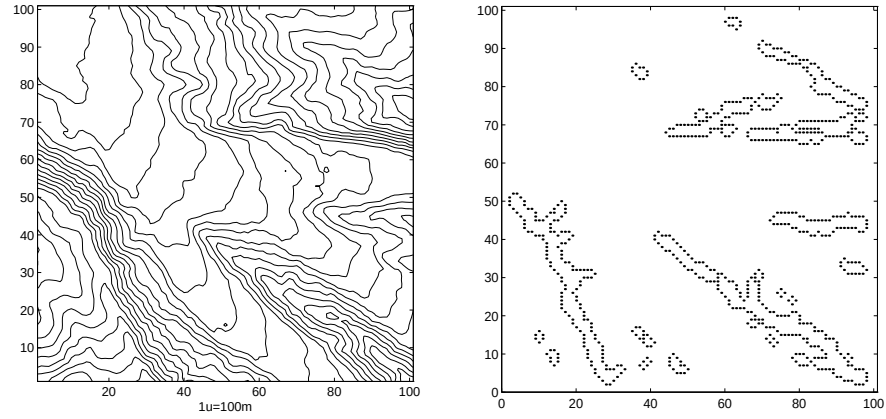


Figure 26. Une carte bathymétrique et sa carte de falaise (droite)

Les cartes de falaises sont obtenues par détection des passages par zéro du laplacien de l'image (65).

$$\Delta L = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Si nous travaillons sur des images préalablement lissées par une gaussienne bidimensionnelle, alors l'opération de détection des contours dans l'image du laplacien est équivalente à la détection des passages par zéro dans l'image du «laplacien de la gaussienne».

Par suite, nous obtiendrons les cartes de falaises par convolution de la carte bathymétrique avec un filtre «Laplacien d'une Gaussienne» (filtre LoG) puis recherche des passages par zéro. Dans le cas discret, le filtre LoG s'exprime par (66):

$$\nabla^2 G(i, j) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} (r^2 - 2\sigma^2) \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \text{ avec } r^2 = i^2 + j^2 \quad (66)$$

pour $i \in [-M, M]$ et $j \in [-M, M]$

Il dépend donc de deux paramètres : la variance σ^2 de la gaussienne et le rayon M du filtre.

6.4 Conclusions sur la comparaison des schémas numériques

Afin de comparer les cinq schémas numériques qui permettent d'implémenter les analyses multi-échelles euclidienne et affine, nous avons utilisé deux critères quantitatifs, l'un étant l'évolution du rayon d'un disque (dont nous connaissons la loi théorique), l'autre étant le rapport signal à bruit. Une comparaison qualitative est possible lorsque nous nous intéressons aux vues en coupe successives dans le cas du disque.

S'il nous apparaît difficile d'extraire de cet ensemble de résultats une conclusion définitive et sans appel sur ces schémas numériques, nous pouvons en revanche donner quelques pistes dans le choix des schémas.

Ainsi le schéma numérique d'après (§ 3.2.3) est celui dont l'erreur quadratique sur l'estimation du rayon du disque est la plus forte : il s'agit du schéma qui produit une évolution du disque la plus différente de la loi théorique. C'est aussi ce troisième schéma qui conduit aux rapports SNR les plus faibles par rapport aux autres schémas et dans les mêmes conditions de tests.

Enfin, si nous considérons des résultats plus qualitatifs ((figure 21) et Annexe D), nous constatons que si la propriété de stabilité L_∞ donnée dans (Alvarez et al., 1994) n'est pas vérifiée pour les cinq schémas, on constate que les schémas d'après (§ 3.2.2) et (§ 3.2.3) sont fortement instables de ce point de vue. Nous la rappelons ci-dessous (64):

$$[\text{stabilité } L_\infty] \text{ Soient } c \text{ et } d \text{ des réels. Si } \gamma \leq u(x) \leq c \text{ alors } \gamma \leq Tu(x) \leq c \quad (64)$$

7 Application à la détection de caractéristiques

Le problème de navigation référencée terrain par mise en correspondance de cartes bathymétriques passe par une étape préalable de segmentation du signal.

Une première étude (Lucido et al., 1996), essentiellement fondée sur les résultats obtenus par (Rodriguez et al., 1989), a montré que le passage à une représentation des images bathymétriques en «cartes de falaises» (figure 26) donnait des résultats probants dans cette phase de segmentation : la conservation des contours de forte pente est suffisante pour une mise en correspondance correcte et une estimation des paramètres de navigation.

Tableau 7 : SNR sur l'image du disque, pour AMSS (100 itérations, dt=0.01)

Méthode	SNR (dB)		
image initiale	2.42	-2.01	-4.93
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.1)	5.93	1.50	-1.42
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.2)	6.21	1.79	-1.14
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.3)	5.0	0.58	-2.33
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.4)	5.91	1.48	-1.44
AMSS - $6v$	5.76	1.33	-1.59

Tableau 8 : SNR sur l'image du disque, pour AMSS (100 itérations, dt=0.025)

Méthode	SNR (dB)		
image initiale	2.42	-2.01	-4.93
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.1)	8.74	4.65	1.79
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.2)	8.96	4.88	2.01
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.3)	7.03	2.79	-0.07
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.4)	8.75	4.65	1.80
AMSS - $6v$	8.56	4.44	1.59

En outre, nous précisons que le SNR est calculé sur des images «centrées» sur la moyenne des niveaux de gris. Les résultats sont présentés dans les tableaux 5 et 6 suivants pour l'EMSS et dans les tableaux 7 et 8 pour l'AMSS. D'autre part, en Annexe B sont présentés différents test des analyses multi-échelles sur des images synthétiques bruitées.

Tableau 5 : SNR sur l'image du disque, pour EMSS (100 itérations, $dt=0.1$)

Méthode	SNR (dB)		
image initiale	2.42	-2.01	-4.93
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.1)	12.33	8.75	6.18
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.2)	12.12	8.63	6.03
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.3)	11.30	7.37	4.69
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.4)	12.27	8.71	6.15
EMSS - $6v$	12.33	8.71	6.12

Tableau 6 : SNR sur l'image du disque, pour EMSS (100 itérations, $dt=0.2$)

Méthode	SNR (dB)		
image initiale	2.42	-2.01	-4.93
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.1)	10.94	8.40	6.21
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.2)	10.83	8.13	5.82
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.3)	10.39	7.44	5.05
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.4)	10.84	8.33	6.16
EMSS - $6v$	10.88	8.37	6.20

D'autre part, il est également intéressant de présenter l'évolution de $a(t)$ et de $b(t)$ séparément (figure 25) :

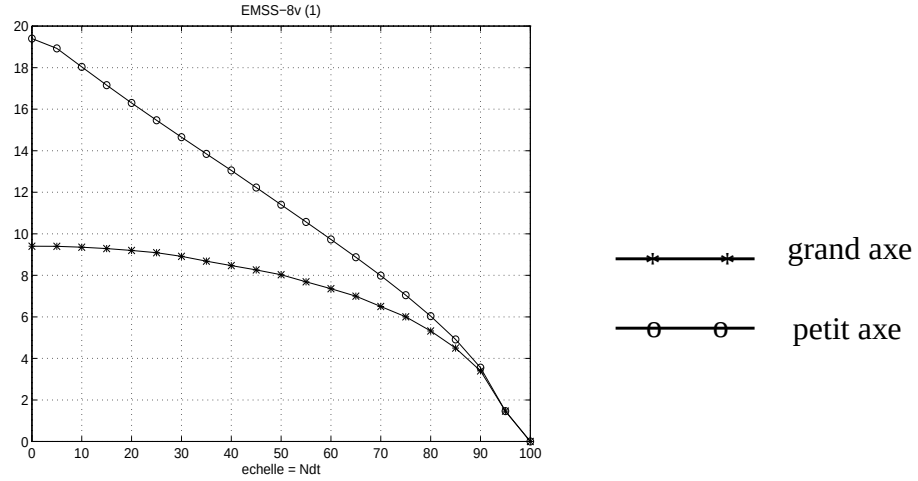


Figure 25. Evolution du grand axe et du petit axe de l'ellipse pour l'EMSS-8 voisins (1)

On constate que l'évolution des deux axes de l'ellipse converge vers des valeurs identiques dès l'échelle 90, pour laquelle l'ellipse est devenue un disque de rayon 3,4 pixels.

6.3 Rapport Signal-sur-Bruit

Parmi les critères quantitatifs les plus courants, nous avons retenu le rapport signal à bruit (Signal to Noise Ratio, SNR). Il s'exprime en décibels par le rapport entre l'image de référence x et l'image y après analyse - euclidienne ou affine (63) :

$$SNR(dB) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\|x\|^2}{\|x - y\|^2} \right) \quad (63)$$

Dans les tableaux suivants, nous avons calculé le SNR après analyse sur l'image bruitée du disque. Trois niveaux de bruit additif gaussien sont utilisés : 30% ($snr=2.42dB$), 50% ($snr=-2.01dB$) et 70% ($snr=-4.93dB$).

6.2 Extrapolation à l'évolution du grand-axe et du petit-axe de l'ellipse

En utilisant les résultats concernant l'évolution du rayon du disque, nous pouvons en déduire l'évolution du produit $a(t) \cdot b(t)$, $a(t)$ étant le grand axe et $b(t)$ son petit axe, dans le cas de l'ellipse (62), ce qui correspond à l'évolution de son aire (figure 24):

$$a(t) \cdot b(t) = a_0 \cdot b_0 - 2Ndt \quad (62)$$

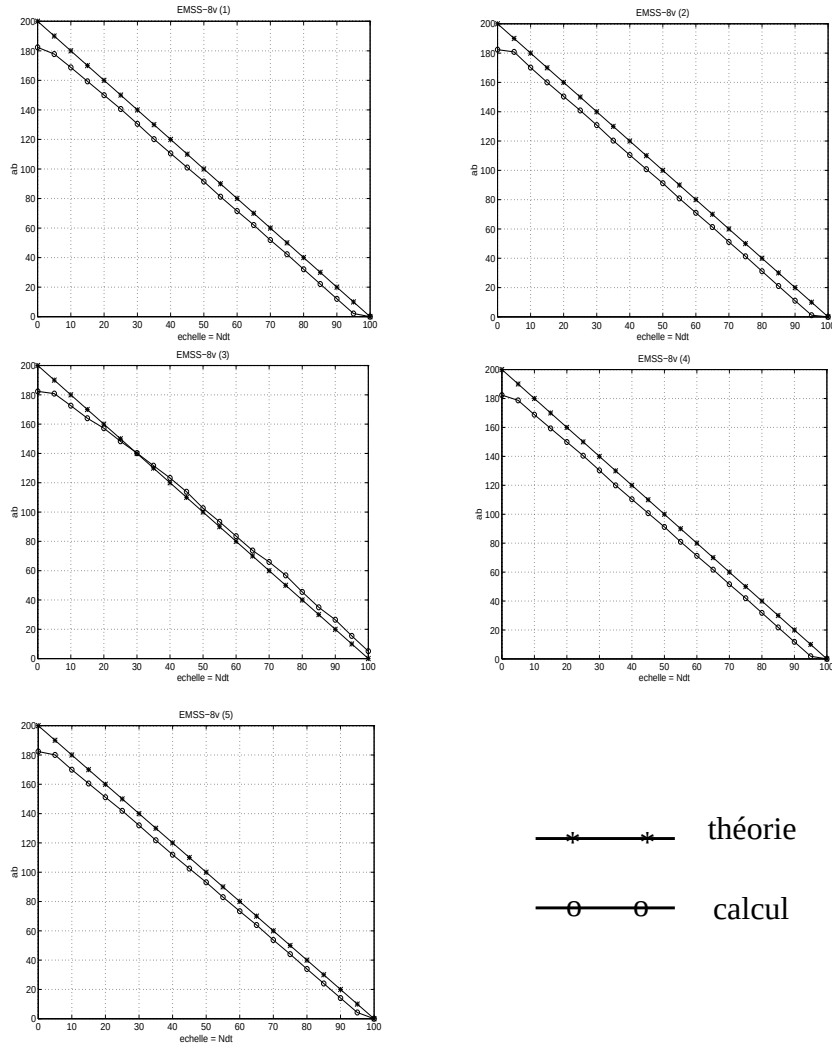


Figure 24. Evolution du produit grand-axe * petit-axe de l'ellipse pour l'EMSS

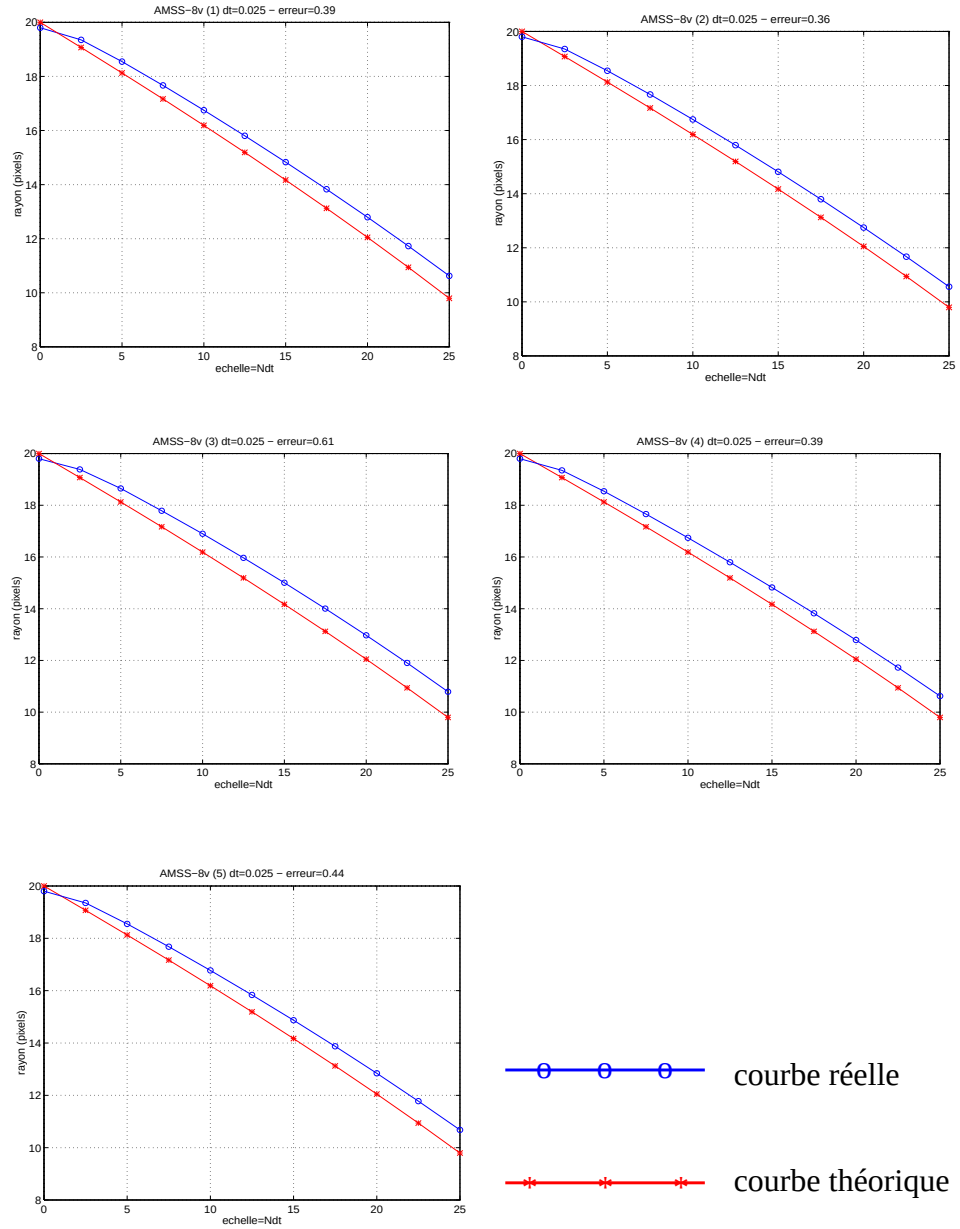


Figure 23. Evolution du rayon d'un disque pour l'AMSS ($dt=0.025$)

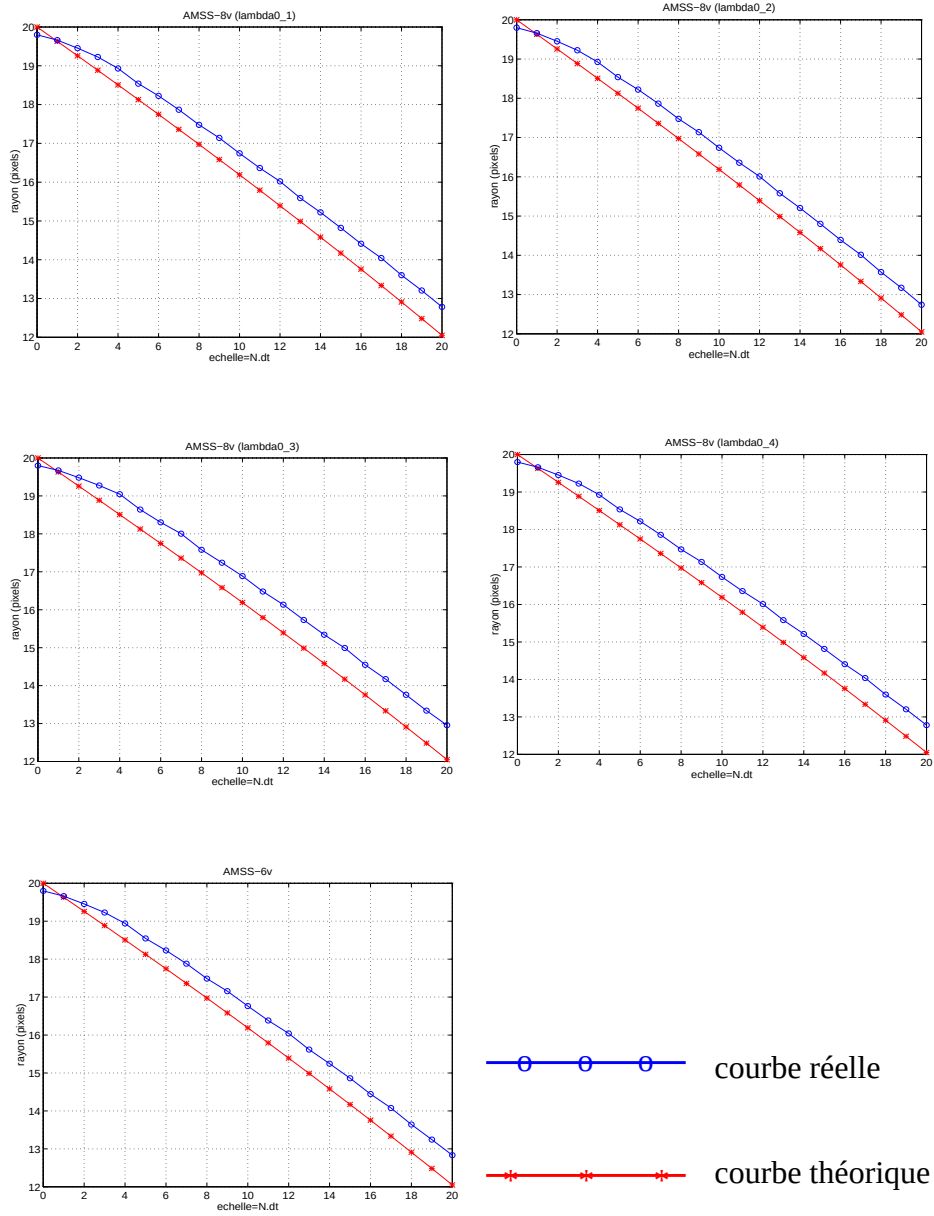


Figure 22. Evolution du rayon d'un disque pour l'AMSS ($dt=0.01$)

6.1.4. Résultats pour l'AMSS

Comme précédemment, nous avons superposé la courbe théorique et la courbe réelle d'évolution du rayon dans le cas de l'AMSS et pour ses cinq implémentations.

Le rayon du disque est déterminé au sub-pixel près, pour l'isophote de valeur 0.6, toutes les 100 itérations, pour $dt=0.1$ puis $dt=0.2$. L'erreur quadratique est calculée et présentée dans les tableaux 3 et 4 suivants.

Tableau 3 : Erreur quadratique sur le rayon calculé pour l'AMSS ($dt=0.01$)

Méthode	Erreur quadratique
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.1)	0.31
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.2)	0.29
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.3)	0.46
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.4)	0.30
AMSS - $6v$	0.33

Tableau 4 : Erreur quadratique sur le rayon calculé pour l'AMSS ($dt=0.025$)

Méthode	Erreur quadratique
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.1)	0.39
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.2)	0.36
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.3)	0.61
AMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.4)	0.39
AMSS - $6v$	0.44

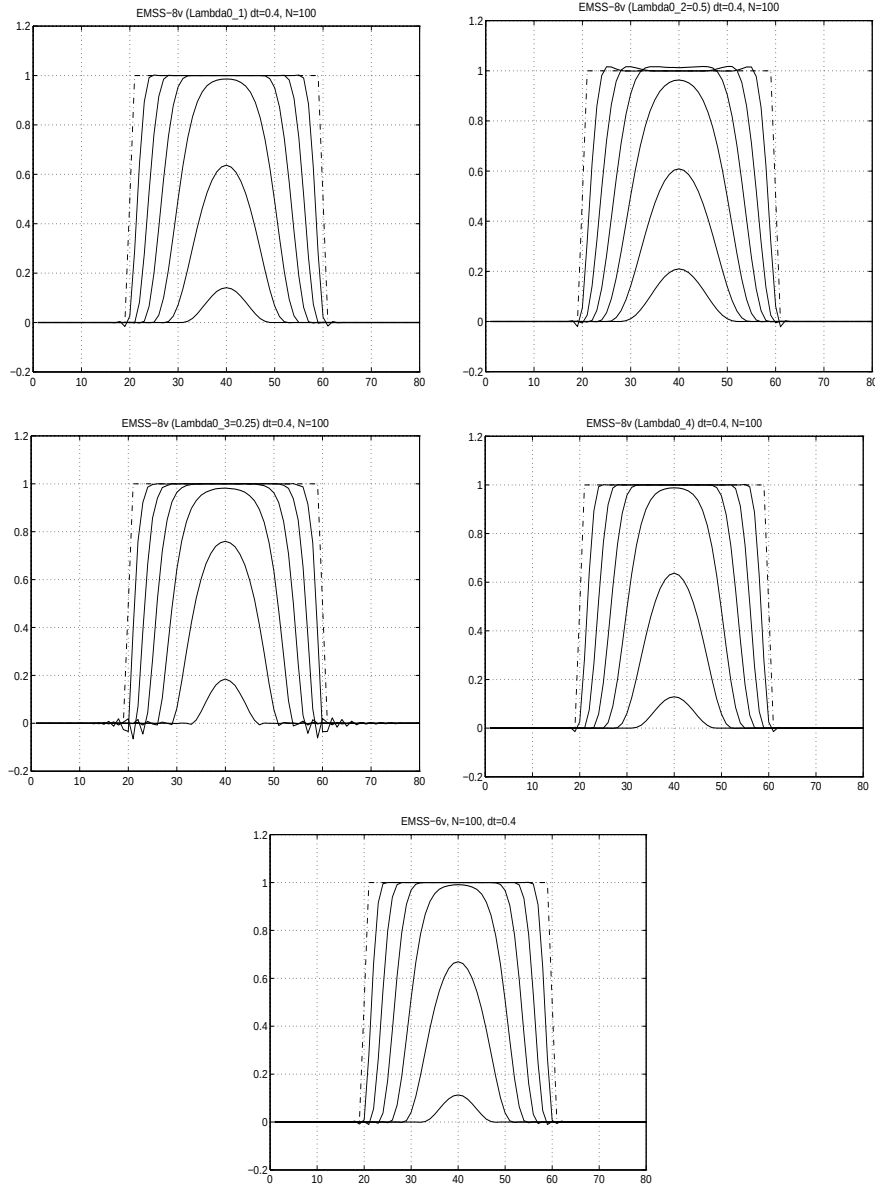


Figure 21. Evolution du disque en coupe selon les 5 schémas d'implémentation de l'EMSS

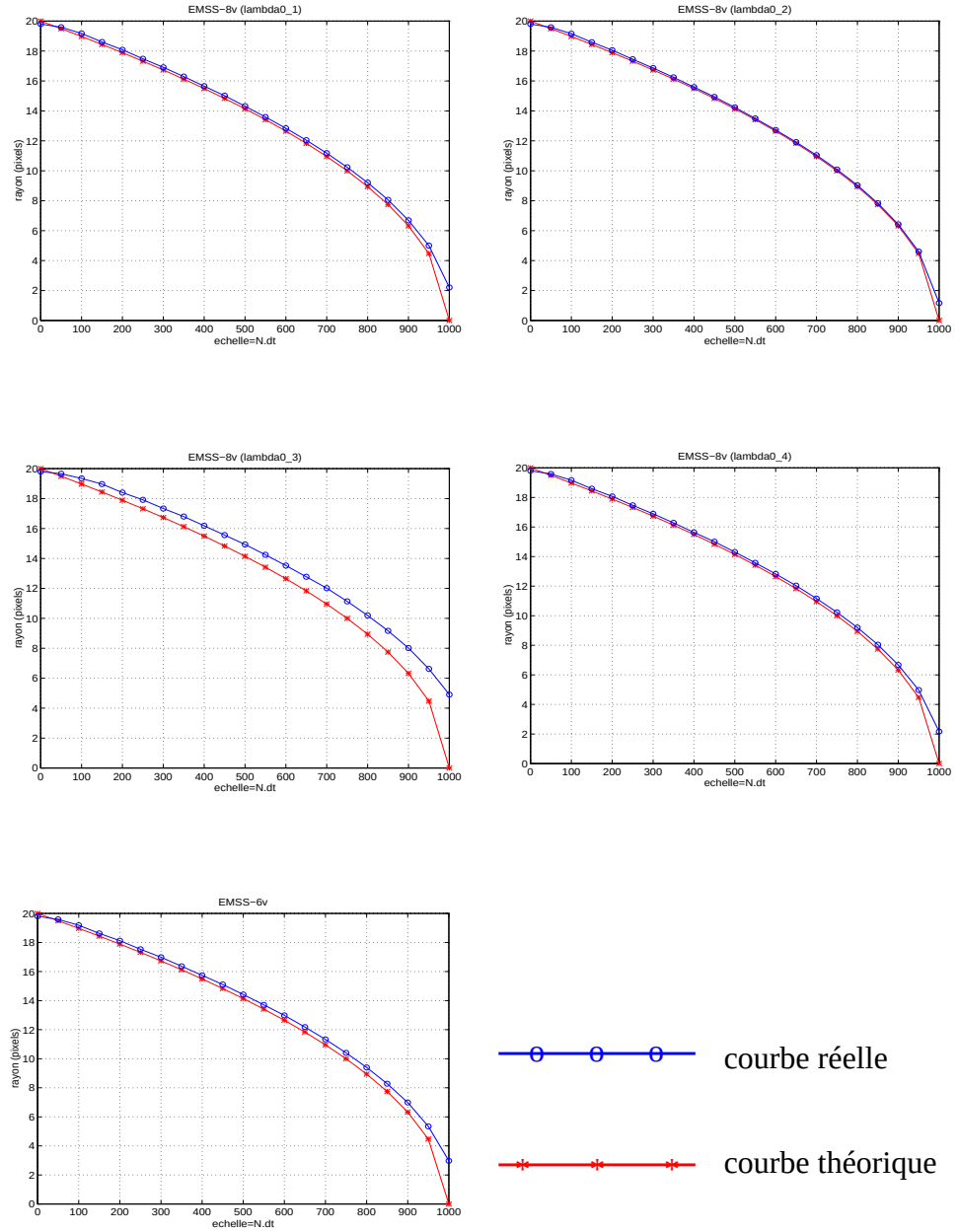


Figure 20. Evolution du rayon d'un disque pour l'EMSS ($dt=0.2$)

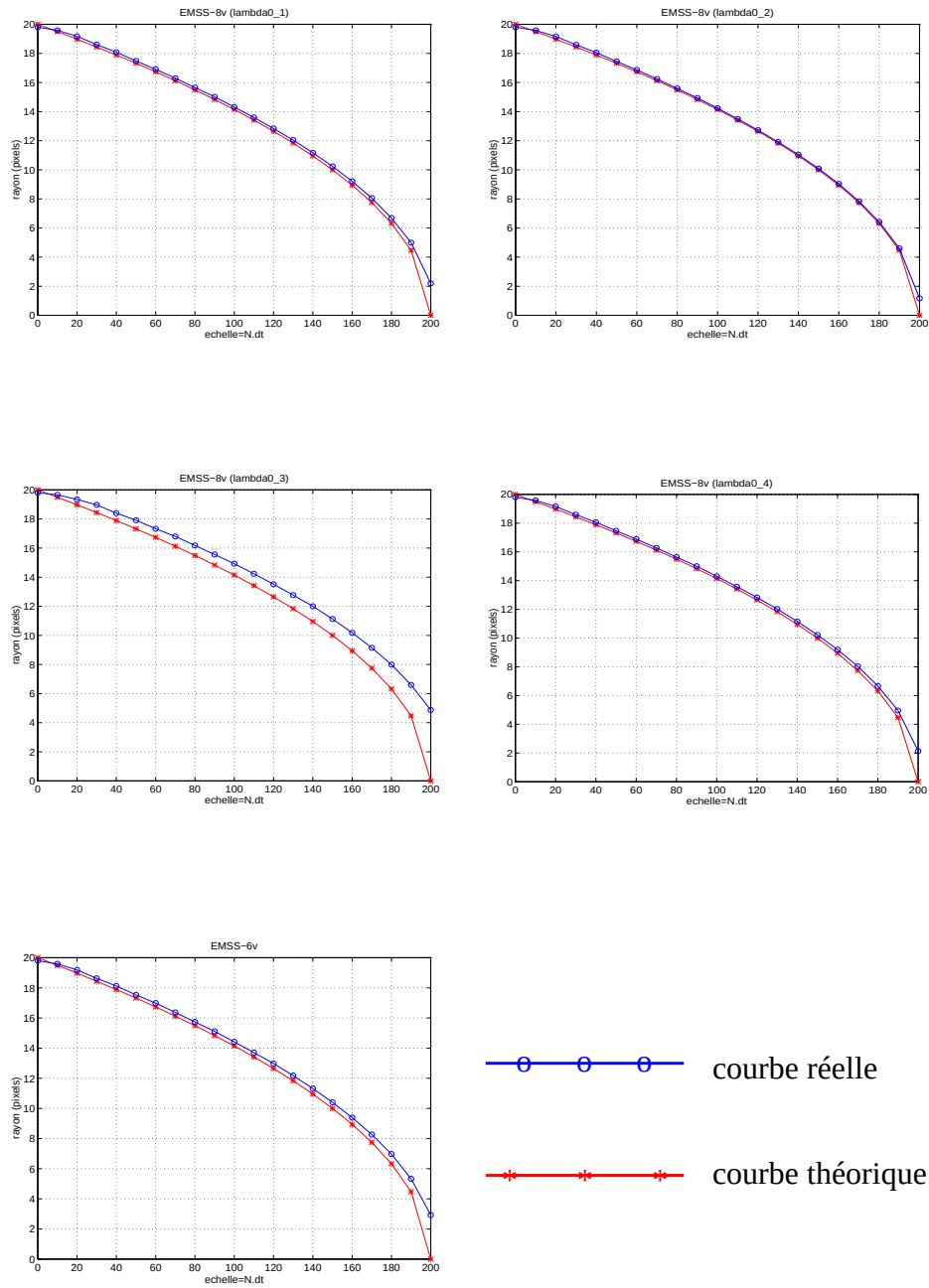


Figure 19. Evolution du rayon d'un disque pour l'EMSS ($dt=0.1$)

implémentations.

Le rayon du disque est déterminé au sub-pixel près, pour l'isophote de valeur 0.6, toutes les 100 itérations, pour $dt=0.1$ puis $dt=0.2$ (figure 20). L'erreur quadratique est calculée et présentée dans les tableaux 1 et 2. Enfin, nous présentons (figure 21) les vues en coupe du disque au cours de l'analyse euclidienne pour ses cinq schémas numériques.

Tableau 1 : Erreur quadratique sur le rayon calculé pour l'EMSS ($dt=0.1$)

Méthode	Erreur quadratique
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.1)	0.29
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.2)	0.08
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.3)	2.12
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.4)	0.27
EMSS - $6v$	0.56

Tableau 2 : Erreur quadratique sur le rayon calculé pour l'EMSS ($dt=0.2$)

Méthode	Erreur quadratique
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.1)	0.297
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.2)	0.079
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.3)	2.17
EMSS - $8v - \lambda_0$ (§ 3.2.4)	0.28
EMSS - $6v$	0.58

Le moins provient des conventions de signes qui sont sortantes pour la composante normale et $curv(u)=1/R(t)$.

Une solution de cette équation est :

$$R(t) = \sqrt{(Ro^2 - t^2)} \quad (57)$$

- Cas affine

De la même façon nous obtenons l'équation différentielle:

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t) = [-t \times curv(u)]^{1/3} \quad (58)$$

Une solution particulière de cette équation est :

$$R(t) = (Ro^{4/3} - t^{4/3})^{3/4} \quad (59)$$

6.1.2. Changement d'échelle

Il est important de noter que pour le calcul des images, l'équation différentielle est implémentée après le changement d'échelle de la variable t . De plus, le calcul est discrétisé et s'effectue sur une période $N.dt$.

Ainsi $t1=N.dt$, mais $t1 = \frac{1}{2} \times t^2$ dans le cas euclidien et $t1 = \frac{3}{4} \times t^{4/3}$ dans le cas affine.

Les formules théoriques du rayon dans le cas discret sont donc les suivantes :

$$\text{euclidien} \quad R(t) = \sqrt{[Ro^2 - 2 \times N \times dt]} \quad (60)$$

$$\text{affine} \quad R(t) = \left[Ro^{4/3} - \frac{4}{3} \times N \times dt \right]^{3/4} \quad (61)$$

6.1.3. Résultats pour l'EMSS

Sur la figure suivante (figure 19), nous avons superposé la courbe théorique et la courbe réelle d'évolution du rayon dans le cas de l'EMSS et pour ses cinq

5.4 Conclusions sur la stabilité des analyses EMSS et AMSS

Nous avons pu constater sur les figures précédentes de ce paragraphe les effets du choix du paramètre dt dans la stabilité - ou l'instabilité! - des analyses. Bien entendu, ces résultats sont visuels. En revanche, ils permettent de mettre en évidence expérimentalement les limites théorique (dans le cas de l'EMSS, Cf. (53)) et expérimentée par d'autres (dans le cas de l'AMSS, Cf. (54)). En fait, nous constatons que ces limites dépendent de la forme et de la taille de l'image, mais il reste que, quelles que soient la taille et la forme de l'image initiale, *la stabilité n'est pas nécessairement assurée au delà de ces limites*, et c'est sans doute ce qu'il nous faudra retenir ici.

6 Comparaison des schémas numériques

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté quelques exemples concernant les analyses multi-échelles euclidienne et affine, en utilisant des images synthétiques et en présentant leur évolution. En outre, nous avons présenté cinq schémas numériques différents pour implémenter ces analyses ; et cette présentation ne saurait être complète sans une comparaison -qualitative et/ou quantitative- des cinq choix possibles d'implémentation. En ce qui concerne les critères de comparaison quantitatifs, nous nous fierons à celui de l'évolution du rayon d'un disque (dont la loi peut être déterminée théoriquement) et à celui du rapport signal à bruit. Les critères visuels sont quant à eux présentés en Annexes D et E de ce document.

6.1 Critère du rayon du disque

6.1.1. Calcul théorique du rayon

• Cas euclidien

On a :

$$G\left(t, \frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial t} R(t) \left(t, 0, \frac{1}{r}\right) \quad (55)$$

Or $G(t, \text{curv}(u)) = t \cdot \text{curv}(u)$, ceci nous mène directement à l'équation différentielle suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t} R(t) = -t \times \text{curv}(u) \quad (56)$$

- AMSS 6 voisins

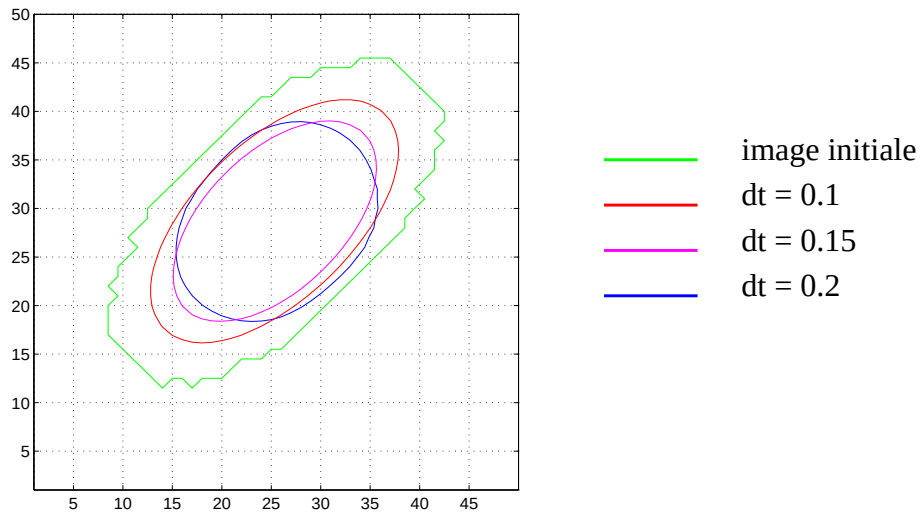


Figure 17. Stabilité de l'ellipse pour l'AMSS 6 voisins (100 itérations)

- AMSS 8 voisins

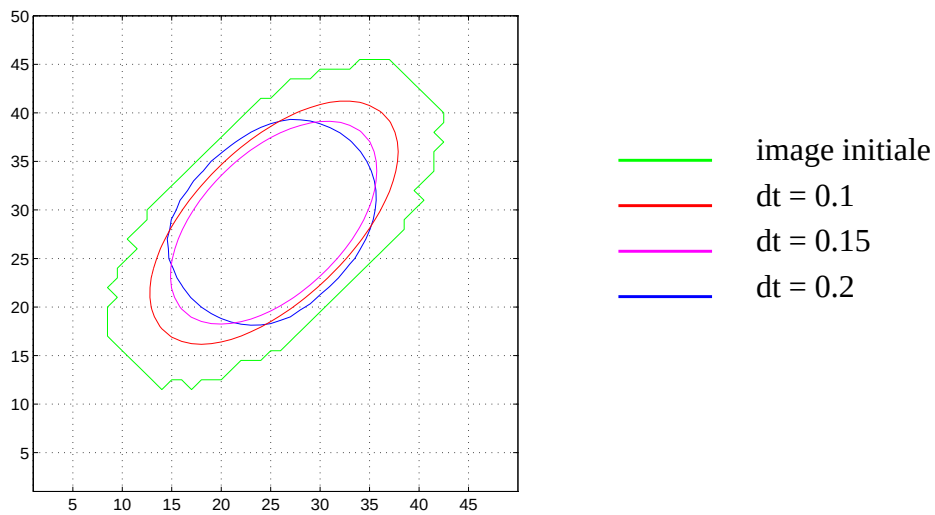


Figure 18. Stabilité de l'ellipse pour l'AMSS 8 voisins (100 itérations)

- EMSS 6 voisins

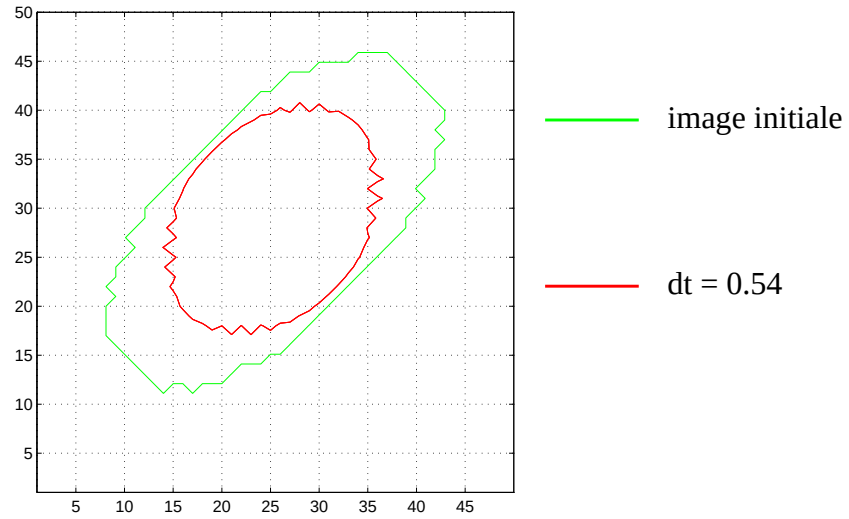


Figure 15. EMSS 6 voisins, 100 itérations

- EMSS 8 voisins

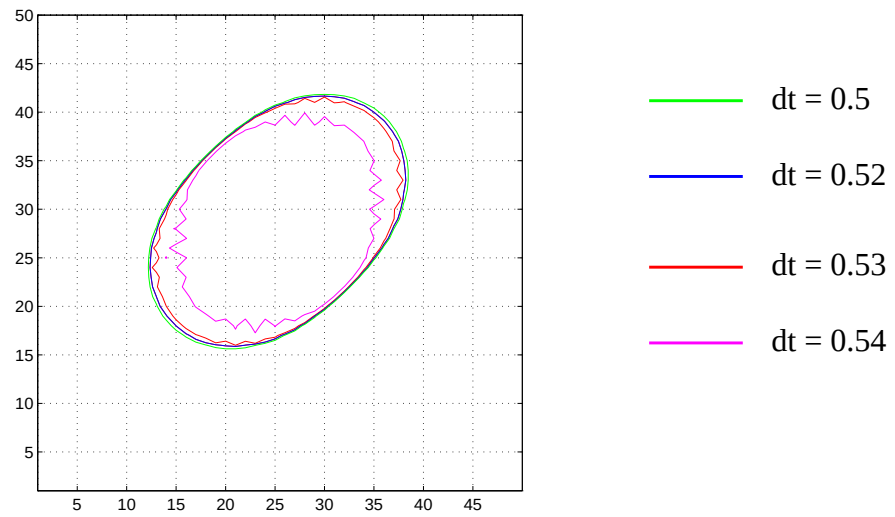


Figure 16. EMSS 8 voisins, 100 itérations

- AMSS 8 voisins

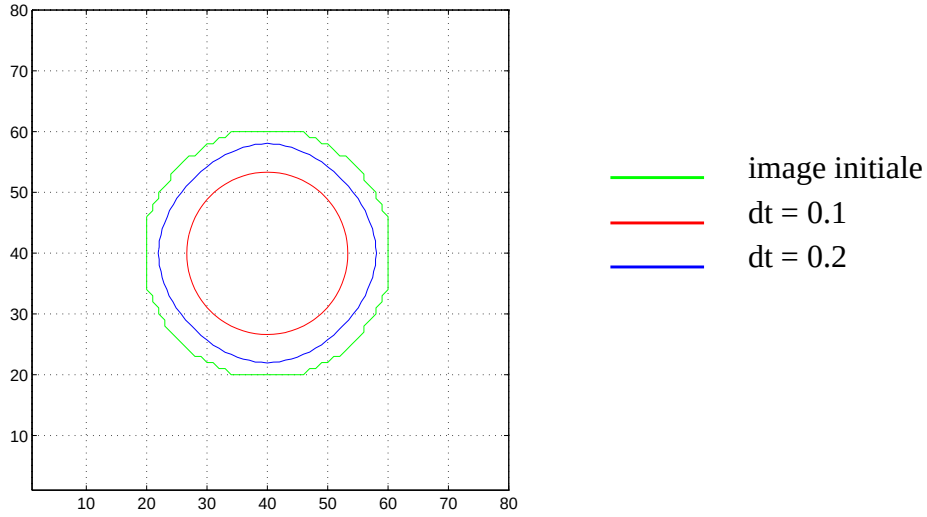


Figure 13. Stabilité du cercle pour l'AMSS 8 voisins (200 itérations)

5.3 Tests de stabilité des analyses EMSS et AMSS sur une ellipse

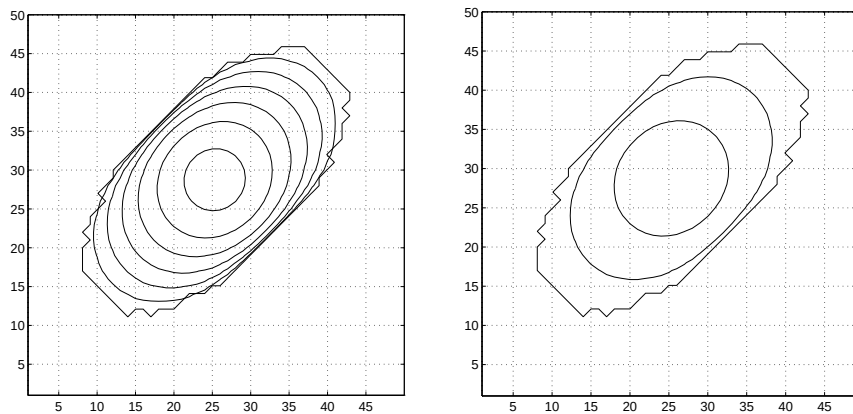


Figure 14. EMSS 6 voisins, $dt=0.2$ (gauche), $dt=0.5$ (droite), pas de 100 itérations

- AMSS 6 voisins

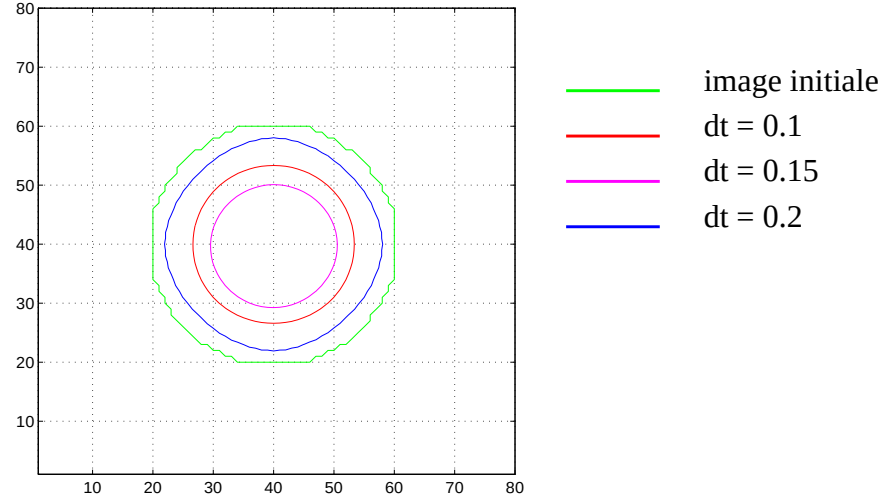


Figure 11. Stabilité du cercle pour l'AMSS 6 voisins (200 itérations)

On constate, pour $dt=0.2$ et 200 itérations, une instabilité de l'analyse : en effet, l'isophote a tendance à se «losangéifier» et son évolution est inversée (pour $dt_1 > dt_2$, on doit avoir $isophote_2 \subset isophote_1$), ce qui n'est plus le cas pour $dt=0.2$.

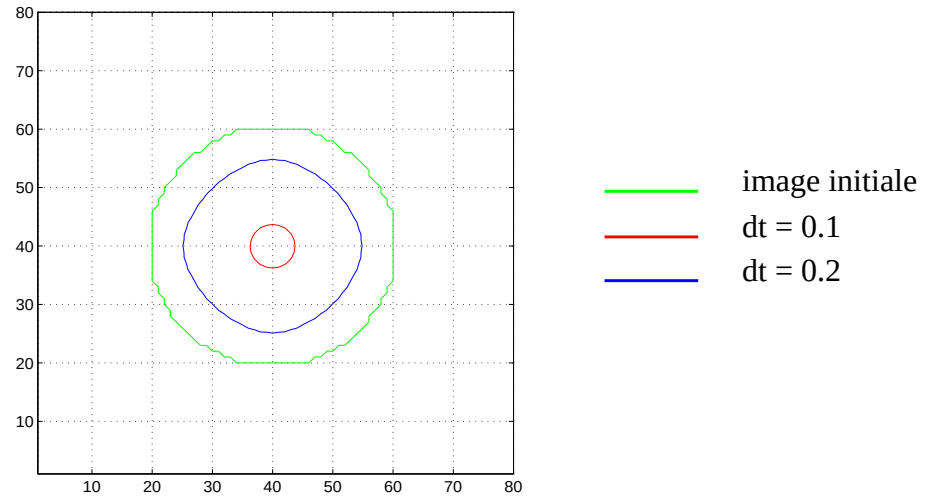


Figure 12. Stabilité du cercle pour l'AMSS 6 voisins (400 itérations)

- Remarque : L'instabilité apparaît pour $dt=0.53$ et $N=100$, soit $dt.N=53$. Que se passe-t-il lorsque l'on choisit $dt=0.053$ et $N=1000$, soit un produit $dt.N$ constant ?

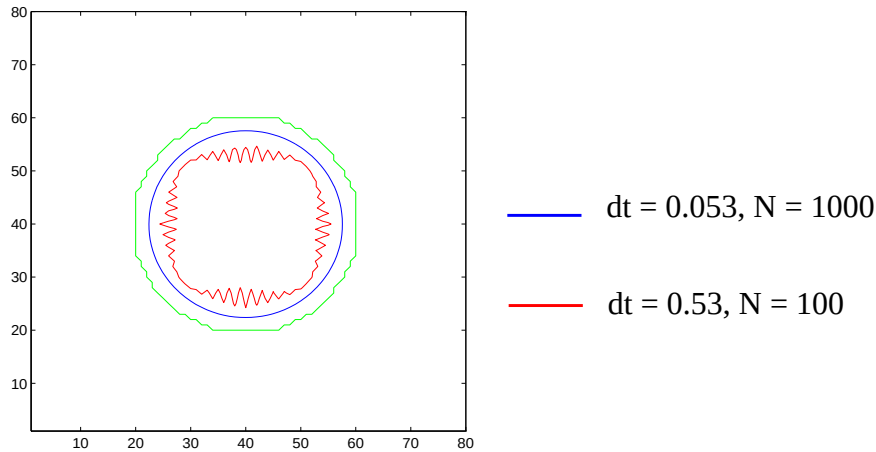


Figure 9. Illustration de la remarque

Nous vérifions donc que l'instabilité dépend du choix de dt et non pas du produit $N.dt$.

- EMSS 8 voisins (avec λ_0 d'après §3.2.1) :

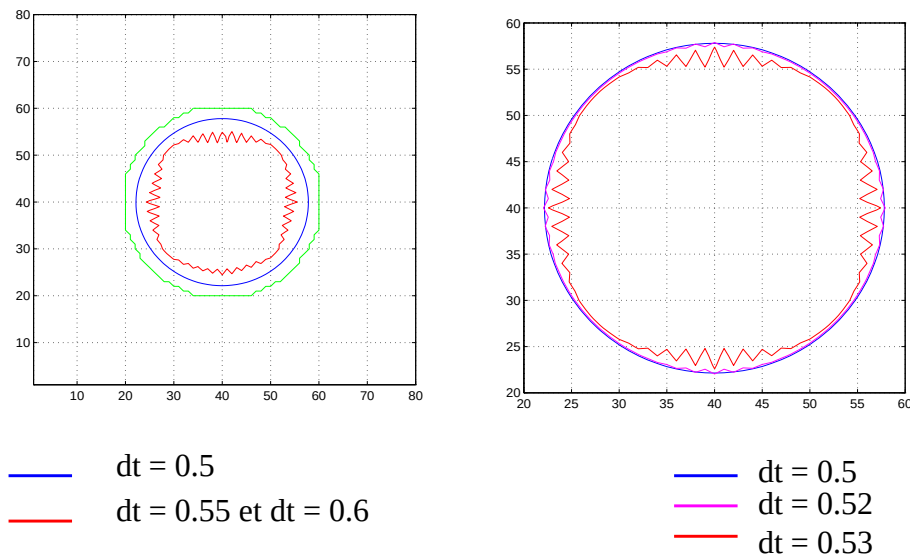


Figure 10. Stabilité du cercle pour l'EMSS 8 voisins (à droite, analyse plus fine), 100 itérations

Nous traiterons pour les tests de stabilité suivant les images binaires d'un disque (80x80 pixels) et d'une ellipse (50x50 pixels). Pour les deux analyses multi-échelles - EMSS et AMSS - ainsi que pour deux implémentations différentes - 6 et 8 voisins (avec λ_0 d'après §3.2.1) - nous avons suivi le même protocole de test, à savoir : faire évoluer l'analyse ie. changer la valeur de dt pour un nombre identique d'itérations N , jusqu'à mettre en évidence - expérimentalement - l'instabilité du processus. Un autre test de stabilité des processus est présenté en Annexe C.

5.2 Tests de stabilité des analyses EMSS et AMSS sur le disque

Pour les figures suivantes, nous représenterons toujours l'isophote dont la valeur est 0.5, la ligne de niveau en vert appartenant toujours à l'image initiale (il s'agit de la ligne de niveau extérieure).

- EMSS 6 voisins :

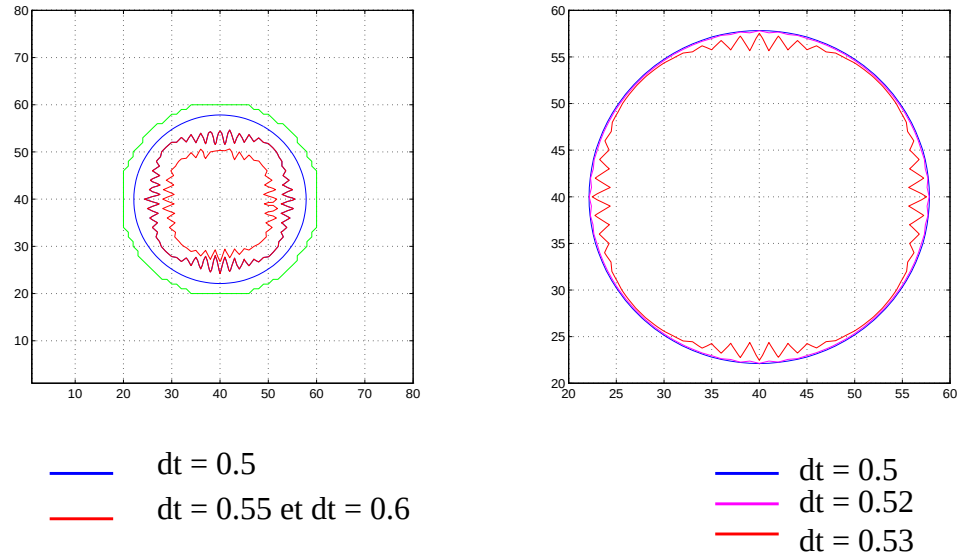


Figure 8. Stabilité du cercle pour l'EMSS 6 voisins (à droite, analyse plus fine), 100 itérations

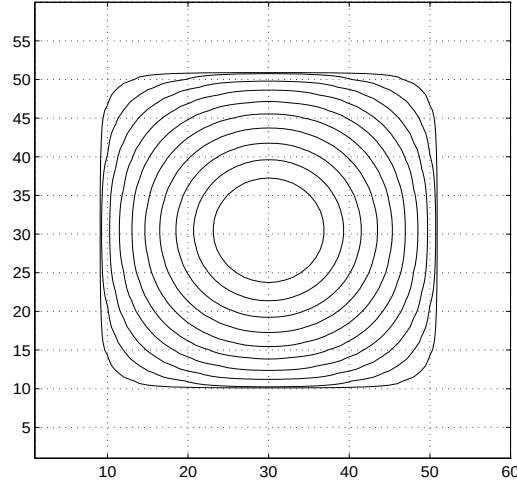


Figure 7. Evolution d'un carré par AMSS-6 voisins ($dt=0.05$)

5 Stabilité de l'analyse

5.1 Théorie

Que ce soit pour l'EMSS ou pour l'AMSS, le paramètre dt représente l'échelle de l'analyse ou plutôt le pas de discrétisation de celle-ci, intervenant à chaque itération. Il est clair que ce paramètre est très important, car au delà d'un seuil, l'analyse sera trop rapide et le lissage trop fort pour obtenir des résultats cohérents. dt définit donc la limite de stabilité.

En ce qui concerne l'EMSS, il est possible de déterminer théoriquement que la condition pour assurer la stabilité de l'analyse est :

$$\Delta t \leq 0,5 \Delta x^2 \quad (53)$$

où Δx est la discrétisation selon les axes plans.

Quant à l'AMSS, (Alvarez et al., 1994) constatent que la stabilité «expérimentale» est fixée par la relation suivante :

$$\Delta t \leq 0,1 \Delta x^2 \quad (54)$$

4.2 L'AMSS appliquée des images synthétiques

Comme nous l'avons fait précédemment pour l'analyse euclidienne, nous illustrons ici l'analyse multi-échelles affine (AMSS) sur des images synthétiques.

Dans le premier cas, l'image initiale est l'image binaire d'une ellipse (pixels intérieurs à 1, extérieurs à 0). Sur la figure ci-dessous (figure 6), on «suit» l'isophote de niveau de gris égal à 0.1. Entre deux contours successifs, il y a 100 itérations pour $dt=0.05$. Le dernier contour (au centre) est donc l'isophote à 0.1 de l'ellipse analysée par l'EMSS pour 600 itérations.

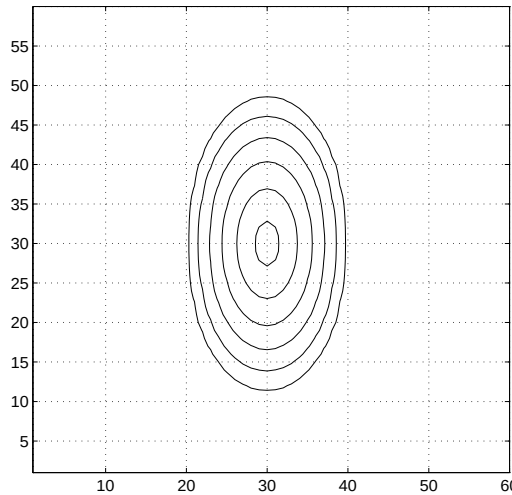


Figure 6. Evolution d'une ellipse par AMSS-6 voisins ($dt=0.05$)

Dans le cas de l'AMSS, tout se passe comme si chaque point d'une isophote, indépendamment de son voisinage, évolue avec une vitesse proportionnelle à sa *courbure affine*. La courbure affine d'une ellipse étant constante, tous les points de l'isophote considérée ici évoluent avec la même vitesse et l'ellipse évolue vers une ellipse

Pour illustration, nous présentons ci-dessous (figure 7) l'évolution de l'image d'un carré par l'analyse AMSS, pour $dt=0.05$, et 100 itérations entre chaque isophote.

4 AMSS - Affine Morphological Scale-Space analysis

4.1 Implémentation

L'équation théorique de l'AMSS est celle proposée en (16), c'est-à-dire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t^{1/3} \times \left[\frac{(u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy})}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} \right]^{1/3} (u_x^2 + u_y^2)^{1/2} \quad (47)$$

Ce qui nous mène à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t^{1/3} \times F(u)^{1/3} \quad (48)$$

De la même façon que pour l'EMSS il est possible de trouver un changement d'échelle qui élimine t dans l'équation (48).

$$t_1 = \frac{3}{4} t^{4/3} \quad (49)$$

Nous avons alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u)^{1/3} \quad (50)$$

Et nous en dégageons la récurrence suivante:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + dt \cdot F(u_{i,j}^n)^{1/3} \quad (51)$$

Pour le calcul de $F(u)$, nous utiliserons les mêmes méthodes que pour l'EMSS et donc, le calcul des masques sera identique à celui des chapitres précédents. De même, comme nous l'avons fait précédemment pour l'EMSS, nous pouvons réécrire l'équation (51) sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (|\nabla u|)^{2/3} \cdot (u_{\zeta\zeta})^{1/3} \quad (52)$$

où le terme $(|\nabla u|)^{2/3}$ peut être vu comme la *vitesse de diffusion*.

Sur la figure suivante (figure 4), on «suit» l'isophote de niveau de gris égal à 0.1. Le premier contour (extérieur) est celui de l'image initiale ; entre deux contours successifs, il y a 100 itérations pour $dt=0.2$. Le dernier contour (à l'intérieur) correspond à 1400 itérations.

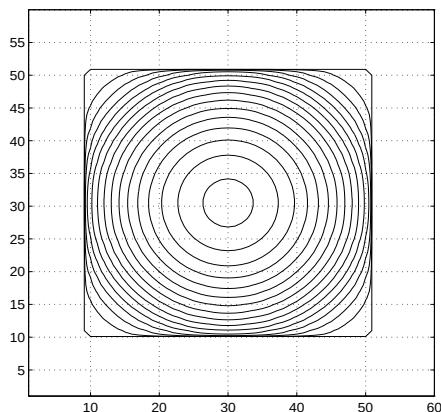


Figure 4. Evolution d'un carré par EMSS-8 voisins ($dt=0.2$)

3.5.3. Evolution d'un losange

L'image initiale (figure 5) est l'image binaire d'un losange (pixels intérieurs à 1, extérieurs à 0). Sur la figure suivante, on «suit» l'isophote de niveau de gris égal à 0.1. Le premier contour (extérieur) est celui de l'image initiale ; entre deux contours successifs, il y a 200 itérations pour $dt=0.1$. le dernier contour (à l'intérieur) correspond donc à 2000 itérations.

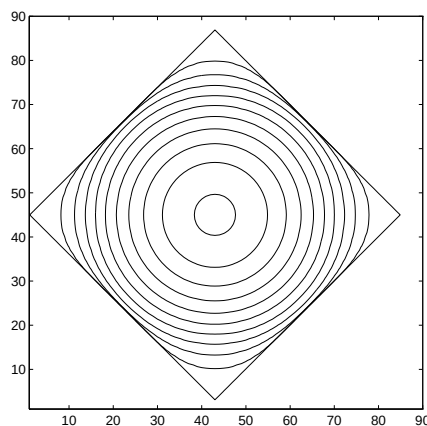


Figure 5. Evolution d'un losange par EMSS-8 voisins ($dt=0.1$)

3.5.2. Evolution d'un carré

L'image initiale (figure 2) est l'image binaire d'un carré (pixels intérieurs à 1, extérieurs à 0).

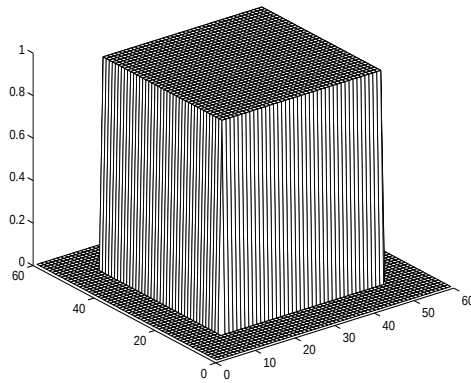


Figure 2. Image initiale du carré

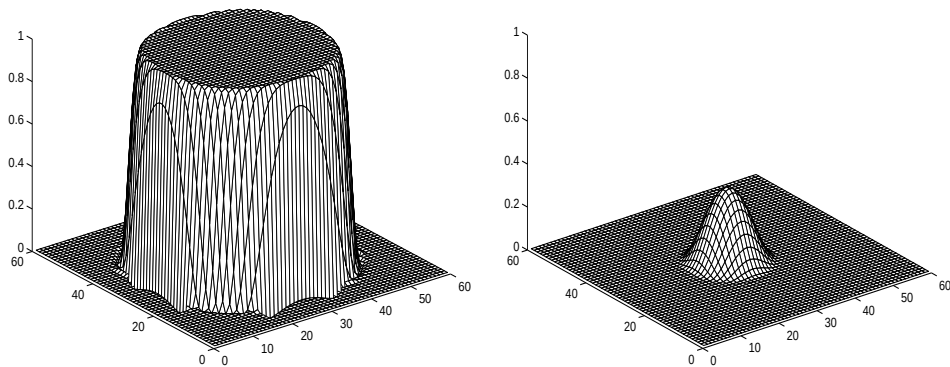


Figure 3. Evolution du carré après 200 itérations ($dt=0.2$, à gauche), après 1400 itérations (à droite)

3.5.1. Evolution d'une ellipse

L'image initiale est l'image binaire d'une ellipse (pixels intérieurs à 1, extérieurs à 0). Sur la figure suivante (figure 1), on «suit» l'isophote de niveau de gris égal à 0.5. Le premier contour (extérieur) est celui de l'image initiale ; entre deux contours successifs, il y a 100 itérations pour **dt=0.1**.

Le dernier contour (au centre) est donc l'isophote à 0.5 de l'ellipse analysée par l'EMSS pour 1000 itérations.

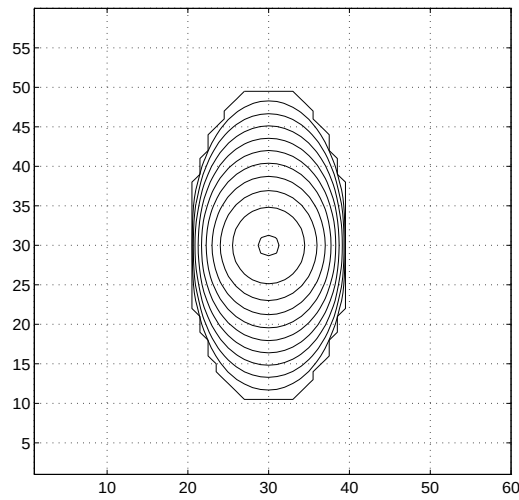


Figure 1. Evolution d'une ellipse par EMSS-6 voisins pour $dt=0.2$

Nous constatons que l'isophote considérée évolue vers un cercle : concrètement, le processus de diffusion induit par l'analyse EMSS tend à faire évoluer chaque point d'une isophote indépendamment de son voisinage avec une vitesse proportionnelle à sa *courbure euclidienne*.

Et quelle que soit la forme initiale des isophotes, nous constaterons cette propriété d'évolution vers une cercle dont la courbure euclidienne est constante.

Dans ce cas, $\lambda_3=0$ et nous arrivons au masque ci-dessous pour la région $u_x u_y \leq 0$:

$$\begin{bmatrix} -u_x u_y & u_y^2 + u_x u_y & 0 \\ u_x^2 + u_x u_y & -2u_x^2 - 2u_y^2 - 2u_x u_y & u_x^2 + u_x u_y \\ 0 & u_y^2 + u_x u_y & -u_x u_y \end{bmatrix} \quad (45)$$

Par rapport aux méthodes 8 voisins, il n'y a plus de paramètre libre : tous les coefficients sont entièrement déterminés.

On peut remarquer que le système (25) permet aussi de retrouver ces masques 6-voisins, en choisissant $\lambda_4=0$ pour le premier cas et $\lambda_3=0$ pour le second.

3.4 Calcul des gradients

Il est clair que pour calculer les éléments des masques il est nécessaire de calculer au préalable le gradient au pixel d'étude $I_{i,j}$.

Le calcul des gradients est réalisé par convolution avec les masques suivants, choisis pour obtenir une norme de gradient invariante à la rotation (ce qui diffère par rapport aux masques classiques de Prewitt ou Sobel).

$$U_x = \begin{bmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}-1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2-\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}-1}{2} & -\frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \quad U_y = \begin{bmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{2-\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \quad (46)$$

3.5 L'EMSS appliquée à des images synthétiques

Dans ce paragraphe, nous souhaitons illustrer à partir d'images synthétiques l'analyse multi-échelle euclidienne EMSS afin de matérialiser les propriétés d'évolution que comporte l'analyse. Ainsi nous intéresserons-nous plus particulièrement au cas de l'image d'une ellipse. D'autres résultats concernant l'évolution d'images par ce processus sont présentés en Annexe A de ce document.

Nous en déduisons que $\lambda_4=0$ dans ce cas de figure.

Les pixels pris en compte pour le calcul de $F(u)$ apparaissent en noir sur la figure ci-dessus.

Nous avons alors :

$$F(u) = \frac{1}{h^2}(-3\lambda_0 u_{i,j} + \lambda_1(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + \lambda_2(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \lambda_3(u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1}) + 0(h)) \quad (42)$$

En introduisant les développements de Taylor comme précédemment, nous obtenons :

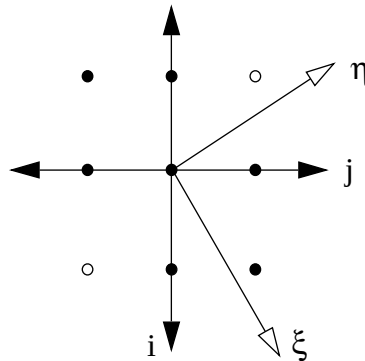
$$F(u) = u_{i,j}(-3\lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3) + u_{xx}(\lambda_2 + \lambda_3) + u_{yy}(\lambda_1 + \lambda_3) + 2u_{xy}(-\lambda_3) + 0(h) \quad (43)$$

Ceci nous conduit au masque non-linéaire suivant pour la région $u_x u_y \geq 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & u_y^2 - u_x u_y & u_x u_y \\ u_x^2 - u_x u_y & -2u_x^2 - 2u_y^2 + 2u_x u_y & u_x^2 - u_x u_y \\ u_x u_y & u_y^2 - u_x u_y & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

• $u_x u_y \leq 0$

Les pixels pris en compte pour le calcul de $F(u)$ apparaissent en foncé sur la figure qui suit :



alors on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \quad (39)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_{\zeta\zeta} \quad (40)$$

Par conséquent, l'opérateur non-linéaire F correspond en fait à la dérivée seconde directionnelle dans la direction orthogonale au gradient, à condition que le vecteur gradient ait été au préalable *normé*. L'équation (39) est donc, par analogie avec l'équation de diffusion de la chaleur ($\partial u / \partial t = \Delta u$), une diffusion anisotrope, puisqu'elle diffuse uniquement dans une unique direction dépendant du gradient.

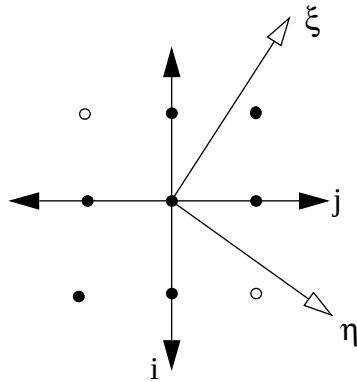
Soit $\vec{\eta}$ la direction du gradient et $\vec{\xi}$ la direction orthogonale au gradient, on a :

$$u_{\xi\xi} = \frac{F(u)}{\|\nabla u\|^2} \quad (41)$$

Partant de cette constatation, nous souhaitons faire une interpolation entre les 6 pixels voisins les plus proches de la direction ξ , en plus du pixel central, pour l'estimation de la dérivée seconde directionnelle.

Deux cas de figure peuvent alors se présenter :

$$\bullet u_x u_y \geq 0$$



$$\begin{bmatrix}
u_x^2 - \frac{u_x^4}{u_x^2 + u_y^2} - \frac{1}{2}u_x u_y & -2u_x^2 + u_y^2 + 2\frac{u_x^4}{u_x^2 + u_y^2} & u_x^2 - \frac{u_x^4}{u_x^2 + u_y^2} + \frac{1}{2}u_x u_y \\
-u_x^2 + 2\frac{u_x^4}{u_x^2 + u_y^2} & -2(u_x^2 + u_y^2) + 4u_x^2 - 4\frac{u_x^4}{u_x^2 + u_y^2} & -u_x^2 + 2\frac{u_x^4}{u_x^2 + u_y^2} \\
u_x^2 - \frac{u_x^4}{u_x^2 + u_y^2} + \frac{1}{2}u_x u_y & -2u_x^2 + u_y^2 + 2\frac{u_x^4}{u_x^2 + u_y^2} & u_x^2 - \frac{u_x^4}{u_x^2 + u_y^2} - \frac{1}{2}u_x u_y
\end{bmatrix} \quad (36)$$

3.3 Un nouveau schéma de résolution : le schéma «6 voisins»

Dérivons $u(x,y)$ dans une direction quelconque $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial n} &= \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = u_x \cdot \cos\theta + u_y \cdot \sin\theta \\
\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} &= \nabla(u_x \cdot \cos\theta + u_y \cdot \sin\theta) \cdot \vec{n} \\
&= u_{xx} \cdot \cos^2\theta + u_{yy} \cdot \sin^2\theta + 2u_{xy} \cos\theta \cdot \sin\theta
\end{aligned} \quad (37)$$

Par suite, si l'on choisit comme direction privilégiée $\vec{\xi}$,

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{-u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \\ \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \end{pmatrix} \quad (38)$$

c'est-à-dire la direction orthogonale au gradient (ie. la tangente à la surface),

3.2.2. D'après (Sapiro et al., 1993)

$$\lambda_0 = 0,5 \cdot |\nabla u|^2 = 0,5 \cdot (u_x^2 + u_y^2) \quad (31)$$

Le masque associé à ce choix de λ_0 est :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}u_x u_y & u_y^2 & \frac{1}{2}u_x u_y \\ u_x^2 & -2(u_x^2 + u_y^2) & u_x^2 \\ \frac{1}{2}u_x u_y & u_y^2 & -\frac{1}{2}u_x u_y \end{bmatrix} \quad (32)$$

3.2.3. D'après (Alvarez, 1996)

$$\lambda_0 = 0,25 \cdot |\nabla u|^2 = 0,25 \cdot (u_x^2 + u_y^2) \quad (33)$$

Cette nouvelle approche résulte de la minimisation de l'erreur résiduelle dans le développement de Taylor de l'opérateur $F(u)$, $E(h^2)$. En interprétant l'erreur en terme d'opérateurs directionnels, alors le choix de λ_0 est donné par (33) et le masque qui lui est associé est :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}(u_x^2 + u_y^2) - \frac{1}{2}u_x u_y & \frac{1}{2}(-u_x^2 + u_y^2) & \frac{1}{4}(u_x^2 + u_y^2) - \frac{1}{2}u_x u_y \\ \frac{1}{2}(u_x^2 - u_y^2) & -(u_x^2 + u_y^2) & \frac{1}{2}(u_x^2 - u_y^2) \\ \frac{1}{4}(u_x^2 + u_y^2) - \frac{1}{2}u_x u_y & \frac{1}{2}(-u_x^2 + u_y^2) & \frac{1}{4}(u_x^2 + u_y^2) - \frac{1}{2}u_x u_y \end{bmatrix} \quad (34)$$

3.2.4. D'après (Cohignac et al., 1993)

$$\lambda_0 = 0,5 \cdot (u_x^2 + u_y^2) - u_x^2 + \frac{u_x^4}{2(u_x^2 + u_y^2)} \quad (35)$$

Le raisonnement qui a conduit à ce choix est identique à celui de (§3.2.1) et basé sur un compromis entre stabilité et simplicité du polynôme $\lambda_0(u_x, u_y)$. Le masque qui lui est associé est :

•Région $|u_x| \leq |u_y|$ et $u_x u_y \geq 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{u_x^2 - u_x u_y}{4} & \frac{-u_x^2 + 2u_y^2 - u_x u_y}{2} & \frac{u_x^2 + 3u_x u_y}{4} \\ \frac{u_x^2 - u_x u_y}{2} & -u_x^2 - 2u_y^2 + u_x u_y & \frac{u_x^2 - u_x u_y}{2} \\ \frac{u_x^2 + 3u_x u_y}{4} & \frac{-u_x^2 + 2u_y^2 - u_x u_y}{2} & \frac{u_x^2 - u_x u_y}{4} \end{bmatrix} \quad (28)$$

•Région $|u_x| \geq |u_y|$ et $u_x u_y \leq 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{u_y^2 - 3u_x u_y}{4} & \frac{u_y^2 + u_x u_y}{2} & \frac{u_y^2 + u_x u_y}{4} \\ \frac{2u_x^2 - u_y^2 + u_x u_y}{2} & -2u_x^2 - u_y^2 - u_x u_y & \frac{2u_x^2 - u_y^2 + u_x u_y}{2} \\ \frac{u_y^2 + u_x u_y}{4} & \frac{u_y^2 + u_x u_y}{2} & \frac{u_y^2 - 3u_x u_y}{4} \end{bmatrix} \quad (29)$$

•Région $|u_x| \leq |u_y|$ et $u_x u_y \leq 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{u_x^2 - 3u_x u_y}{4} & \frac{-u_x^2 + 2u_y^2 + u_x u_y}{2} & \frac{u_x^2 + u_x u_y}{4} \\ \frac{u_x^2 + u_x u_y}{2} & -u_x^2 - 2u_y^2 - u_x u_y & \frac{u_x^2 + u_x u_y}{2} \\ \frac{u_x^2 + u_x u_y}{4} & \frac{-u_x^2 + 2u_y^2 + u_x u_y}{2} & \frac{u_x^2 - 3u_x u_y}{4} \end{bmatrix} \quad (30)$$

3.2.1. D'après (Alvarez et al., 1994)

Les auteurs montrent que la stabilité de l'opérateur est directement liée aux coefficients (λ_i) , $i = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ qu'il faut choisir positifs. Or en considérant les relations (25) liant les coefficients, il est impossible d'obtenir à la fois les $\lambda_i \geq 0$ et les relations (25), sauf dans certaines directions du gradient, c'est-à-dire pour certaines valeurs de (u_x, u_y) . Partant de ce compromis, le paramètre λ_0 est donné par :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{u_x^2 + 2u_y^2 - |u_x \cdot u_y|}{4}, |u_y| \geq |u_x| \\ \lambda_0 &= \frac{u_y^2 + 2u_x^2 - |u_x \cdot u_y|}{4}, |u_y| < |u_x| \end{aligned} \quad (26)$$

Ci-dessous, nous résumons les masques trouvés pour chaque région. Ces masques s'appliquent en chaque point de l'image. Rappelons que les masques suivant permettent d'obtenir $F(u)$ d'après l'équation (22) en tout point $u_{i,j}$ de l'image.

• **Région** $|u_x| \geq |u_y|$ **et** $u_x u_y \geq 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{u_y^2 - u_x u_y}{4} & \frac{u_y^2 - u_x u_y}{2} & \frac{u_y^2 + 3u_x u_y}{4} \\ \frac{2u_x^2 - u_y^2 - u_x u_y}{2} & -2u_x^2 - u_y^2 + u_x u_y & \frac{2u_x^2 - u_y^2 - u_x u_y}{2} \\ \frac{u_y^2 + 3u_x u_y}{4} & \frac{u_y^2 - u_x u_y}{2} & \frac{u_y^2 - u_x u_y}{4} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$u(t, x, y - l) = u - lu_y + \frac{l^2}{2}u_{yy} + 0(l^3)$$

$$u(t, x + h, y + l) = u + hu_x + lu_y + \frac{1}{2}(h^2u_{xx} + 2hlu_{xy} + l^2u_{yy}) + 0(l^3 + h^3)$$

$$u(t, x - h, y - l) = u - hu_x - lu_y + \frac{1}{2}(h^2u_{xx} + 2hlu_{xy} + l^2u_{yy}) + 0(l^3 + h^3)$$

$$u(t, x + h, y - l) = u + hu_x - lu_y + \frac{1}{2}(h^2u_{xx} - 2hlu_{xy} + l^2u_{yy}) + 0(l^3 + h^3)$$

$$u(t, x - h, y + l) = u - hu_x + lu_y + \frac{1}{2}(h^2u_{xx} - 2hlu_{xy} + l^2u_{yy}) + 0(l^3 + h^3)$$

Dans notre cas, on peut considérer que $l=h=1$:

$$\begin{aligned} F(u) = & u_{i,j}(-4\lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4) + u_{xx}(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ & + u_{yy}(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) + 2u_{xy}(-\lambda_3 + \lambda_4) \end{aligned} \quad (24)$$

En identifiant avec l'expression de $F(u)$ dans (19), on en déduit les coefficients:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2\lambda_0 - u_y^2 \\ \lambda_2 = 2\lambda_0 - u_x^2 \\ \lambda_3 = -\lambda_0 + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 + u_x u_y) \\ \lambda_4 = -\lambda_0 + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2 - u_x u_y) \end{array} \right. \quad (25)$$

λ_0 est un paramètre libre.

Plusieurs choix sont possibles pour λ_0 , pour tenir compte des critères de stabilité et d'invariances du schéma numérique. Dans les paragraphes suivants, nous présentons ces quatre possibilités dans le choix de ce paramètre, ainsi que les masques qui en sont déduits pour l'approximation numérique de l'opérateur $F(u_{ij}^n)$.

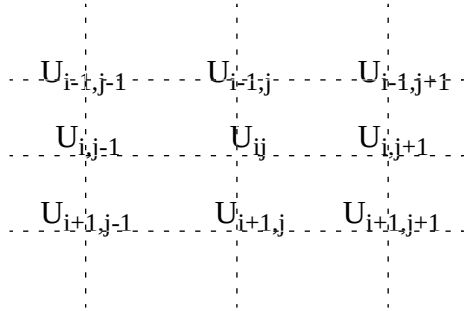
3.2 Schéma numérique 8 voisins

Dorénavant nous nous intéresserons au pixel central $u_{i,j}$.

Ce schéma fait intervenir ses 8 premiers voisins de la manière suivante :

$$F(u) = \frac{1}{h^2}(-4\lambda_0 u_{i,j} + \lambda_1(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + \lambda_2(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \lambda_3(u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1}) + \lambda_4(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1})) + 0(h) \quad (23)$$

Soit le masque suivant, au pixel $u_{i,j}$, en considérant que l'indice i désigne la ligne et j la colonne, et que le repère est orienté ainsi : origine en haut à gauche, les i croissants de haut en bas, les j croissants de gauche à droite.



λ_4	λ_2	λ_3
λ_1	$-4\lambda_0$	λ_1
λ_3	λ_2	λ_4

Sachant que, d'après les développements de Taylor, on a :

$$u(t+k, x, y) = u + ku_t + 0(k^2)$$

$$u(t-k, x, y) = u - ku_t + 0(k^2)$$

$$u(t, x+h, y) = u + hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} + 0(h^3)$$

$$u(t, x-h, y) = u - hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} + 0(h^3)$$

$$u(t, x, y+l) = u + lu_y + \frac{l^2}{2}u_{yy} + 0(l^3)$$

3 EMSS - *Euclidian Morphological Scale-Space Analysis*

3.1 Rappel théorique et Implémentation globale

D'après (15) on a :

$$u_t = t \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \quad (18)$$

Posons :

$$F(u) = u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy} \quad (19)$$

alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t \frac{F(u)}{u_x^2 + u_y^2} \quad (20)$$

En faisant le changement d'échelle : $t_1 = \left(\frac{1}{2}\right) \times t^2$ l'équation devient (*mean curvature motion*) :

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{F(u)}{u_x^2 + u_y^2} \quad (21)$$

Lorsqu'on discrétise le temps, nous pouvons dégager la récurrence suivante :

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + dt \times \frac{F(u_{i,j}^n)}{(u_{i,j}^n)_x^2 + (u_{i,j}^n)_y^2} \quad (22)$$

L'équation peut être implémentée de manière récursive selon deux schémas numériques différents pour l'estimation de l'opérateur non-linéaire F : nous les appellerons les schémas numériques *8 voisins* et *6 voisins*. En outre, dans le cas *8 voisins*, nous avons quatre possibilités pour l'implémenter.

$$|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \quad (14)$$

Remarquons que, dans le cadre de la détection de contours, (Kitchen et al., 1982) ont proposé une approche basée sur les maxima locaux de cet opérateur. Finalement, (13) se réécrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \quad (15)$$

avec $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$

Si on remplace l'axiome d'invariance euclidienne dans le théorème précédent par l'axiome d'invariance affine, on obtient le théorème suivant :

2.7.3. Théorème 3

Il n'y a qu'une seule analyse multi-échelles $u(x, y, t) = T_t(u)(x, y)$ qui satisfait aux axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale, de régularité et d'invariances affine et morphologique. Cette analyse est effectuée par l'EDP suivante (16) (Alvarez et al., 1992) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \left(t \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right)^{\frac{1}{3}} \quad (16)$$

avec $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$

Cette équation est utilisée pour faire évoluer de manière invariante et affine les courbes de niveaux dans les images. Par rapport à l'équation (13), le terme de courbure correspond maintenant à la composante de la courbure affine et non euclidienne. Ceci se traduit par l'élimination du dénominateur présent dans (14) car (16) se réécrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t^{1/3} (u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy})^{1/3} \quad (17)$$

avec $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$.

Cette équation, plus connue sous le nom d'*équation de la chaleur*, correspond au cas où la fonction F définie dans l'axiome de régularité est égale à la trace du Hessien $H(u)$. La solution de cette EDP s'obtient par la convolution de l'image initiale $u_0(x, y)$ avec l'opérateur Gaussien, et correspond au modèle étudié par Marr (1982) et utilisé ensuite par Witkin (1983).

2.7.2. Théorème 2

Si une analyse multi-échelles satisfait aux axiomes de régularité, d'invariances euclidienne et morphologique, de structure pyramidale et de comparaison locale, alors la solution $u(x, y, t) = T_t(u)(x, y)$ est une solution de l'EDP suivante (12) (Alvarez et al., 1992) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| G\left(\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right), t\right) \quad (12)$$

avec $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$

où $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}$ désigne la courbure en chaque

point (x, y, t) de la ligne de niveau définie par $u(x, y, t) = C$ et où la fonction $G(s, t)$ est une fonction non décroissante par rapport à la variable réelle s .

Le cas particulier où la fonction G est constante et égale à +1 ou -1 correspond aux opérations élémentaires de morphologie mathématique que sont la dilatation et l'érosion.

Un autre cas particulier intéressant pour la fonction G est celui où $G(s, t) = s \cdot t$ (13) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t |\nabla u| \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) \quad (13)$$

avec $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$

Cette équation correspond à une diffusion anisotrope dans la direction des lignes de niveaux de l'image, il s'agit d'une analyse morphologique euclidienne. Elle est très proche de l'équation de restauration à la différence près que $G = s$.

De plus :

(Alvarez et al., 1992) montrent que $h' = \sqrt{|det(A)|} \cdot h$

2.6 Linéarité

L'opérateur est linéaire par rapport à ses arguments (9) :

$$T_{t, t+h}(au + bv) = aT_{t, t+h}(u) + bT_{t, t+h}(v) \quad (9)$$

2.7 Théorèmes généraux

Si une analyse multi-échelles $T_t(u)$ satisfait les axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale et de régularité, alors la solution $u(x, y, t) = T_t(u)(x, y)$ est une solution de viscosité de l'EDP suivante (10):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(H(u), \nabla u, u, x, y, t) \quad (10)$$

avec $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$, où $H(u)$ et ∇u désignent respectivement le Hessien et le gradient de u et où $F(H(u), \nabla u, u, x, y, t)$ est la fonction définie dans le principe de régularité.

D'autre part, si $u(x, y, t)$ est une solution de viscosité de l'équation (10) alors l'analyse multi-échelles $T_t(u)(x, y)$ définie par $T_t(u)(x, y) = u(x, y, t)$ satisfait les 3 axiomes de structure pyramidale, de comparaison locale et de régularité.

Ce théorème est fondamental dans l'axiomatisation de l'analyse multi-échelles et permet de montrer le lien profond qui existe entre l'analyse multi-échelles et les EDP.

Selon les axiomes considérés, d'autres théorèmes peuvent être établis permettant de relier un certain nombre de travaux.

2.7.1. Théorème 1

Si une analyse multi-échelles satisfait aux axiomes de linéarité, d'invariance euclidienne, de structure pyramidale et de comparaison locale, alors la solution $u(x, y, t) = T_t(u)(x, y)$ est une solution de l'EDP suivante (11) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x, y, t) \quad (11)$$

avec $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$

il existe une fonction $F(A, p, a, x, y, t)$ continue par rapport à A , non décroissante et telle que

$$\frac{(T_{t, t+h}(u) - u)(x_0, y_0)}{h} \rightarrow F(A, p, a, x_0, y_0, t) \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

2.4 Invariance morphologique

L'analyse doit commuter avec toute redistribution croissante $g(\cdot)$ des niveaux de gris.

Ceci traduit le fait que seule la notion d'**isophote** est importante lors de cette analyse, d'où sa référence à la morphologie mathématique.

Soit une fonction croissante $g: R \rightarrow R$, alors $\forall u$, on doit avoir (5):

$$T_{t, t+h}(g \circ u) = g \circ T_{t, t+h}(u) \quad (5)$$

Cette invariance morphologique est dite forte si cet axiome est respecté pour toute fonction $g(\cdot)$, croissante ou décroissante.

2.5 Invariance euclidienne ou affine

L'analyse doit être invariante pour toute transformation $F_{A, b}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $F_{A, b}(m) = (Am + b)$, où $n \in \mathbb{R}^2$, A est une matrice $A \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ non singulière et $b \in \mathbb{R}^2$ (6) :

$$T_{t, t+h}(u) \circ F_{A, b} = T_{t, t+h}(u \circ F_{A, b}) \quad (6)$$

Si A est une isométrie, notons Au la fonction définie par $Au(x) = u(Ax)$. Alors l'invariance euclidienne s'exprime par (7):

$$AT_{t, t+h} = T_{t, t+h}A \quad (7)$$

Dans le cas où A est une transformation affine, l'opération de commutation ci-dessus n'est plus aussi simple car A peut «réduire» ou «agrandir» l'image (par exemple, cas du zoom : $Au(x) = u(kx)$, k constante positive) ; on ne peut alors imposer dans le cas de l'invariance affine qu'une propriété de commutation faible (8) :

$$AT_{t, t+h'} = T_{t, t+h}A \quad (8)$$

comme suit (3):

$$T_{t+h}(u) = T_{t,t+h} \circ T_t(u) \quad (3)$$

avec $T_0 = Id$ et $T_{t,t}(u) = u$.

$T_{t,t+h}$ est un filtre de transition.

De plus, on suppose que l'opérateur de transition agit toujours localement. En d'autres termes, $T_{t,t+h}(u)(x)$ doit essentiellement dépendre des valeurs de $u_0(y)$ quand y se trouve près de x . Dans (Morel et al., 1993), les auteurs donnent une interprétation physique de cette hypothèse de localité : si les éléments de base de la pyramide sont supposés être des neurones, cela signifie qu'un neurone est d'abord influencé par ses voisins.

2.2 Axiome de comparaison locale

L'analyse ne doit pas introduire dans les images lissées des détails qui n'y étaient pas aux échelles précédentes. Ceci se traduit par la préservation locale de la valeur relative des niveaux de gris, et l'énoncé de l'axiome est le suivant (4) :

Si pour tout point (x,y) dans un voisinage d'un autre point (x_0, y_0) on a : $u(x, y) > v(x, y)$ (égalité stricte, sauf éventuellement en (x_0, y_0)), alors on doit avoir :

$$T_{t,t+h}(u)(x_0, y_0) \geq T_{t,t+h}(v)(x_0, y_0) \text{ pour } h \text{ assez petit} \quad (4)$$

2.3 Axiome de régularité

Si u est une forme quadratique au voisinage d'un point m_0 de coordonnées (x_0, y_0) , c'est-à-dire :

$$u(x, y) = a + p^t(m - m_0) + \frac{1}{2}(m - m_0)^t A(m - m_0) \text{ si } \|m - m_0\| < e$$

où $m=(x,y)$, alors, quand h tend vers 0, la valeur de $T_{t,t+h}(u)(x_0, y_0)$ ne doit dépendre que des valeurs de a, p, A .

Cet axiome peut s'exprimer plus formellement par :

Soit $u(x, y) = a + p^t(m - m_0) + \frac{1}{2}(m - m_0)^t A(m - m_0)$ une forme quadratique de $\mathbb{R}^2$,

Nous rappellerons dans un premier temps les axiomes mathématiques utiles à la compréhension des théorèmes unificateurs pour les différentes analyses. Puis nous nous intéresserons plus particulièrement aux analyses euclidienne et affine du point de vue de leur implémentation numérique : cinq schémas numériques sont présentés en détail et implémentés. Enfin, précisons qu'il n'existe pas de critère numérique dédié au traitement des images, le critère visuel restant sans aucun doute le plus fiable. Aussi de nombreux exemples *visuels* - restant à l'appréciation du lecteur - illustreront-ils les différentes méthodes à partir d'images synthétiques mais aussi sur des cartes de profondeur sous-marines (pour l'application qui nous concerne plus particulièrement). Les problèmes de stabilité qui peuvent apparaître en cours d'évolution seront analysés et illustrés. Nous proposerons deux méthodes quantitatives pour comparer les performances des cinq implémentations des analyses multi-échelles, l'une basée sur le critère d'évolution du rayon d'un disque, l'autre étant le rapport signal à bruit. Enfin, une application au problème de l'extraction de contours sera présentée.

2 Généralités

L'analyse multi-échelles d'une image $u_0(x, y)$ consiste en la génération d'images $u(x, y, t)$ où chaque image nouvelle apparaît comme une version lissée, à l'échelle t , de l'image initiale $u_0(x, y)$.

On peut écrire (2) :

$$\begin{cases} u(x, y, t) = T_t(u_0)(x, y) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

L'axiomatisation de l'analyse multi-échelles est alors déterminée par la famille de transformations $(T_t)_{t \geq 0}$ dans laquelle l'image $u(x, y, t)$ est l'analyse de $u_0(x, y)$ à l'échelle t .

Cet opérateur (T_t) doit vérifier, selon l'analyse étudiée, les axiomes suivants:

2.1 Axiome de la structure pyramidale

L'image à une échelle $t+h$ avec $h>0$ peut être obtenue à partir de la version à l'échelle précédente t , sans passer par l'image initiale. Cet axiome s'énonce

1 Introduction

Depuis quelques années, la recherche en traitement d'images et vision par ordinateur avec la formalisation des notions «*scale-space*» fait appel aux équations aux dérivées partielles (EDP). Ces méthodes traitent de problèmes aussi divers que l'analyse multi-échelles, l'évolution géométrique de courbes, l'amélioration et la restauration d'images bruitées, la stéréovision, la détection et le suivi d'objets en mouvements ; elles permettent une formalisation dans un cadre unifié de divers problèmes auparavant traités séparément.

Ainsi une dizaine de théories de l'analyse multi-échelles des images sont-elles désormais entièrement axiomatisées et unifiées en «identifiant» leurs équations aux dérivées partielles ; parmi ces théories multi-échelles, citons le *raw primal sketch* de Marr et Hildreth (Marr, 1982), le *scale-space* de Witkin (1983), les travaux de Koenderink (1984), le *curvature primal sketch* de Asada et Brady (Asada et al., 1986). Cette classification des différentes analyses a conduit, indépendamment, Sapiro et Tannenbaum (Sapiro et al., 1993) et Alvarez, Guichard, Lions et Morel (Alvarez et al., 1992) à proposer une unique analyse multi-échelle à la fois *invariante d'un point de vue affine mais aussi morphologique*, et simplement définie par une équation aux dérivées partielles (1) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \left(t \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right)^{1/3} \quad (1)$$

Depuis (Cohignac et al., 1994), sont proposés plusieurs schémas pour la discrétisation de cette équation. Ce document est un bilan concernant l'application du formalisme des équations aux dérivées partielles limité à l'analyse multi-échelles des images, un état de l'art concernant les EDP et la vision par ordinateur ayant été proposé par (Deriche et al., 1997).

Dans ce rapport, nous nous intéressons essentiellement au problème de la mise en oeuvre de schémas numériques efficaces pour la résolution d'EDP qui apparaissent dans le cadre de l'axiomatisation de l'analyse multi-échelles, et que l'on retrouve aussi dans le cadre des problèmes de restauration d'images et d'évolution géométrique des courbes. En particulier, nous proposons un nouveau schéma numérique et nous comparons ses performances à celles obtenues par quatre autres schémas.

sible de l0 pour EMSS-8v et pour EMSS-6v	91
<i>Figure 57</i> - Evolution de l'ellipse selon les 5 schémas possibles	94
<i>Figure 58</i> - Vues en coupe de l'ellipse selon son grand axe pour les 4 choix possible de l0 pour AMSS-8v et pour AMSS-6v	95

-
- Figure 40* - En haut à gauche, image bruitée (10%), à droite, vue d'une coupe. Figures du bas, après analyse euclidienne (EMSS - 6 voisins) pour $dt=0.1$ et 100 itérations. 74
- Figure 41* - En haut à gauche, image bruitée (20%), à droite, vue d'une coupe. Figures du bas, après analyse euclidienne (EMSS - 6 voisins) pour $dt=0.1$ et 100 itérations. 75
- Figure 42* - En haut à gauche, image bruitée (30%), à droite, vue d'une coupe. Figures du bas, après analyse euclidienne (EMSS - 6 voisins) pour $dt=0.1$ et 100 itérations. 76
- Figure 43* - En haut contour image bruitée (10%) avant et après analyse affine (AMSS - 6 voisins) pour $dt=0.05$ et 100 itérations ; en bas, vue en coupe 77
- Figure 44* - Colonne de gauche : images initiales, de haut en bas, sans bruit, 20%, 60% de bruit, colonne de droite, après analyse affine (AMSS - 6 voisins), pour $dt=0.05$ et 100 itérations. 78
- Figure 45* - Vues en coupe du disque après AMSS et EMSS 79
- Figure 46* - Comparaisons EMSS-Gaussienne pour le filtrage 80
- Figure 47* - Vue en coupe du disque après lissage gaussien pour différentes valeurs de la variance 81
- Figure 48* - Vue en coupe du disque après EMSS 81
- Figure 49* - Vue en coupe du disque bruité (70%) avant et après EMSS ($N=100$, $dt=0.2$) 82
- Figure 50* - Avant (gauche, bruit 70%) et après (droite) EMSS-8 voisins 82
- Figure 51* - Stabilité de l'EMSS - 6 voisins 84
- Figure 52* - Stabilité de l'AMSS - 6 voisins 85
- Figure 53* - Evolution du disque selon les 5 schémas possibles ($dt = 0.4$) 88
- Figure 54* - Vues en coupe du disque pour les 4 choix possible de l_0 pour EMSS-8v et pour EMSS-6v 89
- Figure 55* - Evolution de l'ellipse selon les 5 schémas possibles ($dt = 0.2$) 90
- Figure 56* - Vues en coupe de l'ellipse selon son grand axe pour les 4 choix pos-

<i>Figure 21 - Evolution du disque en coupe selon les 5 schémas d'implémentation de l'EMSS</i>	45
<i>Figure 22 - Evolution du rayon d'un disque pour l'AMSS (dt=0.01)</i> ...	47
<i>Figure 23 - Evolution du rayon d'un disque pour l'AMSS (dt=0.025)</i> ..	48
<i>Figure 24 - Evolution du produit grand-axe * petit-axe de l'ellipse pour l'EMSS</i>	49
<i>Figure 25 - Evolution du grand axe et du petit axe de l'ellipse pour l'EMSS-8 voisins (1)</i>	50
<i>Figure 26 - Une carte bathymétrique et sa carte de falaise (droite)</i>	54
<i>Figure 27 - Schéma de principe</i>	56
<i>Figure 28 - Passages par zéro de la différence de deux images après EMSS - Cas A</i>	57
<i>Figure 29 - Passages par zéro du laplacien d'une image analysée par EMSS (dt, N) - Cas B</i>	58
<i>Figure 30 - Passages par zéro du laplacien d'une image lissée par une gaussienne - Cas C</i>	59
<i>Figure 31 - Passages par zéro du LoG - Cas D</i>	60
<i>Figure 32 - Image synthétique de test 1</i>	65
<i>Figure 33 - Evolution du contour 0.5 par EMSS (dt=0.2 100 itérations entre deux images successives, de gauche à droite, de haut en bas)</i>	66
<i>Figure 34 - Image synthétique de test 2</i>	67
<i>Figure 35 - EMSS - 6 voisins (dt=0.2, 400 itérations entre deux images successives)</i>	68
<i>Figure 36 - Image synthétique de test 3</i>	69
<i>Figure 37 - EMSS - 6 voisins (dt=0.5, 200 itérations entre deux images successives, de gauche à droite, de haut en bas)</i>	70
<i>Figure 38 - Invariance affine AMSS 6 voisins</i>	71
<i>Figure 39 - Invariance euclidienne AMSS 6 voisins</i>	72

LISTE DES FIGURES

<i>Figure 1</i> - Evolution d'une ellipse par EMSS-6 voisins pour $dt=0.2$	28
<i>Figure 2</i> - Image initiale du carré	29
<i>Figure 3</i> - Evolution du carré après 200 itérations ($dt=0.2$, à gauche), après 1400 itérations (à droite)	29
<i>Figure 4</i> - Evolution d'un carré par EMSS-8 voisins ($dt=0.2$)	30
<i>Figure 5</i> - Evolution d'un losange par EMSS-8 voisins ($dt=0.1$)	30
<i>Figure 6</i> - Evolution d'une ellipse par AMSS-6 voisins ($dt=0.05$)	32
<i>Figure 7</i> - Evolution d'un carré par AMSS-6 voisins ($dt=0.05$)	33
<i>Figure 8</i> - Stabilité du cercle pour l'EMSS 6 voisins (à droite, analyse plus fine), 100 itérations	34
<i>Figure 9</i> - Illustration de la remarque	35
<i>Figure 10</i> - Stabilité du cercle pour l'EMSS 8 voisins (à droite, analyse plus fine), 100 itérations	35
<i>Figure 11</i> - Stabilité du cercle pour l'AMSS 6 voisins (200 itérations) . .	36
<i>Figure 12</i> - Stabilité du cercle pour l'AMSS 6 voisins (400 itérations) . .	36
<i>Figure 13</i> - Stabilité du cercle pour l'AMSS 8 voisins (200 itérations) . .	37
<i>Figure 14</i> - EMSS 6 voisins, $dt=0.2$ (gauche), $dt=0.5$ (droite), pas de 100 itérations	37
<i>Figure 15</i> - EMSS 6 voisins, 100 itérations	38
<i>Figure 16</i> - EMSS 8 voisins, 100 itérations	38
<i>Figure 17</i> - Stabilité de l'ellipse pour l'AMSS 6 voisins (100 itérations)	39
<i>Figure 18</i> - Stabilité de l'ellipse pour l'AMSS 8 voisins (100 itérations)	39
<i>Figure 19</i> - Evolution du rayon d'un disque pour l'EMSS ($dt=0.1$)	43
<i>Figure 20</i> - Evolution du rayon d'un disque pour l'EMSS ($dt=0.2$)	44

4	AMSS - Affine Morphological Scale-Space analysis	.31
4.1	Implémentation	.31
4.2	L'AMSS appliquée des images synthétiques	.32
5	Stabilité de l'analyse	.33
5.1	Théorie	.33
5.2	Tests de stabilité des analyses EMSS et AMSS sur le disque	.34
5.3	Tests de stabilité des analyses EMSS et AMSS sur une ellipse	.37
5.4	Conclusions sur la stabilité des analyses EMSS et AMSS	.40
6	Comparaison des schémas numériques	.40
6.1	Critère du rayon du disque	.40
6.1.1	Calcul théorique du rayon	.40
6.1.2	Changement d'échelle	.41
6.1.3	Résultats pour l'EMSS	.41
6.1.4	Résultats pour l'AMSS	.46
6.2	Extrapolation à l'évolution du grand-axe et du petit-axe de l'ellipse	.49
6.3	Rapport Signal-sur-Bruit	.50
6.4	Conclusions sur la comparaison des schémas numériques	.53
7	Application à la détection de caractéristiques	.53
8	Conclusion	.61
	Bibliographie	.63
	Annexes : Illustrations des analyses multi-échelles	
	A : Tests sur des images synthétiques	
	B : Tests sur des images synthétiques bruitées	
	C : Tests de stabilité	
	D : Comparaison des différentes implémentations de l'EMSS	
	E : Comparaison des différentes implémentations de l'AMSS	

TABLE DES MATIERES

1	Introduction	11
2	Généralités	12
2.1	Axiome de la structure pyramidale	12
2.2	Axiome de comparaison locale	13
2.3	Axiome de régularité	13
2.4	Invariance morphologique	14
2.5	Invariance euclidienne ou affine	14
2.6	Linéarité	15
2.7	Théorèmes généraux	15
2.7.1	Théorème 1	15
2.7.2	Théorème 2	16
2.7.3	Théorème 3	17
3	EMSS - Euclidian Morphological Scale-Space Analysis	18
3.1	Rappel théorique et Implémentation globale	18
3.2	Schéma numérique 8 voisins	19
3.2.1	D'après (Alvarez et al., 1994)	21
3.2.2	D'après (Sapiro et al., 1993)	23
3.2.3	D'après (Alvarez, 1996)	23
3.2.4	D'après (Cohignac et al., 1993)	23
3.3	Un nouveau schéma de résolution : le schéma «6 voisins»	24
3.4	Calcul des gradients	27
3.5	L'EMSS appliquée à des images synthétiques	27
3.5.1	Evolution d'une ellipse	28
3.5.2	Evolution d'un carré	29
3.5.3	Evolution d'un losange	30

About numerical schemes for partial differential equations resolution for image processing

Abstract: Recently, a number of methods using Partial Differential Equations (PDE) has occurred in image processing and computer vision literature, such that multi-scale analysis, geometric curve evolution, restoration and image enhancement problems. In this document, our interest is focused on the problem of efficient implementation of numerical schemes for PDE's resolution, in the context of multi-scale analysis, which can also be applied to restoration or curve evolution. We propose a new numerical scheme associated to EMSS and AMSS analysis and we compare these performances to each of the four classical schemes, detailed here. Stability problems which can appear during the process evolution are analysed and illustrated. Quantitative performances of the five different schemes, based on the theoretical evolution of geometric frames, are compared. Finally, an application to edge detection is presented.

Key-words: Partial differential equations, Numerical schemes, Image processing, Multi-scale analysis.

*Email : lucido@ifremer.fr

IFREMER - Laboratoire de Robotique Sous-Marine -
ZP de Brégaillon - BP 330 - 83507 La Seyne-Sur-Mer (France)
Téléphone : 04 94 30 44 18 - Télécopie : 04 94 87 83 07

Sur quelques schémas numériques de résolution d'équations aux dérivées partielles pour le traitement d'images

Laurence Lucido*, Rachid Deriche, Luis Alvarez, Vincent Rigaud

Thème 3

Interaction homme-machine, images, données, connaissances

Projet RobotVis

Rapport de recherche n°3192- Juin 1997.

Résumé : Plusieurs méthodes faisant appel à l'utilisation d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP) sont apparues récemment dans la littérature des domaines liés au traitement des images et de la vision par ordinateur. Ces méthodes traitent de problèmes aussi divers que l'analyse multi-échelles, l'évolution géométrique de courbes, l'amélioration et la restauration d'images bruitées, la stéréovision, la détection et le suivi d'objets en mouvements.

Dans ce rapport, nous nous intéressons principalement au problème de la mise en oeuvre de schémas numériques efficaces pour la résolution des Équations aux Dérivées Partielles qui apparaissent dans le cadre de l'axiomatisation de l'analyse multi-échelles et que l'on retrouve aussi dans le cadre de problèmes de restauration d'images et d'évolution géométrique de courbes. Nous proposons, en particulier, un nouveau schéma numérique pour la mise en oeuvre d'EDP associées aux analyse multi-échelles dites EMSS et AMSS et comparons ses performances à celles obtenues par quatre autres schémas classiques, que nous présentons en détail. Nous analysons et illustrons les problèmes de stabilité qui peuvent apparaître en cours d'évolution, pour chacun des schémas mis en oeuvre. Enfin, nous comparons quantitativement les performances des différents schémas, en utilisant la loi d'évolution théorique obtenues pour certaines figures géométriques et en la comparant à celles obtenues expérimentalement pour chacun des schémas considérés. Une application au problème de l'extraction des contours est enfin considérée.

Plusieurs résultats expérimentaux, obtenus à partir d'images réelles illustrent les différentes parties de ce rapport, qui vient compléter (Deriche et al., 1997).

Mots-clé : Equations aux dérivées partielles, Schémas numériques, Traitement des images, Analyse multi-échelles.

(Abstract: pto)



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

***Sur quelques schémas numériques de résolution
d'équations aux dérivées partielles
pour le traitement d'images***

Laurence LUCIDO, Rachid DERICHE, Luis ALVAREZ, Vincent RIGAUD

N° 3192

Juin 1997

Thème 3

Intéraction homme-machine, images,
données, connaissances

Projet RobotVis

 ***apport
de recherche***

1997