HAL
open science

Qualité des maillages de surfaces. Partie I : spécifications isotropes

Pascal Frey, Houman Borouchaki

▶ To cite this version:

Pascal Frey, Houman Borouchaki. Qualité des maillages de surfaces. Partie I : spécifications isotropes. [Rapport de recherche] RR-3228, INRIA. 1997. inria-00073461

HAL Id: inria-00073461
https://inria.hal.science/inria-00073461v1

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Qualité des maillages de surfaces. Partie I : spécifications isotropes

Pascal J. Frey - Houman Borouchaki

N° 3228
Aout 1997

THÈME 4

Rapport de recherche

Les rapports de recherche de l'INRIA
sont disponibles en format postscript sous
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

si vous n'avez pas d'accès ftp
la forme papier peut être commandée par mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(n'oubliez pas de mentionner votre adresse postale).

par courrier :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

INRIA research reports
are available in postscript format
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

if you haven't access by ftp
we recommend ordering them by e-mail :
e-mail : dif.gesdif@inria.fr
(don't forget to mention your postal address).

by mail :
Centre de Diffusion
INRIA
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

Qualité des maillages de surfaces. Partie I : spécifications isotropes.

Pascal J. FREY* et Houman BOROUCHAKI†

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 3228 — 13 août 1997 — 29 pages

Résumé : Ce rapport est consacré à l'étude de la qualité en taille et la qualité en forme des maillages de surfaces gouvernés, la contrainte étant relative soit à une métrique quelconque donnée, soit à une métrique géométrique associée à la géométrie. Les requis en forme sont ceux des méthodes d'éléments finis. Les mesures proposées permettent de valider les maillages de surfaces dans un schéma général d'adaptation de maillages, tel que ceux rencontrés dans les simulations numériques par des méthodes d'éléments finis pour lesquels la carte de métrique est fournie par un estimateur d'erreur a posteriori. Dans cette première partie de l'étude sur la qualité des maillages de surfaces, nous traitons le cas des métriques isotropes, les métriques anisotropes faisant l'objet d'une seconde partie. Différents exemples sont présentés pour illustrer la pertinence des critères proposés.

Mots-clé : Maillage de surface, Qualité des maillages, Approximation polyédrique

(Abstract: pto)

* E-mail : Pascal.Frey@inria.fr
† E-mail : Houman.Borouchaki.univ-troyes.fr

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
Téléphone : (33 1) 39 63 55 11 – Télécopie : (33 1) 39 63 53 30

Quality of surface meshes.
Part I : isotropic specifications.

Abstract: This report deals with the size quality as well as the shape quality of constrained surface meshes, the constraint being either any given metric or the geometric metric associated with the surface geometry. The shape requirements are those of the finite element method. The proposed measures allow to validate the surface meshes within a general mesh adaption scheme as can be found in numerical computations of finite element problems for which the metric map is provided via an a posteriori error estimate. In this first part of the study on surface mesh quality, we focuss on the isotropic metrics, as the generalization to the anisotropic metrics will be emphasized in the second part. Several application examples are presented to illustrate the relevance of the proposed criteria.

Key-words: Surface mesh, Mesh quality, Polyhedral approximation.

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Conformité physique **6**

3 Conformité géométrique **7**

4 Conformité physico-géométrique **9**

5 Qualité en forme **9**

6 Quelques critères géométriques **10**

7 Schéma d'évaluation des qualités **13**

8 Exemples d'applications **14**
8.1 Squelette du pied 14
8.2 Stanford bunny 16
8.3 Navette Columbia 18
8.4 Tête 20
8.5 Pièce mécanique 22
8.6 Molécule de carotène 24
8.7 Sphère adaptée 26

9 Conclusions **29**

1 Introduction

Les triangulations de surfaces jouent un rôle important dans de nombreuses applications et sont couramment utilisées dans les simulations numériques et la visualisation graphique. Dans ces domaines d'applications, toute triangulation doit présenter des propriétés spécifiques. Celles-ci sont essentiellement liées à la géométrie de la surface et à la physique du problème. Par suite, on s'intéresse à quelques propriétés fondamentales et on cherche à savoir si ces propriétés sont vérifiées par une triangulation de surface donnée.

Toute discrétisation conforme (au sens des éléments finis) d'un domaine de R^2 ou R^3 est appelée une triangulation. Contrairement aux triangulations des domaines plans et des domaines volumiques, une triangulation de surface (*i.e.* dont tous les sommets appartiennent à la surface) n'est pas nécessairement une approximation fidèle de la surface réelle. En effet, l'objectif principal est de trouver une approximation optimale de la vraie surface, de telle sorte que l'écart maximal entre la surface et les éléments de la triangulation n'excède pas une tolérance donnée. Une triangulation de surface satisfaisant ce requis est appelée une *triangulation géométrique de surface.*

Dans le contexte de la simulation numérique par des méthodes d'éléments finis, la qualité en forme des éléments de la triangulation sous-jacente est importante, en raison notamment de son effet sur la précision des solutions numériques et sur la convergence du schéma de calcul. L'adaptation des triangulations au comportement physique du phénomène étudié est un moyen élégant et efficace de réduire les temps de calcul et d'améliorer la précision des résultats numériques. Le critère d'adaptation est basé sur un estimateur d'erreur a posteriori (cf. Ciarlet [4]) et le résultat de l'analyse est traduit en termes de métriques associées aux noeuds de la triangulation support du calcul. Cette carte discrète de métriques permet de gouverner la génération de la triangulation pour obtenir une triangulation plus adaptée au phénomène physique modélisé. Une triangulation satisfaisant une carte de métriques spécifiée est appelée un *maillage.* La *conformité physique* d'une triangulation signifie que celle-ci respecte nécessairement une carte donnée. Un maillage n'est pas nécessairement optimal, en termes de qualité en forme de ses éléments (éléments équilatéraux). En effet, la qualité en forme est liée à la surface ou au volume des éléments ainsi qu'aux longueurs d'arêtes. Cette qualité en forme ne peut généralement être obtenue que si la variation en taille dans la carte est contrôlée. Ainsi, pour une carte donnée, le maillage résultant peut ne pas être optimal en forme. Pour y remédier, on peut

apporter une correction à la carte initiale, pour réduire les variations de tailles localement trop importantes (cf. Borouchaki et al. [3]). Un maillage respectant une carte de métriques, de gradation contrôlée[1], est appelé un *maillage éléments finis.*

Dans [1], on montre qu'une triangulation de surfaces respectant la carte des rayons de courbure principaux, appelée carte géométrique, ou tout autre carte réduite[2], est géométrique (*i.e.* c'est une approximation fidèle de la surface). Par définition, une telle triangulation est un *maillage géométrique* de la surface, dans la mesure où celle-ci respecte une carte. La *conformité géométrique* signifie qu'une triangulation donnée est un maillage géométrique.

Par conséquent, pour une triangulation de surfaces, deux types de contraintes sont à considérer, la conformité géométrique (par rapport à une carte géométrique) et la conformité physique (par rapport à la carte spécifiée). **Soit une carte quelconque de métriques, le problème que l'on se pose est de décider si une triangulation d'une surface donnée représente un maillage géométrique par rapport à cette carte. L'objectif de ce rapport est d'introduire des mesures de qualité pour les maillages de surfaces, destinées à permettre la validation de la conformité physique et/ou de la conformité géométrique.**

Section 2, nous rappelons la notion de conformité physique relative aux maillages de surfaces. Section 3, nous rappelons comment la conformité géométrique peut s'interpréter comme un cas particulier de la conformité physique. Section 4, la notion de conformité physico-géométrique est introduite. Section 5, nous introduisons la qualité en forme d'un maillage de surfaces. Quelques critères à caractère purement géométrique sont donnés en Section 6, pour l'évaluation du caractère géométrique d'une triangulation. Section 7, nous résumons ces notions dans un schéma global d'évaluation. La Section 8 analyse, en termes de conformité, de nombreux exemples de maillages surfaciques. Finalement, Section 9, des extensions sont brièvement mentionnées.

1. En pratique, cette gradation représente, pour tout sommet, le rapport de taille au voisinage de ce sommet. Une valeur comprise entre 1 et 3 conduit à un maillage de bonne qualité en forme.

2. Pour une métrique donnée, une métrique réduite est une métrique dont la boule unité est incluse dans la boule unité de la métrique initiale.

2 Conformité physique

Soient T une triangulation surfacique composée de triangles, S l'ensemble de ses sommets et $\mathcal{M}_3(S)$ une carte de métriques associée à S. La métrique en un sommet P de T est représentée par une matrice symétrique définie positive caractérisant a posteriori la longueur idéale (*i.e.* unité) de toute arête PX incidente à P par la relation

$$^t\overrightarrow{PX}\mathcal{M}_3(P)\overrightarrow{PX} = 1\,. \tag{1}$$

Le lieu géométrique des points vérifiant cette équation est généralement un ellipsoïde désigné par $\overline{\mathcal{M}_3(P)}$. En interpolant la carte discrète de métriques $\mathcal{M}_3(S)$ sur T, on obtient une carte continue $\mathcal{M}_3^c$ dans R^3. On définit ainsi une structure riemannienne en munissant R^3 de la carte $\mathcal{M}_3^c$. Vérifier si T respecte, sans considération géométrique (aucune arête n'est tracée sur la surface), la carte $\mathcal{M}_3(S)$ (ce qui veut dire que T est un maillage) revient à montrer que

$$\forall\, a \in T\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq l(a) \leq \sqrt{2} \tag{2}$$

où a est une arête et $l(a)$ sa longueur par rapport à $\mathcal{M}_3^c$. Rappelons que si P et Q sont les extrémités de l'arête a, paramétrée entre 0 et 1 par $P + t\overrightarrow{PQ}$, alors

$$l(PQ) = \int_0^1 \sqrt{^t\overrightarrow{PQ}\,\mathcal{M}_3^c(P + t\overrightarrow{PQ})\,\overrightarrow{PQ}}\,dt\,. \tag{3}$$

Dans le cas d'une métrique isotrope, $\mathcal{M}_3(P) = h(P)^{-2}I_3$ où $h(P)$ est un réel et I_3 est la matrice identité. La métrique $\mathcal{M}_3^c(P + t\overrightarrow{PQ})$ au point $P + t\overrightarrow{PQ}$ de l'arête a peut être définie par

$$\mathcal{M}_3^c(P + t\overrightarrow{PQ}) = H_{PQ}(t) \tag{4}$$

où $H_{PQ}(t)$ est une fonction monotone d'interpolation des tailles vérifiant $H_{PQ}(0) = h(P)$ et $H_{PQ}(1) = h(Q)$. La formule de longueur (3) est alors simplifiée par

$$l(PQ) = \|\overrightarrow{PQ}\| \int_0^1 \frac{1}{H_{PQ}(t)}\,dt\,. \tag{5}$$

Remarquons que l'expression de l'équation (5) peut être calculée de manière exacte, si la fonction $H_{PQ}(t)$ est connue. Pour fixer les idées, on peut considérer une progression géométrique en taille le long de l'arête PQ, on a alors

$$H_{PQ}(t) = H_{PQ}(0)\left(\frac{H_{PQ}(1)}{H_{PQ}(0)}\right)^t\,, \tag{6}$$

avec $H_{PQ}(0) = \|\overrightarrow{PP_1}\|$ (resp. $H_{PQ}(1) = \|\overrightarrow{QQ_1}\|$) où $P_1 = PQ \cap \overline{\mathcal{M}_3(P)}$ (resp. $Q_1 = QP \cap \overline{\mathcal{M}_3(Q)}$), ou, plus simplement, $H_{PQ}(0) = h(P)$ et $H_{PQ}(1) = h(Q)$. Par conséquent

$$l_{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\| \frac{h(Q) - h(P)}{h(Q)\,h(P)\,(\log h(Q) - \log h(P))}. \tag{7}$$

Si on considère les arêtes tracées sur la surface, il convient de vérifier si T respecte la carte $\mathcal{M}_2(S)$ représentant la trace de la carte $\mathcal{M}_3(S)$ dans les plans tangents à la surface, vérifiant ainsi pour chaque point P la relation

$$\overline{\mathcal{M}_2(P)} = \overline{\mathcal{M}_3(P)} \cap \Pi(P), \tag{8}$$

où $\Pi(P)$ est le plan tangent en P à la surface. En remarquant que la carte $\mathcal{M}_2$ n'est définie que dans les plans tangents, la longueur d'une arête $a = PQ$ peut être approchée par la formule (5), mais en considérant, $P_1 = P\tilde{Q} \cap \overline{\mathcal{M}_2(P)}$ (resp. $Q_1 = Q\tilde{P} \cap \overline{\mathcal{M}_2(Q)}$), $\tilde{Q}$ (resp.$\tilde{P}$) étant la projection de Q (resp. P) dans le plan tangent $\Pi(P)$ (resp. $\Pi(Q)$).

Cette conformité en taille (respect de la carte $\mathcal{M}_2(S)$) est appelée conformité physique. Dans le cas d'une métrique isotrope, les deux assertions suivantes sont donc trivialement équivalentes

- T respecte la carte $\mathcal{M}_2(S)$ et
- T respecte la carte $\mathcal{M}_3(S)$.

3 Conformité géométrique

Il est possible de construire une carte de métriques géométrique $\mathcal{G}_3$ associée aux points d'une surface (cf. Borouchaki et George [1]), telle que pour un maillage respectant cette carte (maillage dit géométrique), l'écart entre les triangles et la surface est contrôlé. En réalité, la métrique $\mathcal{G}_3$ impose, pour chaque point, des tailles suivant sa base principale composée des deux vecteurs directeurs des directions principales (appartenant au plan tangent) et le vecteur normal. Les tailles imposées suivant les directions principales dépendent des rayons de courbure principaux et la taille imposée suivant la normale est quelconque. Dans [7] on trouve une procédure permettant un calcul approché de la base principale et des rayons de courbure principaux, à partir de la seule donnée du maillage de la surface. En pratique, cette approche est utilisée pour déterminer la métrique $\mathcal{G}_3$.

Comme la taille imposée suivant la normale est quelconque, on considère plutôt la trace $\mathcal{G}_2$ de $\mathcal{G}_3$ dans les plans tangents à la surface vérifiant donc pour chaque point P

$$\overline{\mathcal{G}_2(P)} = \overline{\mathcal{G}_3(P)} \cap \Pi(P) \,. \tag{9}$$

Vérifier si T est géométrique revient à vérifier si T respecte la carte $\mathcal{G}_2$ (définie dans les plans tangents) associée aux sommets de T. **La conformité par rapport à la carte $\mathcal{G}_2$ est appelée conformité géométrique.** Notons que cette conformité géométrique est relative à l'écart maximal fixé entre la triangulation et la surface. Ainsi, pour un écart fixé, un maillage est ou n'est pas géométrique. En pratique, pour un écart fixé, c'est la longueur maximale des arêtes incidentes en un sommet de T qui détermine localement si T est géométrique (en ce sommet).

Plus précisèment, dans le cas isotrope, $\mathcal{G}_3(P) = r^{-2}(P)\, I_3$, où $r(P)$ représente le plus petit des rayons de courbure principaux au point P. On pourra calculer $r(P)$ indépendemment du calcul des rayons de courbure principaux. En effet, $r(P)$ peut être approché par la formule

$$r(P) = \min_{P_i} \frac{1}{2} \frac{< \overrightarrow{PP_i}, \overrightarrow{PP_i} >}{< \nu_{\mathbf{P}}, \overrightarrow{PP_i} >} \,, \tag{10}$$

où P_i parcourt l'ensemble des extrémités d'arêtes incidentes à P. On obtient donc $\mathcal{G}_2(P) = r^{-2}(P)\, I_2$, de manière triviale.

Notons que toute carte $\widetilde{\mathcal{G}}_2$ réduite de $\mathcal{G}_2$ vérifiant, ainsi pour tout point P de T, $\widetilde{r}(P) \leq r(P)$, est aussi une carte géométrique. Par conséquent, si la taille *intrinsèque* par la discrétisation en un point P est inférieure à $r(P)$, alors cette taille représente localement une métrique géométrique. Par suite, la carte $\mathcal{G}_2$ est rectifiée au regard de la carte des tailles intrinsèques. La taille intrinsèque $\widetilde{h}(P)$ représente la moyenne des longueurs euclidiennes des arêtes incidentes en P. Cette moyenne représente la solution d'un problème de minimisation d'écart entre la taille cherchée et les longueurs d'arêtes issues de P, plus précisément, on cherche à résoudre le problème suivant

$$\text{trouver } \widetilde{h}(P) \text{ minimisant } \sum_{Q} \left(\widetilde{h}(P) - \|\overrightarrow{PQ}\| \right)^2 \tag{11}$$

où Q parcourt l'ensemble des extrémités d'arêtes issues de P. La rectification consiste alors à remplacer $r(P)$ par $\min(r(P), \widetilde{h}(P))$.

4 Conformité physico-géométrique

Dans le cas où T respecte à la fois $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{G}_2$, T est un maillage *physico-géométrique*. Vérifier si T est physico-géométrique revient à vérifier si T respecte la carte intersection des deux cartes $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{G}_2$ définies dans les plans tangents [2]. Cette intersection est caractérisée par les plus grandes boules unité incluses à la fois dans les boules unité associées à $\mathcal{M}_2$ et à celles associées à $\mathcal{G}_2$.

Rappelons que dans le cas isotrope, $\mathcal{G}_2(P) = r^{-2}(P)\, I_2$ et $\mathcal{M}_2(P) = h^{-2}(P)\, I_2$. On en déduit alors que la métrique physico-géométrique $\mathcal{M}G_2(P)$ en P est égale à $\min(r(P), h(P))^{-2}\, I_2$. Notons que par définition, cette carte est géométrique. En revanche, si $h(P)$ est très grand devant $r(P)$, la carte $\mathcal{M}_2$ est localement violée au bénéfice de la géométrie. Pour y remédier, il suffit de tolérer localement des écarts du maillage à la surface plus importants. Dans cette hypothèse, la valeur de l'écart à la surface n'est plus globale, mais devient contrôlée localement et est dépendante de la physique du problème (c'est-à-dire de la carte $\mathcal{M}_2(P)$). Cette nouvelle conformité est appelée conformité physico-géométrique locale.

5 Qualité en forme

L'une des définitions possibles de la qualité en forme d'un triangle K tracé dans un plan est donnée par (cf. Borouchaki et al. [2])

$$\Gamma(K) = \min_{1 \leq i \leq 3} \gamma^i(K)\,, \tag{12}$$

où $\gamma^i(K)$ est la qualité du triangle K calculée dans la métrique $\mathcal{M}_i$ spécifiée au sommet i de K et donnée par

$$\gamma^i(K) = 2\sqrt{3}\frac{|\sqrt{Det(\mathcal{M}_i)}Det(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3})|}{\sum\limits_{1 \leq j < k \leq 3} {}^t\overrightarrow{P_jP_k}\mathcal{M}_i\overrightarrow{P_jP_k}}\,. \tag{13}$$

On peut généraliser cette mesure de qualité aux cas des triangles de maillages surfaciques. Notons que dans ce cas, la métrique en un sommet est définie dans le plan tangent associé. L'extension proposée consiste à redéfinir $\gamma^i(K)$, pour un élément K. Soient P le sommet i de K, $\overrightarrow{n_K}$ un vecteur normal au plan support de K et $\overrightarrow{n_P}$ un vecteur normal au plan tangent $\Pi(P)$. Soit θ l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{n_K}$ et $\overrightarrow{n_P}$. Soit $\widetilde{K_i}$ l'image de K par la rotation autour de l'axe support du vecteur $\overrightarrow{n_K} \times \overrightarrow{n_P}$ et d'angle θ. Le triangle $\widetilde{K_i}$ appartient donc au plan tangent $\Pi(P)$ et on

peut mesurer sa qualité par rapport à la métrique associée à P définie dans ce plan. Ainsi, la qualité de K est définie comme

$$\Gamma(K) = \min_{1 \leq i \leq 3} \gamma^i(\widetilde{K_i}) \,. \tag{14}$$

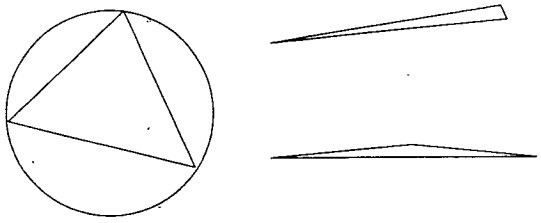

FIG. 1 - *Qualité d'un triangle*

Cette mesure de qualité varie dans l'intervalle $[0, 1]$ où 0 (resp. 1) est associé à un triangle de qualité médiocre (resp. bon). La Figure 1 (à gauche) montre un triangle de bonne qualité en forme, tandis que la Figure 1 (à droite) montre un triangle de qualité médiocre. La qualité d'un maillage surfacique T est caractérisée par d'une part la moyenne et d'autre part par le minimum des qualités des triangles de T.

Dans le cas isotrope, la qualité en forme $\Gamma(K)$ coïncide avec la valeur

$$\Gamma(K) = 2\sqrt{3}\frac{|Det(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3})|}{\sum\limits_{1 \leq j < k \leq 3} {}^t\overrightarrow{P_jP_k}\,\overrightarrow{P_jP_k}} \,. \tag{15}$$

qui représente une mesure classique de la qualité d'un triangle dans le plan.

6 Quelques critères géométriques

Dans cette section, on va rappeler (cf. Frey et Borouchaki [5]) quelques critères de nature géométrique destinés à permettre la validation de la nature géométrique d'une triangulation, indépendemment des mesures de conformité introduites précédemment. Ces mesures permettent de

- justifier localement en un sommet le caractère géométrique de la triangulation et
- juger si la triangulation respecte la carte de tailles intrinsèques et dans ce cas, si la triangulation est un maillage éléments finis.

Toutes ces mesures ont été normalisées entre 0 (localement "mauvais") et 1 (localement "bon"). Soient un P sommet fixé, $\{P_i\}$ l'ensemble des sommets adjacents à P et ν_P (resp. ν_{P_i}) la normale unitaire en P (resp. P_i). Les critères suivants sont appliqués au sommet P

- planarité, $\mathcal{P}_P$.
  La planarité au sommet P est liée à l'angle maximum entre la normale ν_P et les normales $\{\nu_{P_i}\}$, et est donnée par la relation

$$\mathcal{P}_P = \frac{1 + \min_i \langle \nu_P, \nu_{P_i} \rangle}{2} . \tag{16}$$

- déviation, $\mathcal{D}_P$.
  La déviation $\mathcal{D}_P$ au sommet P est définie comme l'angle maximum entre les arêtes PP_i et le plan tangent $\Pi(P)$. Soit u_{PP_i} le vecteur unitaire de direction $\overrightarrow{PP_i}$, alors la déviation s'écrit

$$\mathcal{D}_P = 1 - \min_i |\langle \nu_P, u_{PP_i} \rangle| . \tag{17}$$

- rugosité, $\mathcal{R}_P$.
  Soient K_1 et K_2 deux faces partageant l'arête PQ, la rugosité $\mathcal{R}_{PQ}$ le long de PQ représente l'angle dièdre entre les faces K_1 et K_2. Soient ν_{K_1} et ν_{K_2} leurs normales unitaires, cette rugosité s'écrit comme

$$\mathcal{R}_{PQ} = \frac{1 + \langle \nu_{K_1}, \nu_{K_2} \rangle}{2} . \tag{18}$$

  Par extension, la rugosité $\mathcal{R}_P(P)$ au sommet P est définie comme

$$\mathcal{R}_P = \min_i \mathcal{R}_{PP_i} . \tag{19}$$

- qualité en taille, $\mathcal{L}_P$.
  La qualité en taille représente la conformité physique de la triangulation par rapport à la carte de taille intrinsèque. Rappelons que la longueur normalisée $l(PQ)$ d'un segment droit $[PQ] = (P + t\overrightarrow{PQ})_{0 \leq t \leq 1}$ dans la métrique de la taille intrinsèque est définie comme

$$l_{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\| \int_0^1 \frac{1}{H_{PQ}(t)} \, dt , \tag{20}$$

où $H_{PQ}(t)$ est une fonction monotone continue qui donne la variation de tailles sur l'arête PQ, telle que $H_{PQ}(0) = \widetilde{h}(P)$ et $H_{PQ}(1) = \widetilde{h}(Q)$, $\widetilde{h}(P)$ et $\widetilde{h}(Q)$ étant les tailles intrinsèques en P et Q. La qualité en taille sur l'arête PQ est alors définie par

$$\mathcal{L}_{PQ} = \begin{cases} l_{PQ} & \text{si} \quad l_{PQ} \leq 1 \\ \dfrac{1}{l_{PQ}} & \text{si} \quad l_{PQ} > 1 \end{cases} \tag{21}$$

Par extension, la qualité en taille au sommet P est alors donnée par une moyenne des longueurs $\mathcal{L}_{PP_i}$.

- qualité en forme, $\mathcal{Q}_P$.
  Pour tout triangle K, la qualité en forme $\mathcal{Q}_K$ est définie (uniquement dans le cas isotrope) comme

$$\mathcal{Q}_K = \alpha \frac{\rho_K}{h_K} = \alpha \frac{S_K}{p_K\, h_K}, \tag{22}$$

où $\alpha = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$ est un coefficient de normalisation, tel que $\mathcal{Q}_K = 1$ pour un triangle équilatéral, ρ_K est le rayon du cercle inscrit, h_K est la longueur de la plus grande arête, S_K est la surface, p_K est le demi-périmètre. La qualité en forme au sommet P est définie comme

$$\mathcal{Q}_P = \min_i \mathcal{Q}_{K_i}, \tag{23}$$

où $\{K_i\}$ est l'ensemble des triangles partageant P.

Ces différents critères peuvent être combinés en un critère pondéré unique. En effet, il suffit de définir un critère moyen $\mathcal{C}(P)$ comme

$$\mathcal{C}_P = \mathcal{P}_P^{\alpha_1}\, \mathcal{D}_P^{\alpha_2}\, \mathcal{R}_P^{\alpha_3}\, \mathcal{L}_P^{\alpha_4}\, \mathcal{Q}_P^{\alpha_5} \tag{24}$$

où $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1$. Le contexte d'évaluation géométrique impose naturellement la pondération du critère correspondant.

Ces mesures sont toutes locales, une mesure globale consiste à prendre soit une valeur minimale $\mathcal{C}_T$, soit une valeur moyenne $\overline{\mathcal{C}}_T$ sur l'ensemble des sommets du maillage, c'est-à-dire

$$\mathcal{C}_T = \min_{P \in T} \mathcal{C}_P \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathcal{C}}_T = \sum_{P \in T} \mathcal{C}_P\,. \tag{25}$$

7 Schéma d'évaluation des qualités

On va présenter les différentes étapes de la vérification de la conformité d'une triangulation T d'une surface donnée, ainsi que de son caractère géométrique. Schématiquement, l'algorithme d'évaluation s'écrit, dans le cas isotrope, comme

- Pour chaque sommet P de T,
  - calculer la métrique $\mathcal{M}_2(P)$ dans $\Pi(P)$ le plan tangent en P à la surface, $\overline{\mathcal{M}_2(P)} = h^{-2}(P)\, I_2$, où $h(P)$ vérifie $\overline{\mathcal{M}_3(P)} = h^{-2}(P)\, I_3$,
  - calculer la métrique $\mathcal{G}_2(P)$ dans $\Pi(P)$, $\mathcal{G}_2(P) = (\alpha\, r)^{-2}(P)\, I_2$, où $r(P)$ est le plus petit des rayons de courbure principaux et $\alpha < 1$ est un coefficient réel permettant de contrôler l'écart à la surface de toute arête incidente en P [1],
  - calculer la taille intrinsèque $\widetilde{h}(P)$, où $\widetilde{h}(P)$ représente la moyenne des longueurs euclidiennes des arêtes incidentes en P, $\widetilde{h}(P)$ étant imposée par la discrétisation,
  - rectifier la métrique $\mathcal{G}_2(P)$, en prenant en compte $\widetilde{h}(P)$, en effet $r(P)$ est remplacé par $\min(r(P), \widetilde{h}(P))$.
  - calculer les longueurs normalisées des arêtes incidentes en P par rapport à la carte $\mathcal{G}_2$. Si ces longueurs sont proches de 1, alors T est localement géométriquement conforme en P.
  - calculer les longueurs normalisées des arêtes incidentes en P par rapport à la carte $\mathcal{M}_2$. Si ces longueurs sont proches de 1, alors T est localement physiquement conforme en P.
  - rectifier la carte $\mathcal{M}_2(P)$ en prenant en compte la carte $\mathcal{G}_2$, en effet $h(P)$ est remplacé par $\min(h(P), r(P))$.
  - calculer les longueurs normalisées des arêtes incidentes en P par rapport à la carte $\mathcal{M}_2$. Si ces longueurs sont proches de 1, alors T est localement physico-géométriquement conforme en P.
  - calculer la planarité $\mathcal{P}_P$, la déviation $\mathcal{D}_P$ et la rugosité $\mathcal{R}_P$, si pour un seuil τ fixé, $(\mathcal{P}_P\ \mathcal{D}_P\ \mathcal{R}_P)^{\frac{1}{3}} > \tau$, alors T est une triangulation localement géométrique en P.
  - calculer la qualité en taille $\mathcal{L}_P$ et la qualité en forme $\mathcal{Q}_P$, si $\mathcal{L}_P$ (resp. $\mathcal{L}_P$) est proche de 1 alors T est localement physiquement conforme en P par rapport à la taille intrinsèque (resp. T est localement un maillage éléments finis en P).

Si T vérifie localement l'une quelconque des propriétés précédentes en tout point P, alors la propriété est vérifiée globalement.

Ce schéma permet en particulier de juger si une triangulation est géométrique et/ou si celle-ci est physico-géométriquement conforme par rapport à une carte de spécifications de métriques donnée.

8 Exemples d'applications

Dans cette section, on se propose d'analyser des triangulations de surfaces relatifs à différents domaines d'applications (par exemple, la simulation numérique et la visualisation). Pour chaque triangulation, on indique si celle-ci est géométrique, géométriquement conforme et si en outre une carte de spécifications est donnée, si cette triangulation est physiquement conforme et physico-géométriquement conforme.

8.1 Squelette du pied

Le premier exemple concerne le squelette d'un pied (cf. Figure 2) ainsi qu'un remaillage géométrique de celui-ci (cf. Figure 3). Cet exemple est évalué uniquement par rapport à la carte géométrique $\mathcal{G}_2$ rectifiée.

La triangulation initiale comporte 2154 points et 4204 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0. (resp. 0.67). Les longueurs d'arêtes normalisées par rapport à la carte $\mathcal{G}_2$ varient entre 0.25 et 10.67, la moyenne des longueurs étant de 1.67 (75% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2). Le critère combiné à pondérations identiques sur le maillage donne les valeurs minimale de 0.01 et moyenne de 0.65. Cette triangulation n'est ni une triangulation géométrique, ni un maillage géométriquement conforme.

La triangulation optimisée comporte 71370 points, 142636 triangles. Sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.51 (resp. 0.94). Les longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.56 et 1.97, la moyenne des longueur étant de 1.02. Le critère combiné à pondérations identiques sur le maillage donne les valeurs minimale de

triang. /criteres	$\mathcal{P}_T$	$\mathcal{D}_T$	$\mathcal{R}_T$	$\mathcal{L}_T$	$\mathcal{Q}_T$
	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)
pied orig.	0.30 (0.80)	0.01 (0.57)	0.00 (0.75)	0.24 (0.72)	0.00 (0.46)
pied géom.	0.93 (0.98)	0.66 (0.87)	0.91 (0.98)	0.65 (0.95)	0.51 (0.87)

TAB. 1 - *Evaluation des critères, maillages de pied.*

0.71 et moyenne de 0.93. Cette triangulation est donc géométrique et est globalement un maillage conforme. Le tableau 1 indique les valeurs des critères géométriques.

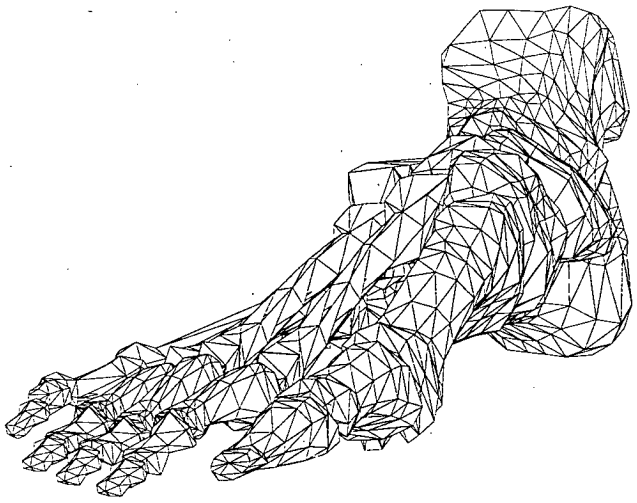

FIG. 2 - *Maillage initial de pied.*

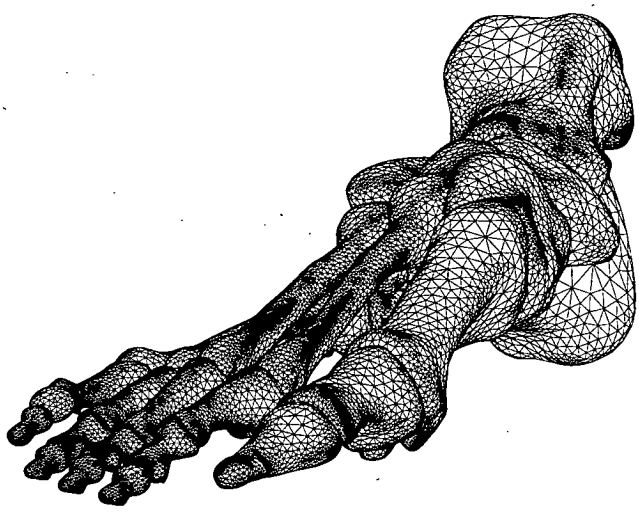

FIG. 3 - *Maillage optimisé de pied.*

8.2 Stanford bunny

Cet exemple concerne la triangulation d'un objet numérisé par un scanner (donnée fournie par Dept. of Comp. Sci., Stanford Univ., USA) qui est supposée représenter une approximation géométrique raisonnable de la surface (cf. Figure 4), ainsi que des triangulations simplifiées de celle-ci. On se propose d'évaluer cet exemple uniquement par rapport à la carte géométrique $\mathcal{G}_2$ rectifiée. Le tableau 2 présente les statistiques relatives aux différents critères géométriques pour les quatre triangulations citées.

La triangulation contient 35947 points et 69451 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.01 (resp. 0.83). Les longueurs d'arêtes normalisées, par rapport à la carte $\mathcal{G}_2$, varient entre 0.30 et 8.11, la moyenne des longueurs étant de 1.19 (98.7% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2). Le critère combiné à pondérations identiques sur le maillage donne les valeurs minimale de 0.10 et moyenne de 0.90. Cette triangulation est à la fois globalement géométrique et globalement géométriquement conforme. Toutefois, elle présente localement des zones où la géométrie n'est pas correctement approchée.

La figure 5 montre une triangulation simplifiée (bunny-14) relative à un écart de 14 degrés à la surface, qui correspond à un gain en nombre de sommets de 76%. Ce maillage contient 8381 points et 16651 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.30 (resp. 0.92). Les longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.44 et 7.19, la moyenne des longueurs étant de 1.11 (97.9% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2). Le critère combiné à pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.30 et moyenne de 0.89. Cette triangulation est géométriquement conforme, malgré quelques insuffisances locales de l'approximation de la géométrie.

La figure 6 montre une triangulation simplifiée (bunny-26) relative à un écart de 26 degrés à la surface, qui correspond à un gain en nombre de sommets de 91%. Ce maillage contient 2929 points et 5790 triangles, sa qualité en forme minimale

triang. /criteres	$\mathcal{P}_T$	$\mathcal{D}_T$	$\mathcal{R}_T$	$\mathcal{L}_T$	$\mathcal{Q}_T$
	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)
bunny orig.	0.62 (0.98)	0.10 (0.90)	0.06 (0.98)	0.21 (0.88)	0.01 (0.79)
bunny-14	0.62 (0.96)	0.12 (0.81)	0.38 (0.96)	0.25 (0.90)	0.30 (0.84)
bunny-26	0.57 (0.91)	0.12 (0.77)	0.43 (0.92)	0.49 (0.94)	0.48 (0.84)
bunny-46	0.54 (0.78)	0.21 (0.53)	0.47 (0.79)	0.76 (0.93)	0.46 (0.81)

TAB. 2 - *Evaluation des critères, maillages de Stanford bunny.*

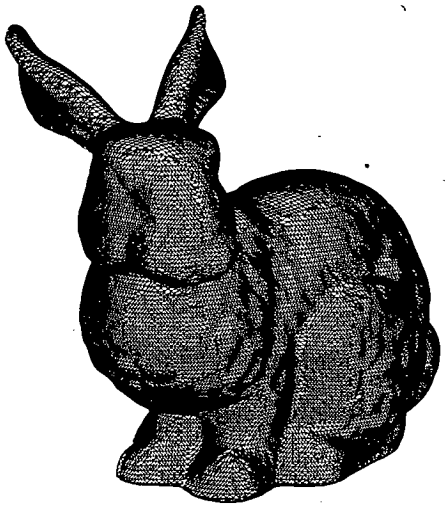

FIG. 4 - *Stanford bunny, maillage initial.*

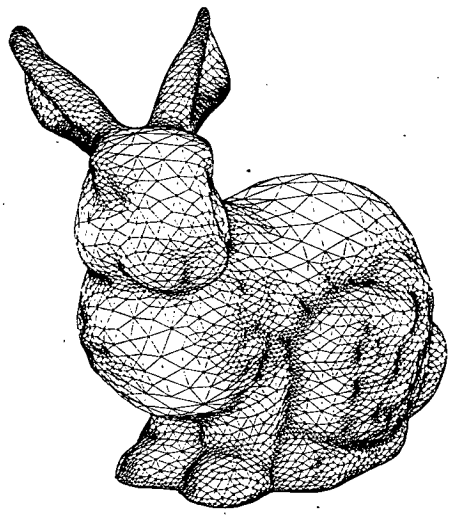

FIG. 5 - *Stanford bunny, écart 14°.*

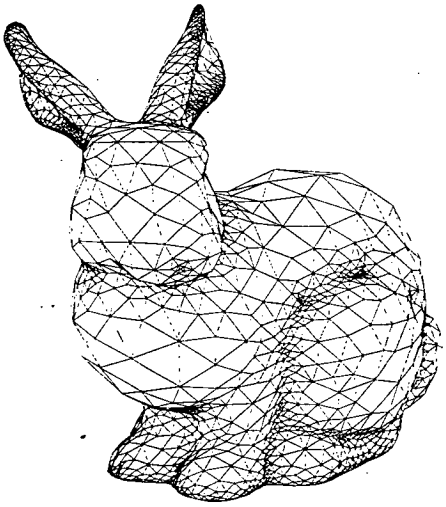

FIG. 6 - *Stanford bunny, écart 26°.*

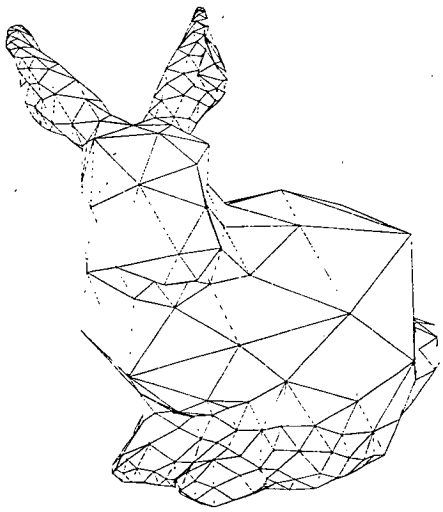

FIG. 7 - *Stanford bunny, écart 46°.*

(resp. moyenne) est de 0.48 (resp. 0.92). Les longueurs d'arêtes normalisées varient

entre 0.48 et 3.10, la moyenne des longueurs étant de 1.03 (99.8% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2). Le critère combiné à pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.37 et moyenne de 0.87. Cette triangulation est géométriquement conforme, malgré quelques insuffisances locales de l'approximation de la géométrie.

La figure 7 montre une triangulation simplifiée (bunny-30) relative à un écart de 46 degrés à la surface, qui correspond à un gain en nombre de sommets de 99%. Ce maillage contient 427 points et 843 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.45 (resp. 0.90). Les longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.58 et 1.98, la moyenne des longueurs étant de 1.02. Le critère combiné à pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.45 et moyenne de 0.76. Cette triangualtion est géométriquement conforme.

8.3 Navette Columbia

La figure 8 représente une triangulation de la navette Columbia fourni par un modeleur, comportant 6348 points et 12692 triangles. Cette triangulation est l'image, par des fonctions rationnelles, d'une grille régulière rectangulaire dans l'espace des paramètres et comprend des discontinuités d'ordre G^1. La triangulation de la Figure 9 montre une optimisation de la triangulation initiale, supposée être géométriquement conforme. On se propose d'évaluer cet exemple uniquement par rapport à la carte géométrique $\mathcal{G}_2$ rectifiée. Le tableau 3 présente les statistiques relatives aux différents critères géométriques pour les triangulations de la navette Columbia.

La qualité en forme minimale (resp. moyenne) de cette triangulation est de 0.05 (resp. 0.42). Les longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.16 et 230.45, la moyenne des longueurs étant de 4.90 (43% des longueurs comprises entre entre 0.5 et 2). Le critère combiné à pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.16 et moyenne de 0.70. Cette triangulation représente une bonne approximation géométrique (et est donc géométrique), mais elle n'est pas géométriquement conforme (ici cette triangulation est évaluée dans un contexte iso-

triang. /criteres	$\mathcal{P}_T$	$\mathcal{D}_T$	$\mathcal{R}_T$	$\mathcal{L}_T$	$\mathcal{Q}_T$
	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)
columbia orig.	0.72 (0.99)	0.32 (0.95)	0.76 (0.99)	0.01 (0.49)	0.05 (0.38)
columbia optim.	0.97 (0.99)	0.75 (0.92)	0.96 (0.99)	0.56 (0.96)	0.26 (0.89)

TAB. 3 - *Evaluation des critères, maillages de Columbia.*

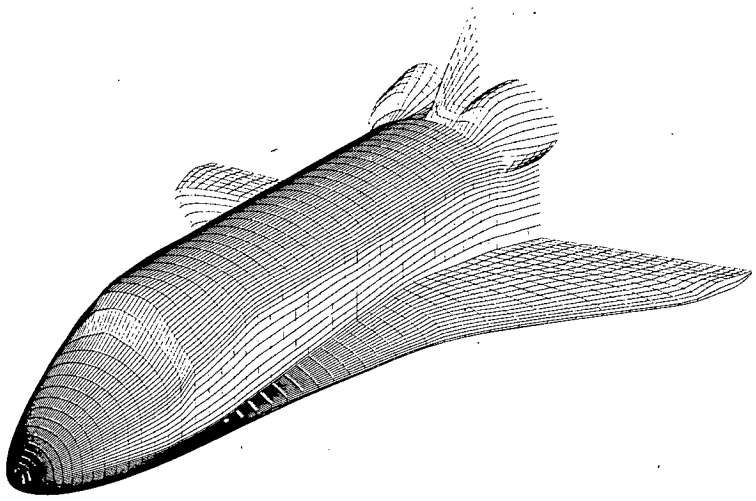

FIG. 8 - *Maillage initial de Columbia.*

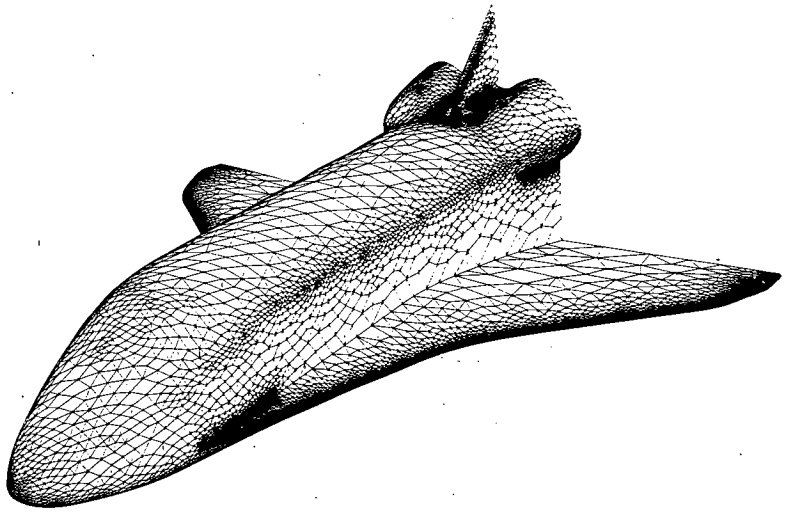

FIG. 9 - *Maillage optimisé de Columbia.*

trope, ce qui la pénalise au niveau de la conformité géométrique isotrope et de la qualité en forme).

La triangulation optimisée comprend 33279 points et 66554 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.27 (resp. 0.95). Les longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.34 et 2.51, la moyenne des longueurs étant de 1.01 (99% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2). Le critère combiné à pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.64 et moyenne de 0.95. Cette triangulation est donc un maillage géométriquement conforme. La qualité pire de ce maillage est atteinte dans des zones voisines des coins, pour lesquels deux arêtes vives concourantes forment un angle très faible.

8.4 Tête

La triangulation de la Figure 10 est une reconstruction d'une iso-surface biomédicale (une tête) à partir de données volumétriques (fournies par Low Temp. Lab., Helsinki Univ. of Tech., Finlande), qui comprend 67106 points et 134208 triangles. On se propose d'analyser des triangulations optimisées ou simplifiées de cette surface, par rapport uniquement à la carte géométrique $\mathcal{G}_2$ rectifiée. L'analyse de la triangulation intiale n'a pas d'intérêt dans la mesure où la méthode de génération n'est pas basée sur des critères géométriques. Le tableau 4 présente les statistiques relatives aux différents critères géométriques pour les quatre triangulations citées.

La triangulation de la Figure 11 est un remaillage géométrique (tete-3) relatif à un écart de 3 degrés à la surface, qui comprend 64048 points et 128092 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.43 (resp. 0.92). Les longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.53 et 4.20, la moyenne des longueurs étant de 1.03 (99.9% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2). Le critère combiné à pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.66 et moyenne de 0.94. Cette triangulation est géométriquement conforme.

La figure 12 montre une triangulation simplifiée (tete-12) relative à un écart de 12 degrés à la surface, qui correspond à un gain en nombre de sommets de 82%. Ce maillage contient 11814 points, 23624 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.53 (resp. 0.92). Les longueurs d'arêtes normalisées varient

triang. /criteres	$\mathcal{P}_T$	$\mathcal{D}_T$	$\mathcal{R}_T$	$\mathcal{L}_T$	$\mathcal{Q}_T$
	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)
tete-3	0.98 (1.00)	0.83 (0.94)	0.98 (1.00)	0.36 (0.94)	0.43 (0.83)
tete-12	0.96 (0.98)	0.77 (0.88)	0.96 (0.99)	0.72 (0.96)	0.53 (0.84)
tete-18	0.90 (0.96)	0.66 (0.81)	0.90 (0.97)	0.77 (0.96)	0.52 (0.85)

TAB. 4 - *Evaluation des critères, maillages de Tête.*

FIG. 10 - *Tête, maillage initial.*

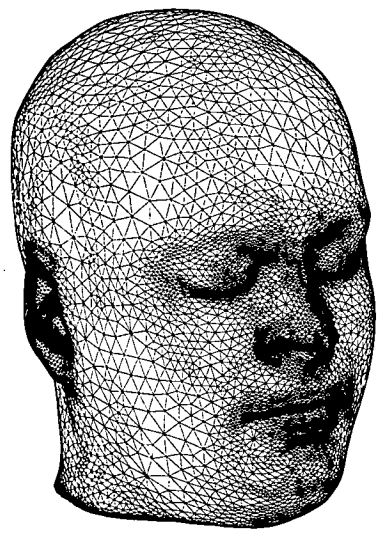

FIG. 11 - *Tête, écart 3°.*

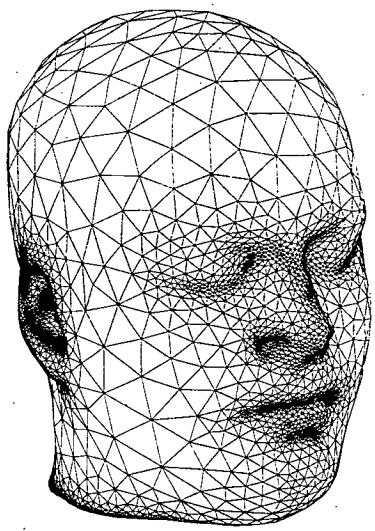

FIG. 12 - *Tête, écart 12°.*

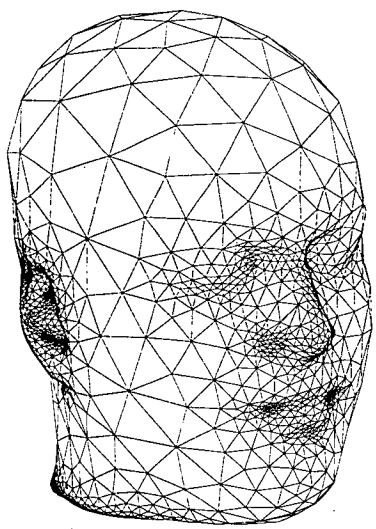

FIG. 13 - *Tête, écart 18°.*

entre 0.60 et 1.81, la moyenne des longueurs étant de 1.02. Le critère combiné à

pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.77 et moyenne de 0.93. Cette triangulation est géométriquement conforme.

La figure 13 montre une triangulation simplifiée (bunny-30) relative à un écart de 18 degrés à la surface, qui correspond à un gain en nombre de sommets de 93%. Ce maillage contient 4838 points, 9672 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.52 (resp. 0.92). Les longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.61 et 1.69, la moyenne des longueurs étant de 1.01. Le critère combiné à pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.74 et moyenne de 0.90. Cette triangualtion est géométriquement conforme.

8.5 Pièce mécanique

La figure 14 représente une triangulation d'une pièce mécanique fourni par un modeleur, comportant 3895 points et 7794 triangles (triangulation fournie par Mac Neal–Schwendler Corp.). La triangulation de la Figure 15 montre une optimisation de la triangulation initiale, supposée être géométriquement conforme. On se propose d'évaluer cet exemple uniquement par rapport à la carte géométrique $\mathcal{G}_2$ rectifiée. Le tableau 5 présente les statistiques relatives aux différents critères géométriques pour les triangulations de la pièce mécanique.

La qualité en forme minimale (resp. moyenne) de cette triangulation est de 0.54 (resp. 0.95). Les longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.62 et 4.77, la moyenne des longueurs étant de 1.52 (77% des longueurs comprises entre entre 0.5 et 2). Le critère combiné à pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.56 et moyenne de 0.91. Cette triangulation représente une bonne approximation géométrique (et est donc géométrique), mais elle n'est pas géométriquement conforme, car 23% des arêtes ont une longueur normalisée qui est supérieure à 2.

La triangulation optimisée comprend 13877 points et 27758 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.47 (resp. 0.94). Les longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.46 et 3.54, la moyenne des longueurs étant de 1.02 (99.9% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2). Le critère combiné à pondérations

triang. /criteres	$\mathcal{P}_T$	$\mathcal{D}_T$	$\mathcal{R}_T$	$\mathcal{L}_T$	$\mathcal{Q}_T$
	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)
pièce orig.	0.79 (0.99)	0.46 (0.96)	0.80 (0.99)	0.35 (0.75)	0.54 (0.90)
pièce optim.	0.97 (0.99)	0.72 (0.94)	0.94 (0.99)	0.48 (0.96)	0.47 (0.87)

TAB. 5 - *Evaluation des critères, maillages de la pièce mécanique.*

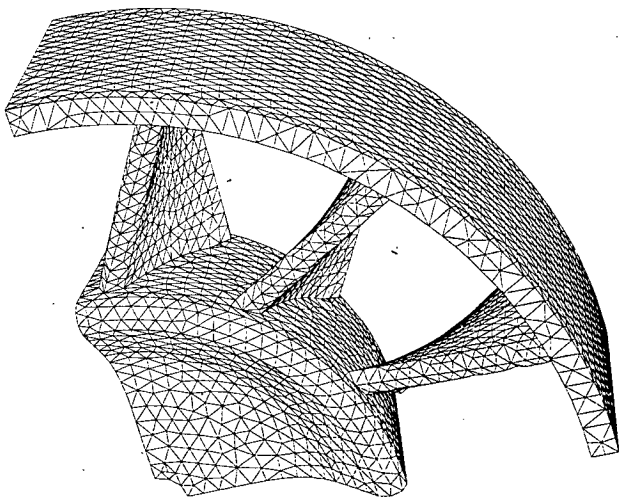

FIG. 14 - *Maillage initial de la pièce mécanique.*

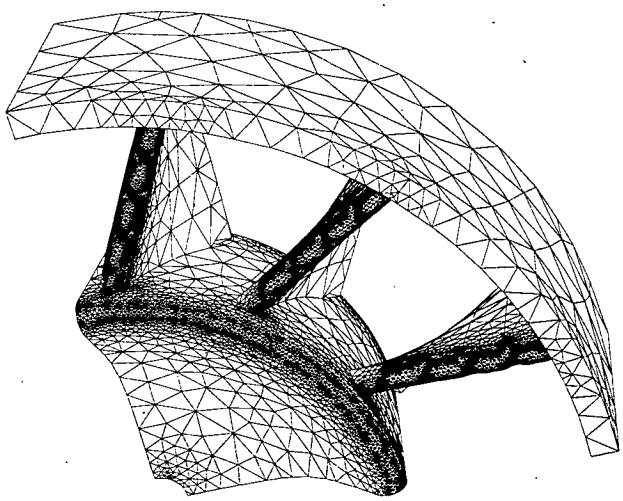

FIG. 15 - *Maillage optimisé de la pièce mécanique.*

identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.68 et moyenne de 0.95. Cette triangulation est donc un maillage géométriquement conforme.

8.6 Molécule de carotène

La figure 16 représente la triangulation d'une molécule de carotène comprenant 92 atomes (sphères définies par leurs centres et leurs rayons), pour des écarts à la surface de 6 et de 11 degrés. Cette triangulation a été obtenue en maillant chaque domaine de paramètres dans R^2 (184 au total) à partir de sa frontière en la gouvernant par une carte de métriques déduite des propriétés intrinsèques de la surface image associée. La triangulation de l'enveloppe des sphères composant la molécule est alors obtenu comme l'union des images des triangulations planes (cf. Laug et Borouchaki [6] pour plus de détails sur cette approche).

On se propose d'évaluer cette triangulation uniquement par rapport à la carte géométrique $\mathcal{G}_2$ rectifiée. Le tableau 6 présente les statistiques relatives aux différents critères géométriques pour les deux triangulations de la molécule.

La triangulation relative à un écart de 11 degrés comprend 9032 points et 11742 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.15 (resp. 0.92). Les longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.26 et 2.16, la moyenne des longueurs étant de 1.05 (99.3% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2). Le critère combiné à pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.53 et moyenne de 0.91. Cette triangulation est donc un maillage géométriquement conforme.

La triangulation relative à un écart de 6 degrés comprend 21375 points et 33318 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.29 (resp. 0.95). Les longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.27 et 4.81, la moyenne des longueurs étant de 1.08 (99.2% des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2). Le critère combiné à pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.62 et moyenne de 0.94. Cette triangulation est donc un maillage géométriquement conforme.

triang. /criteres	$\mathcal{P}_T$	$\mathcal{D}_T$	$\mathcal{R}_T$	$\mathcal{L}_T$	$\mathcal{Q}_T$
	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)
carotène-11	0.88 (0.98)	0.64 (0.86)	0.93 (0.99)	0.55 (0.93)	0.15 (0.91)
carotène-6	0.97 (0.99)	0.81 (0.91)	0.98 (0.99)	0.40 (0.93)	0.29 (0.94)

TAB. 6 - *Evaluation des critères, maillages de la molécule.*

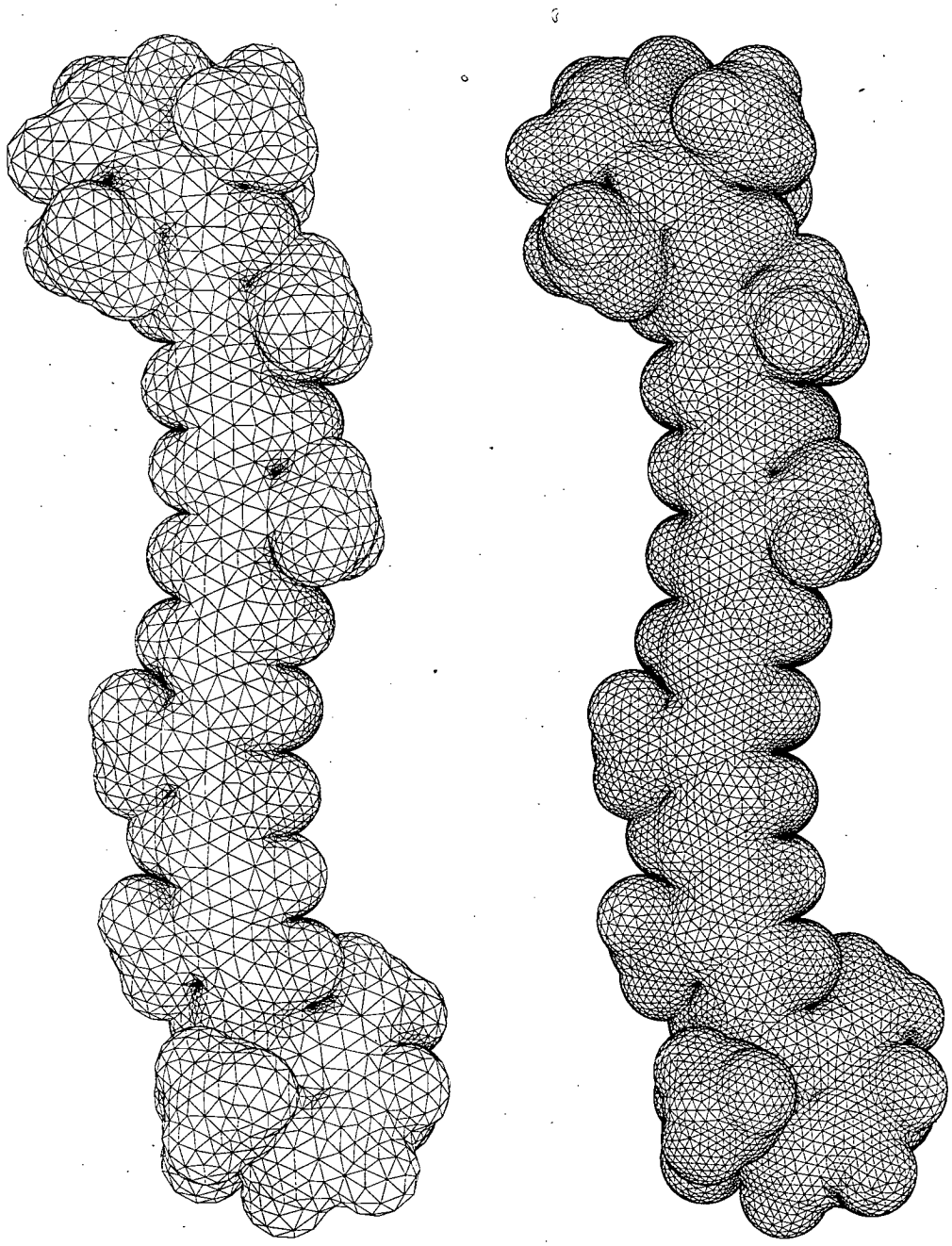

FIG. 16 - *Carotène, maillages écarts 11° et 6°.*

8.7 Sphère adaptée

Le dernier exemple concerne le maillage adapté d'une sphère centrée à l'origine, de rayon 1, à un champ de tailles analytique spécifié. La figure 17 (à gauche) montre une triangulation de cette sphère avant l'adaptation qui représente une triangulation de taille constante (0.16). La figure 18 (à droite) montre la triangulation de cette sphère après l'adaptation. En effet, cette triangulation a été obtenue dans une boucle d'adaptation où la métrique servant à gouverner chaque maillage à une itération donnée est constituée de la carte discrète de métriques définie aux sommets du maillage de l'itération précédente enrichie par interpolation sur ce maillage. A titre indicatif, les Figures 17 (à droite) et 18 (à gauche) montrent les triangulations adaptées correspondant aux itérations 1 et 2 de la boucle d'adaptation. On se propose d'analyser uniquement la dernière triangulation de la boucle d'adaptation (qui est supposée être convergée), par rapport aux contraintes de teilles spécifiées. Cette dernière triangulation va donc être évaluée par rapport à une carte physico-géométrique $\mathcal{M}G_2$ rectifiée.

Le champ de tailles analytique est défini par la relation suivante

$$h(x,y,z) = \min_{i=1,6}(h_i(x,y,z)) \tag{26}$$

avec

$$\begin{aligned}
h_1(x,y,z) &= 0.7\,\|d_1 - 1\| + 0.002\\
h_2(x,y,z) &= 0.7\,\|d_2 - 1\| + 0.002\\
h_3(x,y,z) &= 0.7\,\|d_3 - 1\| + 0.015\\
h_4(x,y,z) &= 0.7\,\|d_4 - 1\| + 0.015\\
h_5(x,y,z) &= 0.7\,\|d_5 - 1\| + 0.01\\
h_6(x,y,z) &= 0.7\,\|d_6 - 1\| + 0.01
\end{aligned}$$

où d_1 est la distance entre le point (x,y,z) et le point $(1.,0.,0.)$, d_2 est la distance au point $(-1.,0.,0.)$, d_3 est la distance au point $(0.,1.,0.)$, d_4 est la distance au point $(0.,-1.,0.)$, d_5 est la distance au point $(0.,0.,1.)$ et d_6 est la distance au point $(0.,0.,-1.)$.

La triangulation initiale comprend 1922 points et 3840 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.97 (resp. 0.99). En analysant cette triangulation uniquement par rapport à la carte de tailles géométrique $\mathcal{G}_2$ rectifiée, on

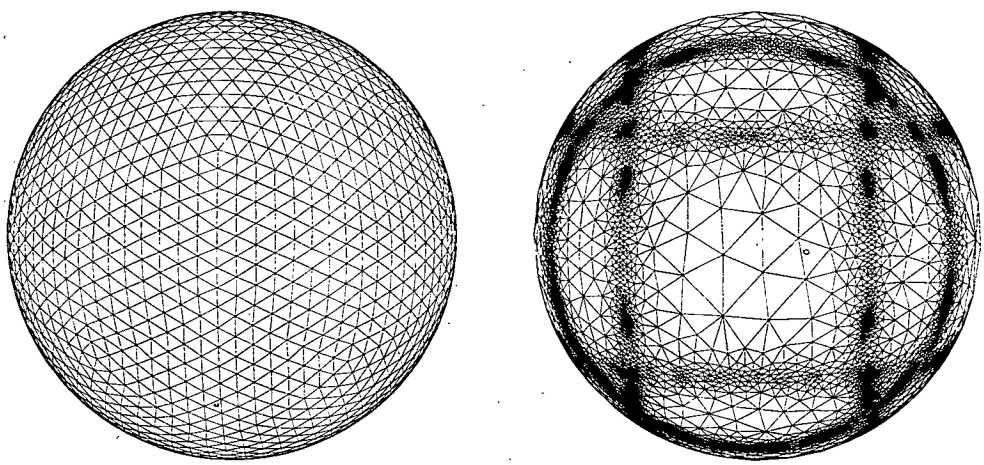

FIG. 17 - *Sphère, triangulations aux itérations 0 et 1.*

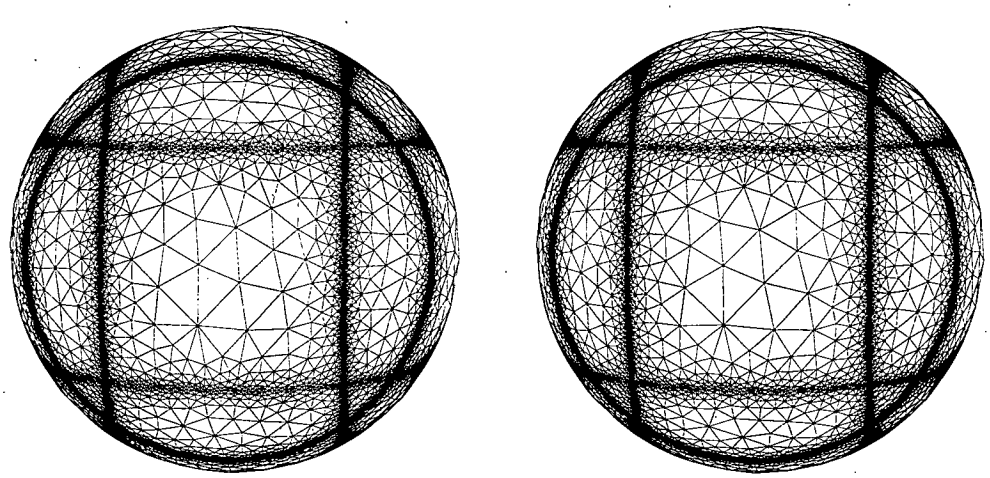

FIG. 18 - *Sphère, triangulations aux itération 2 et 7.*

obtient des longueurs d'arêtes normalisées variant entre 0.94 et 1.11, la moyenne des longueurs étant de 1.00. Le critère combiné à pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.98 et moyenne de 0.99. Cette triangulation est donc un maillage géométriquement conforme.

La triangulation adaptée comprend 29702 points et 59400 triangles, sa qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.61 (resp. 0.92). En analysant cette triangulation uniquement par rapport à la carte de tailles physico-géométrique $\mathcal{M}G_2$ rectifiée (une taille minimale et une taille maximale ont été imposées), on obtient des longueurs d'arêtes normalisées varient entre 0.63 et 1.43, la moyenne des longueurs étant de 1.01. Le critère combiné à pondérations identiques sur la triangulation donne les valeurs minimale de 0.83 et moyenne de 0.96. Cette triangulation est donc un maillage physico-géométriquement conforme.

Enfin, le tableau 7 présente les statistiques relatives aux différents critères géométriques pour les deux triangulations de la sphère.

triang. /criteres	$\mathcal{P}_T$	$\mathcal{D}_T$	$\mathcal{R}_T$	$\mathcal{L}_T$	$\mathcal{Q}_T$
	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)
sphere orig.	0.99 (0.99)	0.95 (0.96)	99.9 (1.00)	0.97 (0.99)	0.97 (0.99)
sphere adapt.	0.98 (1.00)	0.85 (0.99)	0.99 (1.00)	0.78 (0.95)	0.60 (0.85)

TAB. 7 - *Evaluation des critères, maillages de la sphère.*

9 Conclusions

Dans ce rapport, nous avons proposé une méthode pour analyser si une triangulation donnée d'une surface respecte les spécifications d'une carte de tailles prescrite. En particulier, si cette triangulation vérifie des contraintes de nature géométrique. Les mesures proposées permettent notamment de valider les maillages de surfaces dans un schéma général d'adaptation de maillages pour lesquels la carte de métrique est fournie par un estimateur d'erreur a posteriori. Le cas des métriques isotropes a fait l'objet de la première partie de cette étude. De nombreux exemples de triangulations de surfaces ont été analysés pour illustrer cette approche. La seconde partie de cette étude sera consacrée à l'évaluation de la qualités des triangulations de surfaces dans le cas où des spécifications anisotropes sont fournies.

Références

[1] H. Borouchaki et P.L. George, Maillage des surfaces paramétriques. Partie I: Aspects théoriques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 324, Serie I, pp. 833–837, 1997.

[2] H. Borouchaki et al., Delaunay mesh generation governed by metric specifications. Part I. Algorithms, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 25, pp. 61–83, 1997.

[3] H. Borouchaki, F. Hecht et P.J. Frey, H-Correction, RR INRIA no 3199, juin 1997.

[4] P.G. Ciarlet, Basic Error Estimates for Elliptic Problems, Handbook of Numerical Analysis, vol II, Finite Element methods (Part 1), pp. 17–352, North Holland, 1991.

[5] P.J. Frey and H. Borouchaki, Surface mesh evaluation, In *Proc. of 6th Int. Meshing Roundtable*, ParkCity, UT, USA, oct. 1997.

[6] P. Laug et H. Borouchaki, Maillage de l'enveloppe d'un ensemble de sphères, RR-INRIA, août 1997.

[7] B. Hamann, Curvature approximation for triangulated surfaces, in *Geometric Modelling*, Computing Suppl. 8, Farin, Hagen, Noltmeier and Knodel eds., Springer, NY, 1993.

Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine - Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes - IRISA, Campus universitaire de Beaulieu 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble Cedex 1 (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis - 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399

RR - 3228