



**HAL**  
open science

# Maillage géométrique de surfaces. Partie I : enrichissement

Houman Borouchaki, Pascal Frey

► **To cite this version:**

Houman Borouchaki, Pascal Frey. Maillage géométrique de surfaces. Partie I : enrichissement. [Rapport de recherche] RR-3236, INRIA. 1997. inria-00073453

**HAL Id: inria-00073453**

**<https://inria.hal.science/inria-00073453v1>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Maillage géométrique de surfaces.  
Partie I : enrichissement*

Houman Borouchaki - Pascal Frey

N° 3236  
Août 1997

THÈME 4



*R*apport  
*de recherche*

Les rapports de recherche de l'INRIA  
sont disponibles en format postscript sous  
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

si vous n'avez pas d'accès ftp  
la forme papier peut être commandée par mail :  
e-mail : dif.gesdif@inria.fr  
(n'oubliez pas de mentionner votre adresse postale).

par courrier :  
Centre de Diffusion  
INRIA  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)

INRIA research reports  
are available in postscript format  
ftp.inria.fr (192.93.2.54)

if you haven't access by ftp  
we recommend ordering them by e-mail :  
e-mail : dif.gesdif@inria.fr  
(don't forget to mention your postal address).

by mail :  
Centre de Diffusion  
INRIA  
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (FRANCE)



## Maillage géométrique de surfaces. Partie I : enrichissement

Houman BOROUCAKI\* et Pascal J. FREY†

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 3236 — 29 août 1997 — 52 pages

**Résumé :** Ce rapport présente une méthode pour obtenir un maillage géométrique enrichi de type élément fini à partir d'une triangulation initiale arbitraire d'une surface. Pour ce faire, on construit, en premier lieu, un support géométrique de continuité d'ordre  $G^1$  associé à la triangulation initiale de la surface, représentant ainsi une approximation adéquate de la géométrie de la surface sous-jacente. Puis on optimise la triangulation initiale au regard de cette géométrie et de la qualité en forme des éléments. Quelques exemples de maillages surfaciques destinés à des applications différentes viennent illustrer l'efficacité de la méthode proposée.

**Mots-clé :** Maillage de surface, Approximation polyédrique, Optimisation de maillages surfaciques, Adaptation de maillages.

*(Abstract: pto)*

\* E-mail : Houman.Borouchaki@univ-troyes.fr

† E-mail : Pascal.Frey@inria.fr

## Geometric Surface Mesh. Part I: Enrichment

**Abstract:** This report introduces a method suitable to obtain an enriched geometric finite element mesh, given an initial arbitrary triangulation of a surface. To this end, we construct at first a geometric support  $G^1$  continuous associated with the initial surface triangulation, which represents an adequate approximation of the underlying surface geometry. The initial triangulation is then optimized with respect to this geometry and the element shape quality. Several examples of surface meshes intended to different application areas will emphasize the efficiency of our method.

**Key-words:** Surface mesh, Mesh quality, Polyhedral approximation, Mesh optimization, Mesh adaption.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Support géométrique</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Maillage géométrique d'une surface</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Optimisation géométrique de la surface</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Exemples d'applications</b>	<b>14</b>
5.1	Tête . . . . .	14
5.2	Théière . . . . .	21
5.3	Squelette du pied . . . . .	25
5.4	Stanford bunny . . . . .	27
5.5	Pièce mécanique 'dcd90' . . . . .	32
5.6	Sandale . . . . .	36
5.7	Boeing 747 . . . . .	40
5.8	Pièce mécanique 'lmount' . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>51</b>

## 1 Introduction

Un pré-requis essentiel dans la génération de maillages surfaciques est relatif au contrôle de l'écart du maillage représentant une approximation géométrique de la surface avec la surface réelle (localement, cet écart représente, pour un élément du maillage, la plus grande distance d'un point de cet élément à la surface). Par définition, cette contrainte est fondamentale et permet d'assurer, si elle est satisfaite, la validité de l'approximation géométrique par rapport à une tolérance donnée. On appelle maillage géométrique [6], un maillage satisfaisant cette contrainte géométrique. Dans le cas d'une surface composée de carreaux définis par des surfaces polynomiales ou rationnelles (par exemple, la plupart des surfaces générées dans les modeleurs géométriques), Sheng et Hirsh [14] et Piegl et Richard [12] ont proposé une méthode de génération de maillage dans laquelle l'écart à la surface est contrôlé. Pour d'autres types de surfaces telles que celles rencontrées par exemple dans des applications biomédicales, le problème est beaucoup plus crucial, dans la mesure où cet écart ne peut être contrôlé par les méthodes de génération elles-mêmes [11].

Dans le contexte des méthodes de discrétisation pour des applications de type éléments finis, un autre requis vient s'ajouter au précédent. En effet, la qualité en forme des éléments du maillage joue un rôle prépondérant dans la convergence de la simulation numérique et la précision des résultats [3]. Les méthodes classiques d'optimisation de maillages permettent éventuellement de répondre à cette requête, sans toutefois respecter la géométrie de la surface.

On s'intéresse ici à la génération de maillages géométriques surfaciques de type éléments finis. On suppose que la surface est représentée par une triangulation initiale dotée éventuellement de spécifications géométriques (arêtes vives, points singuliers, etc). On définit un support géométrique (assez lisse, d'ordre  $G^1$ ) associé à la triangulation initiale de la surface représentant ainsi une approximation adéquate de sa géométrie sous-jacente et on optimise le maillage de départ au regard

- de cette géométrie pour obtenir un maillage géométrique et également
- de la qualité en forme des éléments pour obtenir un maillage de type éléments finis.

Ce support géométrique peut être défini de manière intrinsèque (par le biais d'un modeleur géométrique) ou d'une manière indépendante (en définissant une géométrie basée sur la triangulation d'origine de la surface). Dans le premier cas, on suppose ainsi que l'optimiseur a accès à la définition géométrique analytique de la surface qui a servi à construire une triangulation initiale. Dans le second cas, on suppose que cette information n'est pas disponible et la seule donnée accessible de l'optimiseur est la triangulation initiale de la surface. L'optimisation est basée essentiellement sur un couplage de modifications topologiques locales (gouvernées par la qualité des éléments de la triangulation et la géométrie de la surface) et des opérations visant à

- subdiviser les arêtes trop longues,
- supprimer les arêtes trop courtes et
- bouger les sommets du maillage.

La longueur des arêtes est calculée dans une métrique appelée géométrique de telle sorte qu'une longueur d'arête idéale dans un maillage géométrique soit égale à un [1].

**Section 2**, on précise le support géométrique associé à une triangulation de surface donnée et on indique les principales requêtes de l'optimiseur au regard de ce support. **Section 3**, on rappelle la notion de maillage géométrique d'une surface. **Section 4**, on donne le schéma général de l'optimiseur et on détaille les principales opérations impliquées dans ce schéma. **Section 5**, on donne différents exemples d'applications, pour illustrer l'efficacité de la présente méthode. Enfin, **Section 6**, on indique quelques extensions de l'approche proposée, dont une application particulière sera développée dans la seconde partie de cette étude.



## 2 Support géométrique

Comme indiqué dans l'introduction, une tâche essentielle de l'optimiseur consiste à subdiviser les arêtes trop longues du maillage courant. Les points de subdivision doivent nécessairement appartenir à la vraie surface. Ces points sont d'abord générés sur les arêtes du maillage puis reportés sur la surface réelle, ce qui est réalisé par l'intermédiaire du support géométrique associé à la surface. Ce support représente en effet la définition analytique de la surface qui est générée par un modèleur géométrique (CAO). Ainsi, le support fournit la position d'un point de la surface le plus proche d'un point donné suivant une direction spécifiée. Un deuxième requis essentiel concerne les spécifications géométriques de la surface au voisinage de ces points, requis fondamental pour toute modification topologique locale du maillage. Cette requête fournit deux types d'informations, selon les caractéristiques de la surface au voisinage du point considéré. Dans le cas où le point présente (au moins) une continuité d'ordre  $C^2$  (en pratique, une continuité d'ordre  $G^1$ , continuité des plans tangents, est suffisante), la normale à la surface et le plus petit des rayons de courbure principaux en ce point sont les seules informations nécessaires. Dans le cas où le point présente une discontinuité des plans tangents, c'est le cas des points appartenant à une arête vive, les deux normales à la surface ainsi que les deux plus petits rayons de courbure principaux de part et d'autre de l'arête vive contenant le point et la tangente à cette arête en ce point sont fournis. Evidemment, ces informations sont retournées par le modèleur en même temps que la position du point considéré.

Dans le cas où une triangulation de la surface est la seule donnée disponible, on construit d'une manière interne un support géométrique définissant une surface réelle sous-jacente à la triangulation. Dans la mesure où cette triangulation est une approximation fidèle de la surface, ce support géométrique imite raisonnablement le rôle du modèleur géométrique. Le problème consiste alors à construire une surface composée (au moins) d'ordre  $G^1$  à partir d'une triangulation de la surface, chaque triangle représentant ainsi un carreau. Pour cela, deux carreaux adjacents doivent avoir le même plan tangent sur leur arête frontière commune, si celle-ci n'est pas une arête vive.

Différentes méthodes ont été proposées pour construire une surface composée d'ordre  $G^1$  définissant le support. Parmi ces méthodes, celles proposées par Piper [13] et Farin [5], puis récemment par Walton [15] sont bien adaptées au contexte de cette étude pour définir le support géométrique. En particulier, la méthode proposée par Walton, présente l'avantage d'une part de prendre en compte de manière explicite

les spécifications géométriques (notamment les normales à la surface aux sommets) et d'autre part d'être à la fois simple dans sa formulation et peu gourmande en ressource mémoire. Avant de rappeler cette approche, on rappelle brièvement celles proposées par Piper et Farin.

Le schéma proposé par Piper [13] et Farin [5] consiste à subdiviser chaque triangle en trois triangles et à définir sur chaque nouveau triangle un carreau polynomial de degré 4 (quartique), de façon à assurer la continuité des plans tangents transversaux sur chaque arête frontière, entre d'une part les nouveaux triangles issus de la subdivision du triangle d'origine et d'autre part entre les couples de nouveaux triangles issus de la subdivision de deux triangles adjacents. Cette technique requiert une ressource mémoire assez importante, en effet après subdivision, 28 points de contrôle, dont 9 communs aux triangles adjacents, sont associés à chaque triangle d'origine. Par ailleurs, chaque triangle définit trois carreaux et la définition de ces carreaux est étroitement liée à la qualité en forme du triangle d'origine (si celui-ci est trop étiré, la méthode présente des instabilités dans la définition des carreaux).

La méthode proposée par Walton consiste à définir un réseau de courbes frontières aux carreaux, ainsi que les plans tangents transversaux à ces frontières, indépendamment les uns des autres, par interpolation des normales à la surface aux sommets. Chaque carreau est alors défini, à partir de sa frontière, d'une manière indépendante, tout en respectant les spécifications relatives à sa frontière (les plans tangents) par une approche de Gregory [8]. L'originalité de cette méthode réside dans le fait qu'elle définit ce réseau de courbes à partir de la seule donnée des normales aux sommets (chaque courbe ainsi que le plan tangent transversal associé est complètement définie à partir de la donnée des normales aux extrémités). Chaque courbe frontière représente une cubique dont les normales principales (à la courbe) coïncident aux extrémités avec les normales à la surface. Les plans tangents transversaux (aux courbes frontières) sont engendrés par les vecteurs tangents en chaque point de ces courbes et des vecteurs issus d'une interpolation quadrique des binormales aux extrémités. Ainsi, la seule spécification des normales aux deux sommets d'une arête suffit à définir une courbe frontière d'un carreau (s'appuyant sur les deux extrémités) ainsi que le plan tangent transversal à la surface en cette courbe. Enfin, à partir des plans tangents transversaux de chaque triangle est construit un carreau de Gregory par une approche classique. Chaque triangle est ainsi associé à un carreau défini analytiquement par une fonction rationnelle à l'intérieur et par une quartique sur les bords. Cette méthode requiert, pour chaque triangle, uniquement 9 points de contrôle communs aux triangles adjacents.

Pour conclure, rappelons que ce support géométrique est utilisé pour répondre aux requêtes suivantes

- étant donné un point et une direction, trouver le point de la surface le plus proche,
- donner la normale et le plus petit rayon de courbure principal en un point de la surface.

### 3 Maillage géométrique d'une surface

Avant d'introduire la définition de maillage géométrique, on rappelle brièvement la notion de maillage respectant (c'est-à-dire adapté à) une carte de tailles spécifiée.

Soient  $T$  une triangulation surfacique composée de triangles,  $S$  l'ensemble de ses sommets et  $\mathcal{H}_3(S)$  une carte de tailles associée à  $S$ . La taille en un sommet  $P$  de  $T$  est représentée par un réel caractérisant, a posteriori, la longueur idéale de toute arête  $PX$  incidente à  $P$ , c'est-à-dire

$$\|\overrightarrow{PX}\| = h(P) \quad (1)$$

où  $h(P)$  représente cette taille idéale. En interpolant cette carte discrète de tailles  $\mathcal{H}_3(S)$  sur  $T$ , on obtient une carte continue  $\mathcal{H}_3^c$  dans  $R^3$ . On définit ainsi une structure riemannienne en munissant  $R^3$  de la carte  $\mathcal{H}_3^c$ . Vérifier si  $T$  respecte la carte  $\mathcal{H}_3(S)$  revient à montrer que

$$\forall PQ \in T, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq l(PQ) \leq \sqrt{2} \quad (2)$$

où  $PQ$  est une arête et  $l(PQ)$  sa longueur par rapport à  $\mathcal{H}_3^c$ . Rappelons que si l'arête  $PQ$  est paramétrée entre 0 et 1 par  $P + t\overrightarrow{PQ}$ , alors

$$l(PQ) = \|\overrightarrow{PQ}\| \int_0^1 \frac{1}{H_{PQ}(t)} dt. \quad (3)$$

où  $H_{PQ}(t)$  est une fonction monotone d'interpolation des tailles telle que, si  $h(P)$  et  $h(Q)$  sont les tailles spécifiées aux sommets  $P$  et  $Q$ ,

$$H_{PQ}(0) = h(P) \quad \text{et} \quad H_{PQ}(1) = h(Q)$$

Remarquons que l'expression de l'équation (3) peut être calculée de manière exacte, si la fonction  $H_{PQ}(t)$  est connue. Pour fixer les idées, on peut considérer une progression géométrique en taille le long de l'arête  $PQ$ , on a alors

$$H_{PQ}(t) = H_{PQ}(0) \left( \frac{H_{PQ}(1)}{H_{PQ}(0)} \right)^t \quad (4)$$

et par conséquent

$$l_{PQ} = \|\vec{PQ}\| \frac{h(Q) - h(P)}{h(Q) h(P) (\log h(Q) - \log h(P))} \quad (5)$$

Il est possible de construire une carte de tailles  $\mathcal{G}_3$ , appelée géométrique, associée aux points d'une surface (cf. Borouchaki et George [1]), telle que pour un maillage respectant cette carte (maillage dit géométrique), l'écart entre les triangles et la surface est contrôlé. En réalité, la carte  $\mathcal{G}_3$  impose, pour chaque point, une taille proportionnelle au plus petit des rayons de courbure principaux, le coefficient de proportionnalité contrôlant cet écart. Dans [9] on trouve une procédure permettant un calcul approché de la base principale et des rayons de courbure principaux, à partir de la seule donnée du maillage de la surface. En pratique, cette approche est utilisée pour déterminer la carte  $\mathcal{G}_3$ . Par ailleurs, en un sommet  $P$ , si  $r(P)$  représente le plus petit des rayons de courbure principaux, alors  $r(P)$  peut être approché par la simple formule

$$r(P) = \min_{P_i} \frac{1}{2} \frac{\langle \vec{PP}_i, \vec{PP}_i \rangle}{\langle \nu_P, \vec{PP}_i \rangle}, \quad (6)$$

où  $P_i$  parcourt l'ensemble des extrémités d'arêtes incidentes à  $P$  et  $\nu_P$  est la normale à la surface en  $P$ .

En outre, comme les rayons de courbure peuvent changer de manière significative au voisinage d'un point de la surface, les tailles imposées par la carte  $\mathcal{G}_3$  suivent cette variation. Ainsi, la gradation d'un maillage respectant la carte  $\mathcal{G}_3$  peut éventuellement ne pas être bornée localement en un point, ce qui entraîne une augmentation du nombre d'arêtes incidentes en ce point et par conséquent conduit à des éléments de qualité médiocre au voisinage de ce point. Dans [2], on propose une procédure de correction d'une carte de tailles destinée à contrôler la gradation d'un maillage. Ainsi la carte  $\mathcal{G}_3$  est rectifiée au moyen de cette procédure en fonction d'une gradation donnée définissant une nouvelle carte  $\tilde{\mathcal{G}}_3$ .

**En résumé, un maillage respectant la carte géométrique rectifiée  $\tilde{\mathcal{G}}_3$  est un maillage géométrique de bonne qualité en forme.**

## 4 Optimisation géométrique de la surface

Etant donnée une triangulation de surface, le but de l'optimisation géométrique est de modifier cette triangulation pour aboutir à un maillage respectant la carte géométrique de gradation contrôlée  $\tilde{\mathcal{G}}_3$  associée à la triangulation d'origine. Cette optimisation est appelée *enrichissement* (géométrique) de la surface.

L'optimisation consiste essentiellement à subdiviser les arêtes trop longues et à supprimer les arêtes trop courtes, les longueurs d'arêtes étant calculées par rapport à la carte géométrique  $\tilde{\mathcal{G}}_3$ . Plus précisément, la subdivision d'une arête consiste à introduire un point sur le milieu de l'arête, celui-ci étant reporté sur la surface via le support géométrique, ce qui a pour conséquence de remplacer les deux triangles partageant l'arête par quatre nouveaux triangles (cf. Figure 1). Une procédure classique de bascule d'arêtes est alors appliquée à chaque paire de nouveaux triangles pour améliorer

- l'approximation géométrique, si les deux triangles partageant l'arête initiale sont loin de la géométrie, et
- la qualité des éléments, si ces deux triangles sont proches de la géométrie.

Ainsi, la bascule d'arête est gouvernée par l'augmentation de la qualité géométrique ou en forme des éléments du maillage. La suppression d'arête consiste à identifier les deux extrémités de l'arête, ce qui a pour effet de supprimer les deux triangles adjacents à cette arête. Cette opération est effectuée si l'approximation géométrique est préservée et si, en outre, la qualité des éléments n'est pas dégradée de manière significative (cf. Figure 2). Ces deux procédures sont appliquées itérativement tant qu'une modification est apportée au maillage. Finalement, une procédure de bougé de point est appliquée au maillage résultant, qui consiste à établir l'équilatéralité des triangles incidents à tout sommet du maillage. En fait, à la différence de la procédure classique [7], la position optimale du sommet est projetée soit dans le plan tangent en ce sommet (si ce sommet est d'ordre  $G^1$ ), soit projeté sur la droite tangente à l'arête vive contenant ce sommet (si ce sommet appartient à une arête vive) afin de rester proche de la surface.

Avant de donner le schéma général de la procédure d'enrichissement géométrique, on détaille la bascule d'arête et le bougé de point, la suppression d'arête étant décrite dans la seconde partie de ce rapport. Notons que différentes procédures de suppression d'arêtes peuvent être appliquées, parmi lesquelles l'identification d'un sommet avec l'autre a été retenue car la configuration résultante (après identification) peut être validée a priori du point de vue de l'approximation géométrique.

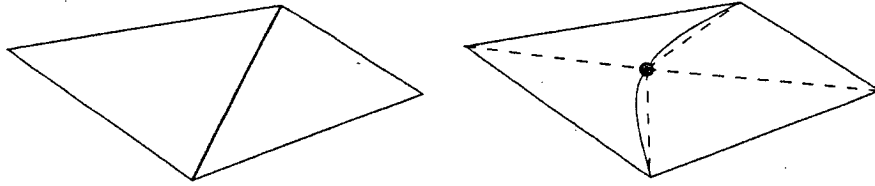


FIG. 1 - Subdivision d'une arête.

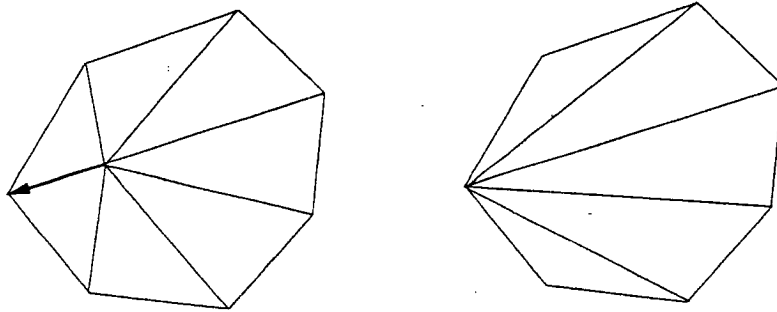


FIG. 2 - Suppression d'une arête.

**Bascule d'arête.** On s'intéresse ici à examiner si une configuration de paire de triangles est "optimale" vis-à-vis de l'approximation géométrique et de la qualité des éléments par rapport à la configuration alternative (après bascule d'arête). Soient  $K_1$  et  $K_2$  deux triangles adjacents par une arête, respectivement  $N(K_1)$  et  $N(K_2)$  les normales aux triangles  $K_1$ ,  $K_2$  et  $n_i(K_j)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $1 \leq j \leq 2$  les normales aux sommets à la surface de  $K_j$  (cf. Figure 3). On va définir deux mesures relatives à la géométrie et une mesure relative à la qualité en forme associées à cette configuration de deux triangles. La première mesure, désignée par  $MG_1$ , quantifie l'écart à la surface de cette configuration et est donnée par

$$MG_1 = \min_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} \langle n_i(K_j), N(K_j) \rangle . \quad (7)$$

Celle-ci mesure la fidélité de l'approximation de la surface par la configuration. La deuxième mesure,  $MG_2$ , évalue la rugosité de la surface par rapport à cette configuration et est définie simplement par

$$MG_2 = \langle N(K_1), N(K_2) \rangle . \quad (8)$$

En pratique, ces deux mesures sont combinées en une seule représentant l'approximation géométrique et la rugosité de la surface pour cette configuration. Cette mesure combinée est désignée par  $MG$ . La dernière mesure est une mesure classique de la qualité en forme d'un élément et peut être définie pour un triangle  $K$  par

$$\gamma(K) = 4\sqrt{3} \frac{S(K)}{\sum_{1 \leq i \leq 3} l_i^2(K)}, \quad (9)$$

où  $S(K)$  représente l'aire du triangle  $K$  et  $l_i(K)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , les longueurs euclidiennes des arêtes de  $K$ . Ainsi la qualité en forme de la configuration est donnée par

$$MQ = \min(\gamma(K_1), \gamma(K_2)). \quad (10)$$

La configuration  $K_1, K_2$  est ainsi caractérisée par le couple  $(MG, MQ)$ .

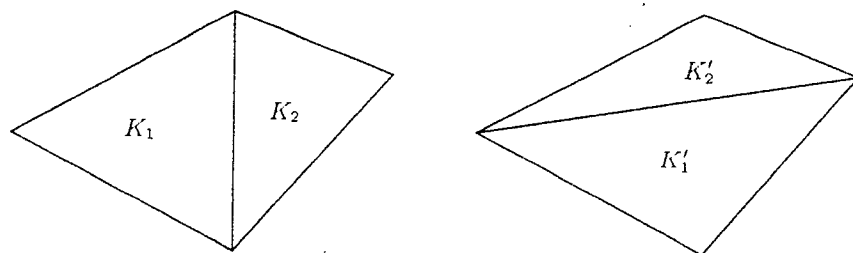


FIG. 3 - Bascule d'arête.

Considérons la configuration alternative (après bascule d'arête) (cf. Figure 3, à droite) et soit  $(MG', MQ')$  son couple caractéristique, alors la bascule d'arête est appliquée si  $(MG', MQ')$  est lexicographiquement plus grand que  $(MG, MQ)$ . Ceci revient à dire que si la configuration initiale est loin de la géométrie, alors la bascule d'arête est gouvernée par la mesure géométrique, alors que dans le cas contraire, elle est gouvernée par la mesure de qualité.

**Bougé de points.** Pour un sommet fixé, le bougé consiste à redéfinir les éléments incidents à ce sommet. Pour cela, dans un premier temps à partir de chaque arête frontière de cette configuration, on définit un élément optimal, donc un point, appartenant au plan support de l'élément de la configuration contenant l'arête. Puis, on détermine le projeté du barycentre de ces points, soit dans le plan tangent au sommet fixé à la surface (si le sommet est d'ordre  $G^1$ ), soit sur la tangente à l'arête vive contenant le sommet fixé (si le sommet est sur une arête vive), définissant un

point idéal. Le bougé consiste alors à déplacer pas-à-pas le sommet fixé vers ce point idéal si la qualité des éléments de la configuration est améliorée.

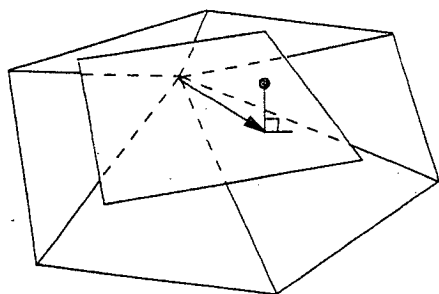
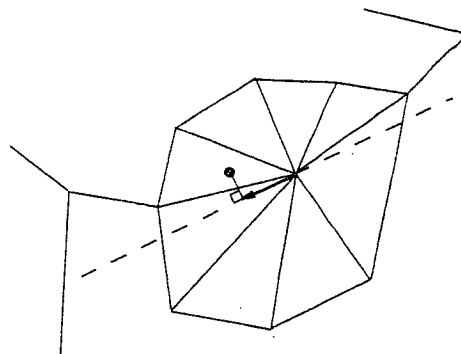
FIG. 4 - Bougé de point d'ordre  $G^1$ .

FIG. 5 - Bougé de point.

Par suite, on donne le schéma général de la procédure d'enrichissement géométrique d'une triangulation donnée.

- Traitement des arêtes du maillage courant
  - Boucle sur toutes les arêtes du maillage courant
    - calcul de la longueur de l'arête
    - suppression de l'arête si la longueur est trop petite
    - subdivision de l'arête en son milieu si sa longueur est trop grande
- Itération du traitement des arêtes tant qu'une modification est apportée au maillage courant.
- Bougé de points, couplé avec bascule d'arête, tant que le bougé est significatif.



## 5 Exemples d'applications

Dans cette section, nous allons présenter différents exemples de triangulations de surfaces, ainsi que des maillages géométriques enrichis associés. Pour mesurer la qualité de ces maillages, nous précisons pour chaque exemple

- si la gradation est contrôlée,
- les écarts, spécifié et obtenu, en degrés entre les maillages et les surfaces (qui représentent les écarts entre les plans tangents à la surface aux sommets déduits des normales aux sommets et les éléments adjacents à ces sommets),
- la qualité en taille des arêtes et
- la qualité en forme, normalisés entre 0 et 1 (1 pour le triangle équilatéral).

### 5.1 Tête

Cet exemple représente une reconstruction polyédrique d'une iso-surface biomédicale (une tête humaine) à partir de données volumétriques et est utilisée dans le contexte d'une simulation biomédicale de problèmes inverses en magnétoencéphalographie (distribution des champs de courant). Cette triangulation comprend 67106 points et 134208 triangles (Figure 6), (donnée fournie par Low Temp. Lab., Helsinki Univ. of Tech., Finlande). Avant d'enrichir cette triangulation, on a appliqué un prétraitement qui a consisté à lisser "les marches d'escalier" présentes dans la triangulation initiale et dues à la segmentation binaire de l'image volumétrique originale (ces marches sont nettement visibles sur le sommet de la tête). La triangulation lissée est illustrée par la Figure 8 et comprend les mêmes nombres de points et de triangles.

On enrichit cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 3 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 1.5 [2]. Le maillage enrichi (cf. Figure 10) comprend 64048 points et 128092 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 3.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.51 à 3.25, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.99% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.43 (resp. 0.92).

Les figures 7, 9 et 11 montrent respectivement des agrandissements au niveau de l'oreille gauche de la triangulation initiale, du maillage lissé, et du maillage enrichi.

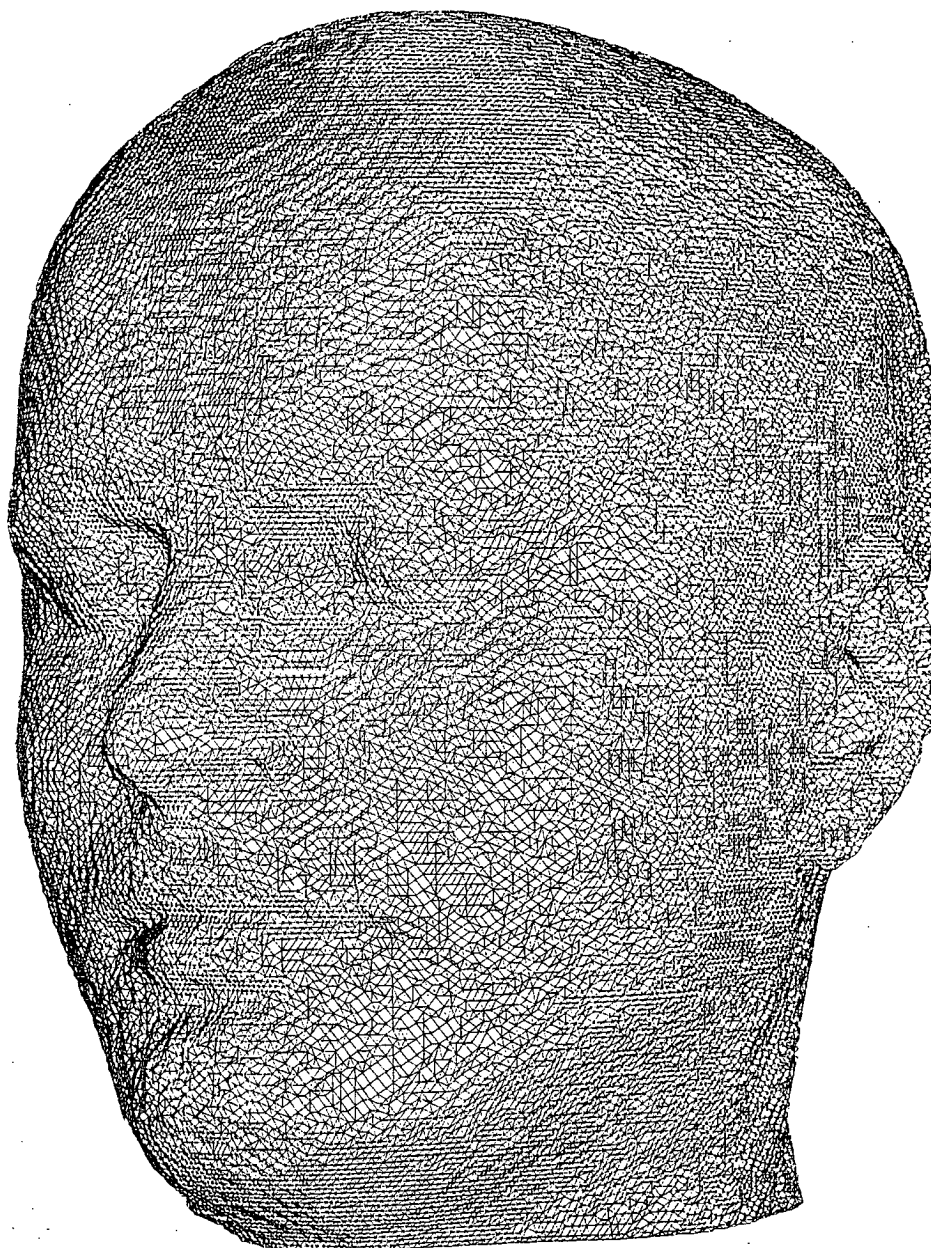


FIG. 6 - *Triangulation initiale de Tête.*

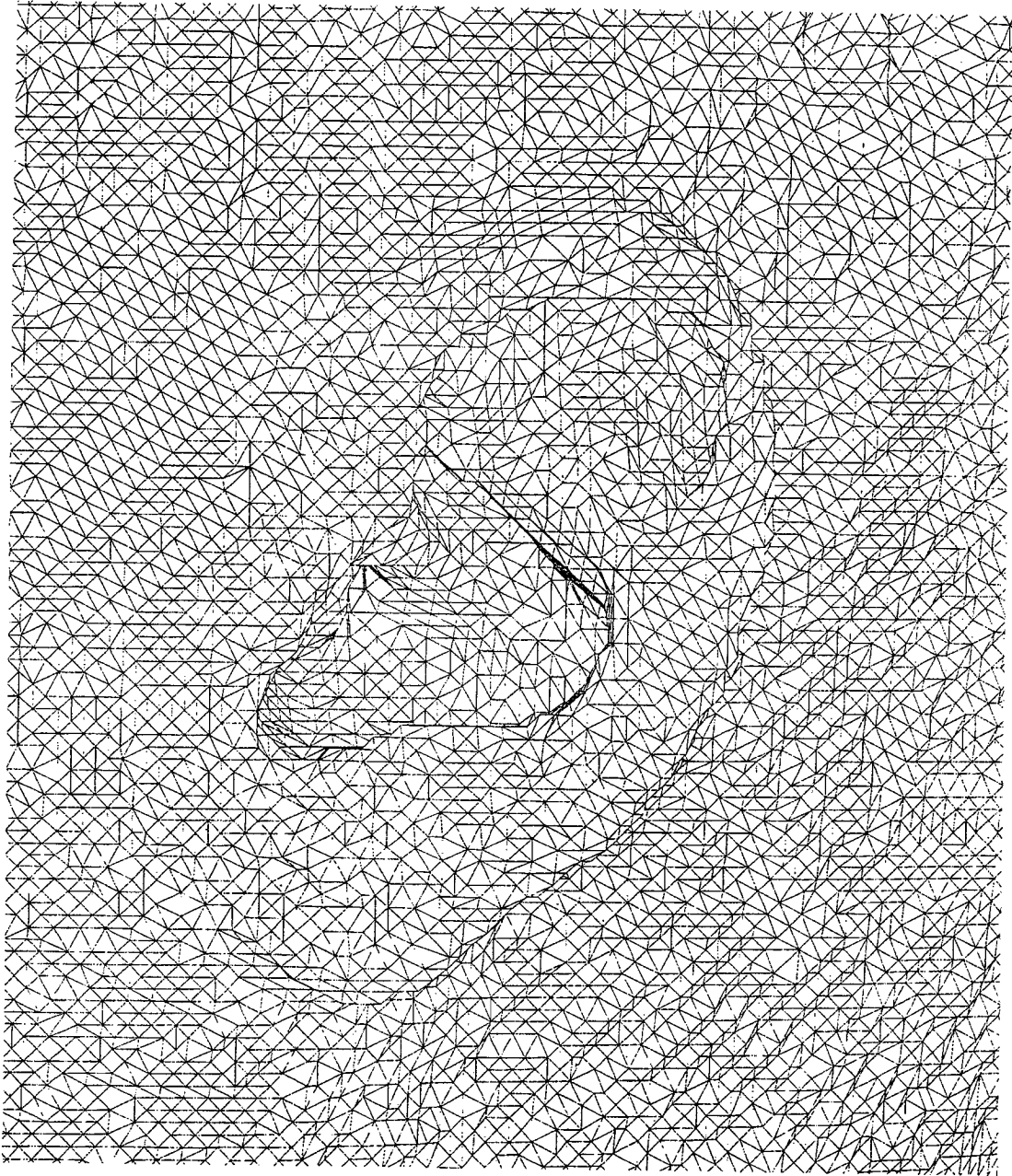


FIG. 7 - *Triangulation initiale, agrandissement de l'oreille gauche.*

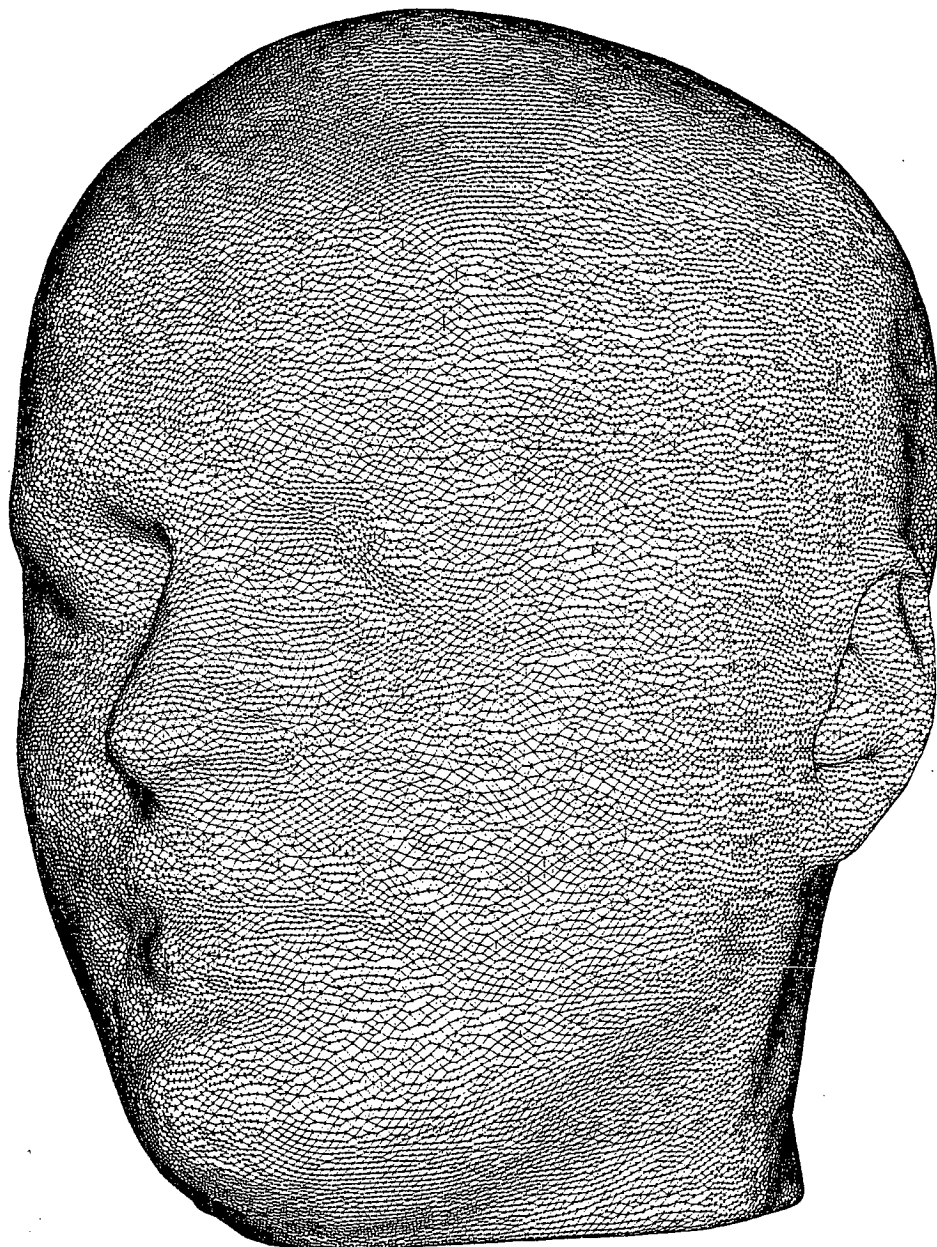


FIG. 8 - *Triangulation lissée de Tête.*

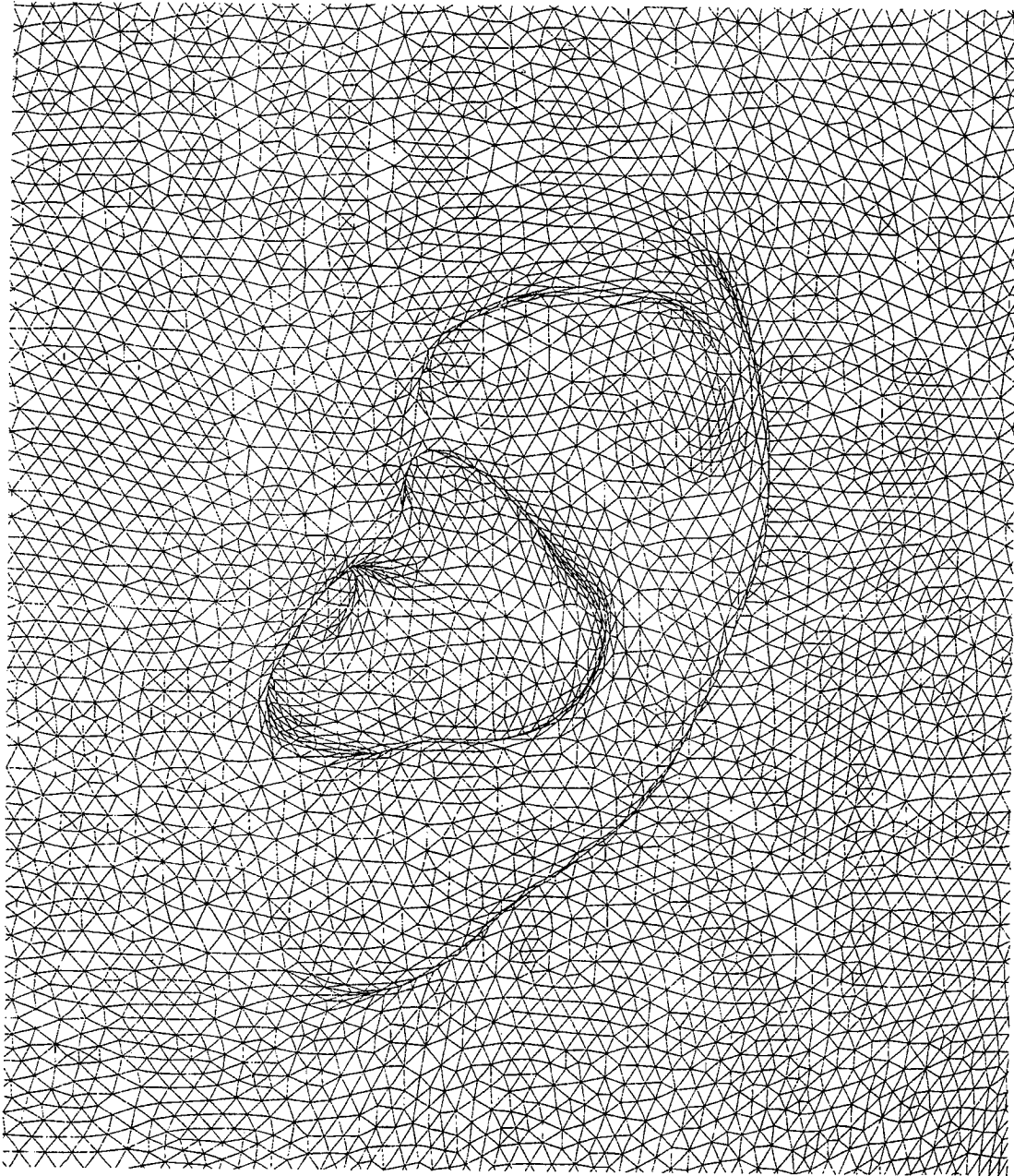


FIG. 9 - *Triangulation lissée, agrandissement de l'oreille gauche.*

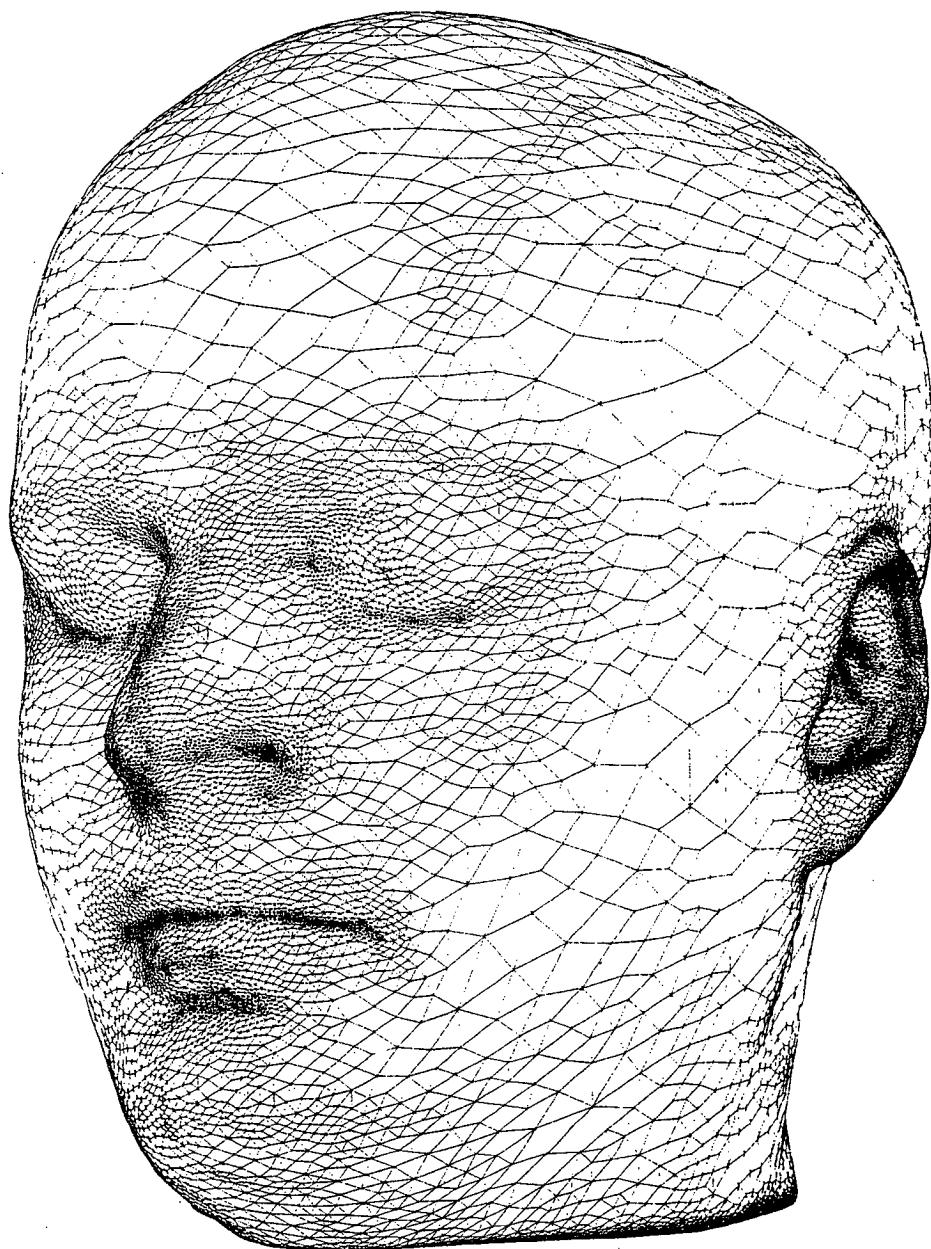


FIG. 10 - Maillage géométrique enrichi de Tête ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 3 degrés).

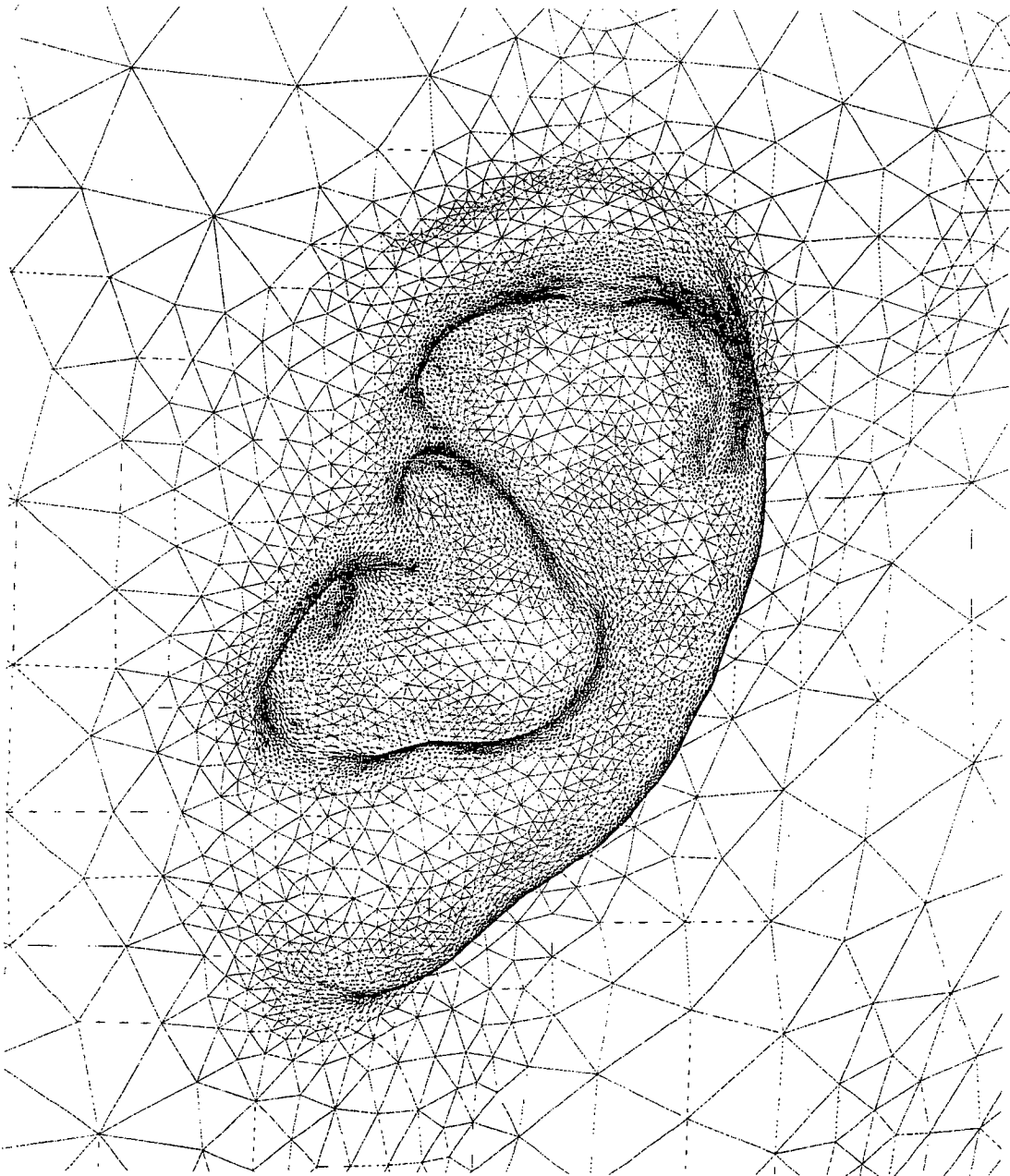


FIG. 11 - *Maillage géométrique enrichi de Tête ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 3 degrés), agrandissement de l'oreille gauche.*

## 5.2 Théière

L'exemple considéré est une surface paramétrique par morceaux ayant 4 composantes connexes (modèle de la théière de l'Utah), qui est utilisée dans le domaine de la visualisation graphique. La triangulation initiale de ce modèle est obtenue en reportant les triangulations régulières des espaces de paramètres sur la surface. Chaque espace de paramètres est en effet le carré unité et sa triangulation correspond à une grille régulière. La triangulation ainsi obtenue est composée de 8257 points et de 8192 quadrilatères (cf. Figure 12). Cette triangulation représente une bonne approximation géométrique de la surface, en revanche elle n'a pas une bonne qualité en forme.

On enrichit cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 5 degrés avec et sans contrôle de la gradation. Le premier maillage enrichi, sans contrôle de gradation, (cf. Figure 13) comprend 72223 points et 143743 triangles. L'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 4.2 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.6 à 2.46, la moyenne des longueurs est de 1.02 et 99.99% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.41 (resp. 0.93). Le second maillage enrichi, avec contrôle de gradation à H-choc 1.5, (cf. Figure 14) comprend 86877 points et 172768 triangles. L'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 3.9 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.6 à 1.68, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.47 (resp. 0.95).



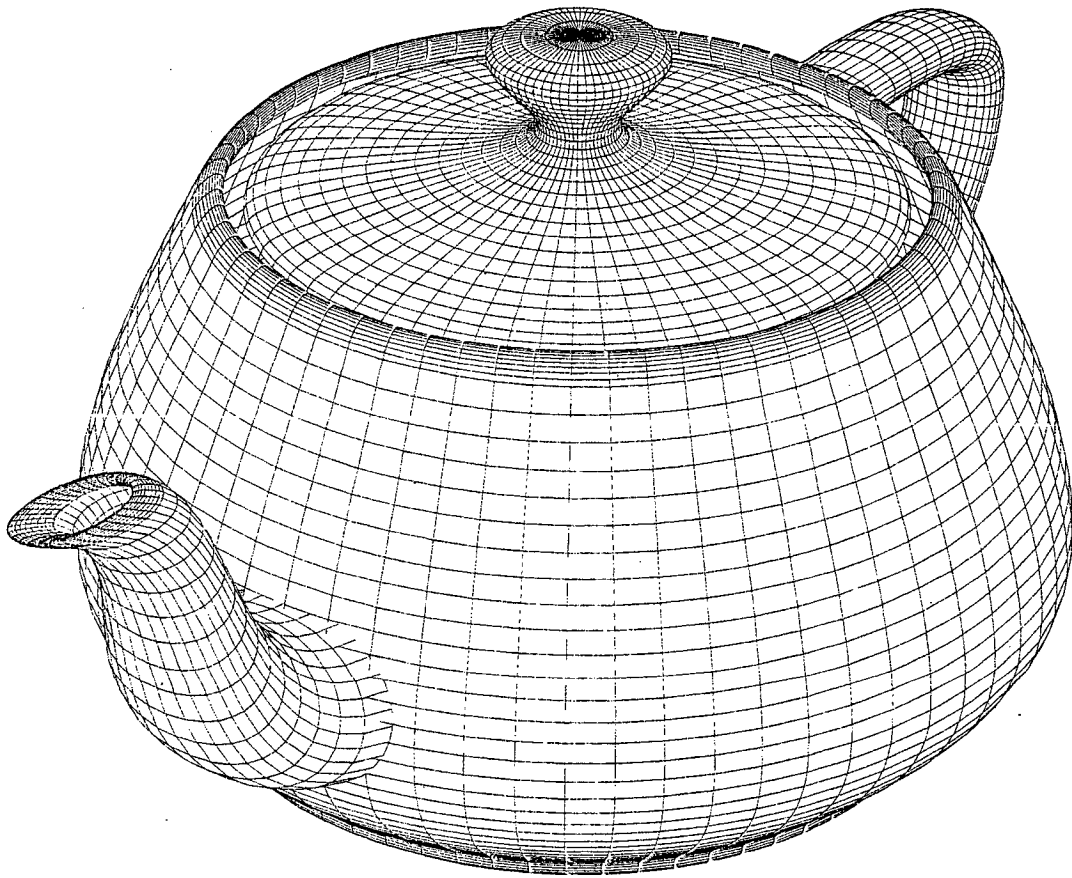


FIG. 12 - *Triangulation initiale de Théière.*

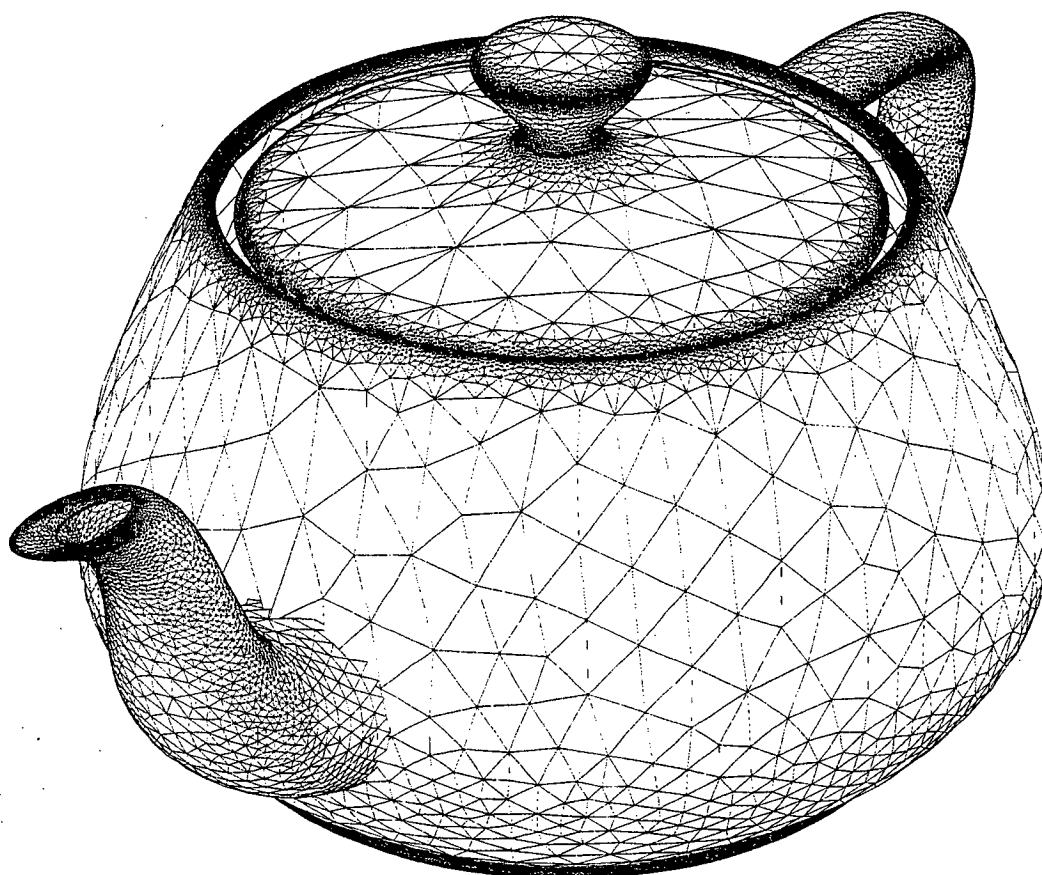


FIG. 13 - Maillage géométrique enrichi de Théière (écart de 5 degrés).

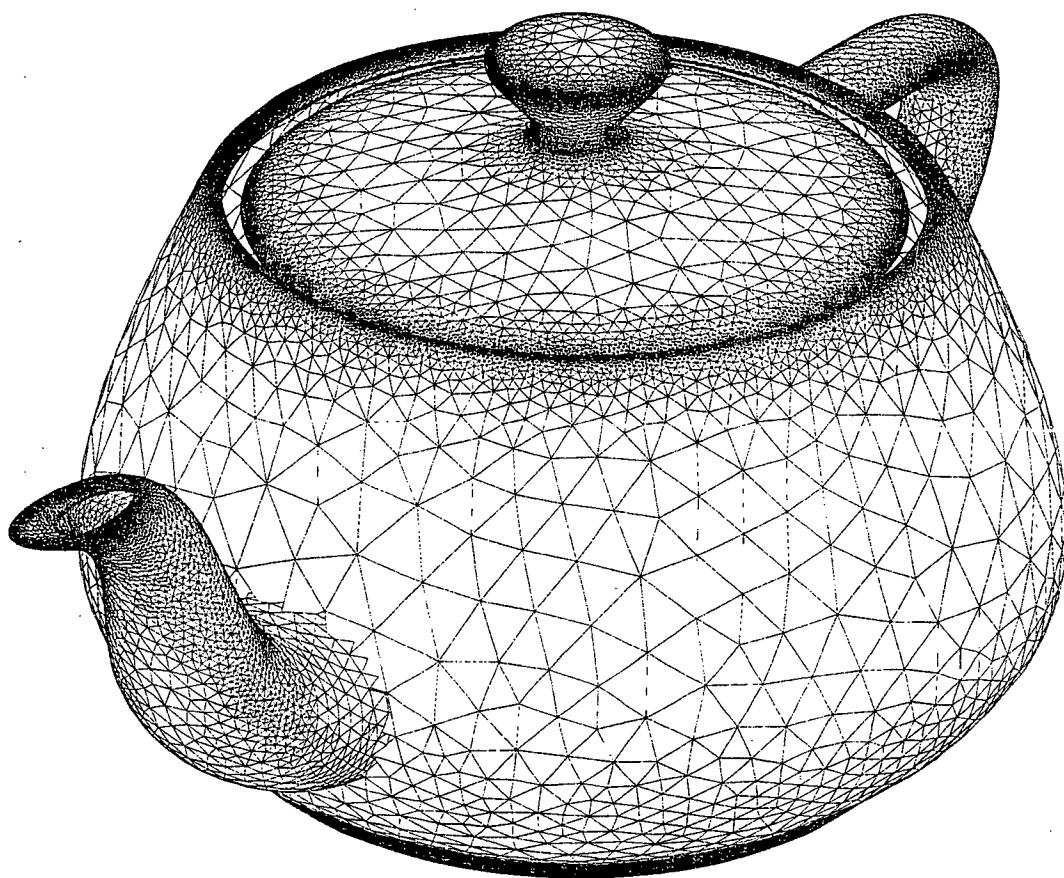


FIG. 14 - *Maillage géométrique enrichi de Théière (H-choc = 1.5, écart de 5 degrés).*

### 5.3 Squelette du pied

Cet exemple représente le squelette d'un pied (donnée fournie par Naval Air Warfare Center Weapons Division), utilisé dans le domaine de la visualisation graphique ou la simulation numérique en biomécanique. La triangulation d'origine approchant cette surface comprend 2154 points et 4204 triangles (cf. Figure 15). Cette triangulation ne représente pas une bonne approximation géométrique, en effet l'écart global mesuré est de l'ordre de 25.5 degrés.

On enrichit cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 8 degrés avec et sans contrôle de la gradation. Le premier maillage enrichi, sans contrôle de gradation, (cf. Figure 16) comprend 161786 points et 323468 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 5.7 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.5 à 3.18, la moyenne des longueurs est de 1.02 et 99.98% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.31 (resp. 0.92). Le second maillage enrichi, avec contrôle de gradation à H-choc 2., (cf. Figure 17) comprend 217180 points et 434256 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.52 à 2.68, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.99% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.44 (resp. 0.94).

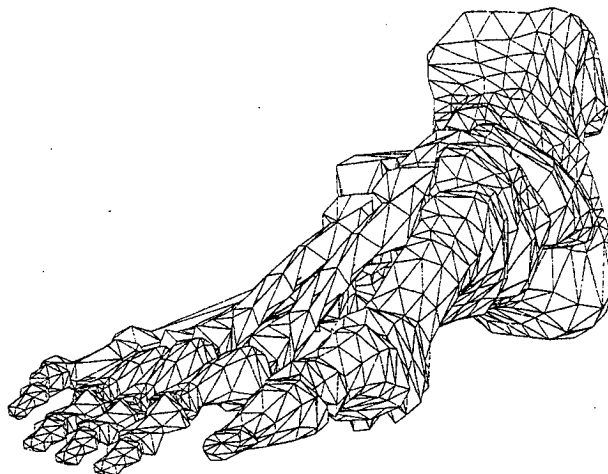


FIG. 15 - *Triangulation initiale de Squelette du pied.*

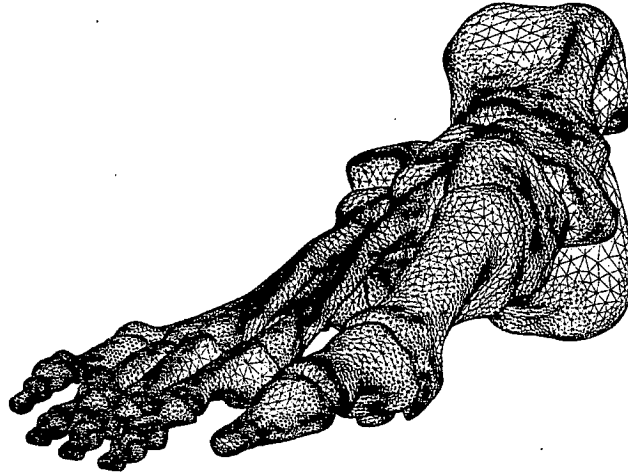


FIG. 16 - *Maillage géométrique enrichi de Squelette du pied (écart de 8 degrés).*

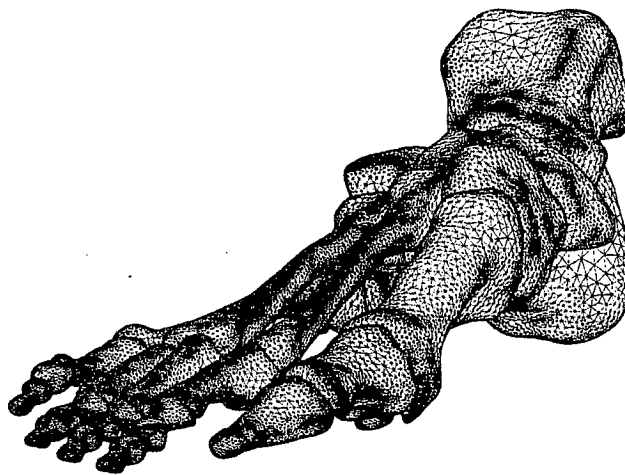


FIG. 17 - *Maillage géométrique enrichi de Squelette du pied ( $H\text{-choc} = 2$ , écart de 8 degrés).*

#### 5.4 Stanford bunny

Cet exemple représente une reconstruction polyédrique d'un objet numérisé par un scanner (donnée fournie par Dept. of Comp. Sci., Stanford Univ., USA), utilisée pour la visualisation graphique. Cette triangulation comprend 35947 points et 69451 triangles (Figure 18) et correspond à une bonne approximation géométrique de la surface.

On enrichit cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 2 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 1.5. Le maillage enrichi (cf. Figure 20) comprend 270644 points et 539947 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 1.7 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.49 à 4., la moyenne des longueurs est de 1.02 et 99.99% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.49 (resp. 0.94).

Les figures 19 et 21 montrent respectivement des agrandissements au niveau de la tête de la triangulation initiale et du maillage enrichi.

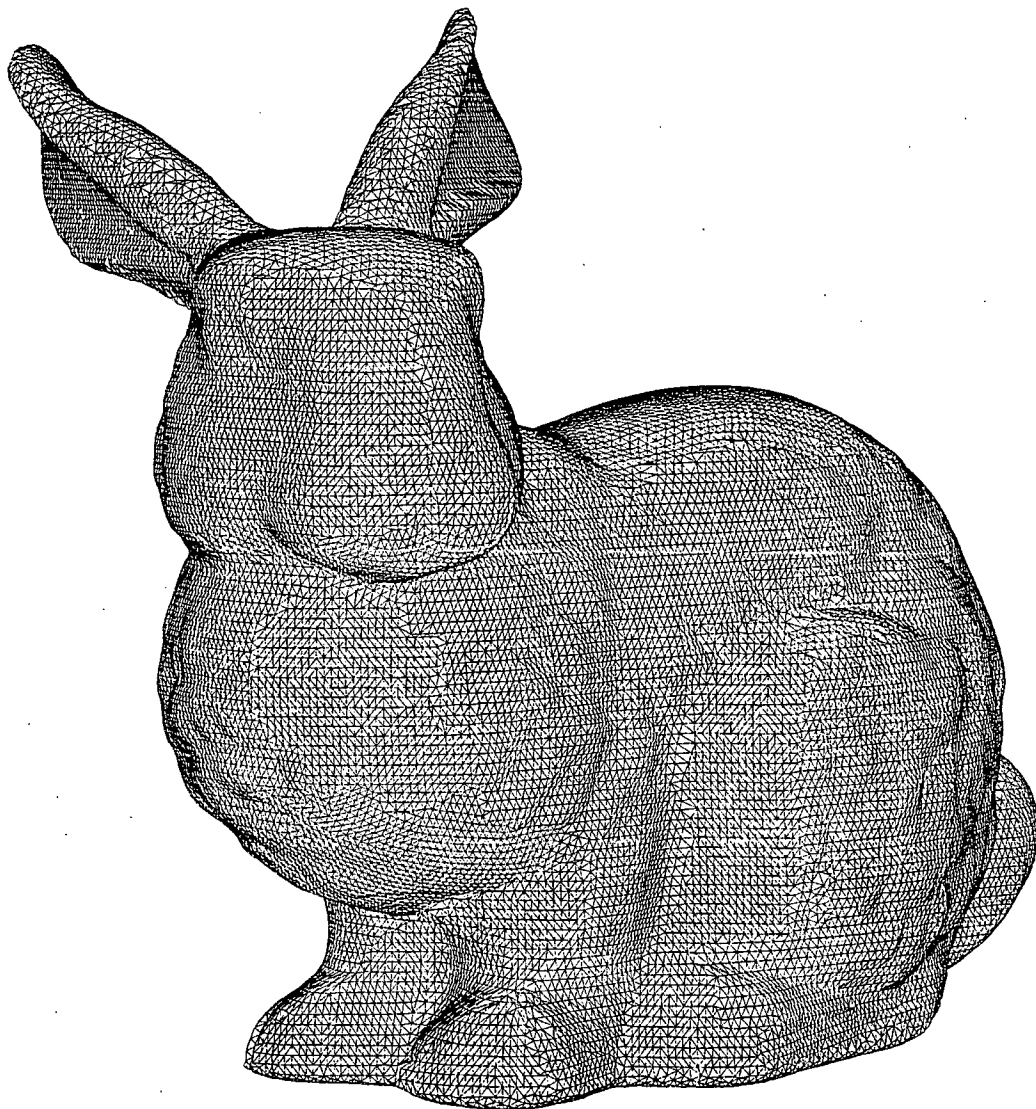


FIG. 18 - *Triangulation initiale de Stanford bunny.*

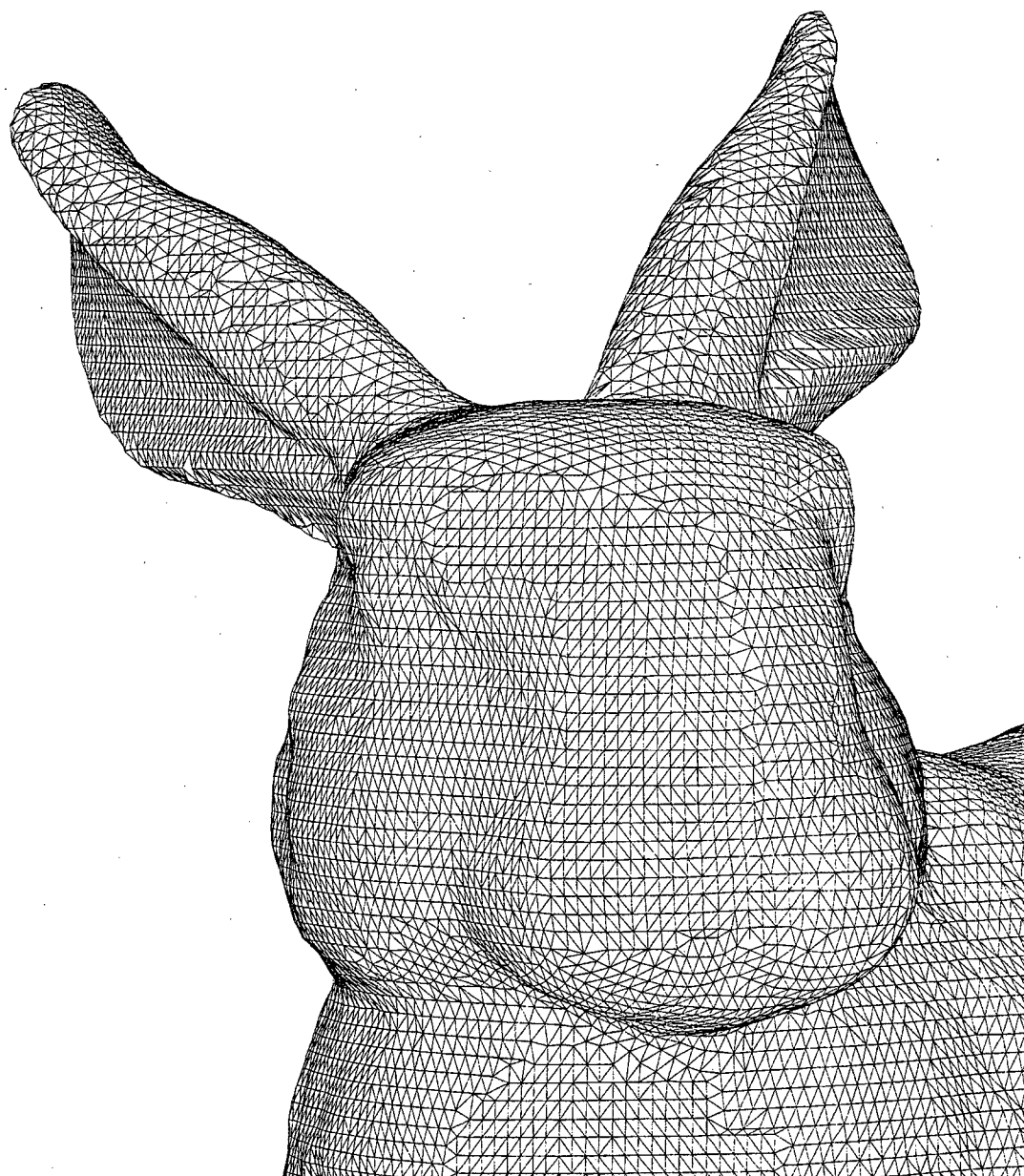


FIG. 19 - *Triangulation initiale de Stanford bunny, agrandissement de la tête.*



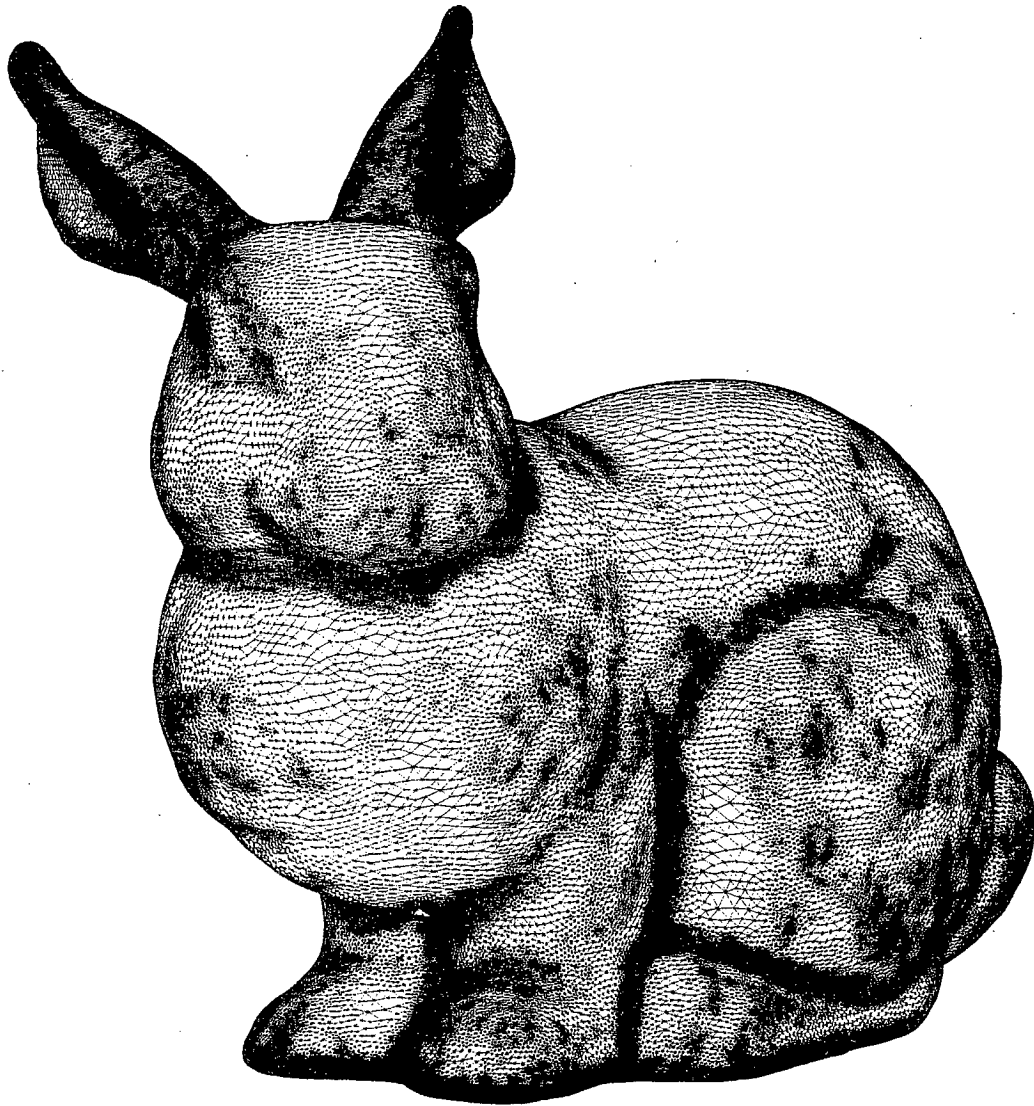


FIG. 20 - Maillage géométrique enrichi de Stanford bunny ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 2 degrés).

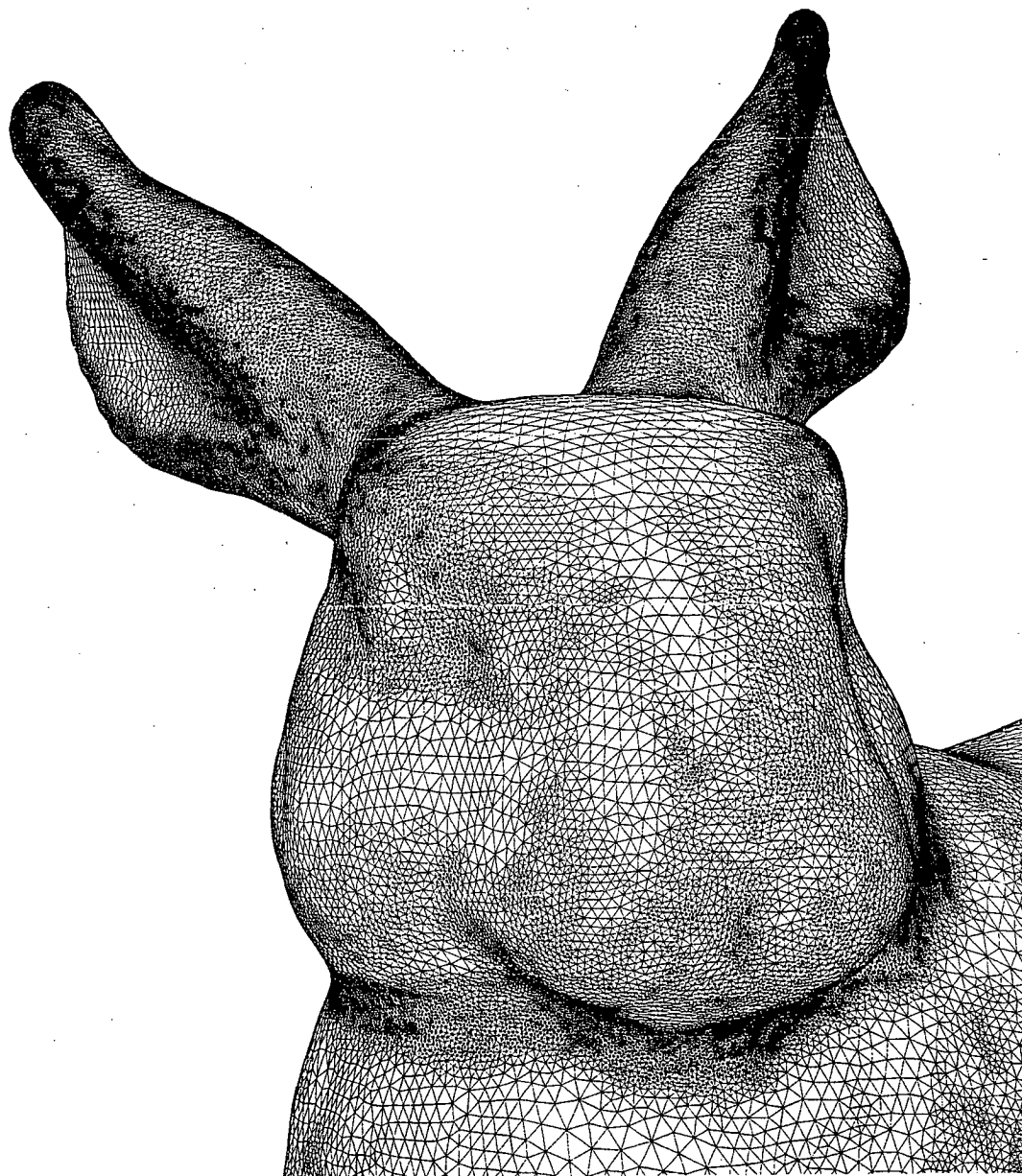


FIG. 21 - Maillage géométrique enrichi de Stanford bunny ( $H\text{-choc}=1.5$ , écart de 2 degrés), agrandissement de la tête.

### 5.5 Pièce mécanique 'dcd90'

L'exemple considéré représente une triangulation d'une pièce mécanique fournie par un modéleur (donnée de Mac Neal-Schwendler Corp.), utilisée dans la simulation numérique par des méthodes d'éléments finis et comprenant 1685 points et 3410 triangles (cf. Figure 22). Cette triangulation représente globalement une bonne approximation géométrique de la surface, en revanche elle présente localement des écarts à la surface trop importants (au maximum de l'ordre de 60 degrés). Ce modèle comporte des arêtes vives (discontinuités des plans tangents) contraintes (cf. Figure 23) qui d'une part forment localement des angles très aigus et d'autre part sont très proches. De ce fait, la qualité en taille et en forme de tout remaillage optimisé (par l'approche proposée) est majorée.

On enrichit cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 5 degrés avec et sans contrôle de la gradation. Le premier maillage enrichi, sans contrôle de gradation, (cf. Figure 24) comprend 18001 points et 36042 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 4 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.17 à 9.81, la moyenne des longueurs est de 1.06 et 98.8% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.1 (resp. 0.88). Le second maillage enrichi, avec contrôle de gradation à H-choc 1.5, (cf. Figure 25) comprend 36329 points et 72698 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 2.3 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.25 à 5., la moyenne des longueurs est de 1.03 et 99.6% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.13 (resp. 0.94).

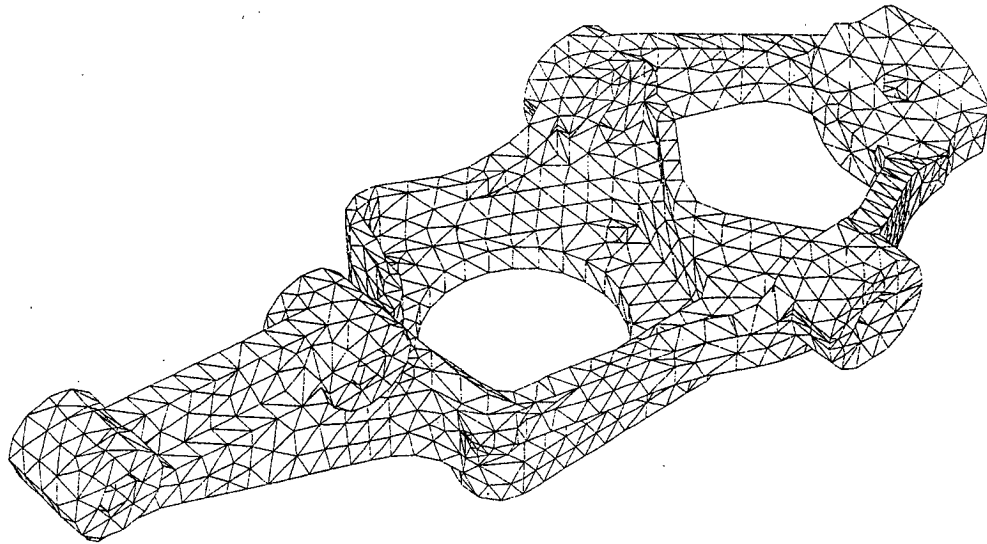


FIG. 22 - Triangulation initiale de dcd90.

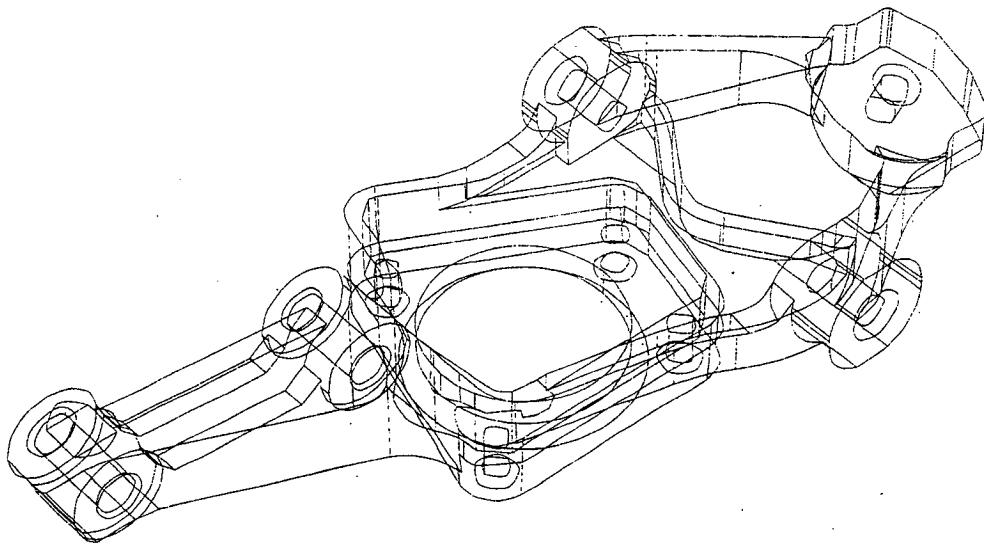


FIG. 23 - Arêtes contraintes de dcd90.

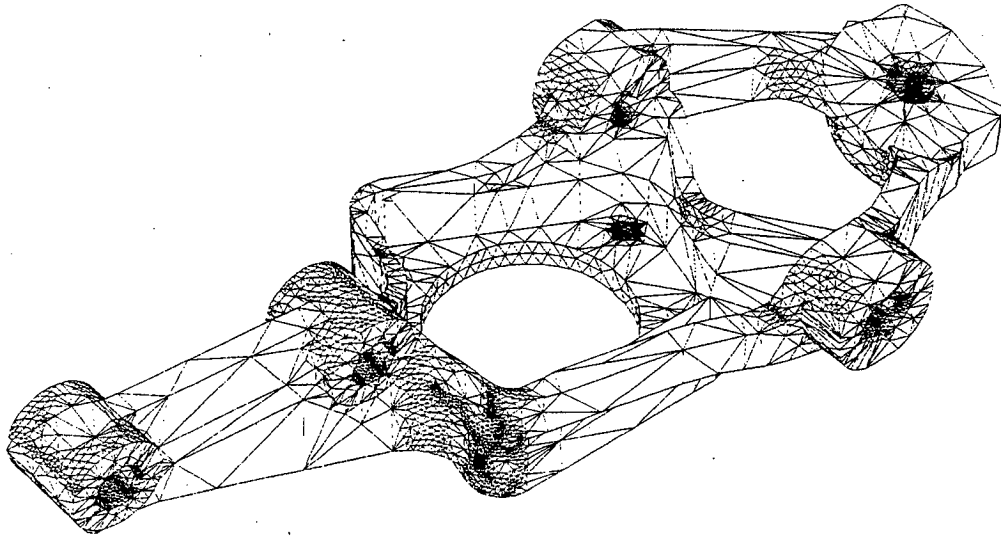


FIG. 24 - Maillage géométrique enrichi de  $dcd90$  (écart de 5 degrés).

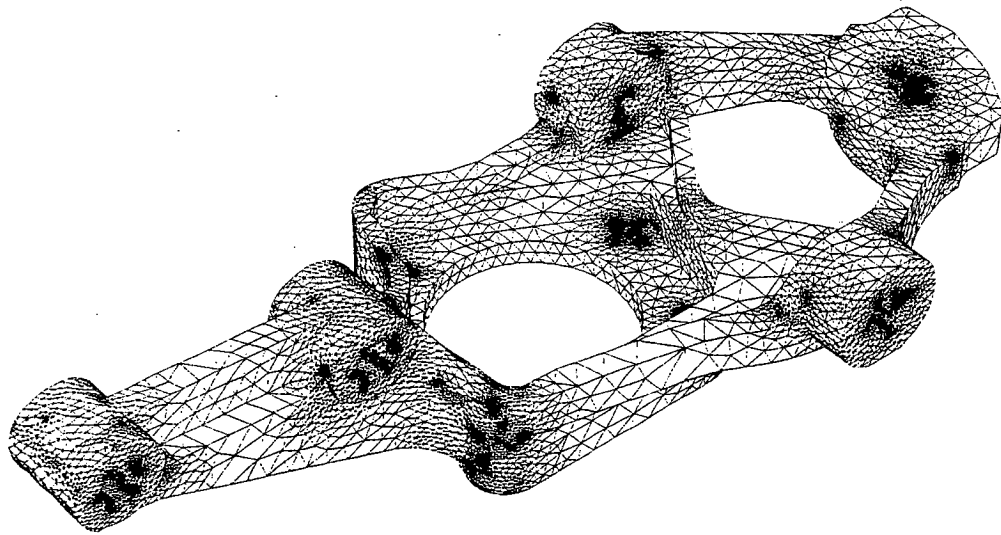


FIG. 25 - Maillage géométrique enrichi de  $dcd90$  ( $H\text{-choc} = 1.5$ , écart de 5 degrés).

## 5.6 Sandale

Cet exemple représente une reconstruction polyédrique d'une sandale (donnée fournie par Naval Air Warfare Center Weapons Division), utilisée dans la visualisation graphique. Cette triangulation comprend 2636 points et 4952 triangles (Figure 26, correspond à une bonne approximation géométrique de la surface (l'écart global de 10 degrés) et présente des arêtes vives (cf. Figure 27). De même, la qualité en taille et en forme de tout remaillage optimisé (par l'approche proposée) est majorée.

On enrichit cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 5 degrés, avec et sans contrôle de la gradation. Le premier maillage enrichi, sans contrôle de gradation, (cf. Figure 28) comprend 41734 points et 82594 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 4 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.2 à 4, la moyenne des longueurs est de 1.03 et 99.8% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.01 (resp. 0.90). Le second maillage enrichi, avec contrôle de gradation à H-choc 1.5, (cf. Figure 29) comprend 64848 points et 128287 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 3.4 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.26 à 2.61, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.99% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.01 (resp. 0.94).

Les figures 30, 31 et 32 montrent respectivement des agrandissements au niveau de la boucle de la triangulation initiale et des maillages enrichis sans et avec contrôle de gradation.

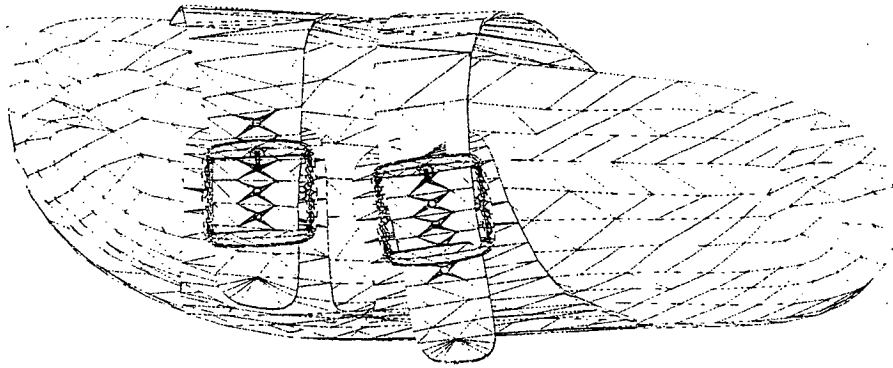


FIG. 26 - *Triangulation initiale de sandale.*

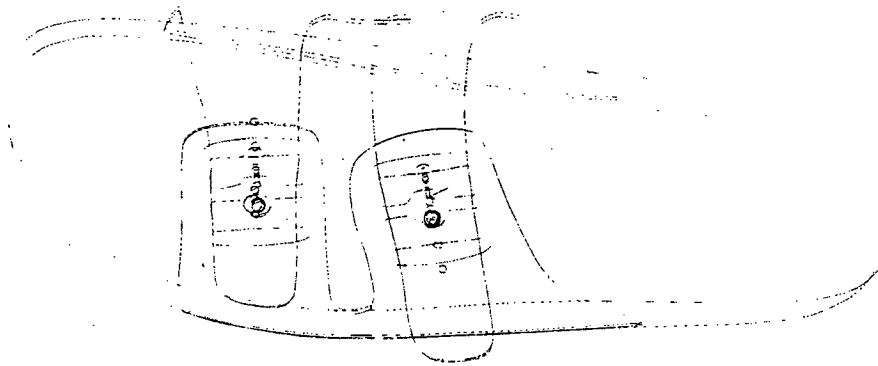


FIG. 27 - *Arêtes contraintes de sandale.*

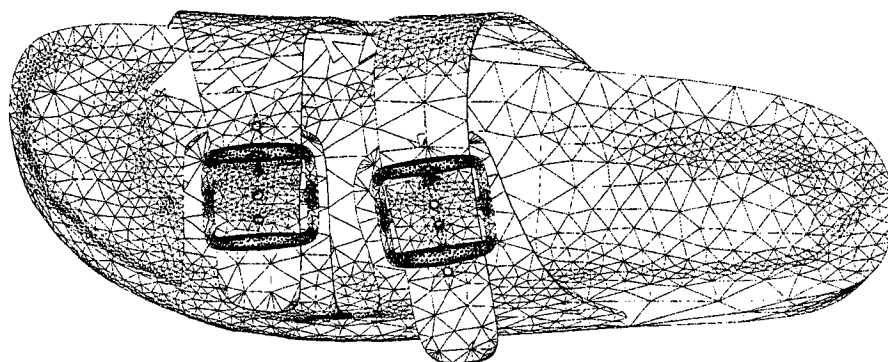


FIG. 28 - Maillage géométrique enrichi de sandale (écart de 5 degrés).

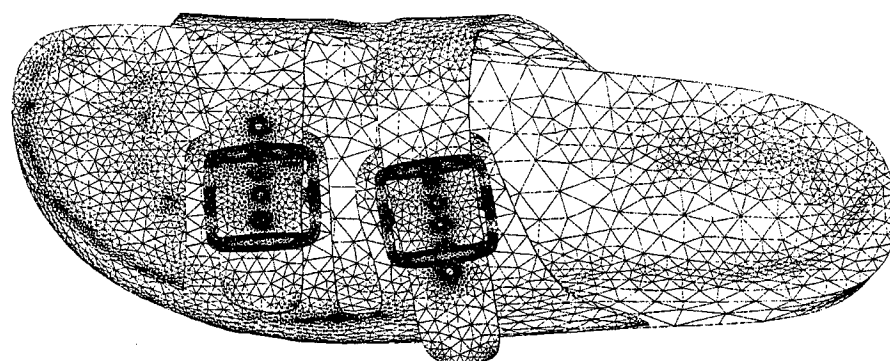


FIG. 29 - Maillage géométrique enrichi de sandal ( $H\text{-choc} = 1.5$ , écart de 5 degrés).



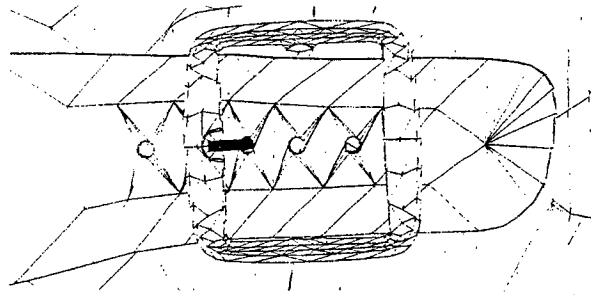


FIG. 30 - *Triangulation initiale de sandal, agrandissement de la boucle.*

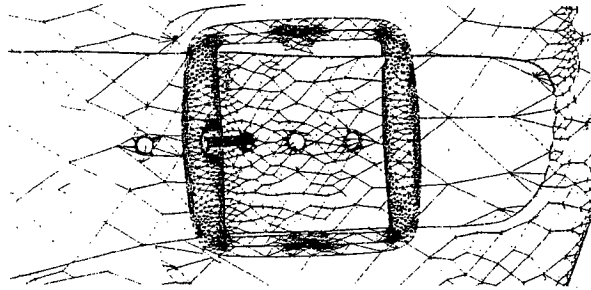


FIG. 31 - *Maillage géométrique enrichi de sandal (écart de 5 degrés), agrandissement de la boucle.*

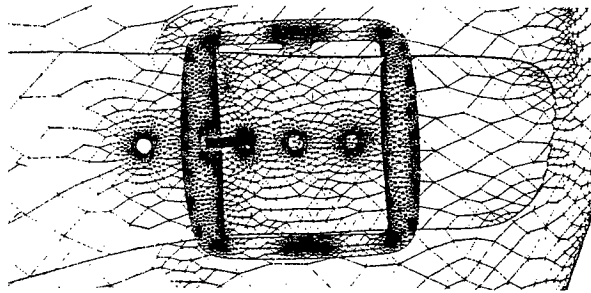


FIG. 32 - *Maillage géométrique enrichi de sandal ( $H\text{-choc} = 1.5$ , écart de 5 degrés), agrandissement de la boucle.*

## 5.7 Boeing 747

Cet exemple illustre une surface paramétrée composée représentant un avion (Boeing 747, donnée fournie par Boeing), utilisée dans la simulation numérique des écoulements fluides par des méthodes d'éléments finis. Cette triangulation comprend 43575 points et 45264 triangles et quadrilatères (Figure 33), correspond à une bonne approximation géométrique de la surface et présente des arêtes vives ainsi que des arêtes contraintes frontières de carreaux (cf. Figure 34).

On enrichit cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 11 degrés, avec et sans contrôle de la gradation. Le premier maillage enrichi, sans contrôle de gradation, (cf. Figure 35) comprend 62316 points et 124660 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 8.6 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.23 à 3.77, la moyenne des longueurs est de 1.03 et 99.9% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.12 (resp. 0.90). Le second maillage enrichi, avec contrôle de gradation à H-choc 1.5, (cf. Figure 36) comprend 77291 points et 154610 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 7.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.21 à 2.12, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.99% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.19 (resp. 0.92).

Les figures 37, 39 et 38 montrent respectivement des agrandissements au niveau des réacteurs de la triangulation initiale et des maillages enrichis sans et avec contrôle de gradation.

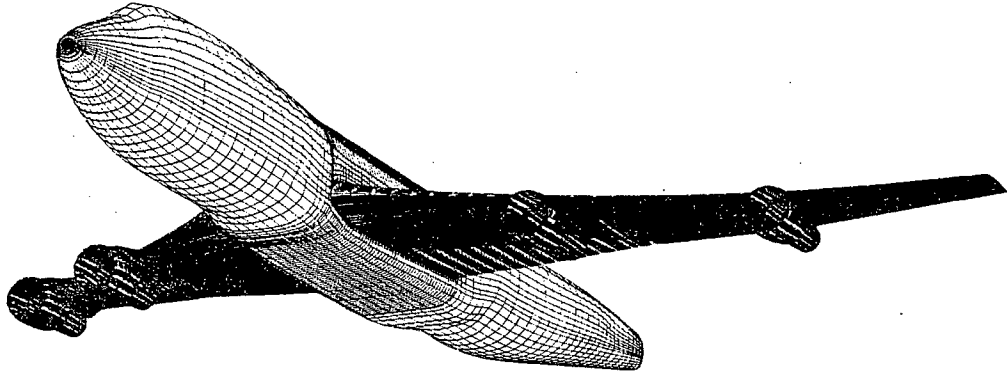


FIG. 33 - *Triangulation initiale de Boeing 747.*

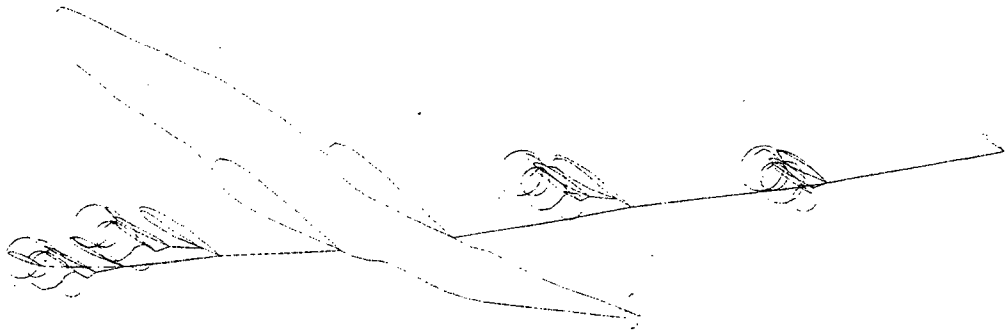


FIG. 34 - *Arêtes contraintes de Boeing 747.*

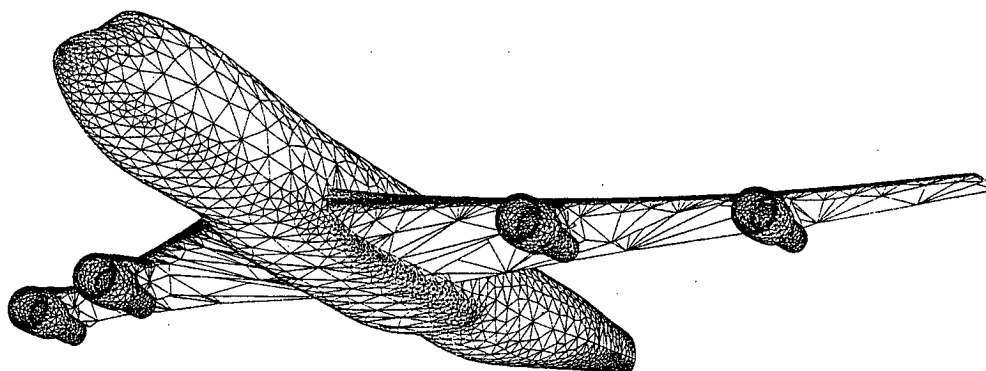


FIG. 35 - Maillage géométrique enrichi de Boeing 747 (écart de 11 degrés).

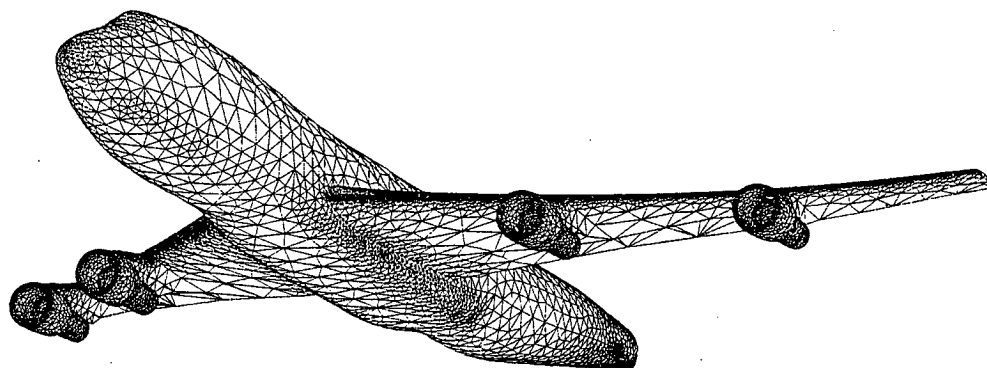


FIG. 36 - Maillage géométrique enrichi de Boeing 747 ( $H\text{-choc} = 2$ , écart de 11 degrés).

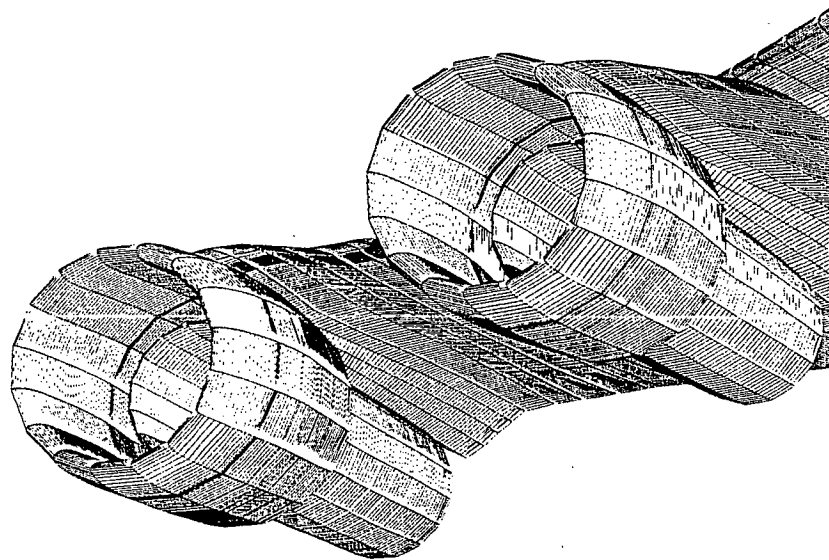


FIG. 37 - *Triangulation initiale de Boeing 747, agrandissement des réacteurs.*

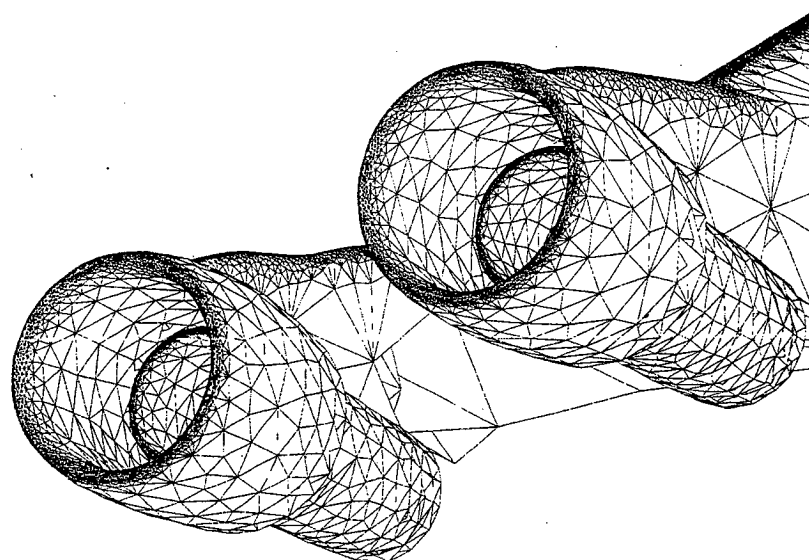


FIG. 38 - Maillage géométrique enrichi de Boeing 747 (écart de 11 degrés), agrandissement des réacteurs.

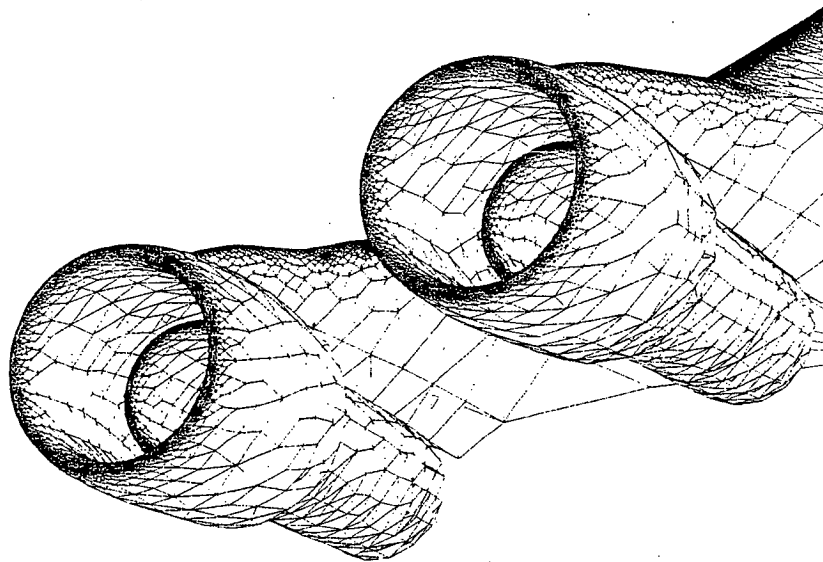


FIG. 39 - Maillage géométrique enrichi de Boeing 747 ( $H\text{-choc} = 2$ , écart de 11 degrés). agrandissement des réacteurs.

## 5.8 Pièce mécanique 'Ihmount'

L'exemple considéré représente une triangulation d'une pièce mécanique fournie par un modeleur (donnée de Mac Neal-Schwendler Corp.), utilisée dans la simulation numérique par des méthodes d'éléments finis et comprenant 2946 points et 5908 triangles (cf. Figure 40). Cette triangulation représente globalement une bonne approximation géométrique de la surface, en revanche elle présente localement des écarts à la surface trop importants (au maximum de l'ordre de 60 degrés). Cet modèle comporte des arêtes vives (discontinuités des plans tangents) contraintes (cf. Figure 41).

On enrichit cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 2 degrés avec et sans contrôle de la gradation. Le premier maillage enrichi, sans contrôle de gradation, (cf. Figure 42) comprend 17216 points et 34448 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 1.7 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.12 à 14.91, la moyenne des longueurs est de 1.08 et 98.8% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.02 (resp. 0.9). Le second maillage enrichi, avec contrôle de gradation à H-choc 1.5, (cf. Figure 43) comprend 28870 points et 57756 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 1.2 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.33 à 11.18, la moyenne des longueurs est de 1.02 et 97.8% compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.22 (resp. 0.94).



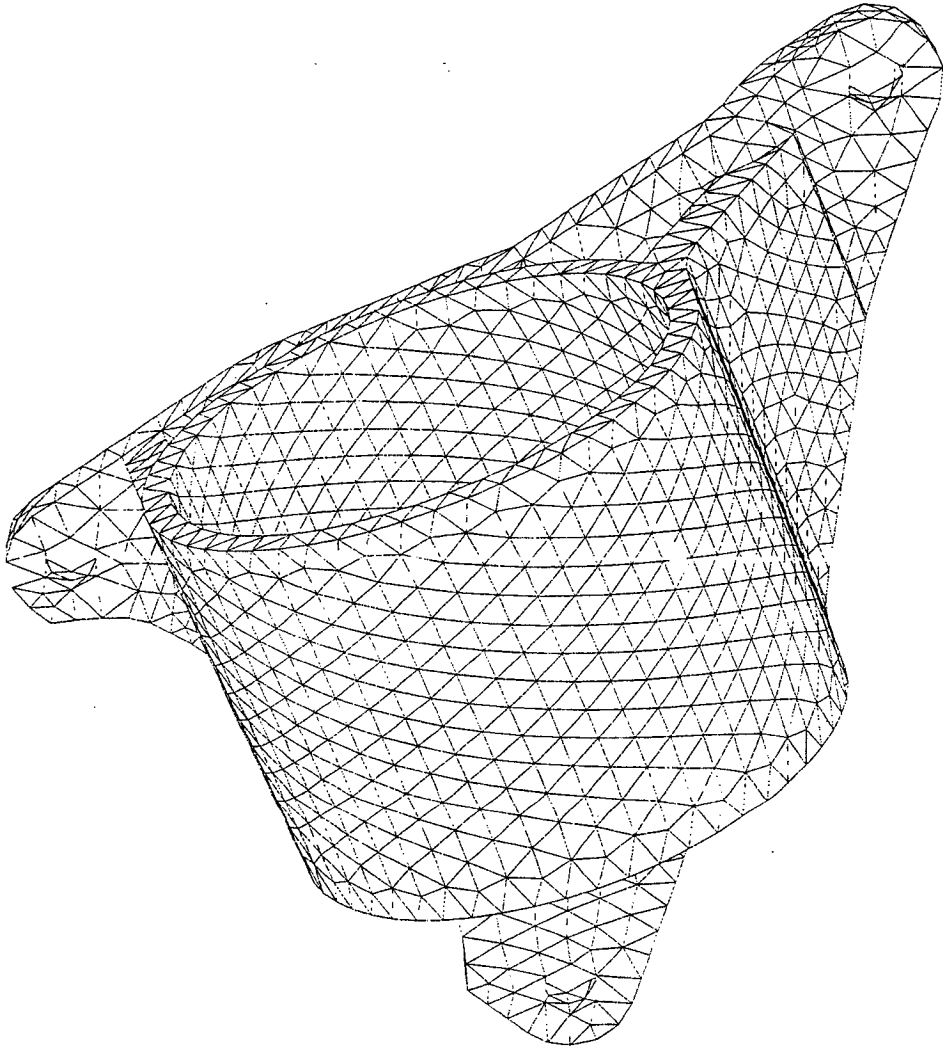


FIG. 40 - *Triangulation initiale de l'lmount.*

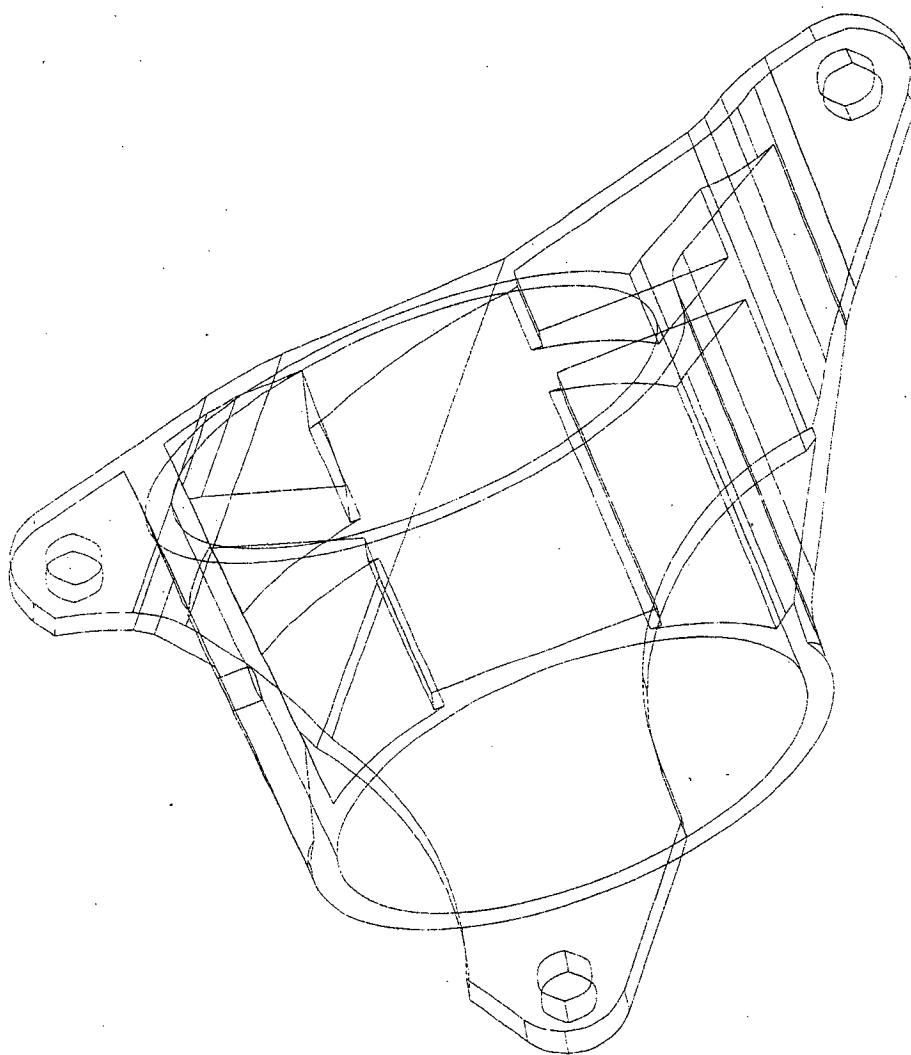


FIG. 41 - Arêtes contraintes de lhmount.

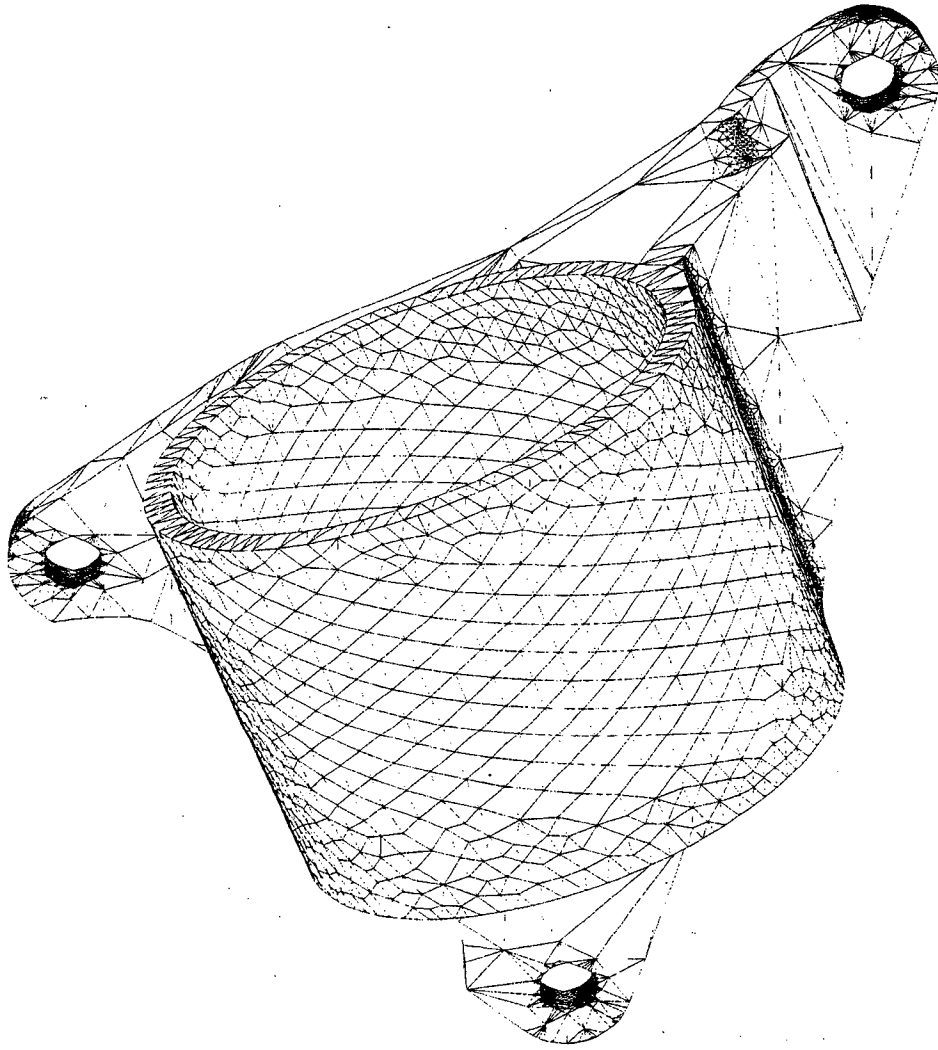


FIG. 42 - Maillage géométrique enrichi de lhmout (écart de 5 degrés).

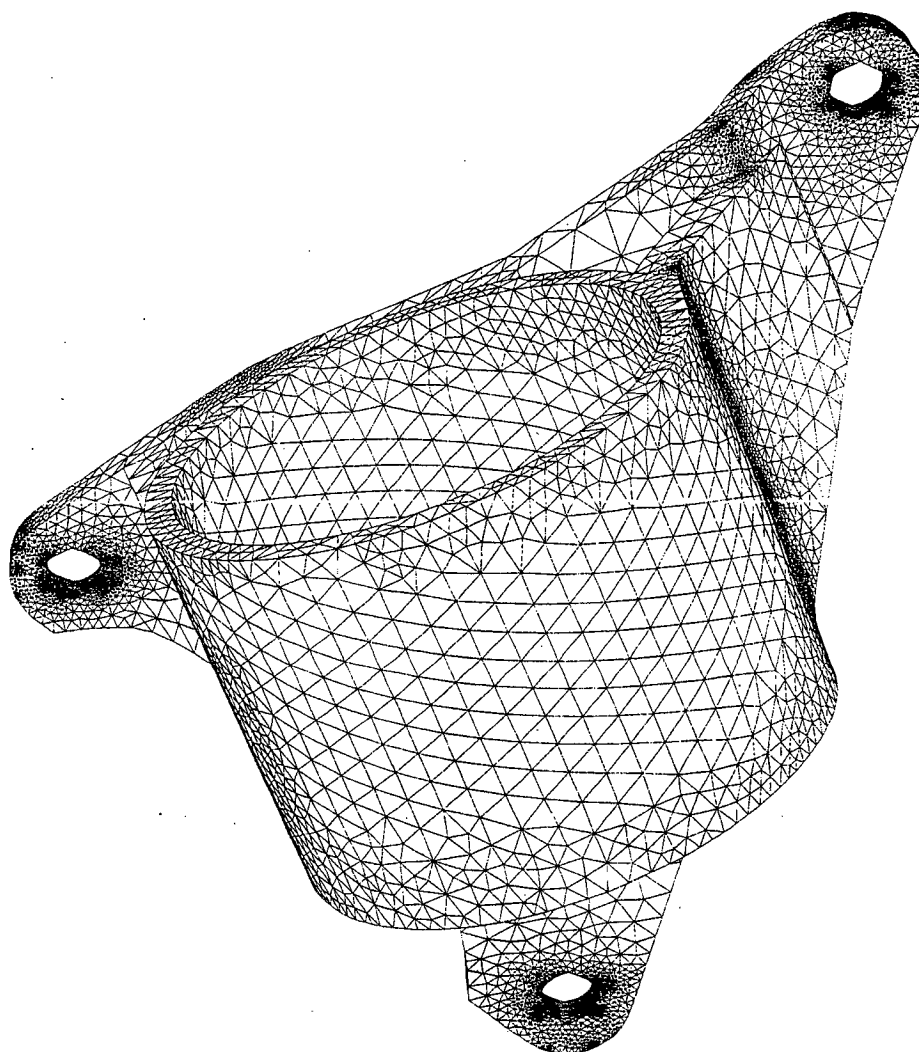


FIG. 43 - Maillage géométrique enrichi de lhmout ( $H\text{-choc} = 1.5$ , écart de 5 degrés).

## 6 Conclusions

Dans ce rapport on a proposé une méthode pour construire un maillage géométrique enrichi de type élément fini à partir d'une triangulation initiale arbitraire d'une surface. En effet, la triangulation initiale est optimisée au regard d'une géométrie et de la qualité en forme des éléments. La géométrie est définie via un support géométrique assez lisse à partir de la seule donnée de la triangulation initiale de la surface. Plusieurs exemples d'applications ont été présentés pour illustrer l'efficacité de cette approche.

Les maillages enrichis contiennent généralement un nombre important d'éléments, qui rend leur utilisation délicate. Dans la seconde partie de cette étude, nous allons montrer une application particulière de cette approche, concernant la simplification géométrique des maillages enrichis, dans le but de réduire le nombre d'éléments de ces maillages.

Une extension de la méthode proposée est la construction de maillages géométriques enrichis anisotropes, qui par conséquent doivent contenir moins d'éléments que les maillages géométriques enrichis isotropes correspondants. Par ailleurs, l'intégration de cette approche dans un schéma d'adaptation de maillage et sa validation sur des problèmes concrets de simulation constitue l'objectif à terme de cette étude.

## Références

- [1] H. BOROUCAKI ET P.L. GEORGE, Maillage des surfaces paramétriques. Partie I : Aspects théoriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 324, Série I, pp. 833–837, 1997.
- [2] H. BOROUCAKI ET P.J. FREY, H-correction, soumis à *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I.
- [3] P.G. CIARLET, Basic Error Estimates for Elliptic Problems, *Handbook of Numerical Analysis*, vol II, Finite Element methods, pp. 17–352, North Holland, 1991.
- [4] G. FARIN, *Curves and Surfaces for C.A.G.D.*, Academic Press, 1988.
- [5] G. FARIN, Triangular Bernstein-Bézier patches, *Computer Aided Geometric Design*, vol 3, no 2, pp. 83–128, 1986.
- [6] P.J.FREY ET H.BOROUCAKI, Qualité des maillages de surfaces, à paraître dans *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, 1997.
- [7] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, Triangulation de Delaunay et maillage. Applications aux éléments finis, *Hermès Paris*, 1997.
- [8] J.A. GREGORY, Smooth interpolation without twist constraints, in *Computer Aided Geometric Design*. Barnhill and Riesenfeld eds., Academic Press, NY, pp. 71–87, 1974.
- [9] B. HAMANN, Curvature approximation for triangulated surfaces, in *Geometric Modeling*, Computing Suppl. 8, Farin, Hagen, Noltmeier and Knodel eds., Springer, NY, 1993.
- [10] R. LÖHNER, Regridding Surface Triangulations, *J. of Comp. Phys.*, vol 126, pp. 1–10, 1996.
- [11] W.E. LORENSEN AND H.E. CLINE, Marching cubes: a high-resolution 3D surface construction algorithm, *Siggraph'87 Conf. Proc.*, *Comp. Graphics*, vol 21, no 4, pp. 163–169, 1987.
- [12] L.A. PIEGL AND A.M. RICHARD, Tessellating trimmed NURBS surfaces, *Comput.-Aided Des.*, vol 27, No 1, pp. 16–26, 1995.
- [13] B.R. PIPER, Visually smooth interpolation with triangular Bézier patches, in *Geometric modeling: algorithms and new trends*, G. Farin Ed., SIAM, pp. 221–233, 1987.
- [14] X.SHENG AND B.E.HIRSCH, Triangulation of trimmed surfaces in parametric space, *Computer Aided Design*, vol 24, 8, pp. 437–444, 1992.
- [15] D.J.WALTON AND D.S.MEEK, A triangular  $G^1$  patch from boundary curves, *Comput. Aided Design*, vol 28, no 2, pp. 113–123, 1996.



---

Unité de recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine - Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes - IRISA, Campus universitaire de Beaulieu 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes 46, avenue Félix Viallet - 38031 Grenoble Cedex 1 (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis - 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur

INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

ISSN 0249 - 6399



\* R R . 3 2 3 6 \*