



HAL
open science

Analyse des erreurs dispersives et dissipatives de quelques schémas advectifs modernes. Application à l'aéro-acoustique

Romuald Carpentier

► **To cite this version:**

Romuald Carpentier. Analyse des erreurs dispersives et dissipatives de quelques schémas advectifs modernes. Application à l'aéro-acoustique. RR-3253, INRIA. 1997. inria-00073436

HAL Id: inria-00073436

<https://inria.hal.science/inria-00073436v1>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Analyse des erreurs dispersives et dissipatives de
quelques schémas advectifs modernes.
Application à l'aéro-acoustique*

Romuald CARPENTIER

N° 3253

septembre 1997

_____ THÈME 4 _____



*Rapport
de recherche*

Analyse des erreurs dispersives et dissipatives de quelques schémas advectifs modernes. Application à l'aéro-acoustique

Romuald CARPENTIER*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projets SINUS

Rapport de recherche n° 3253 — septembre 1997 — 81 pages

Résumé : Ce document donne une comparaison de schémas d'ordre 2 appliqués à l'équation d'advection bidimensionnelle. Cette comparaison porte sur la stabilité des schémas et les erreurs de dissipation et de dispersion qu'ils commettent. Le rapprochement de ces erreurs avec les calculs numériques de tourbillons détachés [1, 2] (Axe de Stabilité des Moteurs à Segmentations), permet un début d'explication de la sensibilité surprenante du cas test C1 de l'ONERA.

Mots-clé : Sierra, Thesee, Patric, Sappho, triangle, quadrangle, stabilité, erreurs.

(Abstract: pto)

* Email: Romuald.Carpentier@sophia.inria.fr - Etude financée par le CNES

Analysis of dispersion and dissipation properties of some modern advection schemes. Application to aero-acoustic

Abstract: This document gives a comparison of second order schemes applied to the two dimensional wave equation. This comparison focuses on stability and accuracy. The confrontation of these errors against the numerical calculation of a vortex shedding (Axis of Stability of Segmented Motors), allows a beginning of explanation for the surprising sensitivity of the C1 ONERA test case.

Key-words: Sierra, Thesee, Patric, Sappho, quadrangular, triangular, stability, errors.

Table des matières

1	INTRODUCTION	2
1.1	Le modèle	2
1.2	Les schémas numériques	3
1.3	L'analyse	3
2	PRESENTATION DES SCHEMAS	4
2.1	CERMICS [3]	5
2.2	ONERA [6]	7
2.3	SNPE [7]	11
2.4	BERTIN&Cie [8]	13
2.5	CNES/INRIA [9]	14
3	LA STABILITE DES SCHEMAS	16
3.1	CERMICS	18
3.2	ONERA	19
3.3	SNPE	19
3.4	BERTIN & Cie	20
3.5	CNES/INRIA	21
3.6	Résultats	21
4	EQUATIONS EQUIVALENTES [10]	23
4.1	CERMICS	24
4.2	ONERA	26
4.3	SNPE	27
4.4	BERTIN & Cie	28
4.5	CNES/INRIA	29
4.6	Conclusions	30
5	ERREURS APPROCHEES	30
5.1	Dispersion d'ordre 2	31
5.2	Dissipation d'ordre 3	38
5.3	Validation numérique	44
6	ERREURS EXACTES	61
6.1	Domaine de variation de $\Delta\xi$	61
6.2	Expressions des erreurs exactes	61
6.3	La dissipation exacte	62
6.4	La dispersion exacte	67
6.5	Validation numérique	71
7	CONCLUSION	79

1 INTRODUCTION

Dans le cadre de l’Axe de Stabilité des Moteurs Segmentés (ASSM) du type de ceux des propulseurs à poudre d’Ariane V, de larges études ont été entreprises par le CNES pour percevoir et comprendre les éventuelles instabilités pouvant mettre en péril le lanceur européen. En particulier, un accent a été mis sur le phénomène de tourbillons détachés [1, 2] et, du fait d’une physique extrême (pression, température...), une part importante de cette étude a été confiée à la simulation numérique.

Au début de cette étude, la géométrie a été simplifiée, la chimie (au sens de la combustion) ignorée et le modèle de la mécanique des fluides est resté au niveau le plus simple: les équations d’Euler.

Il restait cependant aux numériciens une barrière à franchir: celle de pouvoir réaliser un calcul **instationnaire** avec des schémas d’ordre 2 qui, jusque là, n’avaient fait leurs preuves que sur des évaluations d’états stationnaires...

Plusieurs partenaires ont relevés ce défi au sein desquels nous citerons, en les remerciant de leur collaboration pour ce présent document:

le CERMICS, l’ONERA, la SNPE, BERTIN et l’INRIA.

Très vite, des discordances entre les partenaires se sont fait entendre relativement aux résultats des cas tests étudiés mais aussi, ce qui est plus grave, avec les essais réels. Il est donc devenu nécessaire de comparer les différents schémas utilisés par les partenaires cités ci-dessus et impératif d’augmenter leur précision pour aborder des calculs instationnaires.

Cette comparaison est basée sur un modèle linéaire: l’équation d’advection bidimensionnelle. Le jugement porté sur chaque schémas fait donc référence à ce modèle et sa transposition au système non linéaire des équations d’Euler est encore sujette à caution.

1.1 Le modèle

Le modèle sera celui de l’équation d’advection 2D:

$$U_t + c \cos \theta U_x + c \sin \theta U_y = 0 \tag{1}$$

où les indices x , y et t correspondent aux dérivées partielles, spatiales et temporelle de l’inconnue scalaire U . c est le module de la vitesse d’advection et θ est la direction de l’advection.

Un tel modèle a l’avantage d’avoir une solution connue dès lors que le problème est bien posé, c’est-à-dire, dès lors que nous connaissons un état initial U_0 . Dans cette situation, on montre très facilement que la solution de (1) à un instant t n’est autre que la translation dans un domaine infini de U_0 par le vecteur de composantes $(ct \cos \theta, ct \sin \theta)$.

En conséquence, connaissant la solution exacte au problème posé, les erreurs commises par les schémas numériques seront analysables en détail. Plus particulièrement, nous prendrons

un mode de Fourier (ξ_x, ξ_y) pour état initial U_0 s'écrivant:

$$U_0 = A \cos \{ \xi_x x + \xi_y y \} \quad A, \xi_x, \xi_y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

donnant pour solution exacte à (1) à un instant t :

$$U_e(t) = A \cos \{ \xi_x x + \xi_y y - c(\xi_x \cos \theta + \xi_y \sin \theta)t \} \quad (3)$$

1.2 Les schémas numériques

Sont présentés ici et de manière très succincte, des schémas numériques de quelques partenaires de l'ASSM désireux de confronter leur code en version explicite:

Organisme	Nom du code	Solveur	Temps	Géométrie
CERMICS	RK2-T	ROE	RK2	TRIANGLE
CERMICS	RK2-Q	ROE	RK2	QUADRANGLE
ONERA	SIERRA	MACCORMACK	PRE/COR	QUADRANGLE
SNPE	PATRIC	ROE	PRE/COR	QUADRANGLE
BERTIN	THESEE	ROE LIN/ROE	PRE/COR	QUADRANGLE
CNES/INRIA	SAPPHO-T	ROE	RK4	TRIANGLE
CNES/INRIA	SAPPHO-Q	ROE	RK4	QUADRANGLE

RK=Runge-Kutta, PRE=prédicteur, COR=correcteur, LIN=linéarisé

Nous reviendrons plus en détails sur chacun de ces schémas numériques.

1.3 L'analyse

De manière à pouvoir comparer tous les schémas, il faut se donner un **maillage commun** qui sera, pour simplifier les calculs, régulier (Δx et Δy constants), non étiré ($\Delta x = \Delta y = \Delta$), orthogonal et infini (pas de condition de bord par condition périodique). De même, il faut se fixer une avancée en **temps Δt identique** pour tous les schémas. Ce Δt correspondra à un calcul en **4 étapes**. Ainsi, à un sommet S_I de coordonnées $(x = j\Delta x, y = k\Delta y)$ noté également $S_{j,k}$, il convient de définir le flux total Ψ permettant d'évaluer la nouvelle valeur U_I^{n+1} en ce sommet et au temps $t = (n+1)\Delta t$ par rapport à la valeur précédente U_I^n prise au temps $t = n\Delta t$:

$$\boxed{U_I^{n+1} = U_I^n + \Delta t \Psi(U_I^n)} \quad (4)$$

Par l'expression discrétisée de Ψ , nous allons pouvoir estimer:

- la **stabilité** de chacun des schémas (fonction gain),
- l'**ordre** de chacun des schémas (équations équivalentes),

- les **erreurs** dispersives et dissipatives totales de chacun des schémas.

Ces trois points vont permettre de classer les schémas sur des critères fondamentaux pour la simulation numérique. Il en reste cependant un quatrième basé sur le temps CPU mesuré. Ce dernier point est important dans la prise en compte du coût informatique et dépend fortement du savoir faire du programmeur. Aussi, nous ne rentrerons pas dans cette considération, faute d'une optimisation inégale sur tous les schémas, par manque de temps.

Notations:

$$\chi_1 = c\Delta \cos \theta, \quad \chi_2 = c\Delta \sin \theta, \quad \nu = \frac{c\Delta t}{\Delta} \quad (5)$$

2 PRESENTATION DES SCHEMAS

Pour chaque organisme mentionné en titre, un descriptif de la méthode numérique utilisée est donné avant l'expression de Ψ . Afin d'éviter quelques redondances d'écritures, voici quelques généralités:

Ecrivons (1) comme :

$$U_t + F_x(U) + G_y(U) = 0 \quad (6)$$

$$\text{avec: } F(U) = c \cos \theta U \quad G(U) = c \sin \theta U$$

Exprimons (6) dans une formulation de volumes finis sur une cellule C par la formule de Green:

$$\int \int_C U_t dx dy + \int_{\partial C} [F(U).n_x + G(U).n_y] d\sigma = 0 \quad (7)$$

où \vec{n} (n_x, n_y) est la normale unitaire locale à la cellule C et ∂C le contour de cette cellule. Nous pouvons considérer le vecteur flux $\vec{F}(U)$ de coordonnées $(F(U), G(U))$, permettant d'écrire (7) comme :

$$\int \int_C U_t dx dy + \int_{\partial C} \vec{F}(U). \vec{n} d\sigma = 0 \quad (8)$$

Nous discrétisons le domaine spatial comme une réunion de cellules C_I définies par le maillage primal dans le cas centré cellule ou conduisant, dans le cas centré sommet, à un maillage dual incluant les sommets S_I . Le flux convectif interne d'une cellule C_I s'exprime comme une somme des flux sur le contour intersectant les contours des cellules C_J voisines :

$$\int_{\partial C_I} \vec{F}(U_I). \vec{n} d\sigma = \sum_J \int_{\partial C_I \cap \partial C_J} \vec{F}(U_I). \vec{\Delta}_{IJ} d\sigma \quad (9)$$

où $\vec{\Delta}_{IJ}$ est la normale \vec{n} intégrée sur l'interface:

$$\vec{\Delta}_{IJ}(\Delta_x, \Delta_y) = \int_{\partial C_I \cap \partial C_J} \vec{n} \, d\sigma \quad (10)$$

Nous considérons les approximations suivantes :

- temporelle (condensation de la matrice de masse)

$$\int \int_{C_I} U_t \, dx \, dy \rightarrow \text{aire}(C_I) \frac{dU_I}{dt} \quad (11)$$

Ce qui revient à supposer U constante par cellule. De plus, ici, les aires des cellules C_I sont constantes et valent Δ^2 qu'il s'agisse de maillage quadrangulaire ou triangulaire.

- spatiale

$$\int_{\partial C_I \cap \partial C_J} \vec{\mathcal{F}}(U_I) \cdot \vec{\Delta}_{IJ} \, d\sigma \rightarrow \Phi(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) \quad (12)$$

Φ dépend alors du schéma utilisé et sera regardé au cas par cas.

Les approximations (11) et (12) permettent d'écrire (8) comme :

$$\frac{dU_I}{dt} = -\frac{1}{\Delta^2} \sum_J \Phi(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) \quad (13)$$

2.1 CERMICS [3]

Les codes RK2-Q et RK2-T utilisent pour le calcul de Φ (12), le schéma de Roe classique [4].

$$\Phi(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) = \frac{1}{2} \left\{ (\vec{\mathcal{F}}(U_I) + \vec{\mathcal{F}}(U_J)) \cdot \vec{\Delta}_{IJ} + |\vec{\mathcal{F}}_U \cdot \vec{\Delta}_{IJ}| (U_I - U_J) \right\} \quad (14)$$

où $\vec{\mathcal{F}}_U$ est la dérivée de $\vec{\mathcal{F}}$ par rapport à U et s'en trouvant dans notre cas indépendante :

$$\vec{\mathcal{F}}_U : (F_U, G_U) = (c \cos \theta, c \sin \theta) \quad (15)$$

En utilisant, (6), (14) et (15), il vient :

$$\Phi(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) = \frac{1}{2} \left\{ c(\Delta_x \cos \theta + \Delta_y \sin \theta)(U_I + U_J) + |c(\Delta_x \cos \theta + \Delta_y \sin \theta)| (U_I - U_J) \right\} \quad (16)$$

Pour obtenir l'ordre 2 en espace, la méthode M.U.S.C.L. ("Monotone Upwind Scheme for Conservation Laws") est utilisée [5]. Il convient alors d'estimer les variables U_I et U_J respectivement en U_{IJ} et U_{JI} sur le bord $\partial C_I \cap \partial C_J$ au moyen du calcul de leurs gradients respectifs $\vec{\nabla}_c U_I$ et $\vec{\nabla}_c U_J$ dans les cellules C_I et C_J . Ces gradients sont calculés de manière

centrée par rapport aux cellules C_I (respectivement C_J) par circulation le long de la cellule d'intégration et nous procédons à la transformation suivante:

$$\begin{aligned} U_I &\mapsto U_{IJ} = U_I + \frac{1}{2} \vec{\nabla}_c U_I \cdot \vec{S}_I \vec{S}_J \\ U_J &\mapsto U_{JI} = U_J - \frac{1}{2} \vec{\nabla}_c U_J \cdot \vec{S}_I \vec{S}_J \end{aligned} \quad (17)$$

où S_I et S_J sont les noeuds des deux cellules voisines considérées.

L'équation (13) se trouve alors discrétisée par l'expression :

$$\frac{dU_I}{dt} = \varphi(U_I) \quad \text{avec: } \varphi(U_I) = -\frac{1}{\Delta^2} \sum_J \Phi(U_{IJ}, U_{JI}, \vec{\Delta}_{IJ}) \quad (18)$$

Pour obtenir l'ordre 2 en temps, une méthode de Runge Kutta à deux pas est utilisée.

$$U_I^{n+1/2} = U^n + \frac{\Delta t}{2} \varphi(U_I^n) + \frac{\Delta t}{4} \varphi(U_I^n) \quad (19)$$

En exploitant la linéarité de φ et en considérant 2 itérations de ce schéma, on a:

$$\begin{aligned} U_I^{n+1} &= U_I^n \\ &+ \Delta t \varphi(U_I^n) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \varphi \circ \varphi(U_I^n) \\ &+ \frac{\Delta t^3}{8} \varphi \circ \varphi \circ \varphi(U_I^n) \\ &+ \frac{\Delta t^4}{64} \varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi(U_I^n); \end{aligned} \quad (20)$$

par analogie avec (4), (20) donne:

$$\boxed{\Psi = \varphi + \frac{\Delta t}{2} \varphi^{\circ 2} + \frac{\Delta t^2}{8} \varphi^{\circ 3} + \frac{\Delta t^3}{64} \varphi^{\circ 4}} \quad (21)$$

où $\varphi^{\circ i}$ est la composée de φ avec elle même i fois.

Donnons maintenant l'expression de $\varphi(U_I^n)$ pour les différentes géométries envisagées avec les notations vues dans (5):

- **RK2-Q** (maillage quadrangulaire).

$$\varphi(U_I^n) = -\frac{1}{8\Delta^2} \{$$

$$\begin{aligned}
& U_{j,k+2}^n \left(\begin{array}{ccc} -\chi_2 & & +|\chi_2| \end{array} \right) \\
& +U_{j,k+1}^n \left(\begin{array}{ccc} 6\chi_2 & & -4|\chi_2| \end{array} \right) \\
& +U_{j-2,k}^n \left(\begin{array}{ccc} \chi_1 & & +|\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j-1,k}^n \left(\begin{array}{ccc} -6\chi_1 & & -4|\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j,k}^n \left(\begin{array}{ccc} & 6|\chi_1| & +6|\chi_2| \end{array} \right) \\
& +U_{j+1,k}^n \left(\begin{array}{ccc} 6\chi_1 & & -4|\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j+2,k}^n \left(\begin{array}{ccc} -\chi_1 & & +|\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j,k-1}^n \left(\begin{array}{ccc} & -6\chi_2 & -4|\chi_2| \end{array} \right) \\
& +U_{j,k-2}^n \left(\begin{array}{ccc} & \chi_2 & +|\chi_2| \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{22}$$

}

- **RK2-T** (maillage triangulaire).

$$\varphi(U_I^n) = -\frac{1}{72\Delta^2} \{$$

$$\begin{aligned}
& U_{j,k+2}^n \left(\begin{array}{cccc} -4\chi_2 & +2\chi_1 & & +2|2\chi_2 - \chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j+1,k+2}^n \left(\begin{array}{cccc} -3\chi_2 & & +|\chi_2 + \chi_1| & +|2\chi_2 - \chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j+2,k+2}^n \left(\begin{array}{cccc} -2\chi_2 & -2\chi_1 & +2|\chi_2 + \chi_1| & \end{array} \right) \\
& +U_{j-1,k+1}^n \left(\begin{array}{cccc} -3\chi_2 & +3\chi_1 & & +|2\chi_2 - \chi_1| \quad +|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j,k+1}^n \left(\begin{array}{cccc} 38\chi_2 & -19\chi_1 & -|\chi_2 + \chi_1| & -12|2\chi_2 - \chi_1| \quad -|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j+1,k+1}^n \left(\begin{array}{cccc} 19\chi_2 & +19\chi_1 & -12|\chi_2 + \chi_1| & -|2\chi_2 - \chi_1| \quad -|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j+2,k+1}^n \left(\begin{array}{cccc} & -3\chi_1 & +|\chi_2 + \chi_1| & \quad +|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j-2,k}^n \left(\begin{array}{cccc} -2\chi_2 & +4\chi_1 & & +2|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j-1,k}^n \left(\begin{array}{cccc} 19\chi_2 & -38\chi_1 & -|\chi_2 + \chi_1| & -|2\chi_2 - \chi_1| \quad -12|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j,k}^n \left(\begin{array}{cccc} & & +20|\chi_2 + \chi_1| & +20|2\chi_2 - \chi_1| \quad +20|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j+1,k}^n \left(\begin{array}{cccc} -19\chi_2 & +38\chi_1 & -|\chi_2 + \chi_1| & -|2\chi_2 - \chi_1| \quad -12|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j+2,k}^n \left(\begin{array}{cccc} 2\chi_2 & -4\chi_1 & & +2|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j-2,k-1}^n \left(\begin{array}{cccc} & +3\chi_1 & +|\chi_2 + \chi_1| & \quad +|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j-1,k-1}^n \left(\begin{array}{cccc} -19\chi_2 & -19\chi_1 & -12|\chi_2 + \chi_1| & -|2\chi_2 - \chi_1| \quad -|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j,k-1}^n \left(\begin{array}{cccc} -38\chi_2 & +19\chi_1 & -|\chi_2 + \chi_1| & -12|2\chi_2 - \chi_1| \quad -|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j+1,k-1}^n \left(\begin{array}{cccc} 3\chi_2 & -3\chi_1 & & +|2\chi_2 - \chi_1| \quad +|\chi_2 - 2\chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j-2,k-2}^n \left(\begin{array}{cccc} 2\chi_2 & +2\chi_1 & +2|\chi_2 + \chi_1| & \end{array} \right) \\
& +U_{j-1,k-2}^n \left(\begin{array}{cccc} 3\chi_2 & & +|\chi_2 + \chi_1| & +|2\chi_2 - \chi_1| \end{array} \right) \\
& +U_{j,k-2}^n \left(\begin{array}{cccc} 4\chi_2 & -2\chi_1 & & +2|2\chi_2 - \chi_1| \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{23}$$

}

2.2 ONERA [6]

Le code SIERRA utilise le schéma de MacCormack sur maillage quadrangulaire. Ce schéma procède en 2 étapes: une prédiction et une correction. En maillage bidimensionnel,

il y a 4 façons de calculer Φ (défini en (12)). Sur un modèle linéaire, seules 2 de ces 4 calculs aboutissent à des expressions discrétisées différentes. Nous allons donc considérer un calcul global en 4 étapes fait de la prédiction correction de type 1 suivie de la prédiction correction de type 2.

Rappelons que le sommet S_I peut s'écrire $S_{j,k}$ donnant plus explicitement les indices bidimensionnels du noeud et posons, pour un sommet S_J voisin de S_I , une notation semblable $S_{l,m}$.

Prédiction (indice p):

$$\begin{aligned}\Phi_{1p}(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) &= \vec{F}^{++} \cdot \vec{\Delta}_{IJ} \\ &= F(U_{\max\{j,l\},.})\Delta_x + G(U_{.,\max\{k,m\}})\Delta_y \\ &= c \cos \theta U_{\max\{j,l\},.}\Delta_x + c \sin \theta U_{.,\max\{k,m\}}\Delta_y\end{aligned}\quad (24)$$

ou

$$\begin{aligned}\Phi_{2p}(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) &= \vec{F}^{+-} \cdot \vec{\Delta}_{IJ} \\ &= F(U_{\max\{j,l\},.})\Delta_x + G(U_{.,\min\{k,m\}})\Delta_y \\ &= c \cos \theta U_{\max\{j,l\},.}\Delta_x + c \sin \theta U_{.,\min\{k,m\}}\Delta_y\end{aligned}\quad (25)$$

Ainsi lors de la prédiction, l'équation (13) se trouve discrétisée par les expressions:

$$\frac{dU_I}{dt} = \Upsilon_{1p}(U_I) \quad \text{avec: } \Upsilon_{1p}(U_I) = -\frac{1}{\Delta^2} \sum_J \Phi_{1p}(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) \quad (26)$$

ou

$$\frac{dU_I}{dt} = \Upsilon_{2p}(U_I) \quad \text{avec: } \Upsilon_{2p}(U_I) = -\frac{1}{\Delta^2} \sum_J \Phi_{2p}(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) \quad (27)$$

(26) et (27) conduisent alors aux prédictions suivantes au sommet S_I et au temps $t = (n + 1/2)\Delta t$:

$$U_1 = U_I^n + \frac{\Delta t}{2} \Upsilon_{1p}(U_I^n) \quad (28)$$

ou

$$U_2 = U_I^n + \frac{\Delta t}{2} \Upsilon_{2p}(U_I^n) \quad (29)$$

Correction (indice c):

Les corrections doivent se faire avec des signes opposés à ceux de la prédiction. Ainsi, nous définirons à l'image de (25) et (26):

$$\begin{aligned}\Phi_{1c}(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) &= \vec{F}^{--} \cdot \vec{\Delta}_{IJ} \\ &= F(U_{\min\{j,l\},.})\Delta_x + G(U_{.,\min\{k,m\}})\Delta_y \\ &= c \cos \theta U_{\min\{j,l\},.}\Delta_x + c \sin \theta U_{.,\min\{k,m\}}\Delta_y\end{aligned}\quad (30)$$

ou

$$\begin{aligned}
\Phi_{2c}(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) &= \vec{F}^{-+} \cdot \vec{\Delta}_{IJ} \\
&= F(U_{\min\{j,l\}, \cdot}) \Delta_x + G(U_{\cdot, \max\{k,m\}}) \Delta_y \\
&= c \cos \theta U_{\min\{j,l\}, \cdot} \Delta_x + c \sin \theta U_{\cdot, \max\{k,m\}} \Delta_y
\end{aligned} \tag{31}$$

et, à l'image de (26) et (27):

$$\Upsilon_{1c}(U_I) = -\frac{1}{\Delta^2} \sum_J \Phi_{1c}(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) \tag{32}$$

ou

$$\Upsilon_{2c}(U_I) = -\frac{1}{\Delta^2} \sum_J \Phi_{2c}(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}). \tag{33}$$

MacCormack propose d'utiliser respectivement la prédiction U_1 ou U_2 ((28) ou (29)) comme argument de la correction ((32) ou (33)) et d'écrire:

$$U_I^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ U_I^n + U_1 + \frac{\Delta t}{2} \Upsilon_{1c}(U_1) \right\} \tag{34}$$

ou

$$U_I^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ U_I^n + U_2 + \frac{\Delta t}{2} \Upsilon_{2c}(U_2) \right\}. \tag{35}$$

En utilisant (28) ou (29) avec la linéarité du modèle envisagé, (34) ou (35) s'écrivent:

$$U_I^{n+1/2} = U_I^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{\Upsilon_{1p}(U_I^n) + \Upsilon_{1c}(U_I^n)}{2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\Upsilon_{1c} \circ \Upsilon_{1p}(U_I^n)}{2} \right\} \tag{36}$$

ou

$$U_I^{n+1/2} = U_I^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{\Upsilon_{2p}(U_I^n) + \Upsilon_{2c}(U_I^n)}{2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\Upsilon_{2c} \circ \Upsilon_{2p}(U_I^n)}{2} \right\}. \tag{37}$$

De par la linéarité du modèle, nous avons:

$$\frac{\Upsilon_{1p}(U_I^n) + \Upsilon_{1c}(U_I^n)}{2} = \frac{\Upsilon_{2p}(U_I^n) + \Upsilon_{2c}(U_I^n)}{2} = \varphi(U_I^n). \tag{38}$$

Nous poserons par ailleurs:

$$\varphi_1(U_I^n) = \frac{\Upsilon_{1c} \circ \Upsilon_{1p}(U_I^n)}{2} \tag{39}$$

$$\varphi_2(U_I^n) = \frac{\Upsilon_{2c} \circ \Upsilon_{2p}(U_I^n)}{2} \tag{40}$$

si bien que (35) et (36) s'écriront via (38), (39) et (40):

$$U_I^{n+1/2} = U_I^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \varphi(U_I^n) + \frac{\Delta t}{2} \varphi_1(U_I^n) \right\} \quad (41)$$

ou

$$U_I^{n+1/2} = U_I^n + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \varphi(U_I^n) + \frac{\Delta t}{2} \varphi_2(U_I^n) \right\}. \quad (42)$$

Alternance

Pour des raisons de stabilité du schéma de MacCormack bidimensionnel, une alternance entre les expressions (41) et (42) est nécessaire. Ceci conduit à un schéma en 4 étapes permettant d'exprimer U_I au temps $(n+1)\Delta t$:

$$\begin{aligned} U_I^{n+1} &= U_I^n \\ &+ \Delta t \varphi(U_I^n) \\ &+ \frac{\Delta t^2}{4} \{ \varphi_1(U_I^n) + \varphi_2(U_I^n) + \varphi \circ \varphi(U_I^n) \} \\ &+ \frac{\Delta t^3}{8} \{ \varphi \circ \varphi_1(U_I^n) + \varphi \circ \varphi_2(U_I^n) \} \\ &+ \frac{\Delta t^4}{16} \varphi_1 \circ \varphi_2(U_I^n) \end{aligned} \quad (43)$$

soit, de (43) par analogie avec (4):

$$\boxed{\Psi = \varphi + \frac{\Delta t}{4} \{ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi \circ \varphi \} + \frac{\Delta t^2}{8} \{ \varphi \circ \varphi_1 + \varphi \circ \varphi_2 \} + \frac{\Delta t^3}{16} \{ \varphi_1 \circ \varphi_2 \}} \quad (44)$$

Donnons maintenant les expressions discrétisées de φ , φ_1 , et φ_2 :

$$\begin{aligned} \varphi(U_I^n) &= \frac{1}{2\Delta^2} \{ \\ &U_{j,k+1}^n \quad (\quad -\chi_2) \\ &+ U_{j-1,k}^n \quad (\quad \chi_1 \quad) \\ &+ U_{j+1,k}^n \quad (-\chi_1 \quad) \\ &+ U_{j,k-1}^n \quad (\quad \chi_2) \\ &\} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\varphi_1(U_I^n) = \frac{1}{2\Delta^4} \{$$

Soit, pour un schéma en 4 étapes:

$$\begin{aligned}
U_I^{n+1} &= U_I^n \\
&+ \Delta t \varphi_2(U_I^n) \\
&+ \frac{\Delta t^2}{4} \{ \varphi_2 \circ \varphi_2(U_I^n) + \varphi_2 \circ \varphi_1(U_I^n) \} \\
&+ \frac{\Delta t^3}{8} \varphi_2 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(U_I^n) \\
&+ \frac{\Delta t^4}{64} \varphi_2 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_1(U_I^n)
\end{aligned} \tag{51}$$

Soit de (51) par analogie avec (4):

$$\boxed{\Psi = \varphi_2 + \frac{\Delta t}{4} \{ \varphi_2^{\circ 2} + \varphi_2 \circ \varphi_1 \} + \frac{\Delta t^2}{8} \varphi_2^{\circ 2} \circ \varphi_1 + \frac{\Delta t^4}{64} \varphi_2^{\circ 2} \circ \varphi_1^{\circ 2}} \tag{52}$$

Donnons maintenant les expressions discrétisées de φ_1 et φ_2 :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(U_I^n) &= \frac{1}{2\Delta^2} \{ \\
&U_{j,k+1}^n \begin{pmatrix} & -\chi_2 & +|\chi_2| \\ +U_{j-1,k}^n & \begin{pmatrix} \chi_1 & +|\chi_1| \end{pmatrix} & \\ +U_{j,k}^n & \begin{pmatrix} & -2|\chi_1| & -2|\chi_2| \end{pmatrix} \\ +U_{j+1,k}^n & \begin{pmatrix} -\chi_1 & +|\chi_1| \end{pmatrix} & \\ +U_{j,k-1}^n & \begin{pmatrix} & \chi_2 & +|\chi_2| \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&\}
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(U_I^n) &= -\frac{1}{8\Delta^2} \{ \\
&U_{j,k+2}^n \begin{pmatrix} & -\chi_2 & +|\chi_2| \\ +U_{j,k+1}^n & \begin{pmatrix} & 6\chi_2 & -4|\chi_2| \end{pmatrix} \\ +U_{j-2,k}^n & \begin{pmatrix} \chi_1 & +|\chi_1| \end{pmatrix} & \\ +U_{j-1,k}^n & \begin{pmatrix} -6\chi_1 & -4|\chi_1| \end{pmatrix} & \\ +U_{j,k}^n & \begin{pmatrix} & 6|\chi_1| & +6|\chi_2| \end{pmatrix} \\ +U_{j+1,k}^n & \begin{pmatrix} 6\chi_1 & -4|\chi_1| \end{pmatrix} & \\ +U_{j+2,k}^n & \begin{pmatrix} -\chi_1 & +|\chi_1| \end{pmatrix} & \\ +U_{j,k-1}^n & \begin{pmatrix} & -6\chi_2 & -4|\chi_2| \end{pmatrix} \\ +U_{j,k-2}^n & \begin{pmatrix} & \chi_2 & +|\chi_2| \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&\}.
\end{aligned} \tag{54}$$

2.4 BERTIN&Cie [8]

Reposant sur un maillage quadrangulaire, THESEE utilise le schéma de Roe de manière linéarisée lors d'une première étape de prédiction. Cette prédiction consiste d'abord à estimer le gradient centré $\vec{\nabla}_c U_I^n$ sur tous les sommets S_I par circulation le long des cellules d'intégrations C_I . Une estimation de $U_I^{n+1/4}$ est alors obtenue par:

$$U_I^{n+1/4} = U_I^n - \frac{\Delta t}{4} \vec{\mathcal{F}}_U \cdot \vec{\nabla}_c U_I^n \quad (55)$$

où $\vec{\mathcal{F}}_U$ est défini par (15).

Ensuite, vient une étape de correction en prenant le flux classique de Roe avec une interpolation aux interfaces utilisant, les états prédits et les gradients centrés déjà calculés pour la prédiction:

$$\begin{aligned} U_I &\longmapsto U_{IJ} = U_I^{n+1/4} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}_c U_I^n \cdot S_I \vec{S}_J \\ U_J &\longmapsto U_{JI} = U_J^{n+1/4} - \frac{1}{2} \vec{\nabla}_c U_J^n \cdot S_I \vec{S}_J \end{aligned} \quad (56)$$

où S_I et S_J sont les noeuds des deux cellules voisines considérées.

Le bilan de flux φ se définit comme (18) par:

$$\varphi(U_I) = -\frac{1}{\Delta^2} \sum_J \Phi(U_{IJ}, U_{JI}, \vec{\Delta}_{IJ}) \quad (57)$$

Ainsi, le schéma s'écrit en 2 étapes comme:

$$U_I^{n+1/2} = U_I^n + \frac{\Delta t}{2} \varphi(U_I^n) \quad (58)$$

Soit, en exploitant la linéarité de φ et en considérant 2 itérations (58):

$$U_I^{n+1} = U_I^n + \Delta t \varphi(U_I^n) + \frac{\Delta t^2}{4} \varphi \circ \varphi(U_I^n) \quad (59)$$

De (59), conformément à (4), il vient:

$$\boxed{\Psi = \varphi + \frac{\Delta t}{4} \varphi \circ \varphi} \quad (60)$$

avec:

$$\varphi(U_I^n) = -\frac{1}{16\Delta^4} \{$$

Pour obtenir l'ordre 4 en temps, une méthode de Runge Kutta d'ordre 4 est utilisée.

$$\begin{aligned}
U_I^{n+1} = U_I^n + \frac{\Delta t}{6} \{ & \varphi(U_I^n) \\
& + 2\varphi(U_I^n + \frac{\Delta t}{2}\varphi(U_I^n)) \\
& + 2\varphi(U_I^n + \frac{\Delta t}{2}\varphi(U_I^n + \frac{\Delta t}{2}\varphi(U_I^n))) \\
& + \varphi(U_I^n + \Delta t\varphi(U_I^n + \frac{\Delta t}{2}\varphi(U_I^n + \frac{\Delta t}{2}\varphi(U_I^n)))) \} \quad (65)
\end{aligned}$$

En exploitant la linéarité de φ , (65) donne:

$$\begin{aligned}
U_I^{n+1} = U_I^n & + \Delta t\varphi(U_I^n) \\
& + \frac{\Delta t^2}{2}\varphi \circ \varphi(U_I^n) \\
& + \frac{\Delta t^3}{6}\varphi \circ \varphi \circ \varphi(U_I^n) \\
& + \frac{\Delta t^4}{24}\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi(U_I^n) \quad (66)
\end{aligned}$$

Par analogie avec (4), de (66) vient:

$$\boxed{\Psi = \varphi + \frac{\Delta t}{2}\varphi^{\circ 2} + \frac{\Delta t^2}{6}\varphi^{\circ 3} + \frac{\Delta t^3}{24}\varphi^{\circ 4}} \quad (67)$$

où $\varphi^{\circ i}$ est la composée de φ avec elle même i fois.

Donnons maintenant l'expression de $\varphi(U_I^n)$ pour les différentes géométries envisagées avec les notations vues dans (5):

- **SAPPHO-Q** (maillage quadrangulaire).

$$\varphi(U_I^n) = -\frac{1}{4\Delta^2} \{$$

$$\begin{aligned}
& U_{j,k+2}^n \quad (\quad \quad \quad -\beta\chi_2 \quad \quad \quad +\beta\gamma|\chi_2|) \\
& +U_{j,k+1}^n \quad (\quad \quad \quad 2(1+\beta)\chi_2 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|\chi_2|) \\
& +U_{j-2,k}^n \quad (\quad \quad \quad \beta\chi_1 \quad \quad \quad +\beta\gamma|\chi_1|) \\
& +U_{j-1,k}^n \quad (-2(1+\beta)\chi_1 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|\chi_1|) \\
& +U_{j,k}^n \quad (\quad \quad \quad 6\beta\gamma|\chi_1| \quad +6\beta\gamma|\chi_2|) \\
& +U_{j+1,k}^n \quad (2(1+\beta)\chi_1 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|\chi_1|) \\
& +U_{j+2,k}^n \quad (\quad \quad \quad -\beta\chi_1 \quad \quad \quad +\beta\gamma|\chi_1|) \\
& +U_{j,k-1}^n \quad (\quad \quad \quad -2(1+\beta)\chi_2 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|\chi_2|) \\
& +U_{j,k-2}^n \quad (\quad \quad \quad \beta\chi_2 \quad \quad \quad +\beta\gamma|\chi_2|)
\end{aligned} \tag{68}$$

}

- SAPPHO-T (maillage triangulaire).

$$\varphi(U_I^n) = -\frac{1}{12\Delta^2} \{$$

$$\begin{aligned}
& U_{j,k+2}^n \quad (\quad -2\beta\chi_2 \quad +\beta\chi_1 \quad \quad \quad +\beta\gamma|2\chi_2 - \chi_1|) \\
& +U_{j+2,k+2}^n \quad (\quad -\beta\chi_2 \quad -\beta\chi_1 \quad \beta\gamma|\chi_2 + \chi_1|) \\
& +U_{j,k+1}^n \quad (4(1+\beta)\chi_2 \quad -2(1+\beta)\chi_1 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|2\chi_2 - \chi_1|) \\
& +U_{j+1,k+1}^n \quad (2(1+\beta)\chi_2 \quad +2(1+\beta)\chi_1 \quad -4\beta\gamma|\chi_2 + \chi_1|) \\
& +U_{j-2,k}^n \quad (\quad -\beta\chi_2 \quad +2\beta\chi_1 \quad \quad \quad +\beta\gamma|\chi_2 - 2\chi_1|) \\
& +U_{j-1,k}^n \quad (2(1+\beta)\chi_2 \quad -4(1+\beta)\chi_1 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|\chi_2 - 2\chi_1|) \\
& +U_{j,k}^n \quad (\quad \quad \quad 6\beta\gamma|\chi_2 + \chi_1| \quad +6\beta\gamma|2\chi_2 - \chi_1| \quad +6\beta\gamma|\chi_2 - 2\chi_1|) \\
& +U_{j+1,k}^n \quad (-2(1+\beta)\chi_2 \quad +4(1+\beta)\chi_1 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|\chi_2 - 2\chi_1|) \\
& +U_{j+2,k}^n \quad (\quad \beta\chi_2 \quad -2\beta\chi_1 \quad \quad \quad +\beta\gamma|\chi_2 - 2\chi_1|) \\
& +U_{j-1,k-1}^n \quad (-2(1+\beta)\chi_2 \quad -2(1+\beta)\chi_1 \quad -4\beta\gamma|\chi_2 + \chi_1|) \\
& +U_{j,k-1}^n \quad (-4(1+\beta)\chi_2 \quad +2(1+\beta)\chi_1 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|2\chi_2 - \chi_1|) \\
& +U_{j-2,k-2}^n \quad (\quad \beta\chi_2 \quad +\beta\chi_1 \quad +\beta\gamma|\chi_2 + \chi_1|) \\
& +U_{j,k-2}^n \quad (\quad 2\beta\chi_2 \quad -\beta\chi_1 \quad \quad \quad +\beta\gamma|2\chi_2 - \chi_1|)
\end{aligned} \tag{69}$$

}

3 LA STABILITE DES SCHEMAS

L'étude de stabilité des schémas numériques présentés dans le paragraphe précédent se fera de manière numérique. En effet, les expressions de Ψ sont trop lourdes pour imaginer une résolution analytique aisée.

Pour l'étude de la stabilité, nous écrivons $U(x = (j+l)\Delta, y = (k+m)\Delta, t = (n+o)\Delta t)$ soit $U_{j+l,k+m}^{n+o}$ comme un mode quelconque de Fourier (ξ_x, ξ_y) référencé par rapport à $U(x = j\Delta, y = k\Delta, t = n\Delta t)$ soit $U_{j,k}^n$ de la manière suivante:

$$U_{j+l,k+m}^{n+o} = G^o(\xi_x, \xi_y) e^{i\Delta(l\xi_x + m\xi_y)} U_{j,k}^n \quad \text{avec } i^2 = -1 \tag{70}$$

(70) amène la fonction complexe G appelée facteur d'amplification ou fonction gain qui est dépendante du mode de Fourier (ξ_x, ξ_y) considéré mais aussi de toutes les autres variables: c (vitesse advection), Δ (cote du maillage), Δt (pas de temps), θ (direction de l'advection) et éventuellement même de β et γ (les paramètres des codes SAPPHO). Nous trouverons avantageux de poser:

$$\xi_1 = \Delta\xi_x \text{ et } \xi_2 = \Delta\xi_y.$$

Du fait que $\Psi(U_I^n)$ est une composition finie et linéaire de valeurs $U_{j+l, k+m}^n$:

$$\Psi(U_I^n) = \sum_{l,m} A_{l,m} U_{j+l, k+m}^n \quad (71)$$

De (4) et de (71) en utilisant (70), G est définie par:

$$G(\xi_1, \xi_2) = 1 + \Delta t \sum_{l,m} A_{l,m} e^{i(l\xi_1 + m\xi_2)} \quad (72)$$

où les A sont des fonctions indépendantes de ξ_x et ξ_y mais dépendante de toutes les autres variables: c , Δ , Δt , θ et éventuellement même de β et γ .

Il y a stabilité au sens de von Neumann, si quelque soit le mode de Fourier envisagé, il n'y a pas amplification de ce mode au cours du temps. Ce qui s'écrit:

$$\|G(\xi_1, \xi_2)\| \leq 1 \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \quad (73)$$

(73) donne en utilisant (72) une condition portant sur les variables c , Δ , Δt , θ voire β et γ qu'il faut remplir pour tous les ξ_x et ξ_y . Il est procédé à ce niveau au changement de la variable Δt par ν , appelé CFL, défini par l'expression:

$$\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta} \quad (74)$$

L'introduction de ν à l'avantage de transformer la condition obtenue en une condition ne portant plus que sur les variables ν et θ (les paramètres β et γ seront fixés). Cette dernière doit toujours être vérifiée pour tous les ξ_1 et ξ_2 .

Pour chacun des schémas, nous allons déterminer ν en fonction de θ de manière à avoir la condition limite de (73) soit:

$$\|G(\xi_1, \xi_2)\| = 1 \quad \forall (\xi_x, \xi_y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \quad (75)$$

$\nu(\theta)$ sera visualisé dans une représentation polaire et la courbe fermée ainsi décrite séparera le plan en 2 zones. Celle contenant l'origine, correspondra à la zone de stabilité, c'est-à-dire que pour tout ν pris dans cette zone, mesuré par sa distance à l'origine sous une inclinaison θ , donnera un comportement stable du schéma pour ce θ . Pour un ν choisi à l'extérieur de cette zone, le schéma sera instable.

Rappel

La base de temps Δt prise correspond à un calcul en 4 étapes pour pouvoir comparer tous les schémas. ν est donc référencé par rapport à ce pas de temps qui correspond habituellement, pour bon nombre de schémas à 2 itérations.

3.1 CERMICS

L'estimation du facteur d'amplification G passe d'abord par l'estimation de la fonction complexe g issue du produit $\Delta t\varphi$. Elle sera écrite sous la forme:

$$g = g_r + ig_i \quad (76)$$

et sera obtenue en utilisant la décomposition en modes de Fourier (70) à partir de l'expression (22) ou (23).

G aura alors pour expression en utilisant (21), (72) et (76):

$$\begin{aligned} G &= 1 + g + \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{8}g^3 + \frac{1}{64}g^4 \\ &= \frac{1}{64}(8 + 4g_r - 4g_i + g_r^2 - 2g_r g_i - g_i^2)(8 + 4g_r + 4g_i + g_r^2 + 2g_r g_i - g_i^2) \\ &\quad + i \left\{ \frac{1}{16}g_i(2 + g_r)(8 + 4g_r + g_r^2 - g_i^2) \right\} \end{aligned} \quad (77)$$

- **RK2-Q** (maillage quadrangulaire).

$$\begin{aligned} g_r &= -\frac{\nu}{2} \left\{ |\cos \theta| (1 - \cos \xi_1)^2 + |\sin \theta| (1 - \cos \xi_2)^2 \right\} \\ g_i &= \frac{\nu}{2} \left\{ \cos \theta \sin \xi_1 (\cos \xi_1 - 3) + \sin \theta \sin \xi_2 (\cos \xi_2 - 3) \right\} \end{aligned} \quad (78)$$

- **RK2-T** (maillage triangulaire).

$$\begin{aligned} g_r &= -\frac{\nu}{36} \left\{ 10(|z| + |z_1| + |z_2|) \right. \\ &\quad - (|z| + |z_1| + 12|z_2|) \cos \xi_1 - (|z| + 12|z_1| + |z_2|) \cos \xi_2 \\ &\quad + 2|z_2| \cos 2\xi_1 + 2|z_1| \cos 2\xi_2 \\ &\quad - (12|z| + |z_1| + |z_2|) \cos(\xi_1 + \xi_2) + (|z_1| + |z_2|) \cos(\xi_1 - \xi_2) \\ &\quad + (|z| + |z_2|) \cos(2\xi_1 + \xi_2) + (|z| + |z_1|) \cos(\xi_1 + 2\xi_2) \\ &\quad \left. + 2|z| \cos 2(\xi_1 + \xi_2) \right\} \\ g_i &= \frac{\nu}{36} \left\{ \right. \\ &\quad + 19z_2 \sin \xi_1 - 19z_1 \sin \xi_2 \\ &\quad - 2z_2 \sin 2\xi_1 + 2z_1 \sin 2\xi_2 \\ &\quad - 19z \sin(\xi_1 + \xi_2) - (z_1 + z_2) \sin(\xi_1 - \xi_2) \\ &\quad + 3 \cos \theta \sin(2\xi_1 + \xi_2) + 3 \sin \theta \sin(\xi_1 + 2\xi_2) \\ &\quad \left. + 2z \sin 2(\xi_1 + \xi_2) \right\} \\ \text{avec:} \quad & z = \sin \theta + \cos \theta, \quad z_1 = 2 \sin \theta - \cos \theta, \quad z_2 = \sin \theta - 2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (79)$$

3.2 ONERA

L'estimation du facteur d'amplification G passe d'abord par l'estimation des fonctions complexes g , g_1 , g_2 issue respectivement des produits $\Delta t\varphi$, $\Delta t\varphi_1$ et $\Delta t\varphi_2$. Elles seront écrites sous la forme:

$$\begin{aligned} g &= g_r + ig_i \\ g_1 &= g_{r1} + ig_{i1} \\ g_2 &= g_{r2} + ig_{i2} \end{aligned} \quad (80)$$

et elles seront obtenues en utilisant la décomposition en modes de Fourier (70) à partir des expressions respectives (45), (46) et (47).

G aura alors pour expression en utilisant (44), (72) et (80):

$$\begin{aligned} G &= 1 + g + \frac{1}{4}(g^2 + g_1 + g_2) + \frac{1}{8}g(g_1 + g_2) + \frac{1}{16}g_1g_2 \\ &= \frac{1}{16} \{ 16 + 4(g_{r1} + g_{r2}) + g_{r1}g_{r2} - g_{i1}g_{i2} + 4(g_r + g_i)(g_r - g_i) \\ &\quad + 2g_r(8 + g_{r1} + g_{r2}) - 2g_i(g_{i1} + g_{i2}) \} \\ &\quad + \frac{i}{16} \{ 2(g_r + 2)(4g_i + g_{i1} + g_{i2}) + 2g_i(g_{r1} + g_{r2}) + g_{r1}g_{i2} + g_{r2}g_{i1} \} \end{aligned} \quad (81)$$

avec:

$$\begin{aligned} g_r &= 0 \\ g_i &= -\nu(\cos \theta \sin \xi_1 + \sin \theta \sin \xi_2) \\ g_{r1} &= \frac{\nu^2}{2} \{ 2(-1 + \cos^2 \theta \cos \xi_1 + \sin^2 \theta \cos \xi_2) + \sin 2\theta(-1 + \cos \xi_1 + \cos \xi_2 - \cos(\xi_1 - \xi_2)) \} \\ g_{i1} &= 0 \\ g_{r2} &= \frac{\nu^2}{2} \{ 2(-1 + \cos^2 \theta \cos \xi_1 + \sin^2 \theta \cos \xi_2) + \sin 2\theta(1 - \cos \xi_1 - \cos \xi_2 + \cos(\xi_1 + \xi_2)) \} \\ g_{i2} &= 0. \end{aligned} \quad (82)$$

En utilisant le fait que g_r , g_{i1} et g_{i2} ont des valeurs nulles, (81) se simplifie comme suit:

$$G = \left\{ 1 + \frac{(-g_i^2 + g_{r1} + g_{r2})}{4} + \frac{g_{r1}g_{r2}}{16} \right\} + i \left\{ g_i + \frac{g_i(g_{r1} + g_{r2})}{8} \right\}. \quad (83)$$

3.3 SNPE

L'estimation du facteur d'amplification G passe d'abord par l'estimation des fonctions complexes g_1 , g_2 issue respectivement des produits $\Delta t\varphi_1$ et $\Delta t\varphi_2$. Elles seront écrites sous la forme:

$$\begin{aligned} g_1 &= g_{r1} + ig_{i1} \\ g_2 &= g_{r2} + ig_{i2} \end{aligned} \quad (84)$$

et elles seront obtenues en utilisant la décomposition en modes de Fourier (70) à partir des expressions respectives (53) et (54).

G aura alors pour expression en utilisant (52), (72) et (84):

$$\begin{aligned} G &= 1 + g_2 + \frac{g_2(g_1 + g_2)}{4} + \frac{g_1 g_2^2}{8} + \frac{(g_1 g_2)^2}{64} \\ &= -\frac{1}{64} \{z1 + z2\} \{z1 - z2\} + \frac{i}{32} \{z1 z2\} \\ \text{où: } \quad z1 &= g_{i2}z + g_{r2}g_{i1}, \quad z2 = g_{r2}z - g_{i1}g_{i2} + 8 \text{ et } z = g_{r1} + 4 \end{aligned} \quad (85)$$

avec:

$$\begin{aligned} g_{r1} &= \nu \{ |\cos \theta| (\cos \xi_1 - 1) + |\sin \theta| (\cos \xi_2 - 1) \} \\ g_{i1} &= -\nu \{ \cos \theta \sin \xi_1 + \sin \theta \sin \xi_2 \} \\ g_{r2} &= -\frac{\nu}{2} \{ |\cos \theta| (1 - \cos \xi_1)^2 + |\sin \theta| (1 - \cos \xi_2)^2 \} \\ g_{i2} &= \frac{\nu}{2} \{ \cos \theta \sin \xi_1 (\cos \xi_1 - 3) + \sin \theta \sin \xi_2 (\cos \xi_2 - 3) \} \end{aligned} \quad (86)$$

3.4 BERTIN & Cie

L'estimation du facteur d'amplification G passe d'abord par l'estimation de la fonction complexe g issue du produit $\Delta t \varphi$. Elle sera écrite sous la forme:

$$g = g_r + i g_i \quad (87)$$

$$(88)$$

et elle sera obtenue en utilisant la décomposition en modes de Fourier (70) à partir de l'expression (61).

G aura alors pour expression en utilisant (60), (72) et (87):

$$\begin{aligned} G &= 1 + g + \frac{g^2}{4} \\ &= \left\{ \frac{1}{4} (2 + g_r + g_i)(2 + g_r - g_i) \right\} + i \left\{ \frac{1}{2} g_i (2 + g_r) \right\} \end{aligned} \quad (89)$$

avec:

$$\begin{aligned} g_r &= -\frac{\nu^2}{4} (\cos \theta \sin \xi_1 + \sin \theta \sin \xi_2)^2 - \frac{\nu}{2} (|\cos \theta| (1 - \cos \xi_1)^2 + |\sin \theta| (1 - \cos \xi_2)^2) \\ g_i &= \frac{\nu^2}{4} \{ (\sin \theta \sin \xi_2 + \cos \theta \sin \xi_1) (|\cos \theta| (1 - \cos \xi_1) + |\sin \theta| (1 - \cos \xi_2)) \} \\ &+ \frac{\nu}{2} \{ \cos \theta \sin \xi_1 (-3 + \cos \xi_1) + \sin \theta \sin \xi_2 (-3 + \cos \xi_2) \}. \end{aligned} \quad (90)$$

3.5 CNES/INRIA

L'estimation du facteur d'amplification G passe d'abord par l'estimation de la fonction complexe g issue du produit $\Delta t\varphi$. Elle sera écrite sous la forme:

$$g = g_r + ig_i \quad (91)$$

$$(92)$$

et elle sera obtenue en utilisant la décomposition en modes de Fourier (70) à partir de l'expression (68) en quadrangles ou (69) en triangles..

G aura alors pour expression en utilisant (67), (72) et (87):

$$\begin{aligned} G &= 1 + g + \frac{g^2}{2} + \frac{g^3}{6} + \frac{g^4}{24} \\ &= \left\{ 1 + g_r + \frac{1}{2}(g_r^2 - g_i^2) + \frac{g_r}{6}(g_r^2 - 3g_i^2) + \frac{1}{24}(g_r^4 - 6g_r^2g_i^2 + g_i^4) \right\} \\ &\quad + i \left\{ \frac{g_i}{6}(6 + 6g_r + 3g_r^2 - g_i^2 + g_r(g_r^2 - g_i^2)) \right\} \end{aligned} \quad (93)$$

avec:

- **SAPPHO-Q** (maillage quadrangulaire)

$$\begin{aligned} g_r &= -\beta\gamma\nu \left\{ |\cos\theta|(1 - \cos\xi_1)^2 + |\sin\theta|(1 - \cos\xi_2)^2 \right\} \\ g_i &= -\nu \left\{ \cos\theta \sin\xi_1(1 + \beta(1 - \cos\xi_1)) + \sin\theta \sin\xi_2(1 + \beta(1 - \cos\xi_2)) \right\} \end{aligned} \quad (94)$$

- **SAPPHO-T** (maillage triangulaire)

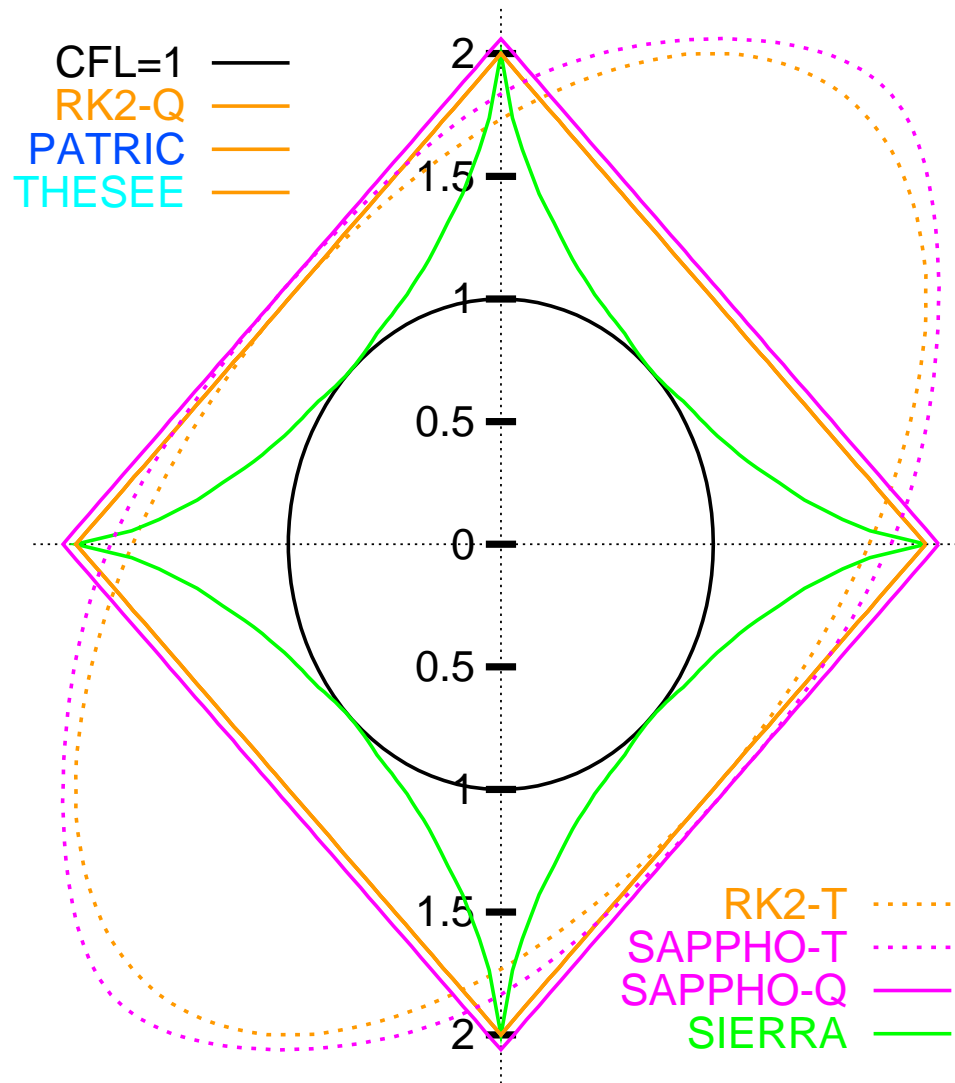
$$\begin{aligned} g_r &= -\frac{\beta\gamma\nu}{3} \left\{ |2\cos\theta - \sin\theta|(1 - \cos\xi_1)^2 + |\cos\theta - 2\sin\theta|(1 - \cos\xi_2)^2 \right. \\ &\quad \left. + |\cos\theta + \sin\theta|(1 - \cos(\xi_1 + \xi_2))^2 \right\} \\ g_i &= -\frac{\nu}{3} \left\{ (\cos\theta + \sin\theta) \sin(\xi_1 + \xi_2)(1 + \beta(1 - \cos(\xi_1 + \xi_2))) \right. \\ &\quad \left. + (2\cos\theta - \sin\theta) \sin\xi_1(1 + \beta(1 - \cos\xi_1)) \right. \\ &\quad \left. + (2\sin\theta - \cos\theta) \sin\xi_2(1 + \beta(1 - \cos\xi_2)) \right\}. \end{aligned} \quad (95)$$

3.6 Résultats

Nous représentons en fonction de θ et de manière polaire, conformément aux propos tenus lors de l'introduction de ce paragraphe, la zone de stabilité pour chaque schéma en résolvant numériquement (75) avec une précision au 100^{ième} pour le CFL (ν).

Le pas de temps Δt permet un calcul en 4 étapes. Cette référence de temps est nécessaire pour comparer tous les schémas mais ne reflète pas toujours la valeur de ν mise dans les codes numériques (en particulier pour ceux qui ont un cycle en seulement 2 étapes estimé ici en 2 fois 2 étapes).

REPRESENTATION POLAIRE DU CFL (THETA)



La valeur maximale ν_{max} de ν pour tous les schémas et pour tous les angles θ en vue de la stabilité est:

$$\boxed{\nu \leq \nu_{max} = 1} \quad (96)$$

Cette limitation provient du code SIERRA. Viennent ensuite et sur un plan d'égalité les codes: RK2-Q, PATRIC et THESEE. Puis, le code SAPPHO-Q avec $\beta = \frac{1}{3}$ et $\gamma = 0$ présente la plus grande zone de stabilité. Les angles θ de moindre stabilité pour tous ces schémas à maillage quadrangulaire s'obtiennent pour les bissectrices principales.

Les codes RK2-T et SAPPHO-T opérant sur des maillages triangulaires (hypothénuse selon la première bissectrice) observent toujours la propriété de symétrie centrale mais perdent les symétries axiales par rapport aux axes x et y . Les limitations de ν sont données dans la direction de la seconde bissectrice. Dans cette direction, ces limitations de ν pour RK2-T et SAPPHO-T correspondent respectivement aux limitations de RK2-Q et SAPPHO-Q par une situation de courbes tangentes entre elles.

4 EQUATIONS EQUIVALENTES [10]

Un schéma numérique ne résout jamais parfaitement bien le modèle que l'on considère. En réalité, il va résoudre le problème suivant:

$$U_t + c \cos \theta U_x + c \sin \theta U_y = c \sum_{j,k \in \mathbb{N}^* - \{1\}} \alpha_{j,k} U_{jx,ky} \quad (97)$$

où les $\alpha_{j,k}$ sont des coefficients réels dépendant de Δ qui tendent vers 0 lorsque Δ tend vers 0 si nous avons *consistance* du schéma au modèle.

La présence de ces termes influent sur le mode de Fourier (ξ_x, ξ_y) initial (2) en modifiant la solution exacte $U_e(t)$ (3) au cours du temps t en $U_c(t)$:

$$U_c(t) = \mathcal{G} A \cos \{ \xi_x x + \xi_y y - ct(\xi_x \cos \theta + \xi_y \sin \theta + \mathcal{P}) \} \quad (98)$$

$$\text{avec } \mathcal{G} = e^{ct \left\{ \sum_{j+k \text{ pair} - \{0\}} (-1)^{\frac{j+k}{2}} (\xi_x)^j (\xi_y)^k \alpha_{j,k} \right\}} \quad (99)$$

$$\text{et } \mathcal{P} = \sum_{j+k \text{ impair} - \{1\}} (-1)^{\frac{j+k+1}{2}} (\xi_x)^j (\xi_y)^k \alpha_{j,k} \quad (100)$$

Deux altérations distinctes apparaissent entre les expressions de $U_e(t)$ (3) et $U_c(t)$ (98):

- la dissipation qui modifie l'amplitude A par le facteur \mathcal{G} donné dans (99) ($j+k$ est pair),
- la dispersion qui modifie la phase du mode par l'ajout d'un terme \mathcal{P} facteur du temps donné dans (100) ($j+k$ est impair).

Le but de ce paragraphe n'est pas de donner l'erreur dispersive et dissipative totale de chaque schéma, mais en regardant les équations équivalentes tronquées, nous pouvons évaluer:

- la consistance du schéma, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun $\alpha_{j,k}$ d'ordre Δ^0 ,
- l'ordre du schéma qui est la puissance en Δ du premier $\alpha_{j,k}$ non nul,
- les valeurs à donner aux paramètres β , γ et éventuellement ν (sous la condition (96)) pour augmenter l'ordre du schéma ou des schémas concernés,

- les erreurs approchées pour des modes de Fourier très bien discrétisés par le maillage, c'est-à-dire vérifiant les conditions:

$$\xi_x \ll \frac{1}{\Delta} \text{ et } \xi_y \ll \frac{1}{\Delta} \quad (101)$$

issues des relations (99) ou (100) en préservant l'ordre de l'erreur tronquée avec j et k croissant.

La suite de ce paragraphe consiste en une revue des équations équivalentes jusqu'à l'ordre 4 en Δ avec une distinction des termes contribuant à l'effet dispersif (ordre Δ^2) et dissipatif (ordre Δ^3). Nous concluerons sur les 3 premiers points ci-dessus exposés et traiterons l'erreur approchée en fonction de θ dans le paragraphe à venir.

4.1 CERMICS

RK2-Q	
TERMES EN Δ^2 (Dispersion)	
$\alpha_{j,k}$	Valeur
$\alpha_{3,0}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} \cos \theta (2 + \nu^2 \cos^2 \theta)$
$\alpha_{2,1}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} 3\nu^2 \cos^2 \theta \sin \theta$
$\alpha_{1,2}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} 3\nu^2 \cos \theta \sin^2 \theta$
$\alpha_{0,3}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} \sin \theta (2 + \nu^2 \sin^2 \theta)$

RK2-Q	
TERMES EN Δ^3 (Dissipation)	
$\alpha_{j,k}$	Valeur
$\alpha_{4,0}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} (-8 \cos \theta + \nu^3 \cos^4 \theta)$
$\alpha_{3,1}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} 4\nu^3 \cos^3 \theta \sin \theta$
$\alpha_{2,2}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} 6\nu^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$
$\alpha_{1,3}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} 4\nu^3 \cos \theta \sin^3 \theta$
$\alpha_{0,4}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} (-8 \sin \theta + \nu^3 \sin^4 \theta)$

Il n'existe pas de valeur de ν qui soit capable même pour un angle θ donné, d'augmenter l'ordre du schéma. Cette remarque est valable aussi bien pour le code "RK2-Q" que pour le

code "RK2-T" dont les $\alpha_{j,k}$ d'ordre 2 et 3 sont donnés ci-dessous.

RK2-T	
TERMES EN Δ^2 (Dispersion)	
$\alpha_{j,k}$	Valeur
$\alpha_{3,0}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} \cos \theta (2 + \nu^2 \cos^2 \theta)$
$\alpha_{2,1}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} \{2(\cos \theta + \sin \theta) + 3\nu^2 \cos^2 \theta \sin \theta\}$
$\alpha_{1,2}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} \{2(\cos \theta + \sin \theta) + 3\nu^2 \cos \theta \sin^2 \theta\}$
$\alpha_{0,3}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} \sin \theta (2 + \nu^2 \sin^2 \theta)$

RK2-T	
TERMES EN Δ^3 (Dissipation)	
$\alpha_{j,k}$	Valeur
$\alpha_{4,0}$	$\frac{\Delta^3}{2^6 3^2} \{-24(\cos \theta + \sin \theta + 2 \cos \theta - \sin \theta) + 9\nu^3 \cos^4 \theta\}$
$\alpha_{3,1}$	$\frac{\Delta^3}{2^6 3^2} \{-16(5 \cos \theta + \sin \theta + 2 \cos \theta - \sin \theta) + 36\nu^3 \cos^3 \theta \sin \theta\}$
$\alpha_{2,2}$	$\frac{\Delta^3}{2^6 3^2} \{-16(7 \cos \theta + \sin \theta + 2 \cos \theta - \sin \theta + \cos \theta - 2 \sin \theta) + 54\nu^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta\}$
$\alpha_{1,3}$	$\frac{\Delta^3}{2^6 3^2} \{-16(5 \cos \theta + \sin \theta + \cos \theta - 2 \sin \theta) + 36\nu^3 \cos \theta \sin^3 \theta\}$
$\alpha_{0,4}$	$\frac{\Delta^3}{2^6 3^2} \{-24(\cos \theta + \sin \theta + \cos \theta - 2 \sin \theta) + 9\nu^3 \sin^4 \theta\}$

4.2 ONERA

SIERRA TERMES EN Δ^2 (Dispersion)		SIERRA TERMES EN Δ^3 (Dissipation)	
$\alpha_{j,k}$	Valeur	$\alpha_{j,k}$	Valeur
$\alpha_{3,0}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} \cos \theta (-4 + \nu^2 \cos^2 \theta)$	$\alpha_{4,0}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} \nu \cos^2 \theta (-4 + \nu^2 \cos^2 \theta)$
$\alpha_{2,1}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} 3\nu^2 \cos^2 \theta \sin \theta$	$\alpha_{3,1}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} 4\nu^3 \cos^3 \theta \sin \theta$
$\alpha_{1,2}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} 3\nu^2 \cos \theta \sin^2 \theta$	$\alpha_{2,2}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} 6\nu^3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$
$\alpha_{0,3}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} \sin \theta (-4 + \nu^2 \sin^2 \theta)$	$\alpha_{1,3}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} 4\nu^3 \cos \theta \sin^3 \theta$
		$\alpha_{0,4}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} \nu \sin^2 \theta (-4 + \nu^2 \sin^2 \theta)$

Pour les angles $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ ou $\frac{3\pi}{2}$, prendre $\nu = 2$ permet d'obtenir un schéma précis jusqu'à l'ordre 4. Reste qu'une telle valeur de ν n'autorise pas une stabilité du schéma pour tous les θ et ne peut donc pas être envisagée.

4.3 SNPE

PATRIC	
TERMES EN Δ^2 (Dispersion)	
$\alpha_{j,k}$	Valeur
$\alpha_{3,0}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} \cos \theta (2 - 3\nu \cos \theta + \nu^2 \cos^2 \theta)$
$\alpha_{2,1}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} 3\nu \sin \theta (- \cos \theta + \nu \cos^2 \theta)$
$\alpha_{1,2}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} 3\nu \cos \theta (- \sin \theta + \nu \sin^2 \theta)$
$\alpha_{0,3}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} \sin \theta (2 - 3\nu \sin \theta + \nu^2 \sin^2 \theta)$

PATRIC	
TERMES EN Δ^3 (Dissipation)	
$\alpha_{j,k}$	Valeur
$\alpha_{4,0}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} (-8 \cos \theta + 4\nu \cos^2 \theta - 4\nu^2 \cos \theta \cos^2 \theta + \nu^3 \cos^4 \theta)$
$\alpha_{3,1}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} \nu \cos \theta \sin \theta (4 - 8\nu \cos \theta + 4\nu^2 \cos^2 \theta)$
$\alpha_{2,2}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} \nu^2 (-4 \cos \theta \sin^2 \theta - 4 \sin \theta \cos^2 \theta + 6\nu \cos^2 \theta \sin^2 \theta)$
$\alpha_{1,3}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} \nu \cos \theta \sin \theta (4 - 8\nu \sin \theta + 4\nu^2 \sin^2 \theta)$
$\alpha_{0,4}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} (-8 \sin \theta + 4\nu \sin^2 \theta - 4\nu^2 \sin \theta \sin^2 \theta + \nu^3 \sin^4 \theta)$

Pour les angles $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ où $\frac{3\pi}{2}$, prendre $\nu = 1$ permet d'obtenir un schéma précis jusqu'à l'ordre 3. De plus, le choix de cette valeur de $\nu = \nu_{max}$ laisse ce schéma stable pour tout autre θ et est, par ailleurs, une valeur acceptable pour tous les autres schémas.

4.4 BERTIN & Cie

THESEE	
TERMES EN Δ^2 (Dispersion)	
$\alpha_{j,k}$	Valeur
$\alpha_{3,0}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} \cos \theta (2 - 3\nu \cos \theta + \nu^2 \cos^2 \theta)$
$\alpha_{2,1}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} 3\nu \sin \theta (- \cos \theta + \nu \cos^2 \theta)$
$\alpha_{1,2}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} 3\nu \cos \theta (- \sin \theta + \nu \sin^2 \theta)$
$\alpha_{0,3}$	$\frac{\Delta^2}{2^3 3} \sin \theta (2 - 3\nu \sin \theta + \nu^2 \sin^2 \theta)$

THESEE	
TERMES EN Δ^3 (Dissipation)	
$\alpha_{j,k}$	Valeur
$\alpha_{4,0}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} (-8 \cos \theta + 8\nu \cos^2 \theta - 4\nu^2 \cos \theta \cos^2 \theta + \nu^3 \cos^4 \theta)$
$\alpha_{3,1}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} \nu \cos \theta \sin \theta (8 - 8\nu \cos \theta + 4\nu^2 \cos^2 \theta)$
$\alpha_{2,2}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} \nu^2 (-4 \cos \theta \sin^2 \theta - 4 \sin \theta \cos^2 \theta + 6\nu \cos^2 \theta \sin^2 \theta)$
$\alpha_{1,3}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} \nu \cos \theta \sin \theta (8 - 8\nu \sin \theta + 4\nu^2 \sin^2 \theta)$
$\alpha_{0,4}$	$\frac{\Delta^3}{2^6} (-8 \sin \theta + 8\nu \sin^2 \theta - 4\nu^2 \sin \theta \sin^2 \theta + \nu^3 \sin^4 \theta)$

Ici encore, pour les angles $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ où $\frac{3\pi}{2}$, prendre $\nu = 1$ permet d'obtenir un schéma précis jusqu'à l'ordre 3.

4.5 CNES/INRIA

SAPPHO-Q TERMES EN Δ^2 (Dispersion)		SAPPHO-Q TERMES EN Δ^3 (Dissipation)	
$\alpha_{j,k}$	Valeur	$\alpha_{j,k}$	Valeur
$\alpha_{3,0}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)} \cos \theta(3\beta - 1)$	$\alpha_{4,0}$	$\frac{\Delta^3}{2^2} (-\beta\gamma \cos \theta)$
$\alpha_{2,1}$	0	$\alpha_{3,1}$	0
$\alpha_{1,2}$	0	$\alpha_{2,2}$	0
$\alpha_{0,3}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)} \sin \theta(3\beta - 1)$	$\alpha_{1,3}$	0
		$\alpha_{0,4}$	$\frac{\Delta^3}{2^2} (-\beta\gamma \sin \theta)$

SAPPHO-T TERMES EN Δ^2 (Dispersion)		SAPPHO-T TERMES EN Δ^3 (Dissipation)	
$\alpha_{j,k}$	Valeur	$\alpha_{j,k}$	Valeur
$\alpha_{3,0}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)} \cos \theta(3\beta - 1)$	$\alpha_{4,0}$	$\frac{\Delta^3}{2^2} \beta\gamma(- \cos \theta + \sin \theta - 2 \cos \theta - \sin \theta)$
$\alpha_{2,1}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)} (3\beta - 1)(\cos \theta + \sin \theta)$	$\alpha_{3,1}$	$\frac{\Delta^3}{2^2 3} (-4\beta\gamma \cos \theta + \sin \theta)$
$\alpha_{1,2}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)} (3\beta - 1)(\cos \theta + \sin \theta)$	$\alpha_{2,2}$	$\frac{\Delta^3}{2^2 3} (-6\beta\gamma \cos \theta + \sin \theta)$
$\alpha_{0,3}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)} \sin \theta(3\beta - 1)$	$\alpha_{1,3}$	$\frac{\Delta^3}{2^2 3} (-4\beta\gamma \cos \theta + \sin \theta)$
		$\alpha_{0,4}$	$\frac{\Delta^3}{2^2} \beta\gamma(- \cos \theta + \sin \theta - \cos \theta - 2 \sin \theta)$

Le choix de prendre $\beta = \frac{1}{3}$ et $\gamma = 0$ rend ces schémas précis à l'ordre 4 pour tous θ . Ces valeurs des paramètres (prises pour l'étude de la stabilité) trouvent ici leurs justifications.

4.6 Conclusions

Avec les expressions des équations équivalentes tronquées, nous vérifions donc:

- la consistance de tous les schémas,
- l'ordre 2 de tous les schémas,
- l'ordre 3 des codes PATRIC et THESEE sous conditions:

$$\nu = 1 \text{ et pour } \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

- l'ordre 4 des codes SAPPHO-Q et SAPPHO-T pour le réglage:

$$\beta = \frac{1}{3} \text{ et } \gamma = 0$$

Ceci nous conduit à prendre dans la suite de ce rapport:

$$\boxed{\beta = \frac{1}{3}, \gamma = 0 \text{ et } \nu = \nu_{max} = 1}$$

pour tous les schémas concernés par ces variables.

5 ERREURS APPROCHEES

Nous n'avons un aperçu des erreurs approchées avec les équations équivalentes tronquées que si nous considérons un mode de Fourier très bien discrétisé (101). Dans cette optique, pour simplifier notre comparaison tout en lui préservant son caractère synthétique et général, nous exprimerons un mode de Fourier (ξ_x, ξ_y) en coordonnées polaires (voir figure **FIG.A**):

$$\xi_x = \xi \cos \Omega, \quad \xi_y = \xi \sin \Omega, \quad \text{avec } \xi \ll \frac{1}{\Delta} \quad (102)$$

où Ω est la direction donnée par la normale aux isovaleurs ISO du mode de Fourier considéré et où ξ est le mode de Fourier "1D" aperçu dans la direction Ω définie également par le vecteur unitaire \vec{N}_u . ξ peut s'exprimer en nombre d'onde κ comme en longueur d'onde λ par les relations:

$$\xi = 2\pi\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \kappa \ll \frac{1}{2\pi\Delta} \quad \text{ou} \quad \lambda \gg 2\pi\Delta \quad (103)$$

En conséquence, U_0 s'écrira d'après (2):

$$U_0 = A \cos \xi(x \cos \Omega + y \sin \Omega) \quad (104)$$

5.1 Dispersion d'ordre 2

A cet ordre, \mathcal{P} écrit en (100) à l'expression approchée \mathcal{P}_a suivante:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_a &= \xi_x^3 \alpha_{3,0} + \xi_x^2 \xi_y \alpha_{2,1} + \xi_x \xi_y^2 \alpha_{1,2} + \xi_y^3 \alpha_{0,3} \\ &= \xi_x (\xi_x^2 \alpha_{3,0} + \xi_y^2 \alpha_{1,2}) + \xi_y (\xi_x^2 \alpha_{2,1} + \xi_y^2 \alpha_{0,3})\end{aligned}\quad (105)$$

Pour bien comprendre l'effet dispersif, il est temps d'écrire l'argument du *cosinus* dans (98) d'une manière vectorielle en un point initiale S_i de coordonnées (x, y) :

$$\vec{N} \cdot \{O\vec{S}_i - (\vec{c} + \vec{c}_{3,0} + \vec{c}_{1,2} + \vec{c}_{2,1} + \vec{c}_{0,3})t\} \quad (106)$$

avec:

$$\begin{aligned}\vec{N} &= (\xi_x, \xi_y), \quad O\vec{S}_i = (x, y), \quad \vec{c} = (c \cos \theta, c \sin \theta) \\ \vec{c}_{3,0} &= (c \xi_x^2 \alpha_{3,0}, 0), \quad \vec{c}_{1,2} = (c \xi_y^2 \alpha_{1,2}, 0), \quad \vec{c}_{2,1} = (0, c \xi_x^2 \alpha_{2,1}), \quad \vec{c}_{0,3} = (0, c \xi_y^2 \alpha_{0,3})\end{aligned}$$

L'écriture (106) montre qu'à la vitesse d'advection exacte \vec{c} s'ajoute des vitesses d'advection parasites $\vec{c}_{j,k}$, d'origine numérique. L'interprétation que l'on peut donner au terme entre accolades dans (106) est que la valeur initiale de U_0 au point S_i va se trouver après un temps t non pas au point S_e comme nous le donnerait la solution exacte U_e mais au point S_c donné par la solution calculé U_c comme le présente la figure **(FIG.B)**.

Maintenant, il faut avoir conscience que par le point S_i passe une isovaleur du mode de Fourier U_0 représentée par une droite perpendiculaire à \vec{N}_u . Ceci est la signification du produit scalaire que nous avons dans l'expression (106) stipulant que, lors de l'advection, nous constatons seulement le déplacement de cette isovaleur et non le devenir du point S_i . Ainsi, l'isovaleur ISO_i sera représentée après un temps t par l'isovaleur ISO_e passant par S_e si le calcul avait été exact et va finalement être représentée par l'isovaleur ISO_c passant par S_c dans le cadre du calcul comme le montre la figure **(FIG.C)**.

Cette dernière figure représente donc l'advection bidimensionnelle d'un mode de Fourier ne paraissant se déplacer que d'une distance algébrique D_e mesurée selon la direction de \vec{N}_u et définie par:

$$D_e = \vec{N}_u \cdot \vec{c}t = ct \cos(\theta - \Omega) \quad (107)$$

si le calcul avait été exact et se déplaçant finalement d'une distance algébrique D_c dans le cadre du calcul de valeur:

$$\begin{aligned}D_c &= D_e + D_d \\ \text{où: } D_d &= \vec{N}_u \cdot \{\vec{c} + \vec{c}_{3,0} + \vec{c}_{1,2} + \vec{c}_{2,1} + \vec{c}_{0,3}\} t.\end{aligned}\quad (108)$$

UN MODE DE FOURIER BIDIMENSIONNEL

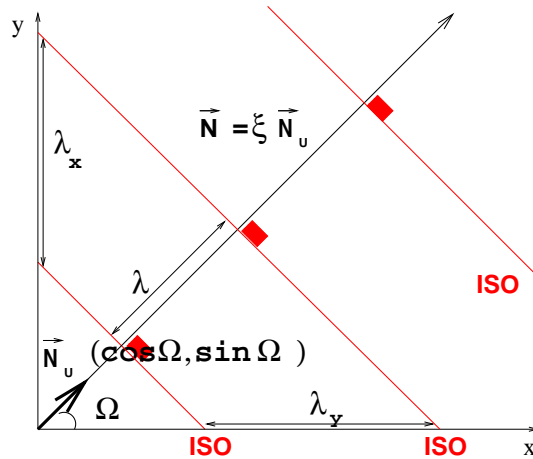


FIG.A

L'ADVECTION BIDIMENSIONNELLE D'UNE VALEUR PONCTUELLE

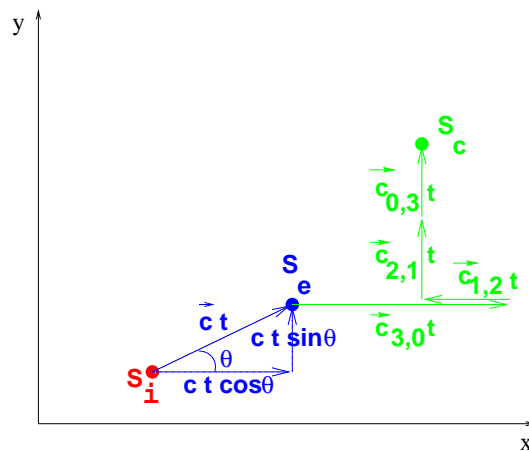


FIG.B

L'ADVECTION BIDIMENSIONNELLE D'UN MODE DE FOURIER

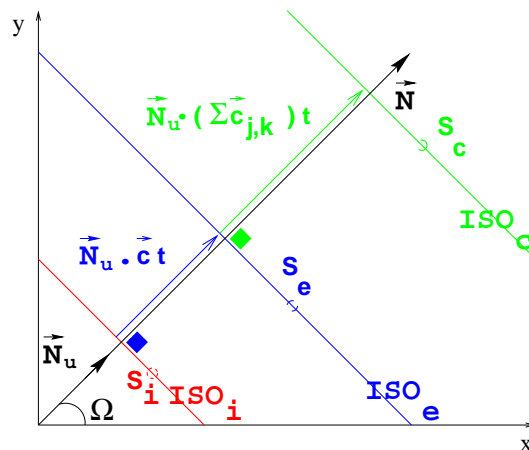


FIG.C

L'erreur de dispersion d'ordre 2 en tant que déplacement est donc portée par D_d de manière algébrique avec un signe en fonction de l'orientation de \vec{N}_u . Nous préférons donner un signe à D_d par rapport au signe de D_e , c'est-à-dire, affecter à D_d un signe positif si avance ou négatif si retard par rapport au déplacement exact D_e . Nous définissons donc D_d^* par l'expression:

$$D_d^* = s D_d \text{ avec } s = \text{signe}[\cos(\Omega - \theta)] \quad (109)$$

(109) donne, en utilisant l'écriture (102):

$$D_d^* = ct\Delta^2 \xi^2 L(\theta, \Omega) \quad \text{avec:} \quad (110)$$

$$L(\theta, \Omega) = s \left\{ \cos^3 \Omega \frac{\alpha_{3,0}}{\Delta^2} + \cos^2 \Omega \sin \Omega \frac{\alpha_{2,1}}{\Delta^2} + \cos \Omega \sin^2 \Omega \frac{\alpha_{1,2}}{\Delta^2} + \sin^3 \Omega \frac{\alpha_{0,3}}{\Delta^2} \right\}$$

De l'écriture (110), nous constatons:

- **pour tous les schémas**, une proportionnalité du déplacement D_d^* qui est due au module de la vitesse d'advection c , c'est-à-dire au modèle; au temps t de l'advection, c'est-à-dire à la durée de l'expérience menée; et à Δ , c'est-à-dire au maillage utilisé.
- **pour tous les schémas**, une proportionnalité du déplacement D_d^* qui est due au mode de Fourier ξ au sens du nombre d'onde κ ou de la longueur d'onde λ choisi pour état initial. Rappelons que ξ doit vérifier (102) pour une estimation de D_d^* correcte soit (103) pour κ ou λ .
- **de manière spécifique à chaque schéma**, une proportionnalité de D_d^* s'exprimant en la fonction $L(\theta, \Omega)$, c'est à dire de la direction d'advection et de l'orientation du mode de Fourier considéré.

En conséquence, si nous comparons nos schémas sur un même modèle (c), sur un même maillage (Δ), au bout d'un même temps t , sur un mode de même longueur d'onde λ , la représentation pour chaque schéma de $L(\theta, \Omega)$ est **proportionnelle** au déplacement D_d^* d'ordre 2 en portant le signe d'avance ou de retard par rapport au déplacement exact D_e d'une isovaleur.

Reste une situation non déterminée qui est le cas où \vec{N}_u est perpendiculaire à la direction θ de l'advection, c'est-à-dire le cas où, le déplacement exact D_e est nul (109) mais où l'erreur ne l'est pas forcément! Ce cas peut laisser apparaître une discontinuité de $L(\theta, \Omega)$ dans la notion d'avance ou de retard selon des droites d'équations dans le plan (θ, Ω) :

$$\Omega = \theta \pm (2l + 1) \frac{\pi}{2}, \quad l \in \mathbb{N}$$

Nous donnons maintenant explicitement les expressions de $L(\theta, \Omega)$ pour chacun des schémas dans le tableau ci-dessous.

$D_d^* = ct\Delta^2 \xi^2 L(\theta, \Omega)$ ERREUR APPROCHÉE DU DÉPLACEMENT	
CODES	Valeur donnée: $L(\theta, \Omega)$
RK2-Q	$\frac{s}{24} \{ \cos^3 \Omega \cos \theta (2 + \cos^2 \theta) + \sin^3 \Omega \sin \theta (2 + \sin^2 \theta) + 3 \cos \Omega \sin \Omega \cos \theta \sin \theta \cos(\Omega - \theta) \}$
RK2-T	$\frac{s}{24} \{ \cos^3 \Omega \cos \theta (2 + \cos^2 \theta) + \sin^3 \Omega \sin \theta (2 + \sin^2 \theta) + 3 \cos \Omega \sin \Omega \cos \theta \sin \theta \cos(\Omega - \theta) + 2 \cos \Omega \sin \Omega (\cos \Omega + \sin \Omega) (\cos \theta + \sin \theta) \}$
SIERRA	$\frac{s}{24} \{ \cos^3 \Omega \cos \theta (-4 + \cos^2 \theta) + \sin^3 \Omega \sin \theta (-4 + \sin^2 \theta) + 3 \cos \Omega \sin \Omega \cos \theta \sin \theta \cos(\Omega - \theta) \}$
PATRIC	$\frac{s}{24} \{ \cos^3 \Omega \cos \theta (2 - 3 \cos \theta + \cos^2 \theta) + \sin^3 \Omega \sin \theta (2 - 3 \sin \theta + \sin^2 \theta) + 3 \cos \Omega \sin \Omega [\cos \Omega \sin \theta (- \cos \theta + \cos^2 \theta) + \sin \Omega \cos \theta (- \sin \theta + \sin^2 \theta)] \}$
THESEE	$\frac{s}{24} \{ \cos^3 \Omega \cos \theta (2 - 3 \cos \theta + \cos^2 \theta) + \sin^3 \Omega \sin \theta (2 - 3 \sin \theta + \sin^2 \theta) + 3 \cos \Omega \sin \Omega [\cos \Omega \sin \theta (- \cos \theta + \cos^2 \theta) + \sin \Omega \cos \theta (- \sin \theta + \sin^2 \theta)] \}$
SAPPHO-Q	0
SAPPHO-T	0

Du tableau, nous constatons facilement que:

- les codes PATRIC et THESEE donnent un même D_d^* .
- les codes SAPPHO-Q et SAPPHO-T donnent un D_d^* nul.

De la représentation de $L(\theta, \Omega)$, **page 36**, nous constatons :

- que, pour tous les codes, à un couple (θ_0, Ω_0) donné, la valeur prise par L se retrouve pour les configurations: $(\theta_0 \pm \pi, \Omega_0)$ et $(\theta_0, \Omega_0 \pm \pi)$. Ceci signifie que nous obtenons une même erreur dispersive d'ordre 2 sans avoir le souci du **sens** de l'orientation de \vec{N}_u ou du **sens** de l'orientation de l'advection.

- que la notion d’avance ou de retard se définit au cas par cas des angles Ω et θ . Ceci dit, il est souvent possible de dégager une tendance à l’avance ou au retard par la couleur prise par le plan (θ, Ω) (bleu: retard, rouge: avance).
- que l’erreur la plus importante (111) est obtenue pour le schéma RK2-T avec pratiquement dans toutes les configurations une notion d’avance. Suivent ensuite les codes RK2-Q et SIERRA. Le premier avec une tendance à l’avance, le second avec une tendance au retard. Viennent enfin les codes PATRIC (i.e. THESEE) avec une erreur nettement plus petite qu’il est difficile de pouvoir qualifier d’avance ou de retard tellement elle est fonction de la configuration (θ_0, Ω_0) choisie.

Valeurs extrêmes de $L(\theta, \Omega)$		
<i>CODES</i>	<i>MIN</i>	<i>MAX</i>
<i>RK2 - Q</i>	-0.021	0.125
<i>RK2 - T</i>	-0.000	0.166
<i>SIERRA</i>	-0.125	0.042
<i>PATRIC&THESEE</i>	-0.021	0.021
<i>SAPPHO - Q&SAPPHO - T</i>	0.000	0.000

(111)

- que, les valeurs extrêmes de l’erreur de dispersion se rencontrent dans 2 situations privilégiées: $\Omega = \theta$, c’est-à-dire lorsque l’advection se fait colinéairement à \vec{N}_u ou $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$, c’est-à-dire lorsque l’advection fait glisser les isovaleurs du mode de Fourier considéré sur elles-mêmes. Ceci nous invite à faire une représentation polaire en fonction de θ de l’erreur $L(\theta)$ à laquelle nous ajoutons uniformément une valeur constante de 0.2 de manière à percevoir les effets d’avance et de retard. En conséquence, un schéma sans erreur décrira un cercle de rayon 0.2, sera au delà si avance et en deçà si retard.

- $\Omega = \theta$ ($D_e = ct$) (**FIG.1**):

$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, avance maximale pour RK2-Q, retard maximum pour SIERRA. Pas d’erreur pour PATRIC & THESEE. (**EXP.I**).

$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$, avance maximale pour RK2-T, avance minimale pour RK2-Q, retard minimum pour SIERRA, retard véniel pour PATRIC & THESEE. (**EXP.III**).

$\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, avance minimale pour RK2-T et RK2-Q, retard minimum pour SIERRA, retard véniel pour PATRIC & THESEE. (**EXP.V**).

- $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$ ($D_e = 0$) (**FIG.2**):

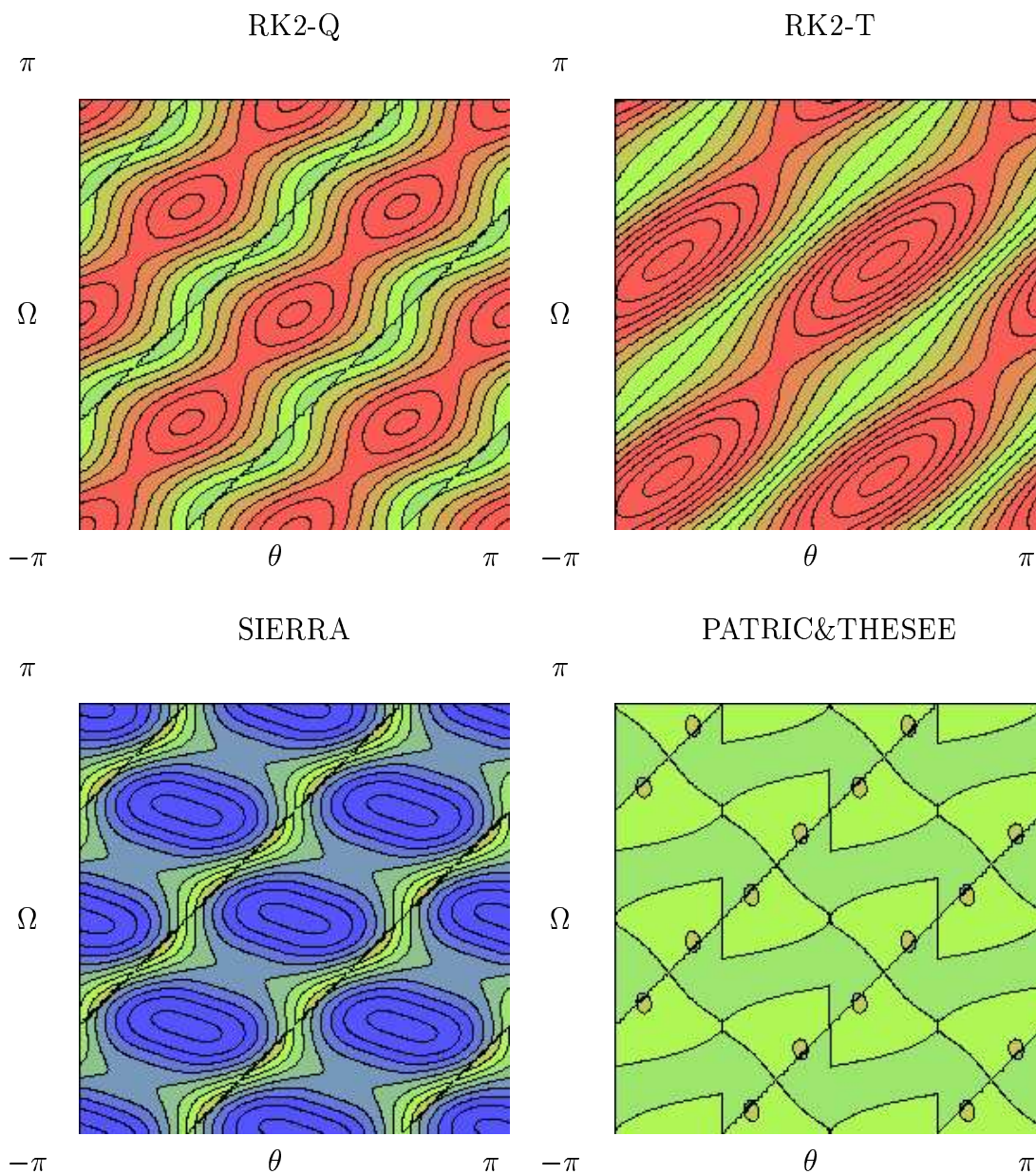
$\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$, pas d’erreur pour tous les codes. (**EXP.II, EXP.IV, EXP.VI**).

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}$, avance maximale pour RK2-Q, PATRIC & THESEE, retard maximum pour SIERRA. (**EXP.VII**).

$\theta = \frac{2\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$, avance maximale pour SIERRA, retard maximum pour RK2-Q, PATRIC & THESEE. (**EXP.VIII**).

RK2-T ne commet pas d’erreur dans cette configuration!

REPRESENTATION DE $L(\theta, \Omega)$



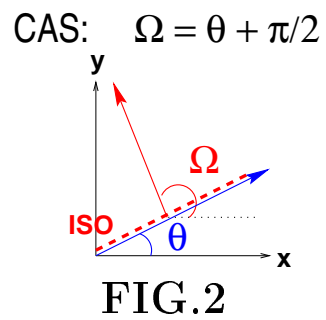
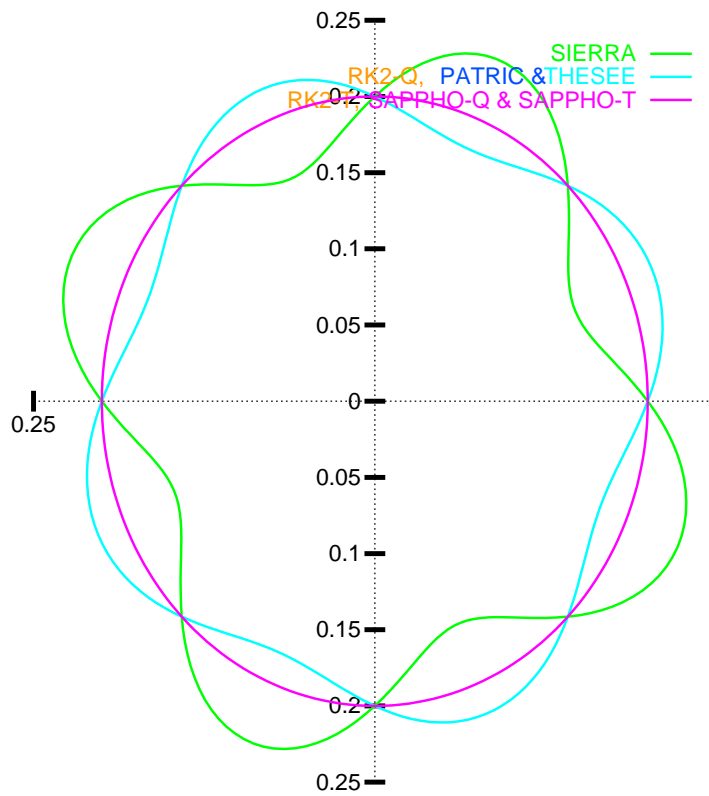
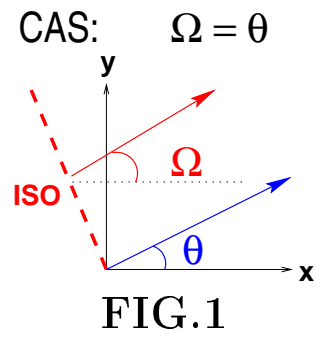
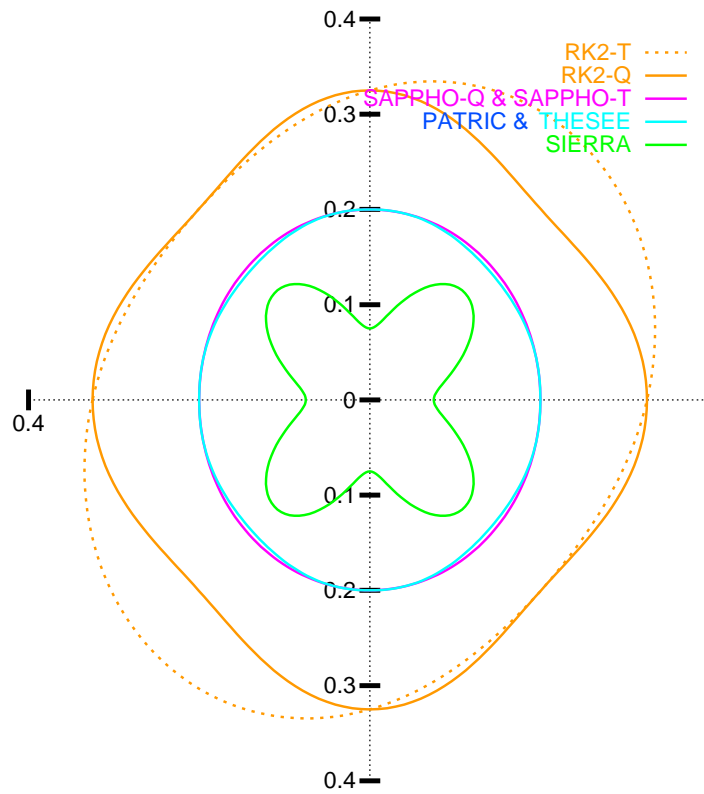
LEGENDE

RETARD

AVANCE



REPRESENTATION POLAIRE DE $L(\theta) + 0.2$



5.2 Dissipation d'ordre 3

A cet ordre, l'expression de \mathcal{G} (99), en utilisant l'écriture (102), va se limiter à \mathcal{G}_a :

$$\mathcal{G}_a = e^{ct\Delta^3\xi^4} L'(\theta, \Omega) = \left\{ e^{L'(\theta, \Omega)} \right\}^{ct\Delta^3\xi^4}$$

avec: (112)

$$L'(\theta, \Omega) = \cos^4 \Omega \frac{\alpha_{4,0}}{\Delta^3} + \cos^3 \Omega \sin \Omega \frac{\alpha_{3,1}}{\Delta^3} + \cos^2 \Omega \sin^2 \Omega \frac{\alpha_{2,2}}{\Delta^3} + \cos \Omega \sin^3 \Omega \frac{\alpha_{1,3}}{\Delta^3} + \sin^4 \Omega \frac{\alpha_{0,4}}{\Delta^3}$$

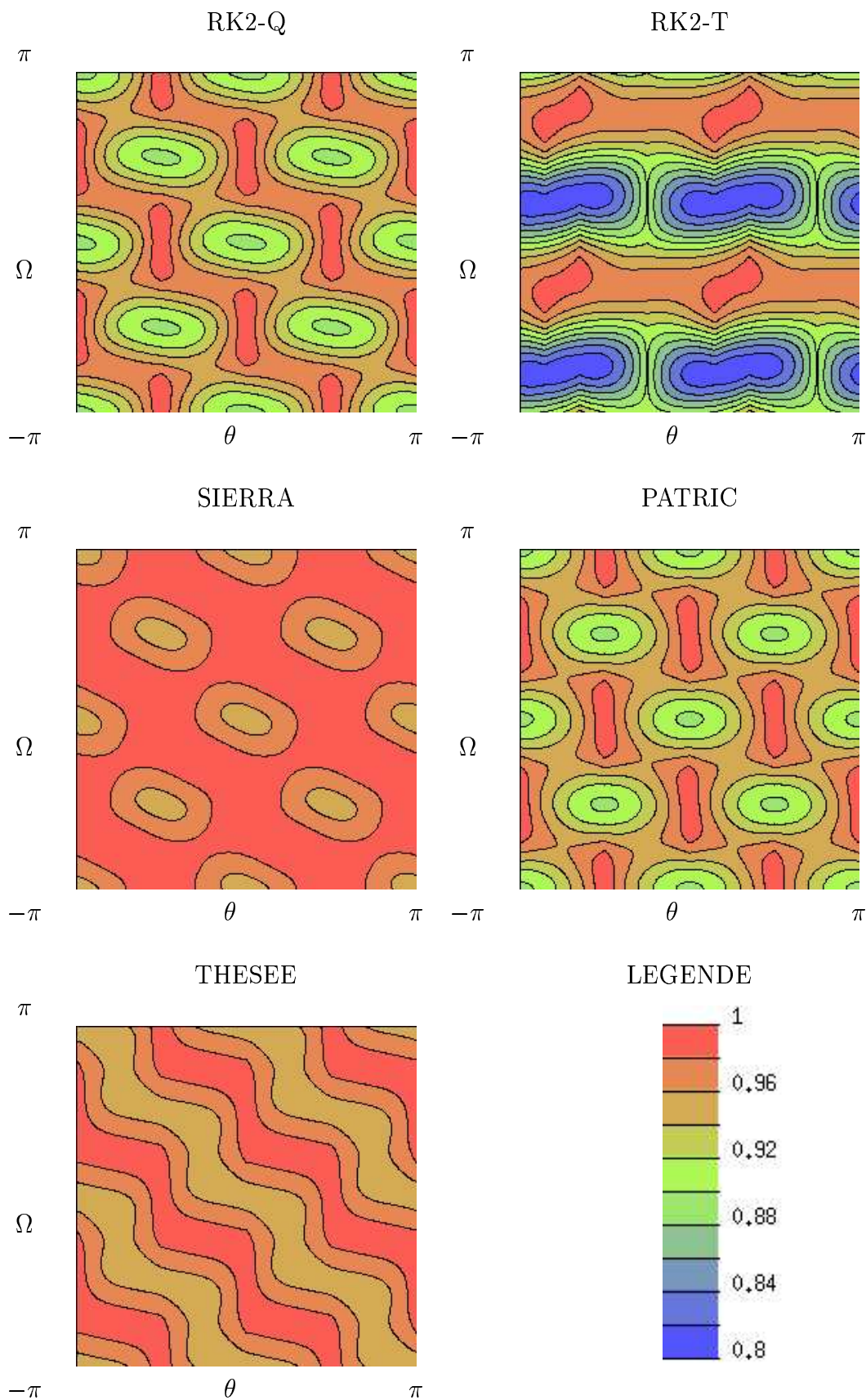
Nous constatons de (112) que l'erreur de dissipation d'ordre 3 s'écrit comme:

- une exponentielle d'une fonction **spécifique à chaque schéma**, uniquement fonction des angles θ et Ω : $L'(\theta, \Omega)$.
- Cette exponentielle est, **pour tous les schémas**, à la puissance du module de la vitesse d'advection c , du temps t de l'advection, du maillage en Δ^3 et de ξ^4 au sens du nombre d'onde κ ou de la longueur d'onde λ pris pour état initial. De plus, cette puissance est toujours positive.

En conséquence, si nous comparons nos schémas sur un même modèle (c), sur un même maillage (Δ), au bout d'un même temps (t), sur un mode de même longueur d'onde (λ), la représentation de $\exp(L'(\theta, \Omega))$ pour chaque schéma est **représentative** de la dissipation \mathcal{G}_a d'ordre 3 en préservant l'ordre de comparaison car la puissance est positive. Les valeurs de $L'(\theta, \Omega)$ sont données dans le tableau ci-après et une représentation graphique de $EXP(L'(\theta, \Omega))$ est proposée **page 40**.

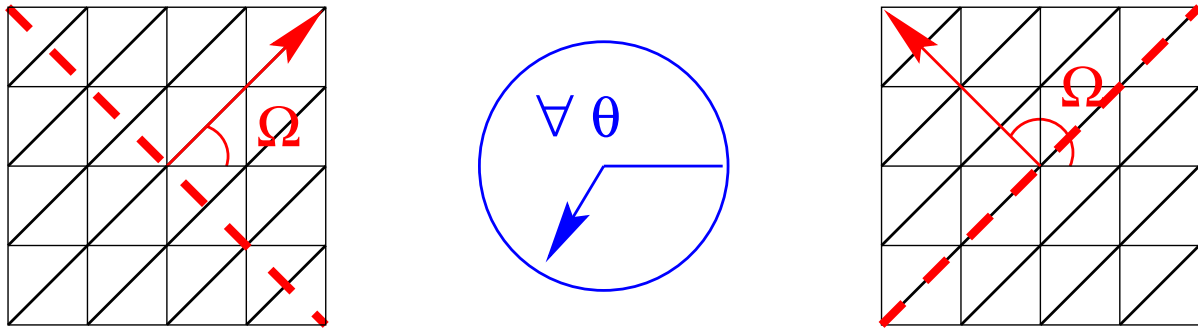
$\mathcal{G}_a = \{EXP(L'(\theta, \Omega))\}^{ct\Delta^3\xi^4}$ FACTEUR APPROCHE DE L'AMPLITUDE	
CODES	Valeur donnée: $L'(\theta, \Omega)$
RK2-Q	$\left\{ \cos^4 \Omega (-8 \cos \theta + \cos^4 \theta) + \sin^4 \Omega (-8 \sin \theta + \sin^4 \theta) + \right.$ $4 \cos^3 \Omega \sin \Omega \cos^3 \theta \sin \theta + 4 \cos \Omega \sin^3 \Omega \cos \theta \sin^3 \theta +$ $\left. 6 \cos^2 \Omega \sin^2 \Omega \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right\} / 64$
RK2-T	$\left\{ \cos^4 \Omega [-24(\cos \theta + \sin \theta + 2 \cos \theta - \sin \theta) + 9 \cos^4 \theta] + \right.$ $\sin^4 \Omega [-24(\cos \theta + \sin \theta + \cos \theta - 2 \sin \theta) + 9 \sin^4 \theta] +$ $\cos^3 \Omega \sin \Omega [-16(5 \cos \theta + \sin \theta + 2 \cos \theta - \sin \theta) + 36 \cos^3 \theta \sin \theta] +$ $\cos \Omega \sin^3 \Omega [-16(5 \cos \theta + \sin \theta + \cos \theta - 2 \sin \theta) + 36 \cos \theta \sin^3 \theta] +$ $\left. \cos^2 \Omega \sin^2 \Omega [-16(7 \cos \theta + \sin \theta + 2 \cos \theta - \sin \theta + \cos \theta - 2 \sin \theta) + \right.$ $\left. 54 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right\} / 576$
SIERRA	$\left\{ \cos^4 \Omega \cos^2 \theta (-4 + \cos^2 \theta) + \sin^4 \Omega \sin^2 \theta (-4 + \sin^2 \theta) + \right.$ $4 \cos^3 \Omega \sin \Omega \cos^3 \theta \sin \theta + 4 \cos \Omega \sin^3 \Omega \cos \theta \sin^3 \theta +$ $\left. 6 \cos^2 \Omega \sin^2 \Omega \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right\} / 64$
PATRIC	$\left\{ \cos^4 \Omega \cos^2 \theta [-8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta (1 - \cos \theta) + \cos^4 \theta] + \right.$ $\sin^4 \Omega \sin^2 \theta [-8 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta (1 - \sin \theta) + \sin^4 \theta] +$ $4 \cos^3 \Omega \sin \Omega \cos \theta \sin \theta (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) +$ $4 \cos \Omega \sin^3 \Omega \cos \theta \sin \theta (1 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta) +$ $\left. \cos^2 \Omega \sin^2 \Omega (-4 \sin^2 \theta \cos \theta - 4 \cos^2 \theta \sin \theta + 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \right\} / 64$
THESEE	$\left\{ \cos^4 \Omega \cos^2 \theta [-8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta (2 - \cos \theta) + \cos^4 \theta] + \right.$ $\sin^4 \Omega \sin^2 \theta [-8 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta (2 - \sin \theta) + \sin^4 \theta] +$ $4 \cos^3 \Omega \sin \Omega \cos \theta \sin \theta (2 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) +$ $4 \cos \Omega \sin^3 \Omega \cos \theta \sin \theta (2 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta) +$ $\left. \cos^2 \Omega \sin^2 \Omega (-4 \sin^2 \theta \cos \theta - 4 \cos^2 \theta \sin \theta + 6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) \right\} / 64$
SAPPHO-Q	0
SAPPHO-T	0

REPRESENTATION DE $EXP(L'(\theta, \Omega))$



Nous y constatons:

- que, pour tous les codes, à un couple (θ_0, Ω_0) donné, la valeur prise par L se retrouvent pour les configurations: $(\theta_0 \pm \pi, \Omega_0)$ et $(\theta_0, \Omega_0 \pm \pi)$. Ceci signifie que nous obtenons une même erreur dissipative d'ordre 3 sans avoir le souci du **sens** de l'orientation de \vec{N}_u ou du **sens** de l'orientation de l'advection.
- que l'erreur la plus importante (113) est obtenue pour le schéma RK2-T avec une particularité qu'il est important de prendre en compte: la façon selon laquelle les quadrangles ont été découpés pour obtenir des triangles. Ici, toutes les hypothénuses des triangles sont colinéaires à la première bissectrice et l'erreur de dissipation s'en ressent! En effet, nous constatons que la dissipation varie faiblement à Ω constant. Elle est très importante lorsque \vec{N}_u est colinéaire aux hypothénuses des triangles quelque soit la direction d'advection θ et plus raisonnable lorsque \vec{N}_u est perpendiculaire à ces hypothénuses. Voir figure (FIG.D)



MAUVAIS

MIEUX

FIG.D:

RK2-T est plus sensible à l'orientation de Ω par rapport aux hypothénuses qu'à θ !

Valeurs extrêmes de $EXP(L(\theta, \Omega))$		
CODES	MIN	MAX
<i>RK2 - Q</i>	0.896	1.000
<i>RK2 - T</i>	0.806	0.990
<i>SIERRA</i>	0.954	1.000
<i>PATRIC</i>	0.896	1.000
<i>THESEE</i>	0.952	1.000
<i>SAPPHO - Q&SAPPHO - T</i>	1.000	1.000

(113)

Suivent, dans un lot groupé les codes PATRIC et RK2-Q avec les mêmes valeurs extrêmes et une répartition de la dissipation très voisine en fonction de θ et Ω . Viennent après le code THESEE puis SIERRA avec peu de dissipation par rapport aux deux codes précédents. Enfin, rappelons que les codes SAPHO-Q & SAPHO-T ne présentent pas de dissipation à cet ordre.

- que, les valeurs extrêmes de l'erreur de dissipation se rencontrent dans 2 situations privilégiées: $\Omega = \theta$, c'est à dire lorsque l'advection se fait colinéairement à \vec{N}_u ou $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$, c'est à dire lorsque l'advection fait glisser les isovaleurs du mode de Fourier considéré sur elles-mêmes. Ceci nous invite à faire une représentation polaire en fonction de θ de l'erreur $EXP(L'(\theta))$ à laquelle nous soustrayons uniformément une valeur constante de 0.8 de manière à différencier plus facilement la dissipation des schémas. En conséquence, un schéma sans erreur décrira un cercle de rayon 0.2, alors qu'un schéma fortement dissipatif générera une courbe proche de l'origine.

- $\Omega = \theta$ (**FIG.3**):

Quelque soit θ , tous les codes sauf RK2-T peuvent se classer du moins dissipatif au plus dissipatif: SAPHO-Q & SAPHO-T, SIERRA, THESEE, RK2-Q, PATRIC.

Pour $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, la dissipation est maximale pour tous les codes sauf RK2-T avec, dans l'ordre du meilleur au plus mauvais: SAPHO-Q & SAPHO-T, (SIERRA, THESEE), (RK2-Q, PATRIC, RK2-T). (**EXP.I**).

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, la dissipation est minimale sauf pour RK2-T qui vérifie cette propriété uniquement pour $\theta = \frac{3\pi}{4}$ et $\theta = \frac{7\pi}{4}$ (**EXP.V**) mais présente une redoutable dissipation pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ (**EXP.III**) et $\theta = \frac{5\pi}{4}$. Dans le cas favorable à RK2-T, nous avons le classement suivant: (SAPHO-Q & SAPHO-T, SIERRA) sans erreur, THESEE, (RK2-Q, RK2-T) et PATRIC.

- $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$ (**FIG.4**):

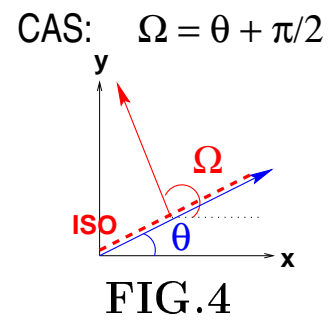
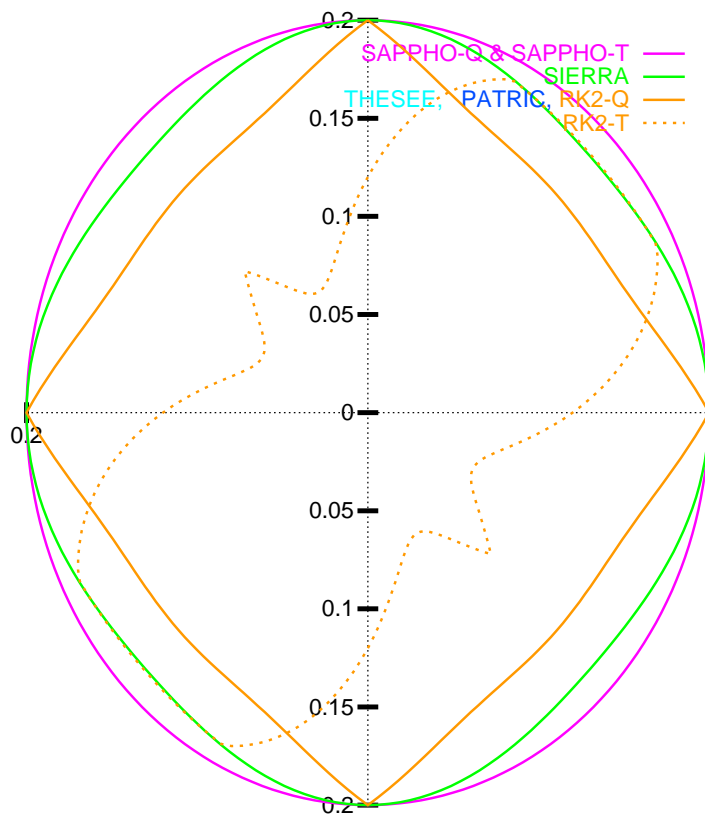
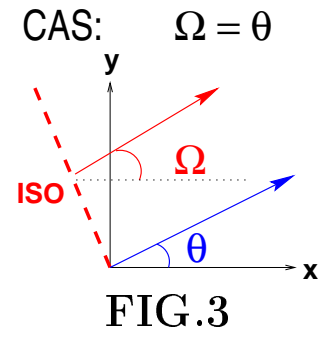
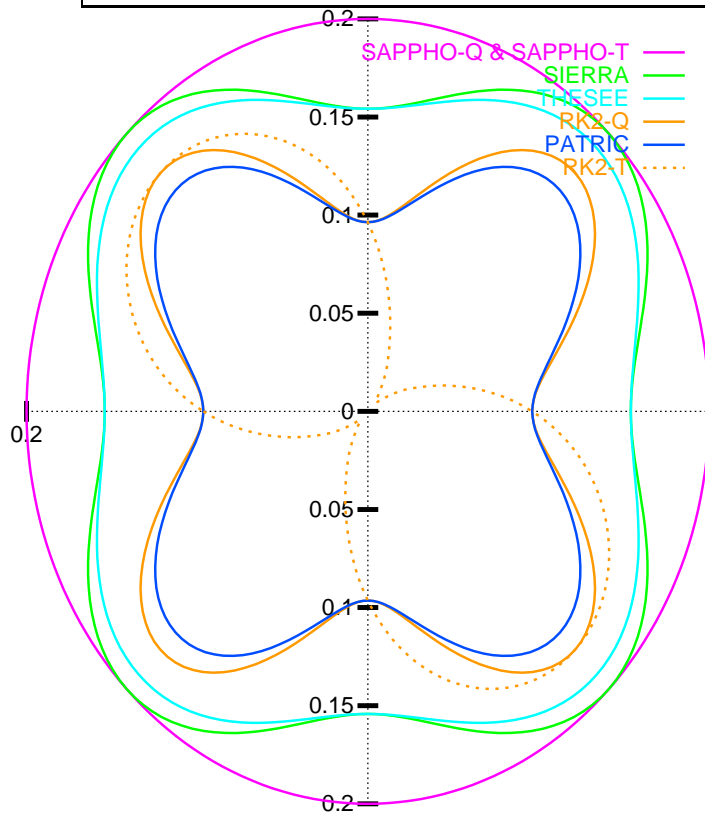
Quelque soit θ , tous les codes sauf RK2-T peuvent se classer du moins dissipatif au plus dissipatif: SAPHO-Q & SAPHO-T, SIERRA, (PATRIC, RK2-Q, THESEE).

Pour $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ pas d'erreur pour tous les codes sauf RK2-T. (**EXP.II**).

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ nous obtenons le minimum de dissipation avec pour classement: SAPHO-Q & SAPHO-T, (RK2-T, SIERRA), (PATRIC, RK2-Q) et THESEE. (**EXP.IV**).

Pour $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ seule la dissipation de RK2-T est modifiée par rapport au cas précédent le faisant passer en dernière position. (**EXP.VI**).

REPRESENTATION POLAIRE DE $EXP(L'(\theta)) - 0.8$



5.3 Validation numérique

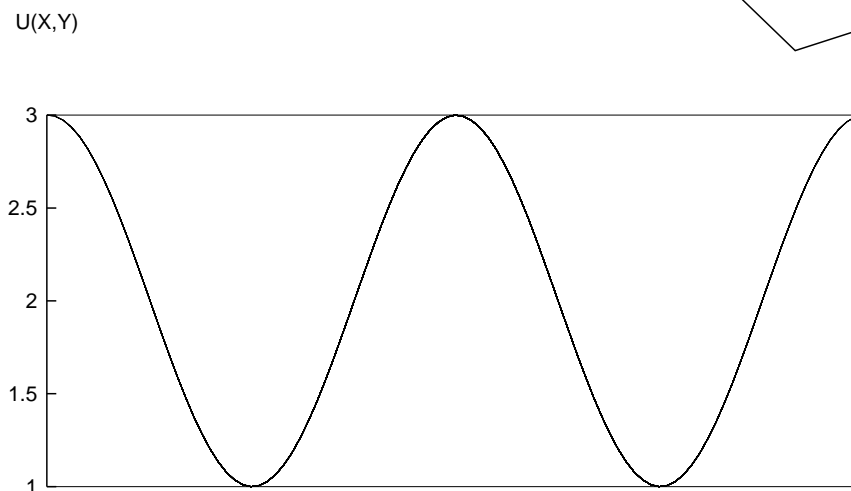
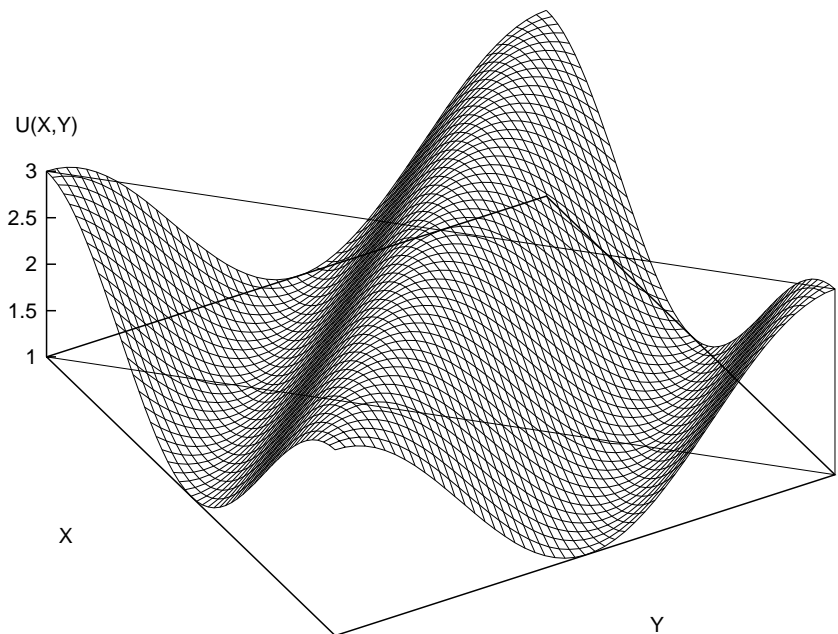
Nous souhaitons illustrer sur quelques exemples et en quelques simulations numériques, les propos que nous avons tenus.

Prenons un maillage régulier de 51 points sur 51 points du domaine $[0, 1]^2$ soit $\Delta = 2.10^{-2}$. Nous allons traiter, pour chaque schéma, l'équation d'advection bidimensionnelle avec une vitesse d'advection ayant pour module: $c = 1$. Ceci nous permet de définir le pas de temps $\Delta t = 2.10^{-2}$ commun à tous les schémas. Nous considérons au bord du domaine des conditions de périodicité et prendrons pour état initial:

$$U_0(x, y) = 2 + \cos \{ \xi(x \cos \Omega + y \sin \Omega) \}$$

L'angle θ de la direction d'advection et ξ seront spécifiés pour chaque illustration ainsi que le temps t (attention aux comparaisons entre les expériences!). Nous regarderons les solutions obtenues dans le plan perpendiculaire au plan (x, y) et parallèle au vecteur \vec{N}_u . Cette représentation nous permettra de ramener les courbes 3D en coupes 2D nous donnant clairement les effets dispersifs et dissipatifs des divers schémas.

Une condition initiale...



...dans son plan de coupe.

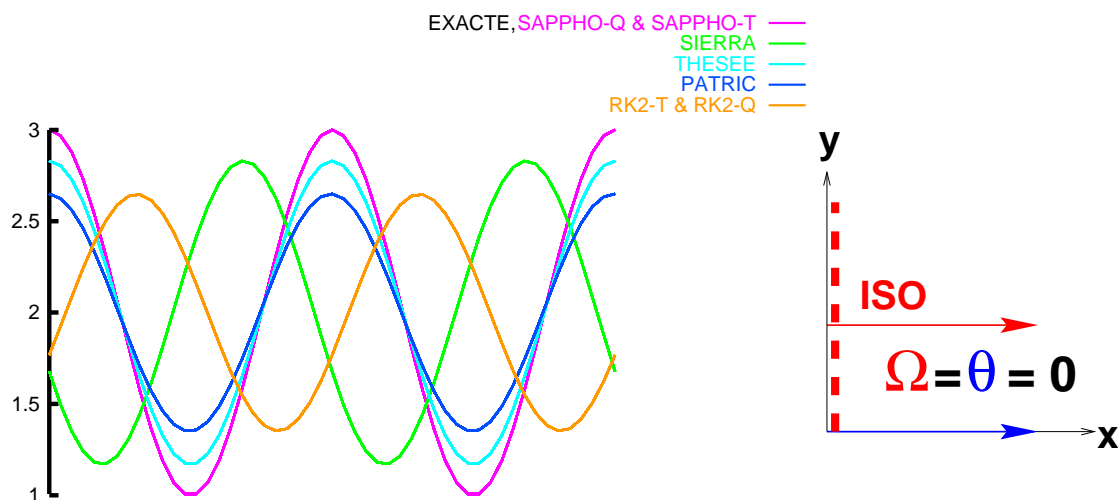
Les expériences que nous traitons proviennent des représentations polaires précédentes (**FIG.1 à 4**). En effet certains schémas se dénotent alors par leur caractère dispersif ou dissipatif que nous pourrions comparer par rapport à la solution exacte, solution donnée à l'ordre 4 près par les codes SAPPHO.

N° EXPERIENCE	θ	Ω	ξ	λ	t
<i>I</i>	0	θ	4π	$\frac{1}{2}$	20
<i>II</i>	0	$\theta + \frac{\pi}{2}$	4π	$\frac{1}{2}$	20
<i>III</i>	$+\frac{\pi}{4}$	θ	$2\pi\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	20
<i>IV</i>	$+\frac{\pi}{4}$	$\theta + \frac{\pi}{2}$	$2\pi\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	20
<i>V</i>	$-\frac{\pi}{4}$	θ	$2\pi\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	20
<i>VI</i>	$-\frac{\pi}{4}$	$\theta + \frac{\pi}{2}$	$2\pi\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	20
<i>VII</i>	$\sim +\frac{\pi}{6} (+33.69^\circ)$	$\theta + \frac{\pi}{2}$	$2\pi\sqrt{13}$	$\frac{1}{\sqrt{13}}$	10
<i>VIII</i>	$\sim -\frac{\pi}{6} (-33.69^\circ)$	$\theta + \frac{\pi}{2}$	$2\pi\sqrt{13}$	$\frac{1}{\sqrt{13}}$	10

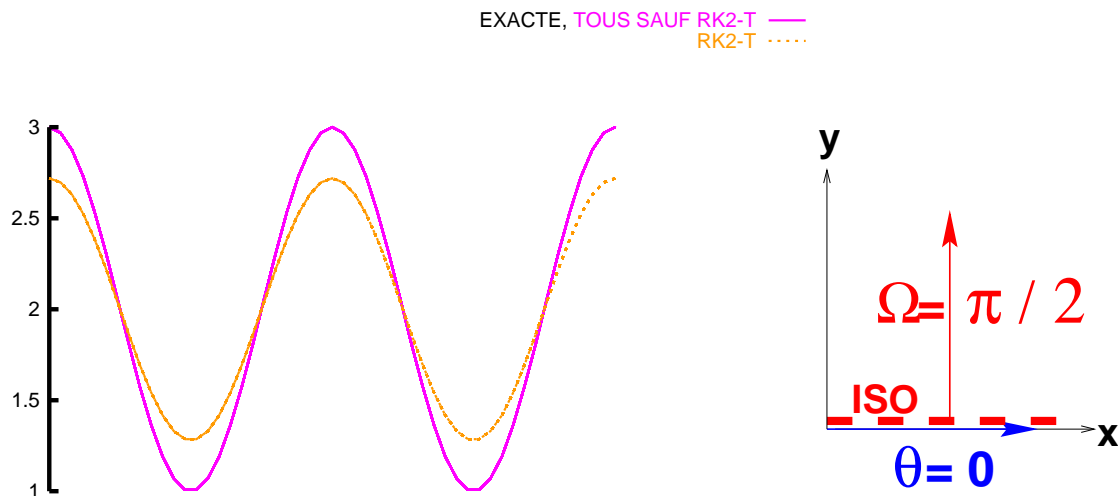
Dans la mesure où nous avons pris soin de préserver la condition (102), c'est-à-dire: $\xi \ll \frac{1}{\Delta}$, nous donnerons pour chaque expérience et pour chaque schéma les erreurs approchées de dispersion au sens du déplacement de trop ($D_d^* = ct\Delta^2\xi^2L(\theta, \Omega)$) que nous ramènerons à la longueur d'onde λ envisagée en posant le rapport $\frac{D_d^*}{\lambda}$ et de dissipation au sens de l'amplitude restante ($\mathcal{G}_a = EXP(ct\Delta^3\xi^4L'(\theta, \Omega))$). Ces valeurs seront alors à valider par l'expérience numérique.

En règle générale, les images par page sont comparables. Nous y trouvons la même valeur de θ avec $\Omega = \theta$ pour l'image supérieure et $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$ pour l'image inférieure sauf pour les dernières expériences VII et VIII où $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$ dans les 2 cas.

EXPERIENCE I: $\theta = 0$, $\Omega = 0$, $\xi = 4\pi$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $t = 20$						
ERREUR	RK2 - T	RK2 - Q	SIERRA	PATRIC	THESEE	SAPPHO
$\frac{D_a^*}{\lambda}$	0.316	0.316	-0.316	0.000	0.000	0.000
\mathcal{G}_a	0.646	0.646	0.829	0.646	0.829	1.000



EXPERIENCE II: $\theta = 0$, $\Omega = \frac{\pi}{2}$, $\xi = 4\pi$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $t = 20$						
ERREUR	RK2 - T	RK2 - Q	SIERRA	PATRIC	THESEE	SAPPHO
$\frac{D_a^*}{\lambda}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
\mathcal{G}_a	0.717	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000



EXPERIENCE I

Validité: $\Omega = \theta$ où $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

Dispersion: retard maximum pour SIERRA, avance maximale pour RK2-Q valant l'avance de RK2-T. Pas d'erreur pour PATRIC et THESEE.

Dissipation: maximale pour tous les codes sauf RK2-T qui peut faire encore pire! Du meilleur au plus mauvais: (SIERRA, THESEE), (RK2-Q, PATRIC, RK2-T).

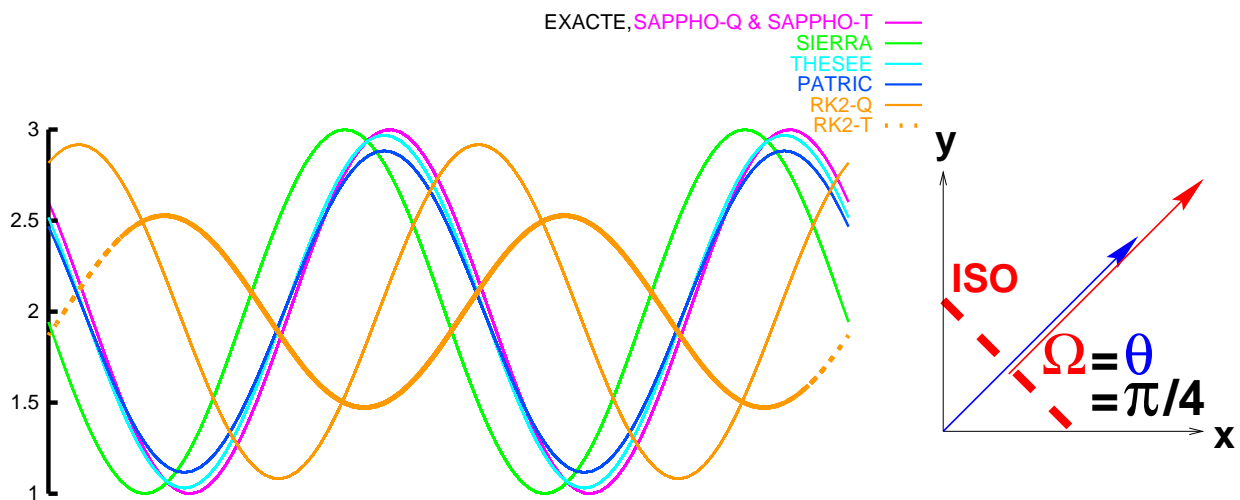
EXPERIENCE II

Validité: $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$ où $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

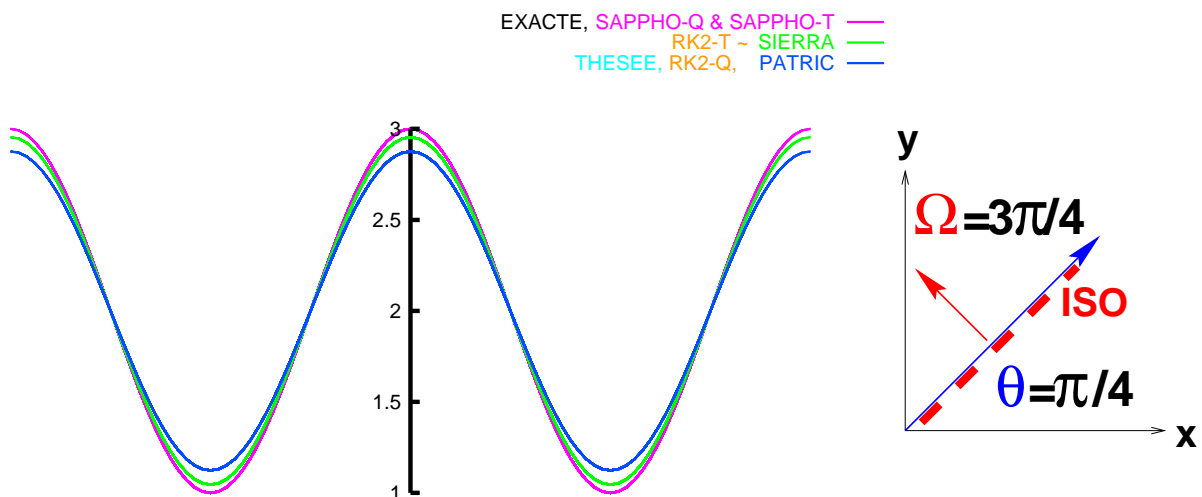
Dispersion: Pas d'erreur pour tous les schémas.

Dissipation: Seul RK2-T se distingue ici par une dissipation assez conséquente...

EXPERIENCE III: $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\Omega = \frac{\pi}{4}$, $\xi = 2\pi\sqrt{2}$, $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t = 60$						
ERREUR	RK2-T	RK2-Q	SIERRA	PATRIC	THESEE	SAPPHO
$\frac{D_a^*}{\lambda}$	0.446	0.223	-0.112	-0.013	-0.013	0.000
\mathcal{G}_a	0.525	0.918	1.000	0.883	0.970	1.000



EXPERIENCE IV: $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\Omega = \frac{3\pi}{4}$, $\xi = 2\pi\sqrt{2}$, $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t = 60$						
ERREUR	RK2-T	RK2-Q	SIERRA	PATRIC	THESEE	SAPPHO
$\frac{D_a^*}{\lambda}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
\mathcal{G}_a	0.956	0.876	0.954	0.876	0.876	1.000



EXPERIENCE III

Validité: $\Omega = \theta$ où $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

Dispersion: Avance maximale pour RK2-T, avance minimale pour RK2-Q, retard minimum pour SIERRA, retard véniel pour PATRIC et THESEE.

Dissipation: minimale pour tous les schémas sauf RK2-T qui réalise sa dissipation maximale.

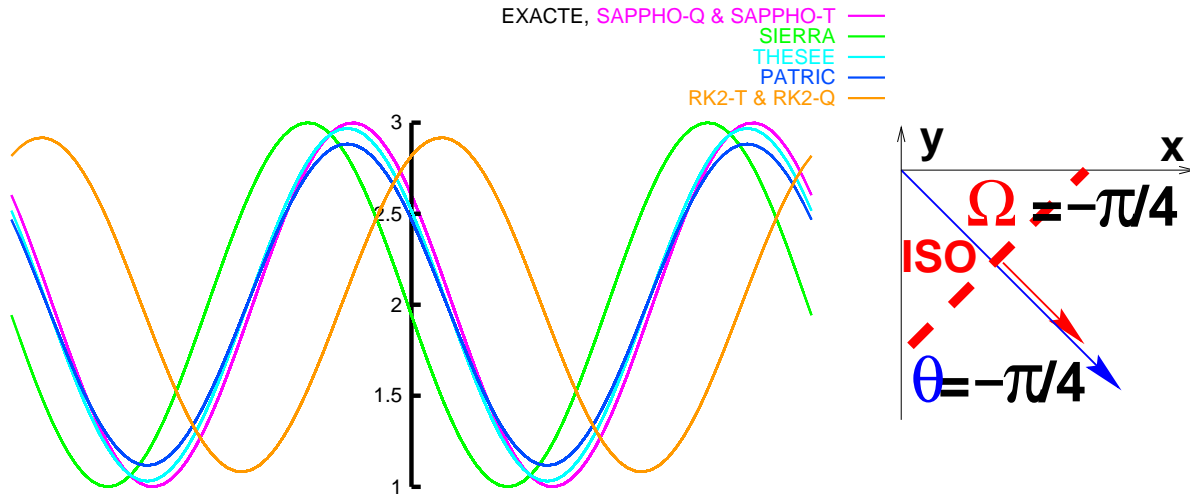
EXPERIENCE IV

Validité: $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$ où $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

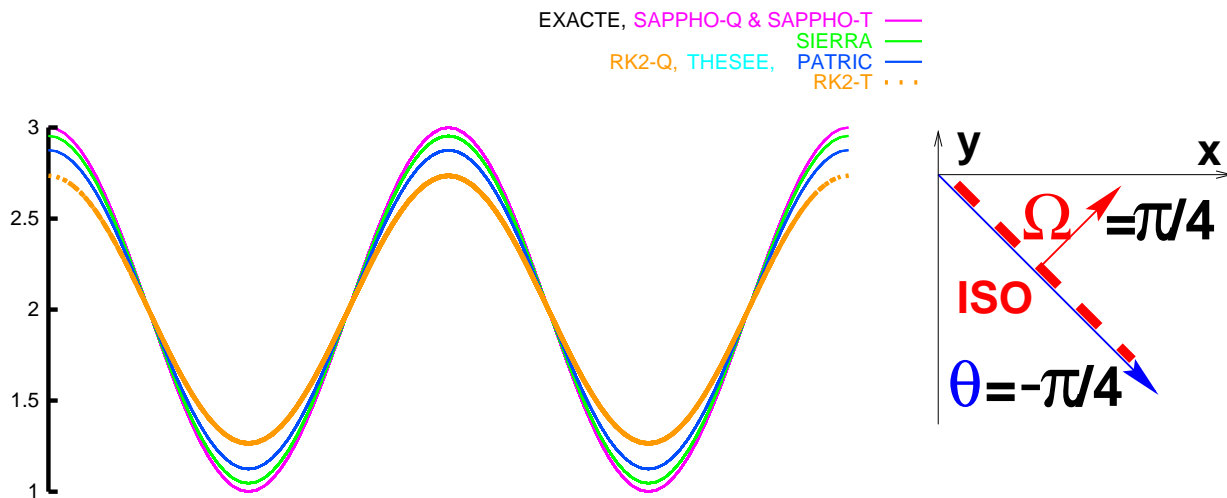
Dispersion: Pas d'erreur pour tous les schémas.

Dissipation: maximale pour tous les schémas sauf RK2-T qui réalise sa dissipation minimale. Du meilleur au plus mauvais: RK2-T, SIERRA, (THESEE, RK2-Q, PATRIC).

EXPERIENCE V: $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\Omega = -\frac{\pi}{4}$, $\xi = 2\pi\sqrt{2}$, $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t = 60$						
ERREUR	RK2-T	RK2-Q	SIERRA	PATRIC	THESEE	SAPPHO
$\frac{D_a^*}{\lambda}$	0.223	0.223	-0.112	-0.013	-0.013	0.000
\mathcal{G}_a	0.918	0.918	1.000	0.883	0.970	1.000



EXPERIENCE VI: $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\Omega = \frac{\pi}{4}$, $\xi = 2\pi\sqrt{2}$, $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t = 60$						
ERREUR	RK2-T	RK2-Q	SIERRA	PATRIC	THESEE	SAPPHO
$\frac{D_a^*}{\lambda}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
\mathcal{G}_a	0.734	0.876	0.954	0.876	0.876	1.000



EXPERIENCE V**Validité:** $\Omega = \theta$ où $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Dispersion: Avance minimale pour RK2-Q et RK2-T, retard minimum pour SIERRA, retard véniel pour PATRIC et THESEE.

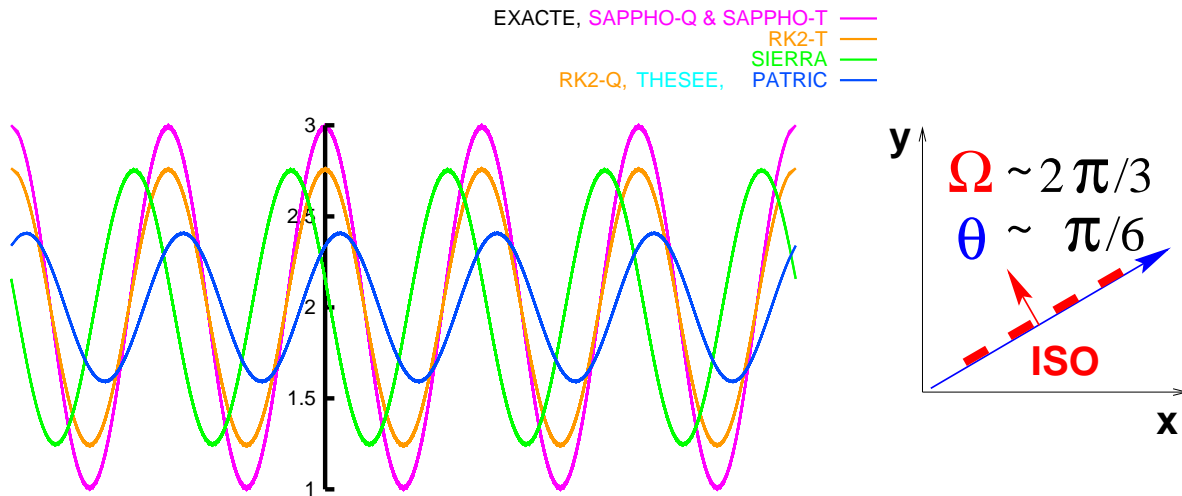
Dissipation: minimale pour tous les schémas. Du meilleur au plus mauvais: SIERRA, THESEE, RK2-T, RK2-Q et PATRIC.

EXPERIENCE VI**Validité:** $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$ où $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

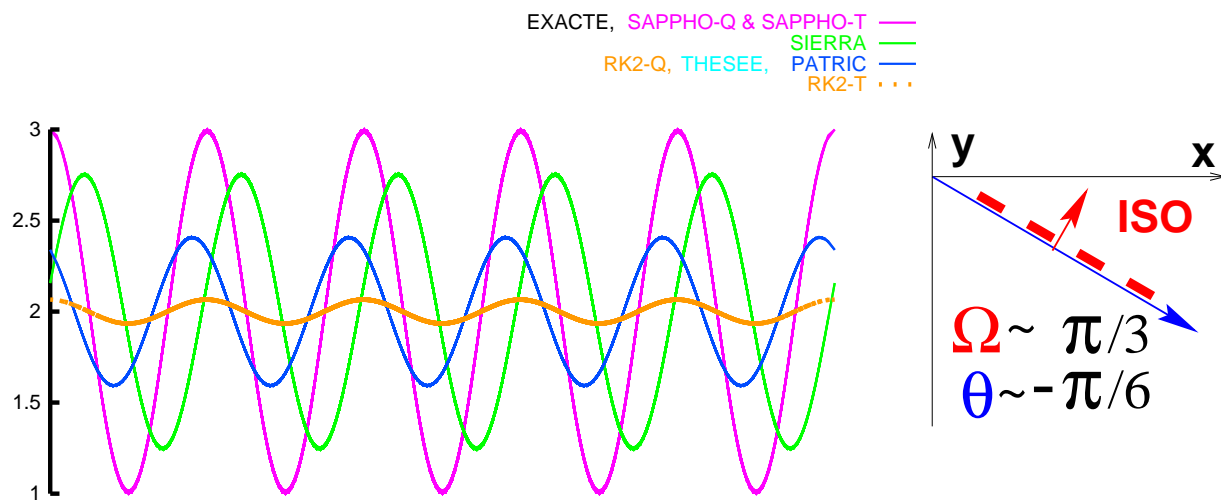
Dispersion: Pas d'erreur pour tous les schémas.

Dissipation: maximale pour tous les schémas sauf RK2-T qui peut faire pire... Du meilleur au plus mauvais: SIERRA, (THESEE, RK2-Q, PATRIC), RK2-T.

EXPERIENCE VII: $\theta \sim \frac{\pi}{6}$, $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$, $\xi = 2\pi\sqrt{13}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{13}}$, $t = 10$						
ERREUR	RK2-T	RK2-Q	SIERRA	PATRIC	THESEE	SAPPHO
$\frac{D_a^*}{\lambda}$	0.000	0.109	-0.219	0.109	0.109	0.000
\mathcal{G}_a	0.761	0.403	0.755	0.403	0.403	1.000



EXPERIENCE VIII: $\theta \sim -\frac{\pi}{6}$, $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$, $\xi = 2\pi\sqrt{13}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{13}}$, $t = 10$						
ERREUR	RK2-T	RK2-Q	SIERRA	PATRIC	THESEE	SAPPHO
$\frac{D_a^*}{\lambda}$	0.000	-0.109	0.219	-0.109	-0.109	0.000
\mathcal{G}_a	0.059	0.403	0.755	0.403	0.403	1.000



Les expériences suivantes sont données pour montrer comment une isovaleur peut être déplacée par certains schémas alors que l'advection désirée ne devait nous faire percevoir aucun déplacement! ($D_e = 0$)

EXPERIENCE VII

Dispersion: Avance pour RK2-Q, PATRIC et THESEE, retard pour SIERRA. RK2-T ne commet pas d'erreur!

Dissipation: Du meilleur au plus mauvais: RK2-T, SIERRA, (THESEE, RK2-Q et PATRIC).

EXPERIENCE VIII

Dispersion: Avance pour SIERRA, retard pour RK2-Q, PATRIC et THESEE. RK2-T ne commet pas d'erreur!

Dissipation: RK2-T réalisant le pire! Du meilleur au plus mauvais: SIERRA, (THESEE, RK2-Q, PATRIC), RK2-T.

Pour couronner notre comparaison, nous effectuons le cas test de la cloche rotative sur chacun des schémas. Nous partons donc d'une condition initiale représentant une cloche ayant pour définition:

$$\begin{aligned}
 U_0(x, y) &= 2 + \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{d}{r}\pi\right) \right\} && \text{si } d \leq r \\
 U_0(x, y) &= 2 && \text{si non.} \\
 \text{avec } d &= \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2} \text{ et } r = 0.3 && (114)
 \end{aligned}$$

et qui a l'avantage de prendre en considération plusieurs modes de Fourier restant très bien discrétisés puisque le rayon tient sur 15 mailles. Nous faisons décrire à cette cloche un cercle complet en 5000 itérations soit un périmètre parcouru de longueur 100 grâce aux conditions périodiques. Une telle rotation nous permet de prendre en considération toutes les directions d'advection θ .

Comme nous avons pu le remarquer sur les figures **FIG.1** et **FIG.2**, les erreurs dispersives sont égales pour une direction θ passant de la valeur θ_0 à la valeur $\theta_0 + \pi$. De fait, au bout d'un tour complet de la cloche, aucune erreur dispersive n'est observable... C'est pourquoi, nous donnons des états intermédiaires des solutions au bout d'un quart, d'un demi, de trois quart et du cercle en entier parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre (**FIG.E**).

Par ailleurs, ce cas test va nous montrer les comportements dissipatifs des schémas numériques par la hauteur restante de la cloche après rotation complète:

ROTATION DE LA CLOCHE		
CODES	MIN	MAX
EXACTE	2.000	3.000
SAPPHO-Q	1.993	2.998
SAPPHO-T	1.993	2.998
SIERRA	1.969	2.796
THESEE	1.960	2.701
RK2-Q	1.934	2.599
PATRIC	1.940	2.598
RK2-T	1.970	2.530

Dans le tableau des valeurs extrêmes, nous confirmons le classement des schémas pour ce qui est de l'erreur dissipative. Nous représentons l'allure des cloches après leur parcours sur la **page 56** et une vue des isovaleurs sur la **page 60** indiquant les déformations de la cloche

surtout pour le code RK2-T à maillage triangulaire. En effet, l'on s'aperçoit comme montré sur la figure **FIG.D** que les modes dont les isovaleurs ne s'appuient pas sur les hypothénuses des triangles sont beaucoup plus dissipées d'où cette forme ovale des isovaleurs selon la première bissectrice.

Les représentations des isovaleurs de la **page 57 à 60** commencent à la valeur 2.1 par pas de 0.1. Moins nous avons d'isovaleurs et plus le schéma est dissipatif. Nous représentons par une pointe "v" le lieu du maximum donné par la solution exacte. Ceci nous permet de constater le déplacement dispersif des schémas: SIERRA retarde, RK2-Q et RK2-T avancent, les autres schémas restant comparativement correctes. Sur la figure **FIG.E**, nous plaçons un traceur sur le sommet de la cloche nous donnant une représentation du parcours et de l'erreur dispersive commise. Au bout du tour complet, elle n'est plus visible!

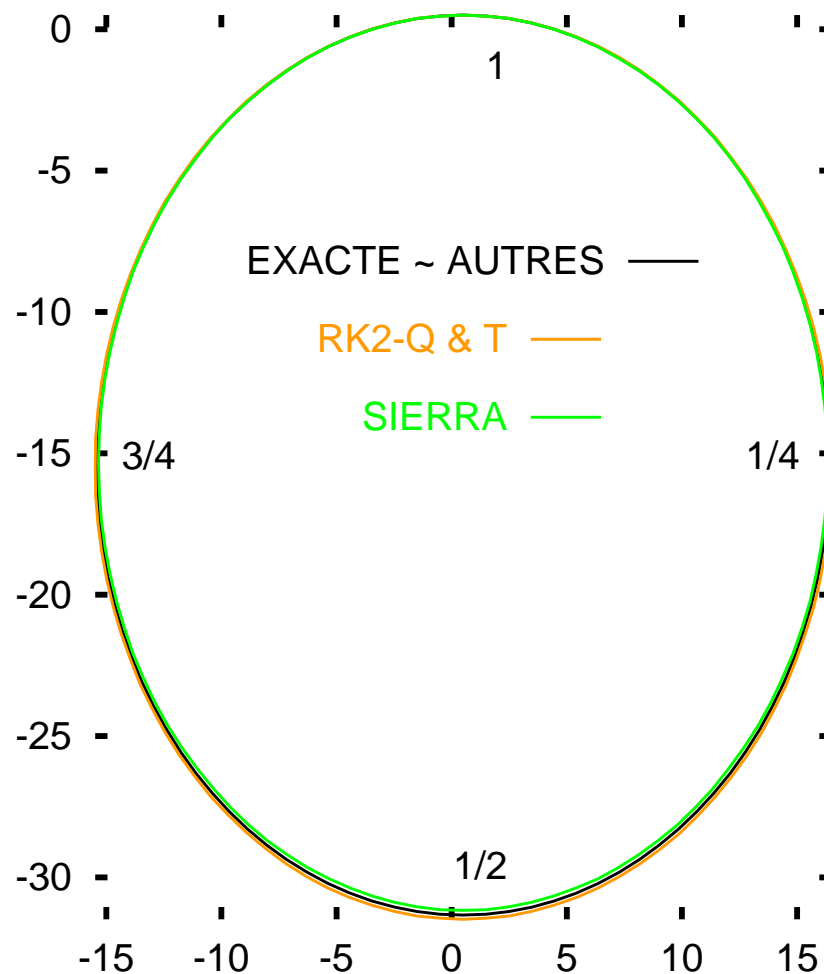
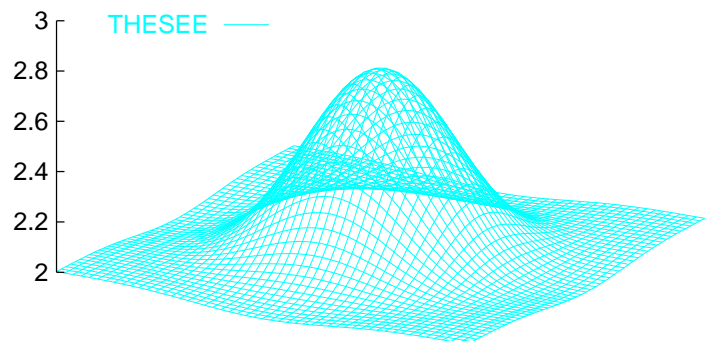
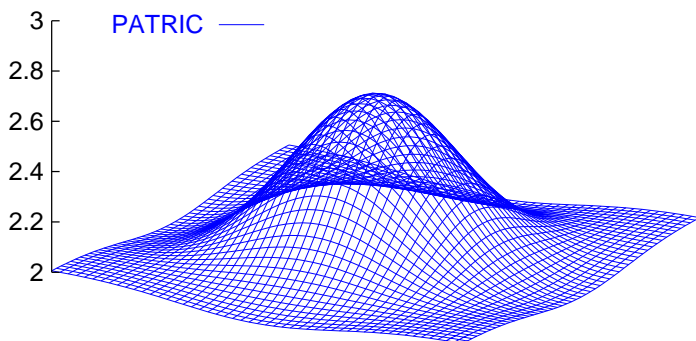
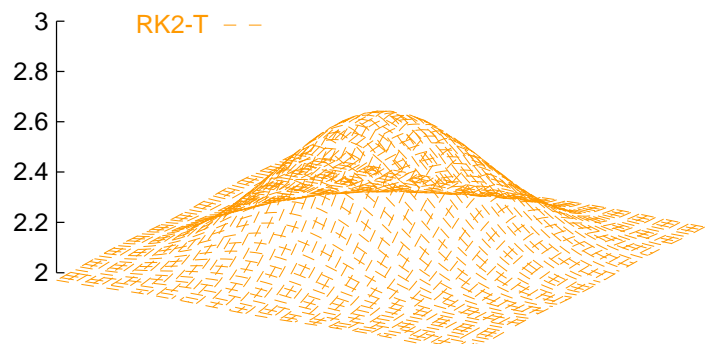
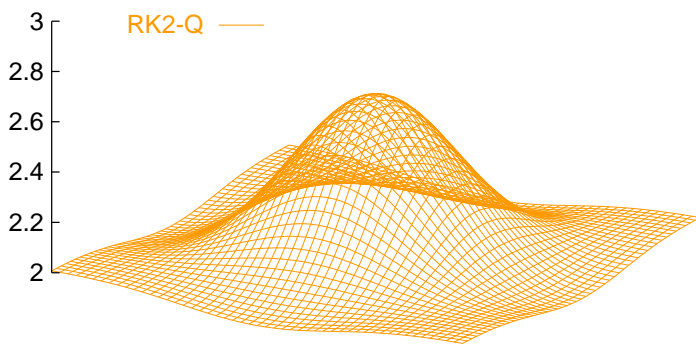
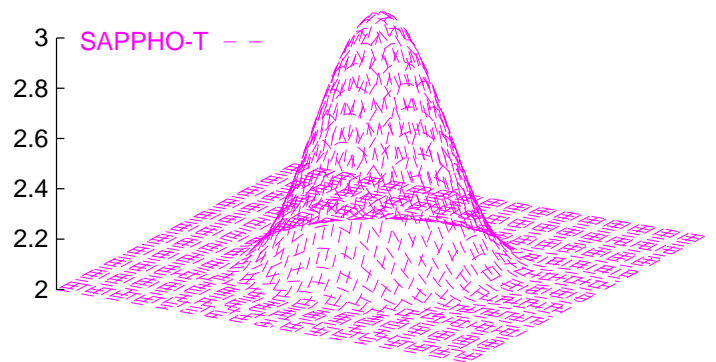
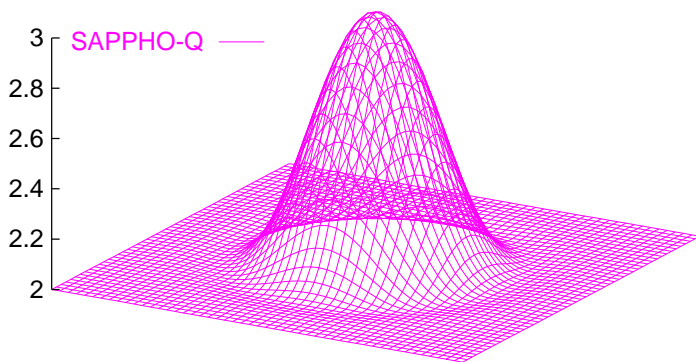
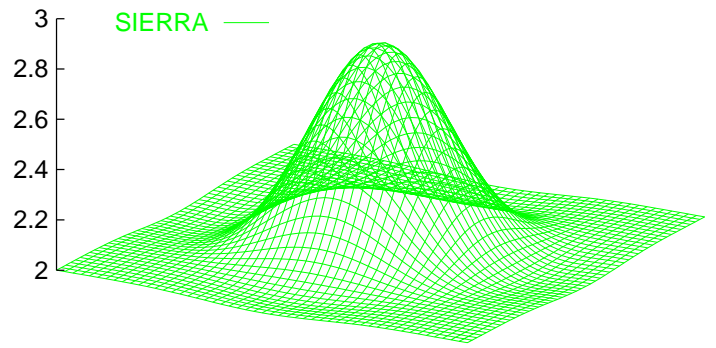
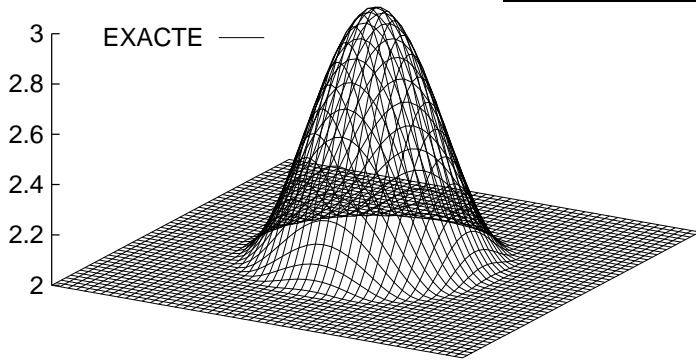


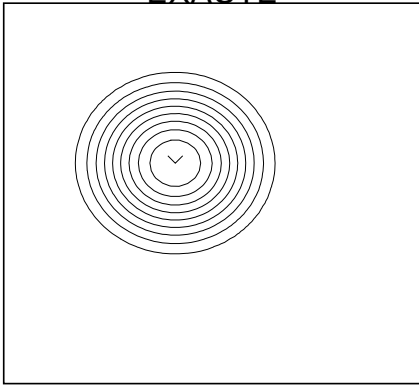
FIG.E:

Parcours de la cloche dans le plan (x, y) . Instant photos.
Les effets dispersifs perceptibles.

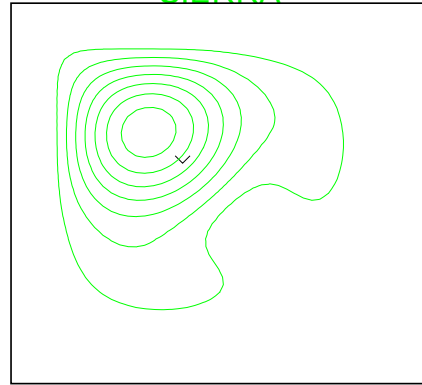
CLOCHE APRES ROTATION ENTIERE

1/4 DE CERCLE - ISOS (2.1 par pas de 0.1)

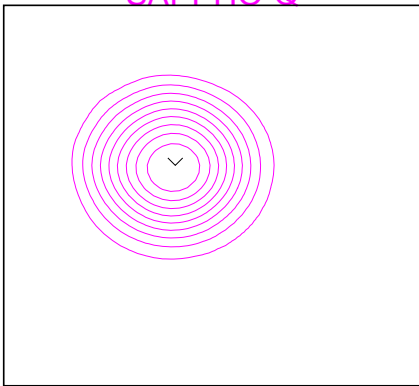
EXACTE



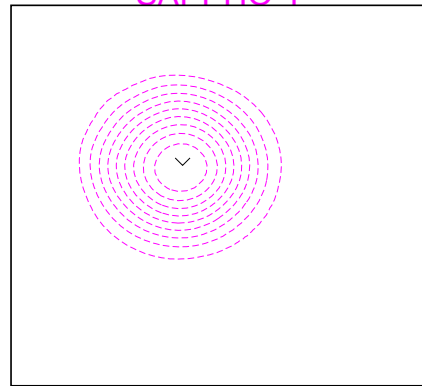
SIERRA



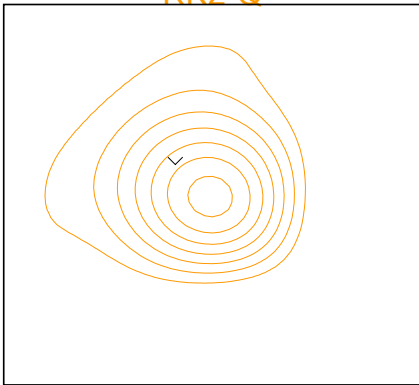
SAPPHO-Q



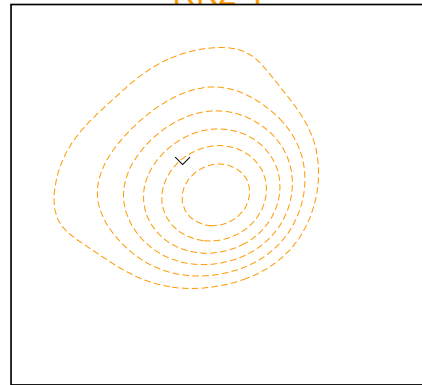
SAPPHO-T



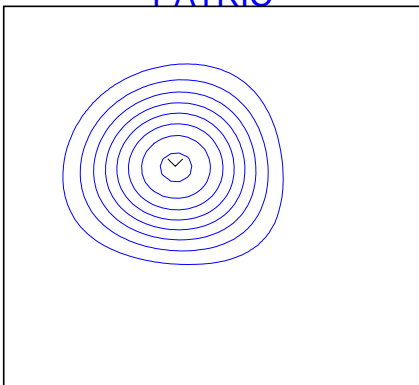
RK2-Q



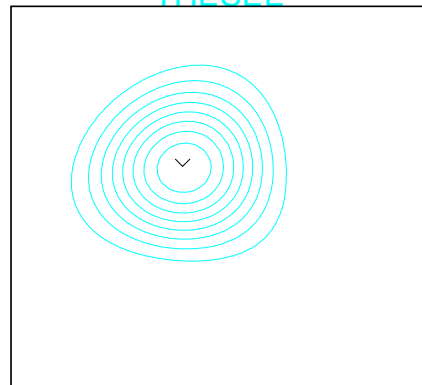
RK2-T



PATRIC

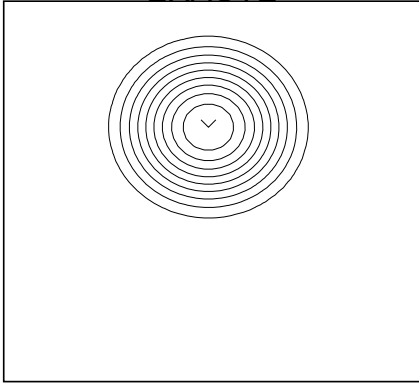


THESEE

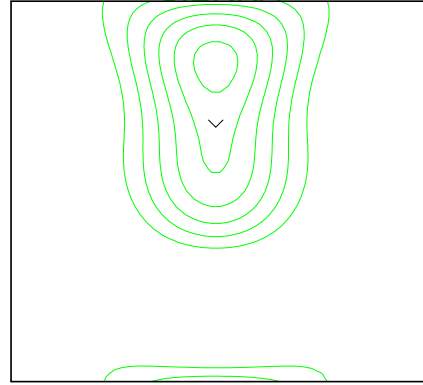


1/2 CERCLE - ISOS (2.1 par pas de 0.1)

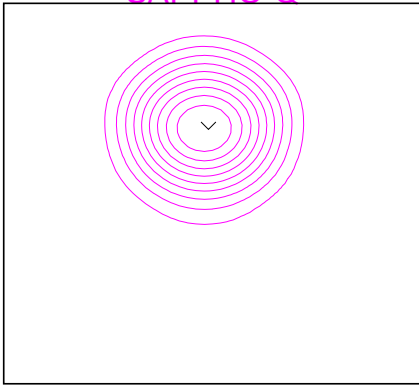
EXACTE



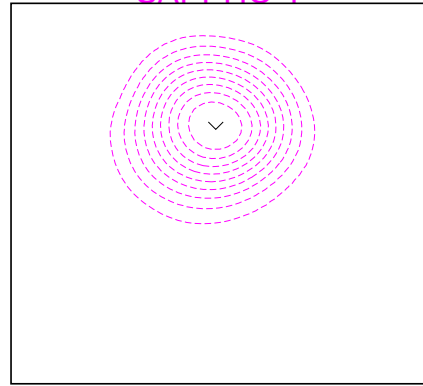
SIERRA



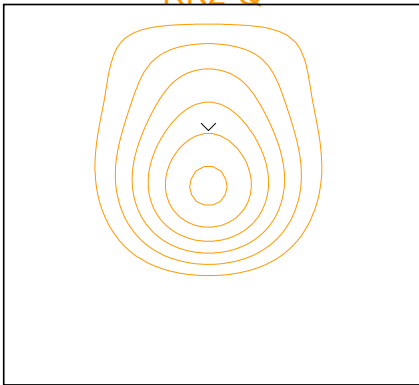
SAPPHO-Q



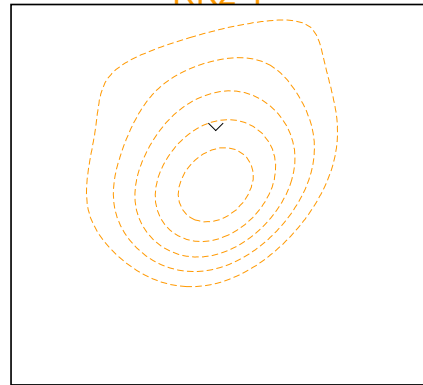
SAPPHO-T



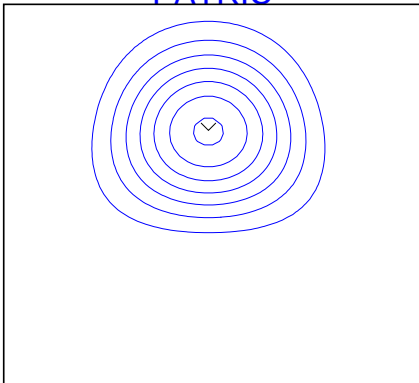
RK2-Q



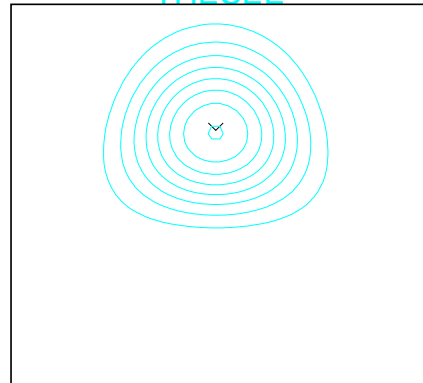
RK2-T



PATRIC

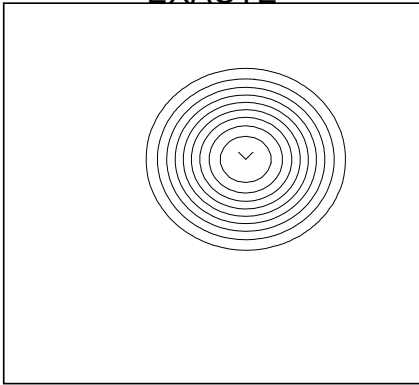


THESEE

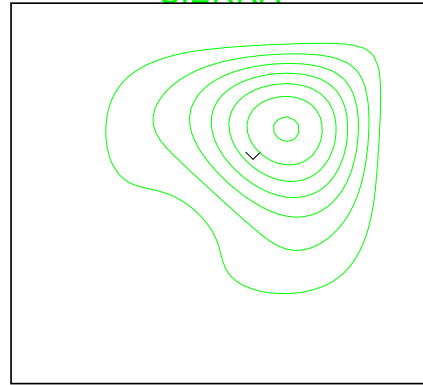


3/4 DE CERCLE - ISOS (2.1 par pas de 0.1)

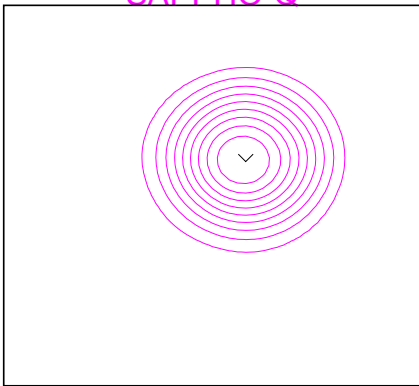
EXACTE



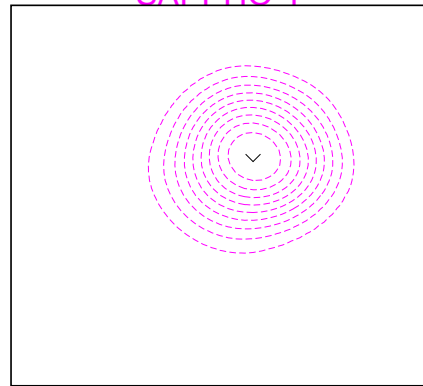
SIERRA



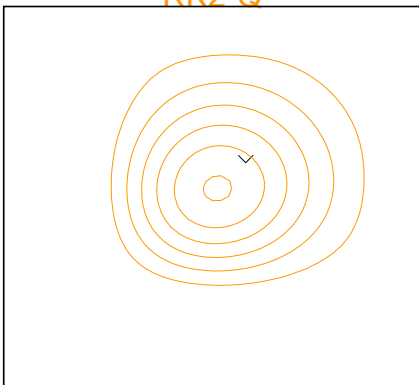
SAPPHO-Q



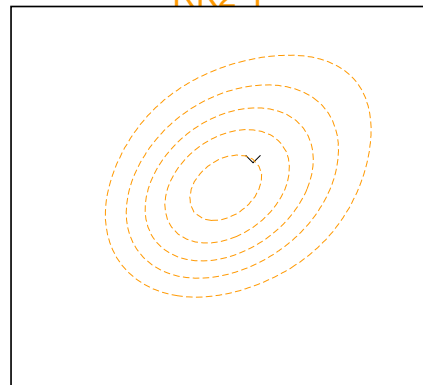
SAPPHO-T



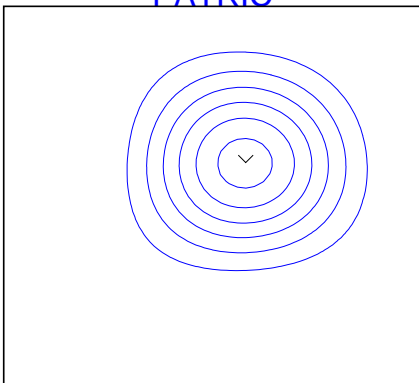
RK2-Q



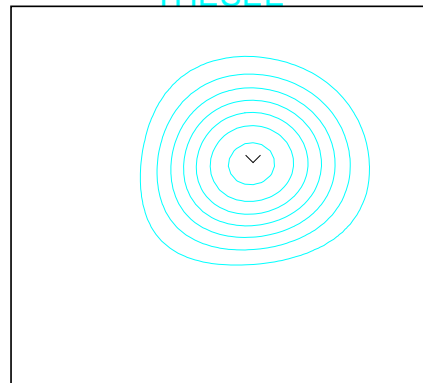
RK2-T

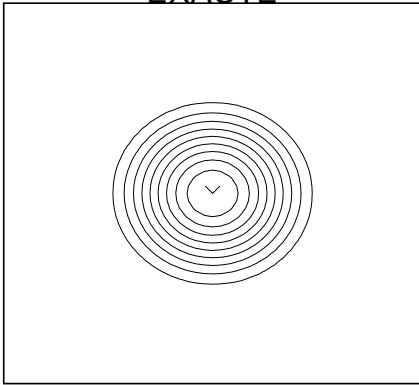
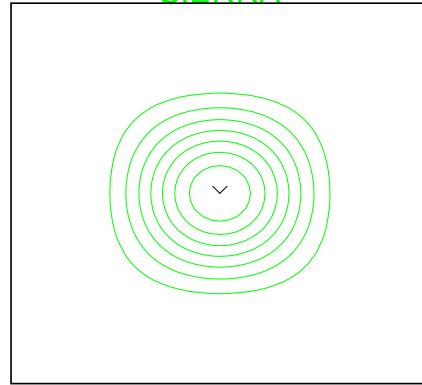
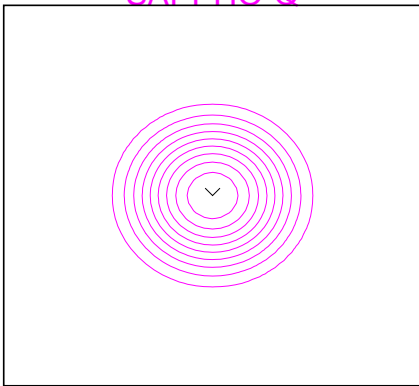
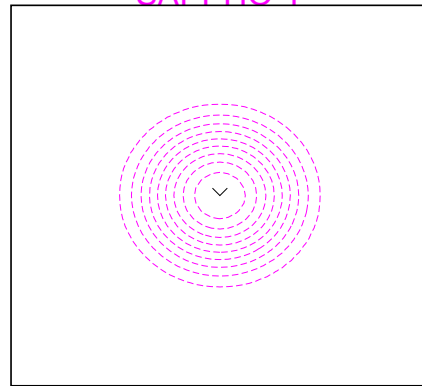
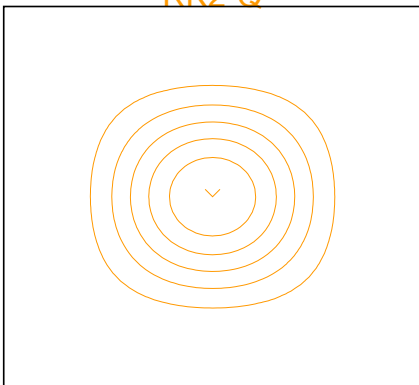
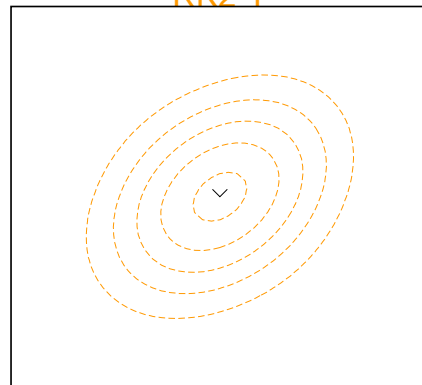
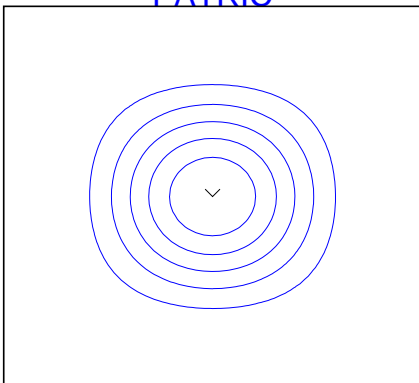
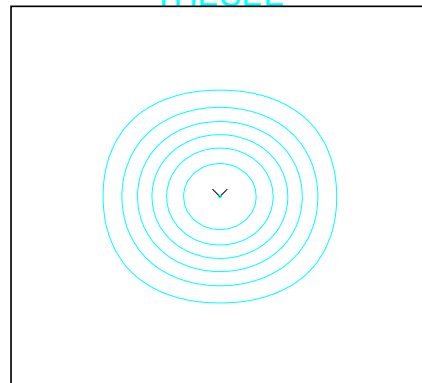


PATRIC



THESEE



CERCLE COMPLET - ISOS (2.1 par pas de 0.1)**EXACTE****SIERRA****SAPPHO-Q****SAPPHO-T****RK2-Q****RK2-T****PATRIC****THESEE**

6 ERREURS EXACTES

Il est possible de connaître les erreurs exactes d'un schéma numérique pour une configuration Ω , θ , ξ donnée; les autres paramètres: c , Δ (etc...) étant fixés. Les représentations générales des erreurs exactes demanderaient donc 4 dimensions ce qui justifie l'approche précédente où ξ vérifiait la condition (102) et où nous avons un regard plus orienté sur θ (angle d'advection) et Ω (direction perpendiculaire aux isovaleurs du mode de Fourier considéré). Maintenant, par l'expression des erreurs exactes que nous allons formuler plus bas, nous allons nous fixer des couples (θ_0, Ω_0) qui se sont dénotés lors de l'étude précédente et donner en fonction de ξ l'évolution de ces erreurs exactes.

6.1 Domaine de variation de $\Delta\xi$

Récrivons l'état initial (2) en utilisant (102):

$$U_0 = A \cos 2\pi \left\{ \frac{\Delta}{\lambda} (j \cos \Omega + k \sin \Omega) \right\} \quad (115)$$

Nous recherchons le plus petit λ_{min} qui satisfasse la condition de périodicité de (115) et qui ait 2 points de discrétisations pour rendre compte de son existence (signal en "dent de scie"). Celà s'écrit:

$$\lambda_{min} = 2\Delta(\cos \Omega + \sin \Omega) \quad (116)$$

Nous constatons donc que la plus petite longueur d'onde λ_{min} envisageable est fonction de la direction Ω du mode de Fourier.

Si nous traduisons (116) en $\Delta\xi$, variable de la fonction gain G , nous obtenons:

$$\Delta\xi_{max} = \frac{2\pi\Delta}{\lambda_{min}} = \frac{\pi}{\cos \Omega + \sin \Omega} \quad (117)$$

De l'autre côté, n'étant pas limité par le maillage sur la longueur d'onde λ_{max} , nous obtenons un $\Delta\xi_{min}$ de valeur nulle.

Ainsi, le domaine de variation de $\Delta\xi$ se limite à:

$$\Delta\xi \in \left[0, \frac{\pi}{\cos \Omega + \sin \Omega} \right]. \quad (118)$$

6.2 Expressions des erreurs exactes

\mathcal{G} mesurant l'erreur dissipative (100) est donné par $\|G\|$ pour un temps $t = \Delta t$. L'erreur de phase totale est donnée par $Arg(G)$ pour un temps $t = \Delta t$.

$$Arg(G) = c\Delta t[-\xi \cos(\Omega - \theta) + \mathcal{P}] \quad (119)$$

Nous avons, du paragraphe 3, les expressions de G pour chacun des schémas. Reste à les interpréter...

Si \mathcal{G} , facteur multiplicatif de l'amplitude initiale du mode de Fourier considéré est très explicite, $Arg(G)$ mesurant la phase totale (119) l'est nettement moins dans le sens où, par l'advection envisagée, nous avons déjà un terme de phase... Il est proposé de transcrire cette phase en déplacement superfétatoire D_s^* avec notion d'avance ou de retard, à l'image de ce qui a été fait au paragraphe précédent.

$$D_s^* = \frac{s}{\Delta\xi} \{Arg(G) + \Delta\xi \cos(\Omega - \theta)\} \quad \text{avec: } s = \text{signe}[\cos(\Omega - \theta)] \quad (120)$$

Par l'expression (120), nous mesurons, en unité Δ , le déplacement positivement si avance, négativement si retard.

Par ailleurs, plutôt que donner \mathcal{G} et D_s^* en fonction de l'argument $\Delta\xi$, il paraît plus intéressant de donner ces valeurs en fonction de la longueur d'onde λ exprimée à son tour en unité Δ .

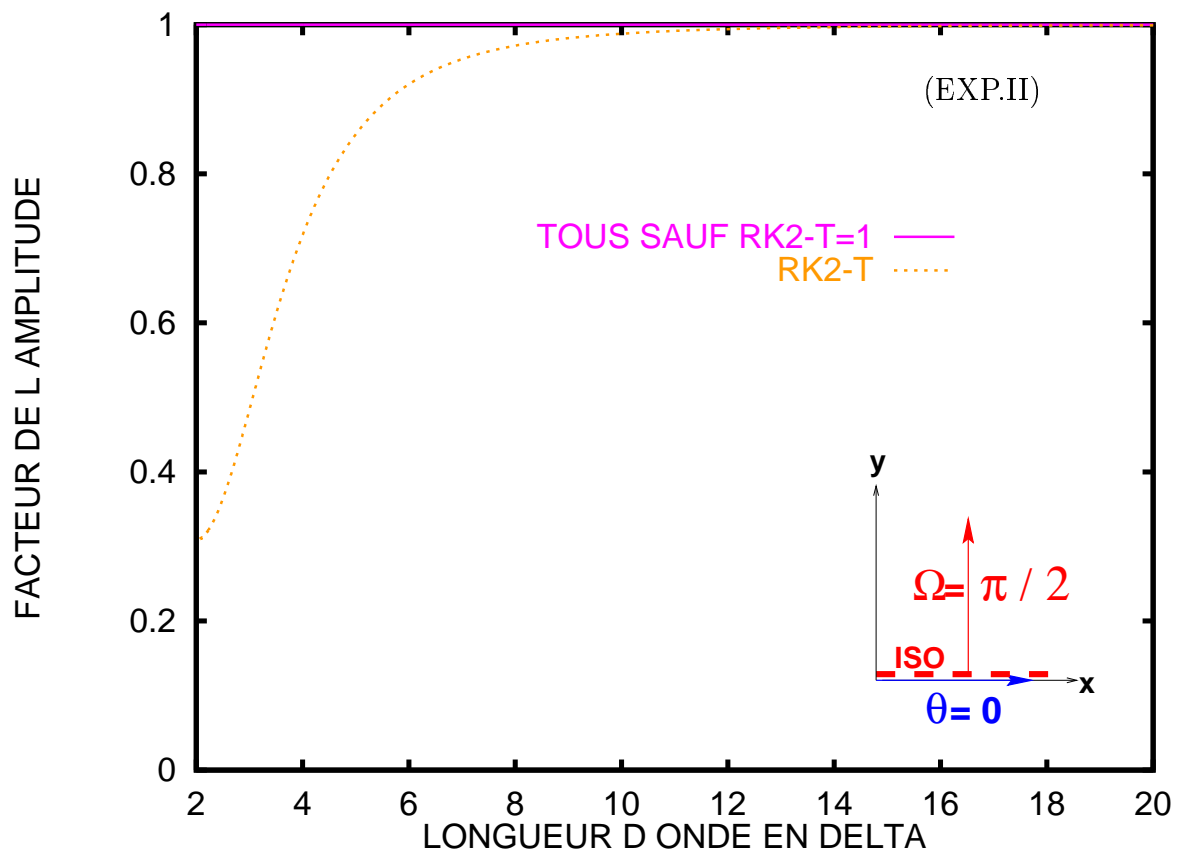
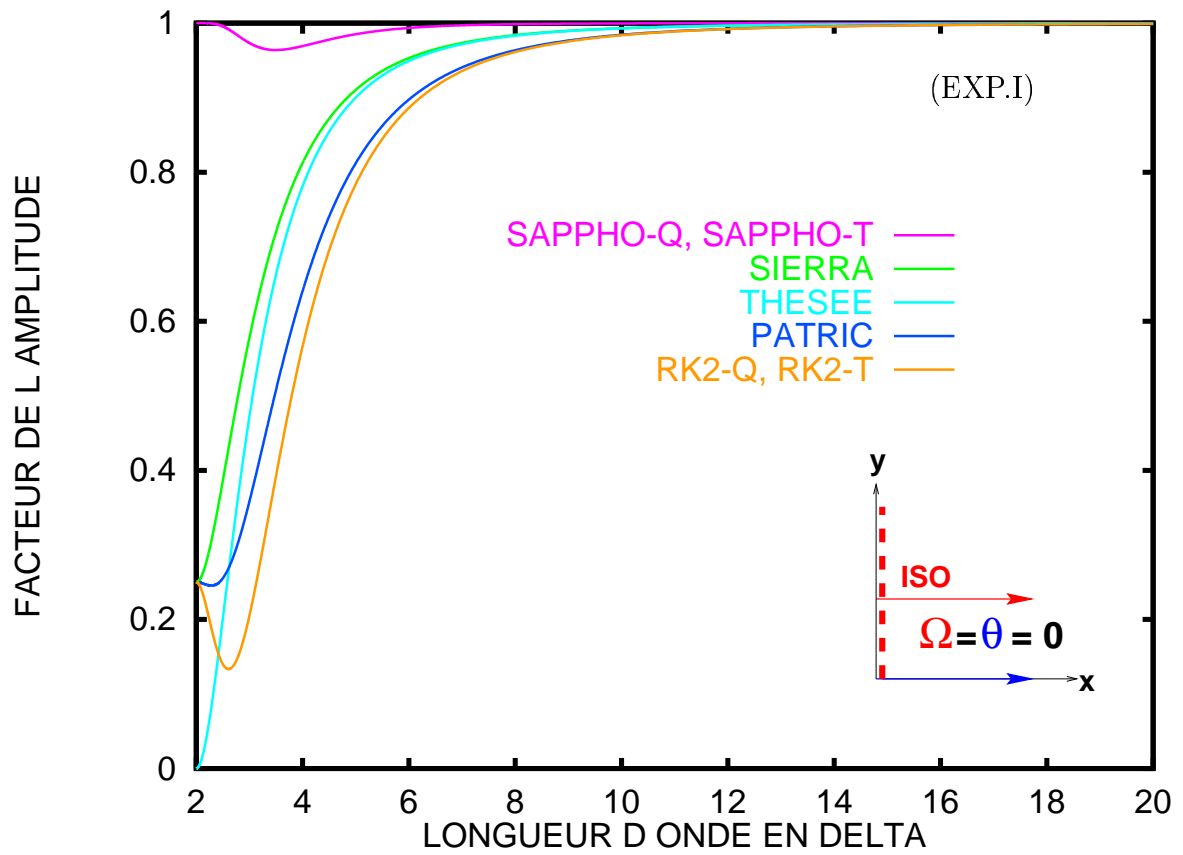
$$\lambda(\Delta) = \frac{2\pi}{\Delta\xi} \quad (121)$$

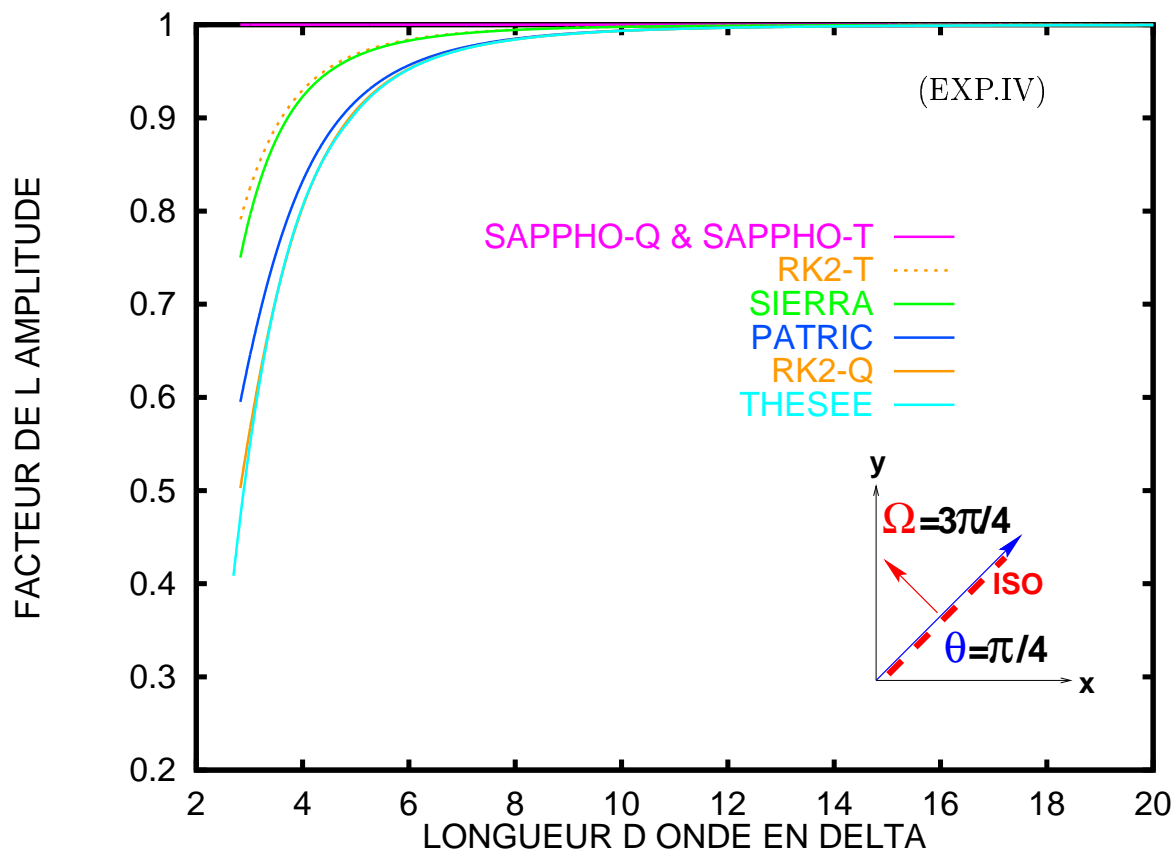
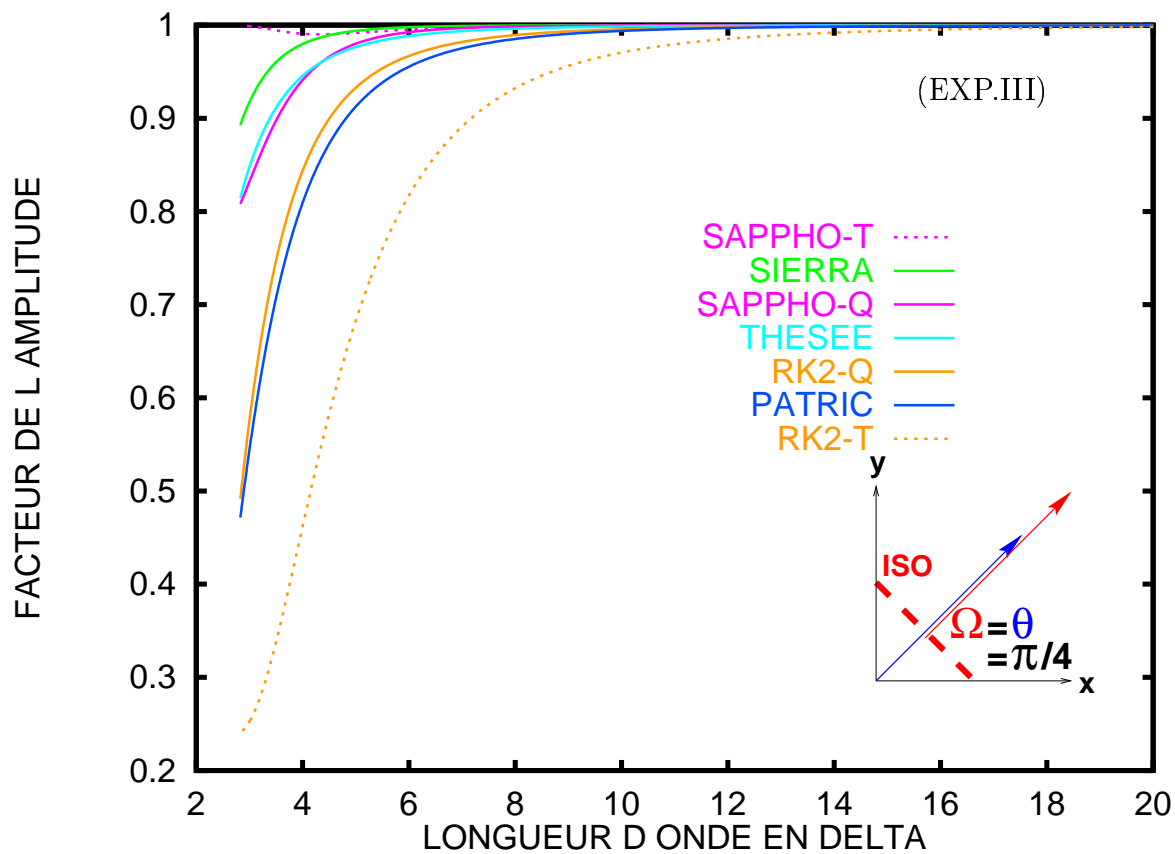
De l'expression (121), il est clair que l'on ne pourra pas représenter une longueur d'onde infinie, c'est à dire ξ tendant vers 0. Ceci à été déjà considéré au paragraphe précédent et est sans comparaison avec les erreurs exactes pour de faibles longueurs d'ondes. En conséquence, nous ferons varier $\lambda(\Delta)$ de $\lambda_{min}(\Delta)$ à $20(\Delta)$.

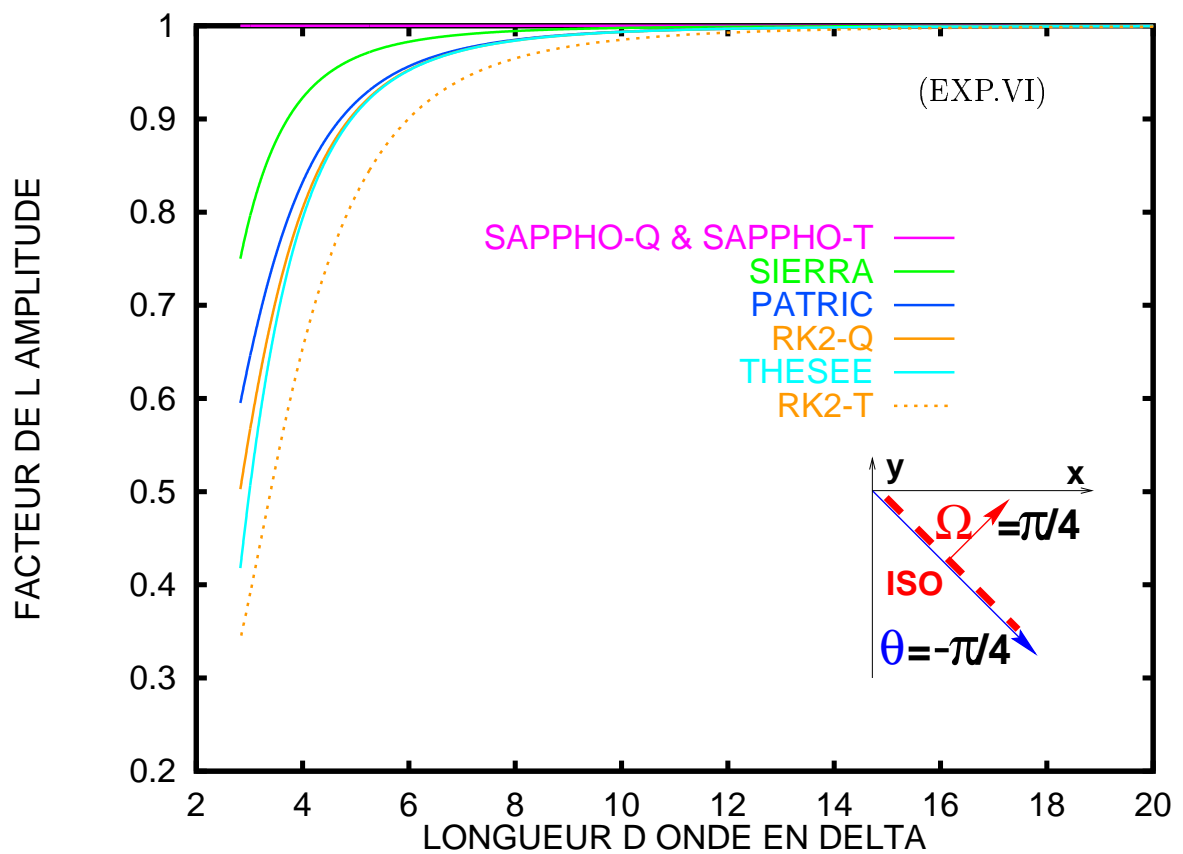
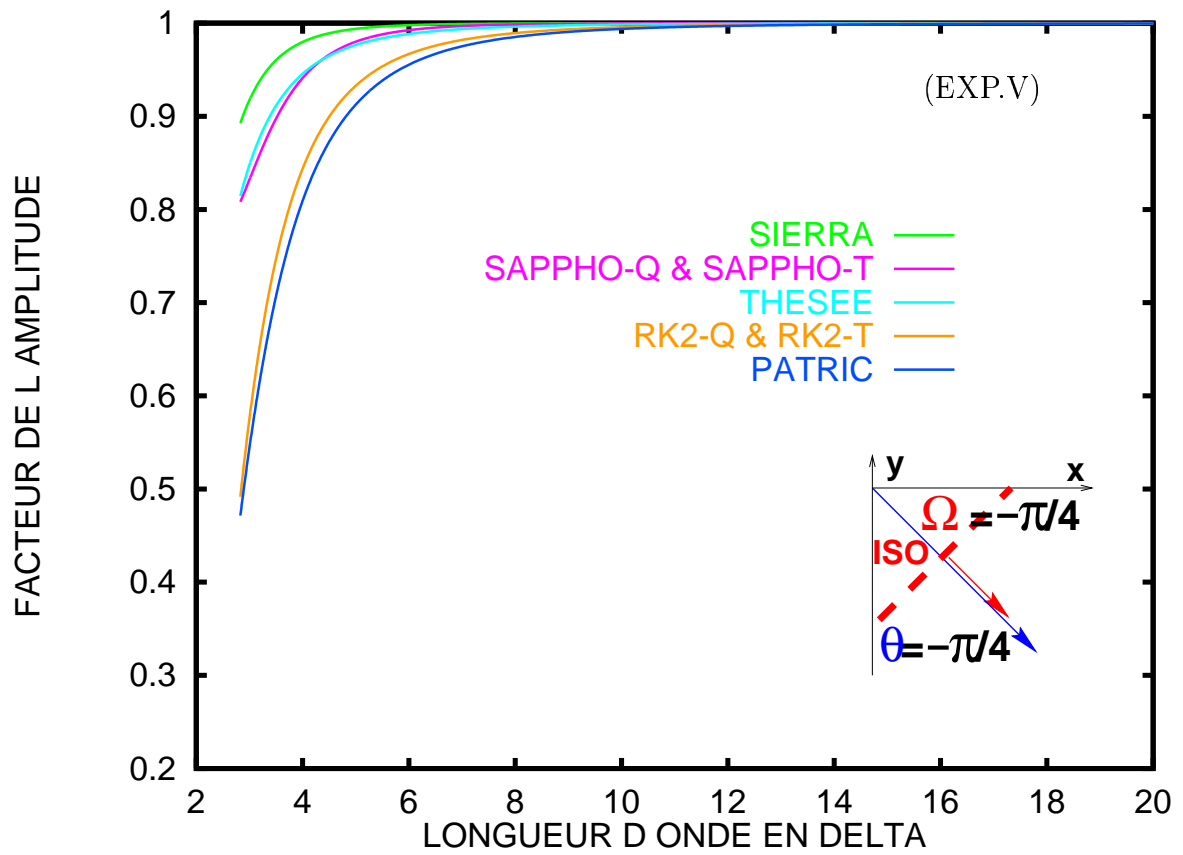
Reprenons maintenant les couples (θ_0, Ω_0) des expériences I à VIII dans les deux prochains sous paragraphes, où les angles (θ_0, Ω_0) seront rappelés par leur schéma symbolique.

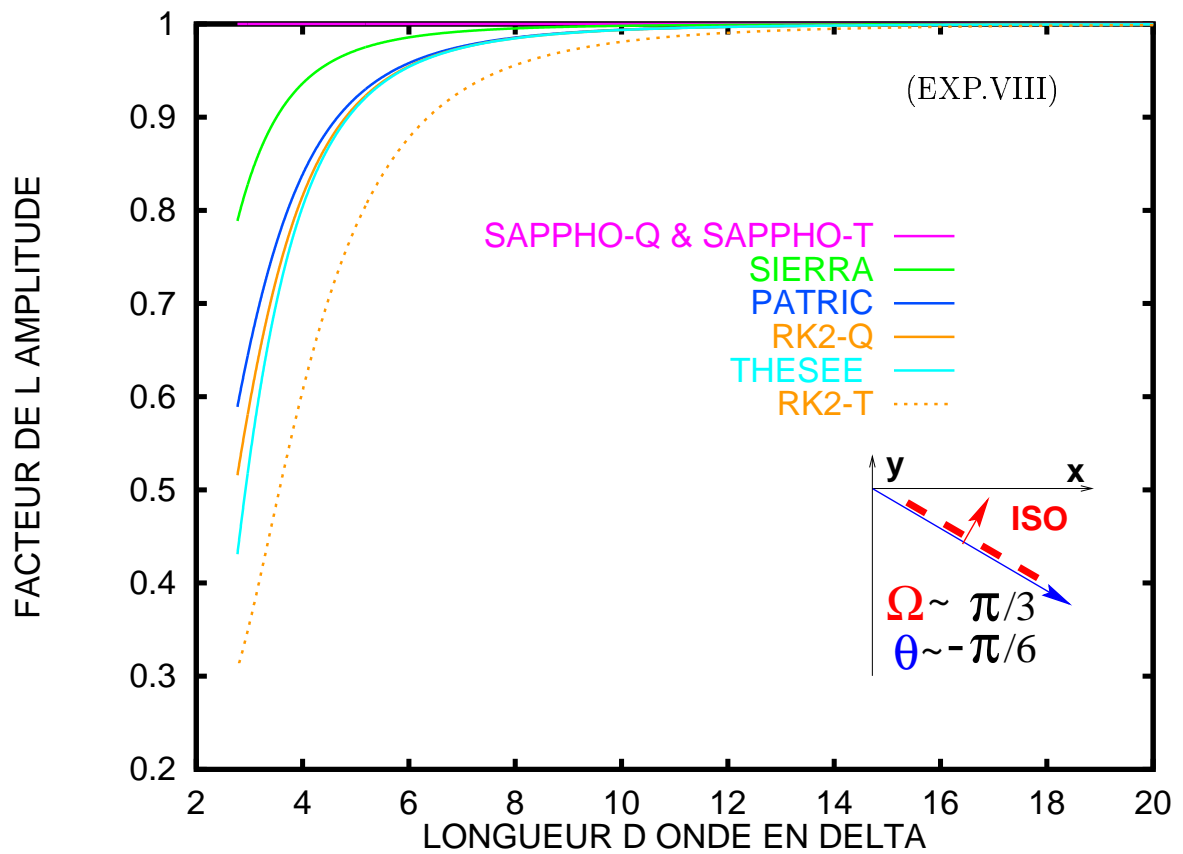
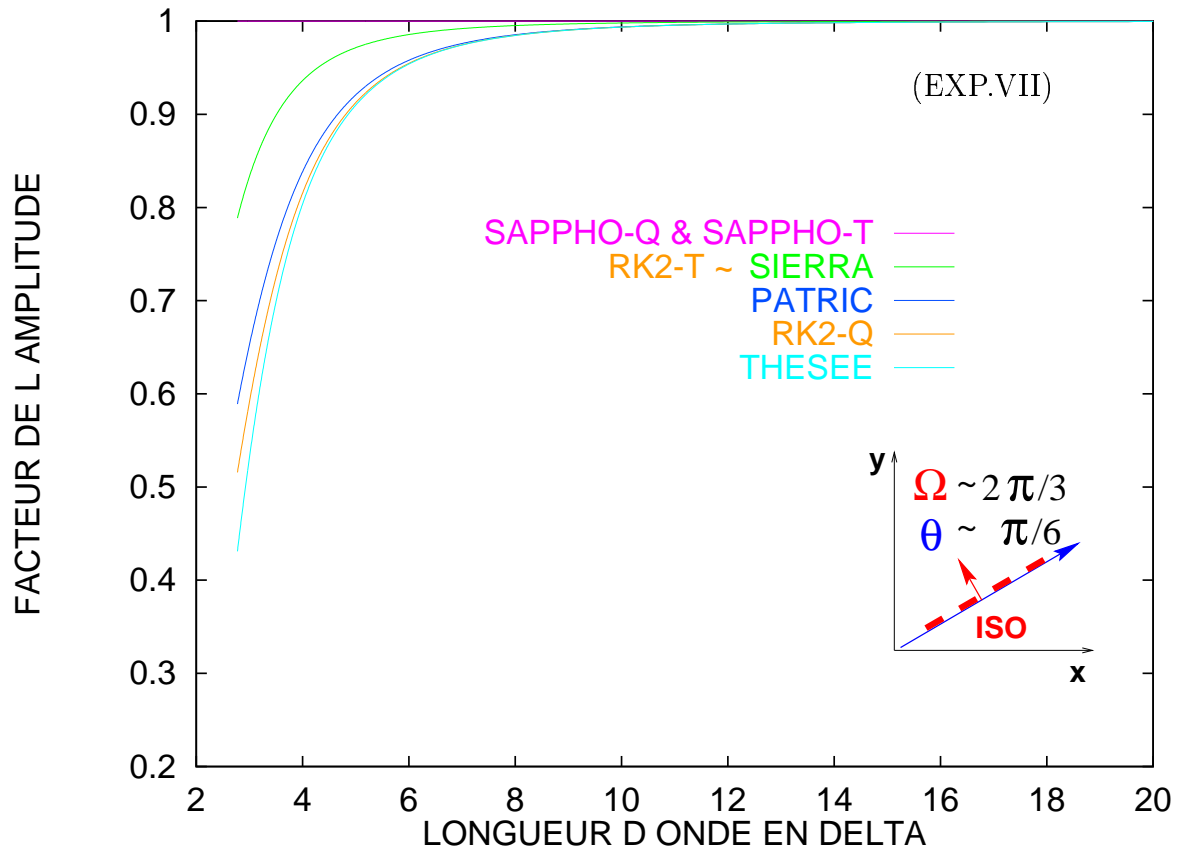
6.3 La dissipation exacte

Représentation de $\mathcal{G}_{(\theta_0, \Omega_0)}(\lambda)$...







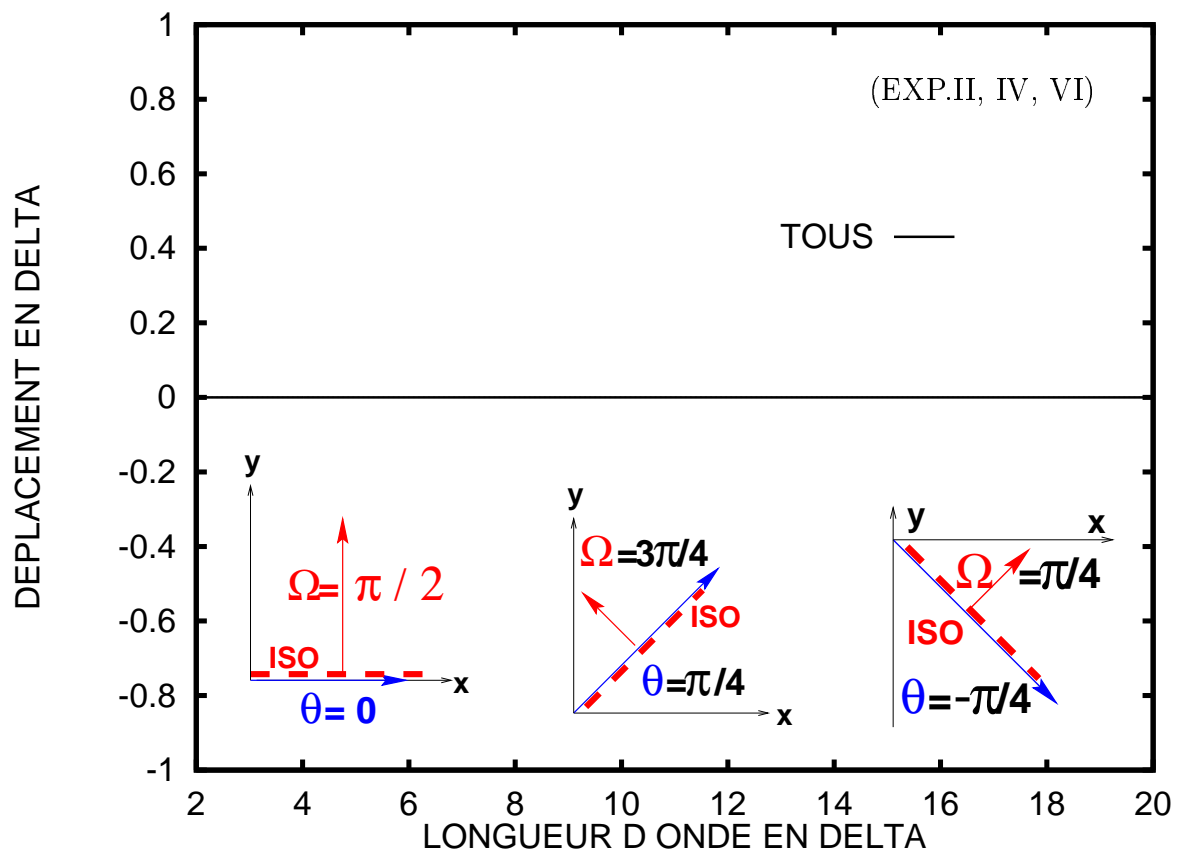
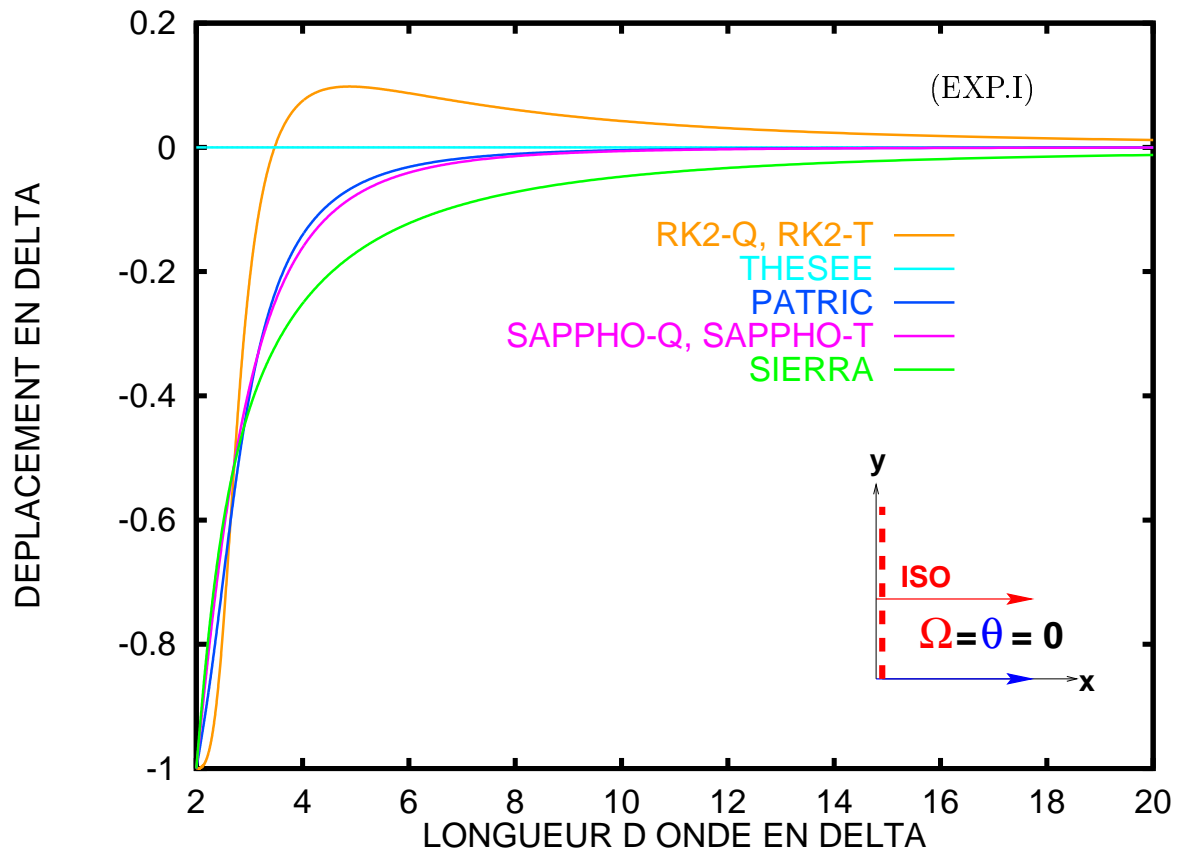


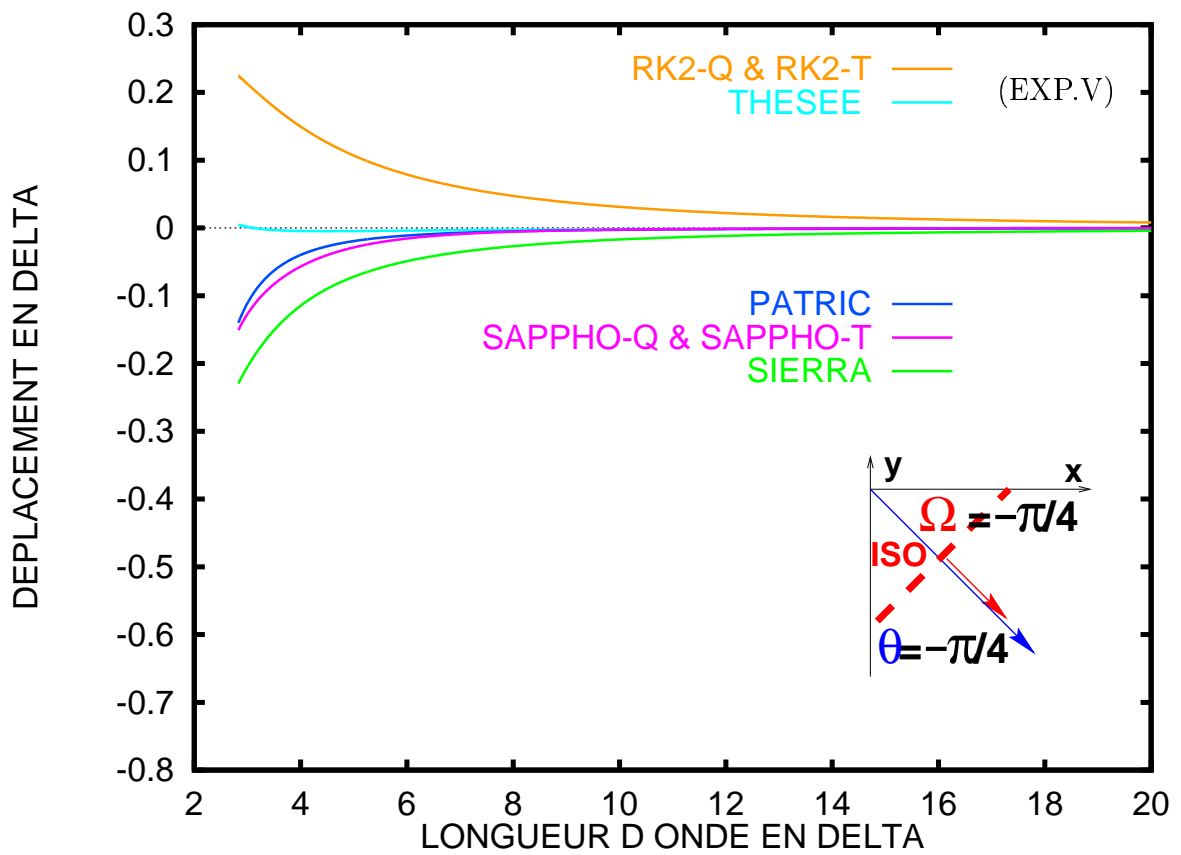
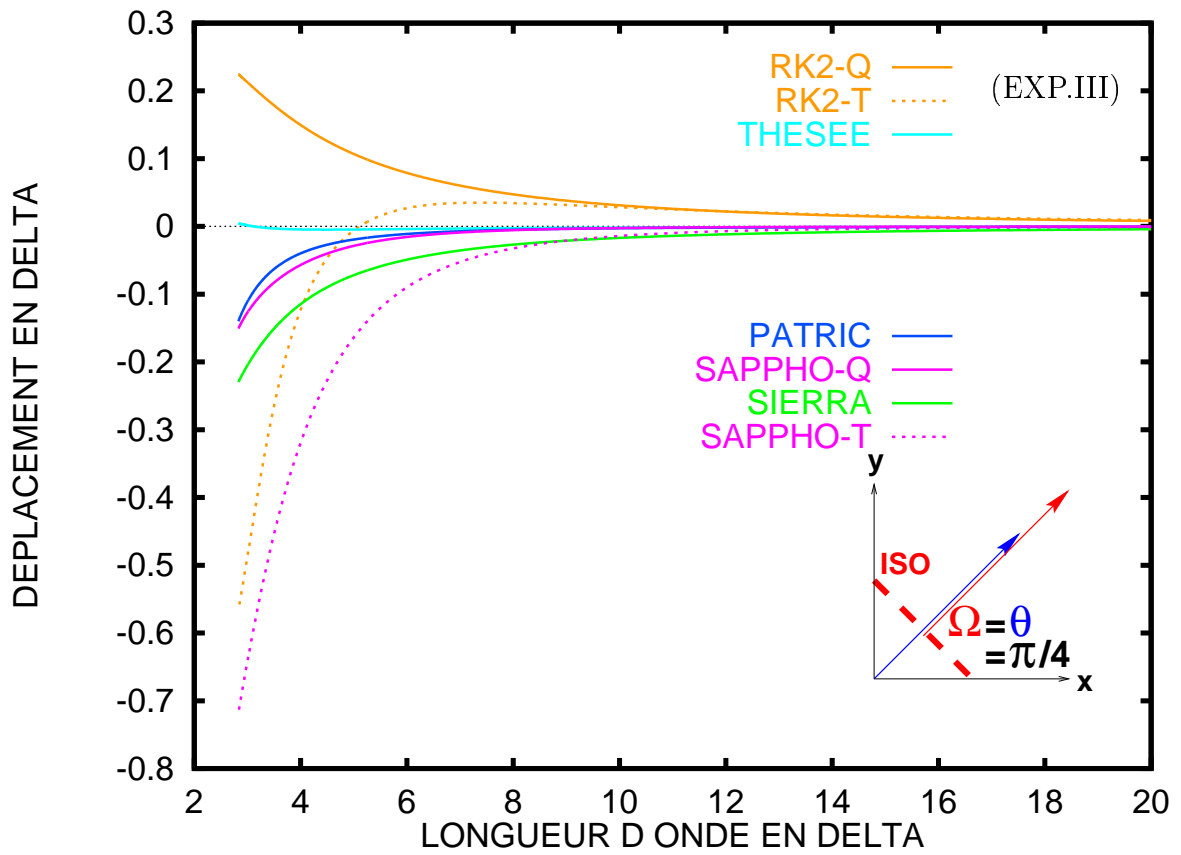
TENTATIVE DE NOTATION SUR LA DISSIPATION PORTANT SUR DE COURTE LONGUEUR D'ONDE							
$\Omega = \theta$	SAP.T	SAP.Q	SIER.	THE.	PAT.	RK.Q	RK.T
$\theta = 0$	++++	++++	--	----	--	--	--
$\theta = \frac{\pi}{4}$	++++	+++	++++	+++	p -	p -	---
$\theta = -\frac{\pi}{4}$	+++	+++	++++	+++	p -	p -	p -
$\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$	SAP.T	SAP.Q	SIER.	THE.	PAT.	RK.Q	RK.T
$\theta = 0$	++++	++++	++++	++++	++++	++++	-
$\theta = \frac{\pi}{4}$	++++	++++	++	p -	+	p +	+++
$\theta = -\frac{\pi}{4}$	++++	++++	++	p -	+	p +	-
$\theta \simeq \frac{\pi}{6}$	++++	++++	+++	p -	+	p +	+++
$\theta \simeq -\frac{\pi}{6}$	++++	++++	+++	p -	+	p +	-

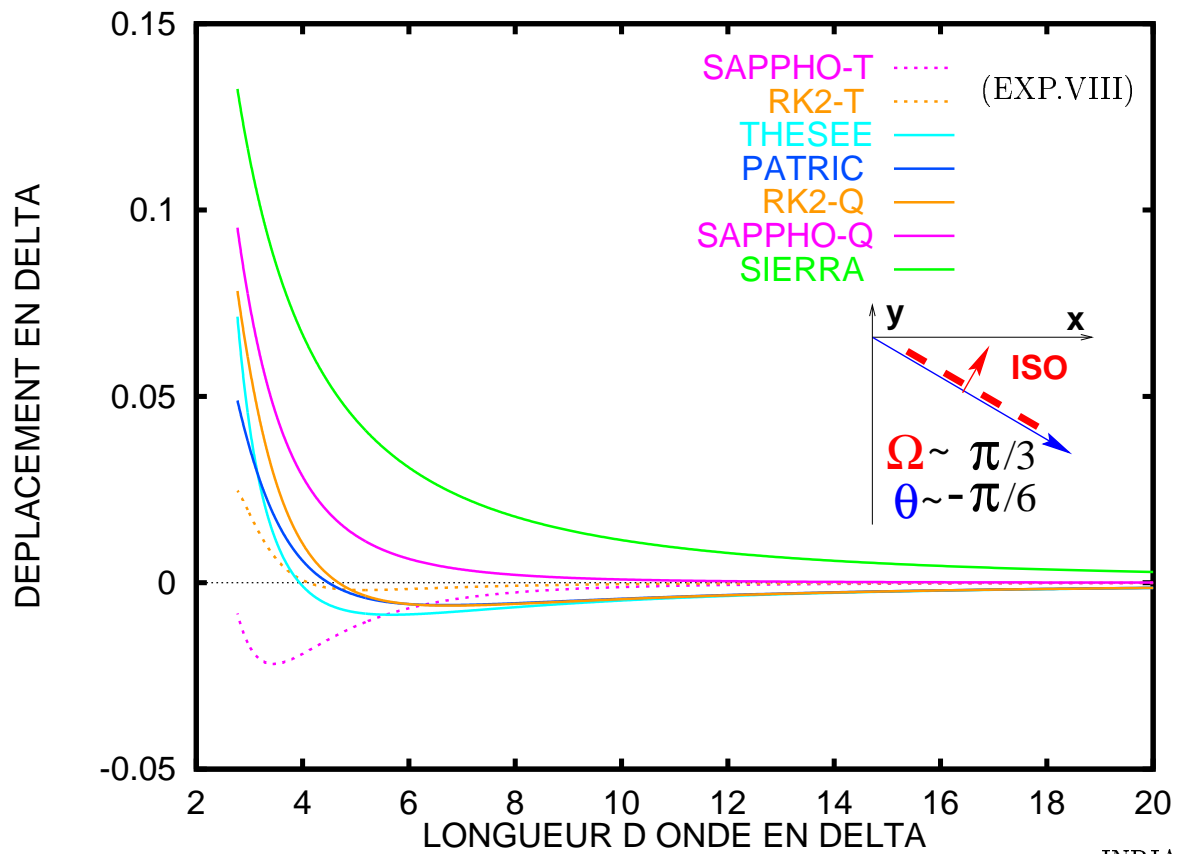
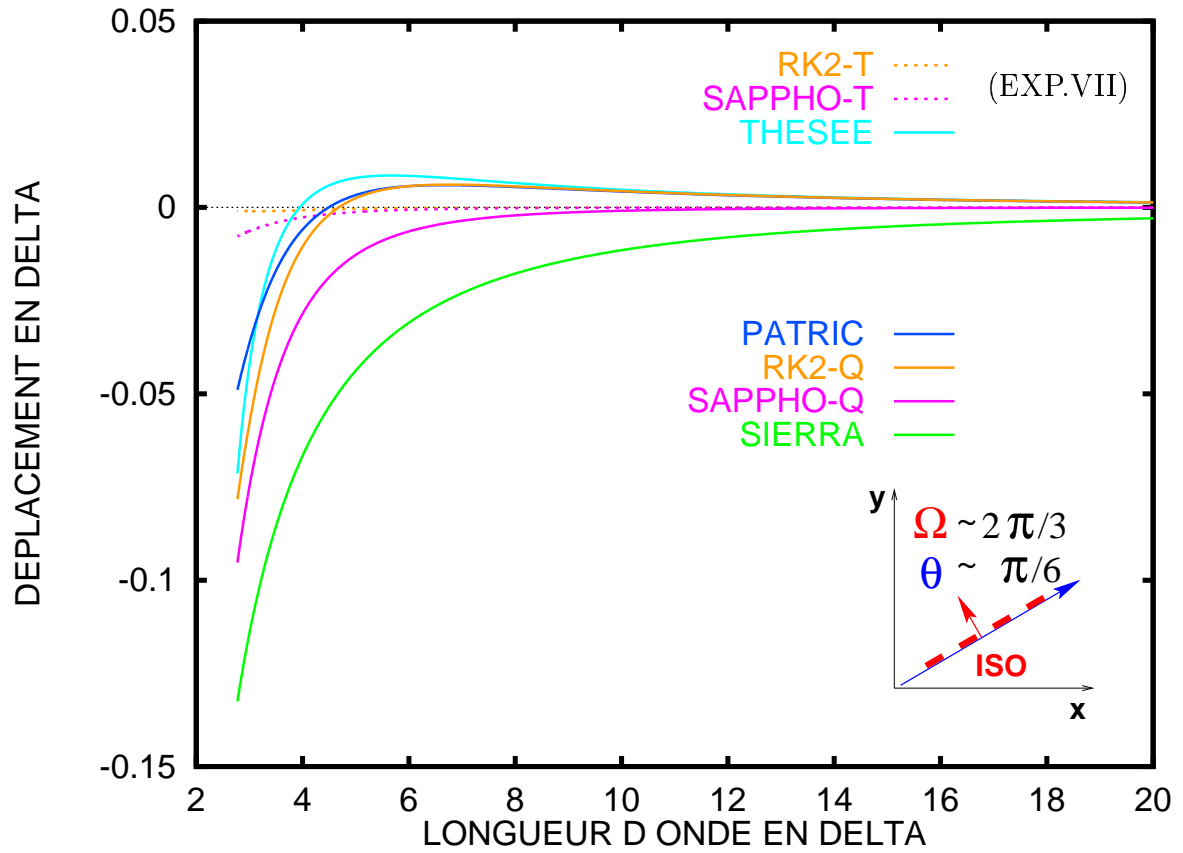
- Les codes SAPPHO restent bons lorsque $\Omega = \theta$ voire excellents lorsque $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$.
- Le code SIERRA est sur l'ensemble très peu dissipatif.
- Pour les codes THESEE, PATRIC et RK2-Q, la dissipation obtenue est sur l'ensemble moyenne. Il faut noter le défaut de THESEE qui fait disparaître le mode de plus courte longueur d'onde pour $\Omega = \theta = 0$! (nécessité d'un maillage fin selon x) (EXP.I).
- Pour le code RK2-T, la dissipation est assez importante et se ressent d'autant plus que l'isovaleur du mode de Fourier est perpendiculaire à la direction des hypothénuses des triangles du maillage ($\Omega = \frac{\pi}{4}$) (EXP.III, EXP.VI). Par ailleurs, le code RK2-T se différencie nettement de tous les autres codes par une dissipation lorsque l'advection se fait selon l'axe des x ($\theta = 0$) alors que le mode est selon y ($\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$)! (nécessité d'un maillage fin en y) (EXP.II).

6.4 La dispersion exacte

Représentation de $D_s^*(\lambda)$...







– $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$

Il est surprenant de s'apercevoir que l'isovaleur d'un mode de Fourier glissant sur elle-même a la faculté de se mouvoir par le biais de l'erreur de dispersion. Il est alors difficile de parler d'avance ou de retard puisque D_e est nul.

Ce phénomène ne se rencontre pas lorsque $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}(\dots)$ (EXP.II, EXP.IV, EXP.VI) comme nous le constatons lors du calcul approché de la dispersion. Cependant, il est bien présent pour tout autre angle (EXP.VII et EXP.VIII) avec, dans l'ordre du meilleur au plus mauvais: (SAPPHO-T \sim RK2-T), PATRIC, THESEE, RK2-T, SAPPHO-Q, SIERRA.

– $\Omega = \theta$

– $\theta = 0$ (EXP.I)

Les plus grosses erreurs sont commises dans les directions x et y . Elles consistent, pour tous les codes (sauf THESEE), à prendre un retard d'une demi longueur d'onde! Le code THESEE, lui, est parfait, sauf que dans ce cas de figure, il faut se rappeler qu'il a dissipé complètement le mode de Fourier de plus courte longueur d'onde!

Si les codes PATRIC et SAPPHO retardent moins que le code SIERRA, il faut noter le comportement dangereux des codes RK2-Q et RK2-T qui est d'avancer pratiquement tous les modes de Fourier mais de retarder les plus petites longueurs d'ondes!

– $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Le code THESEE opère pratiquement sans dispersion, les codes PATRIC et SAPPHO retardent un peu moins que le code SIERRA alors que les codes RK2-Q et RK2-T réalisent une avance similaire en valeur absolue de à l'erreur de SIERRA.

– $\theta = \frac{\pi}{4}$

Nous avons le même constat qu'à l'item précédent ormis pour les codes opérant sur maillage triangulaire. SAPPHO-T retarde violemment et RK2-T passe dans les plus courtes longueurs d'ondes d'une tendance à l'avance à celui d'un retard important.

6.5 Validation numérique

Nous effectuons de nouveau le cas test de la cloche rotative sur chacun des schémas (114). Cette fois-ci, nous prenons un rayon r de la cloche de 0.06 tenant sur seulement 3 mailles. En conséquence, les modes de Fourier d'un tel état initial sont fort mal discrétisés et de petites longueurs d'ondes par rapport au maillage. Comme nous venons de le constater, les erreurs

dispersives et dissipatives sont plus importantes. La rotation est donc effectuée en seulement 1200 itérations soit un cercle parcouru de périmètre 6 (**FIG.F**).

ROTATION DE LA CLOCHE		
CODES	MIN	MAX
EXACTE	2.000	3.000
SAPPHO-T	1.972	2.468
SAPPHO-Q	1.971	2.448
SIERRA	1.982	2.176
THESEE	1.989	2.133
RK2-Q	1.990	2.103
PATRIC	1.991	2.102
RK2-T	1.995	2.088

Nous constatons **page 74** où nous représentons les cloches après une rotation entière un effet dissipatif très important. Nous avons dans le tableau des valeurs extrémales une perte d'amplitude de 50 à 60% pour les codes SAPPHO, 82% pour SIERRA, 87% pour THESEE, 90% pour RK2-Q et PATRIC, et 91% pour RK2-T! C'est dire d'ores et déjà l'incapacité des codes numériques présentés ici à réaliser un calcul fiable sur un maillage trop grossier par rapport à la physique que l'on veut percevoir. En conséquence, le classement dans le tableau des schémas par la dissipation n'est plus qu'un podium de la médiocrité...

Sur les **pages 75 à 78**, nous représentons les isolignes de valeurs: 2.05, 2.15, 2.30, 2.60. L'erreur de dissipation est telle qu'il a été nécessaire de descendre la première isoligne aussi bas. Ce fait, nous permet de constater l'effet Gibbs avec une réelle dislocation de la cloche pour se "reconstituer" après un tour complet... La figure **FIG.F** indique qu'effectivement, après une rotation complète, il n'y a plus d'erreur dispersive perceptible. Reste que durant le parcours, l'erreur est là encore considérable. En effet si l'on peut noter une différence entre les schémas par rapport à la trace qu'ils laissent par leur sommet au court du déplacement:

- SIERRA: retard,
- SAPPHO: petit retard,
- THESEE & PATRICK: au plus juste,
- RK2-Q & T: avance,

n'est pas montré sur la figure **FIG.F**, tous les modes de plus petites longueurs d'ondes de moindre amplitude et qui expliquent la dislocation de la cloche initiale. On peut voir ce phénomène principalement sur la **page 75** avec quelques isovaleurs bien à côté des isovaleurs des modes principaux. En conséquence, là encore, le classement donné n'est que l'ordre d'arrivée d'une "consolante"...

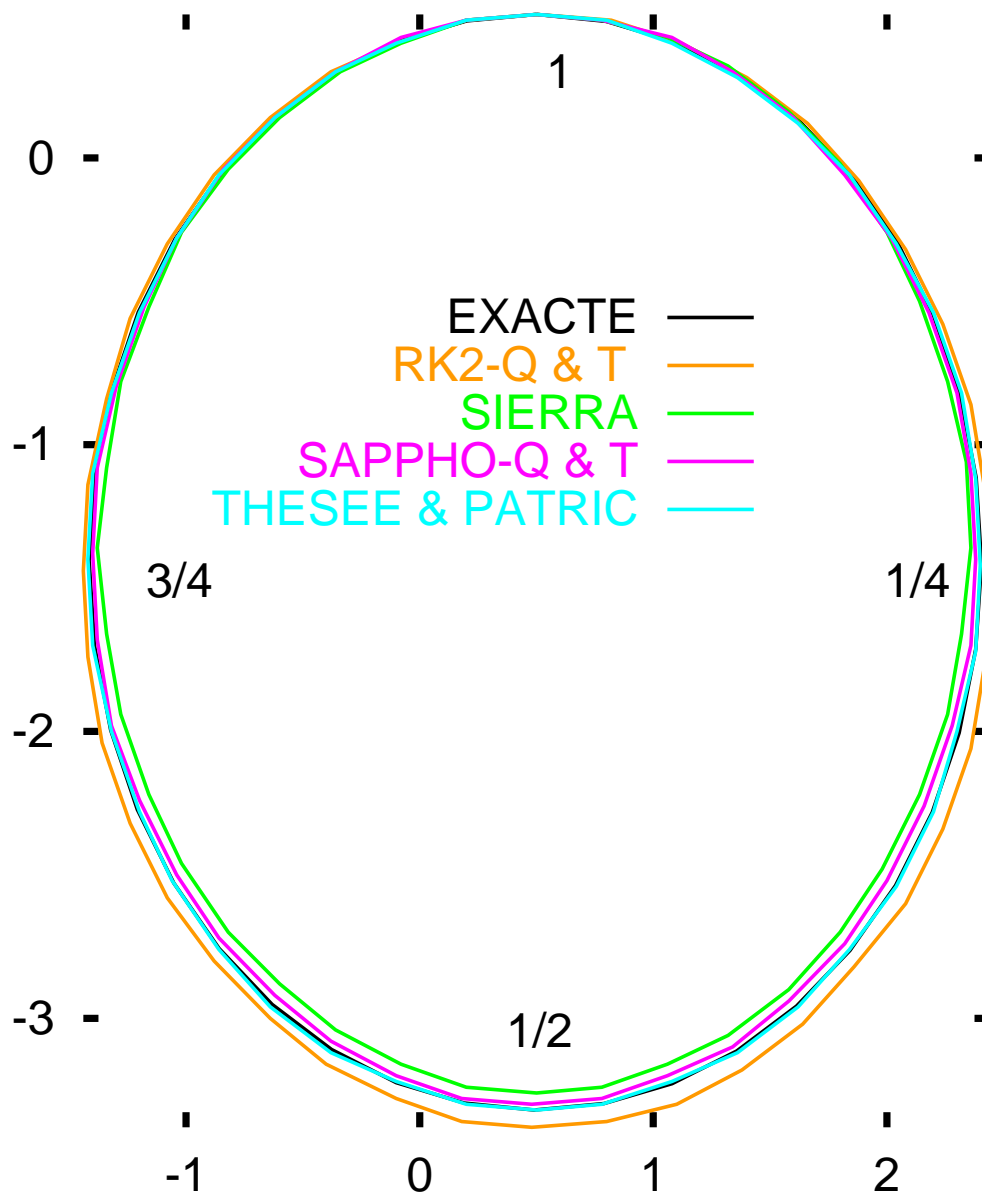
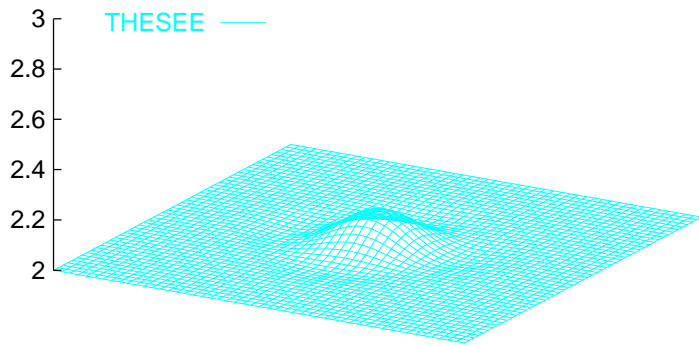
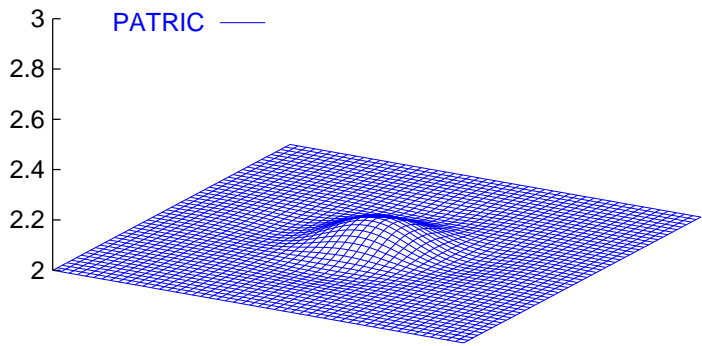
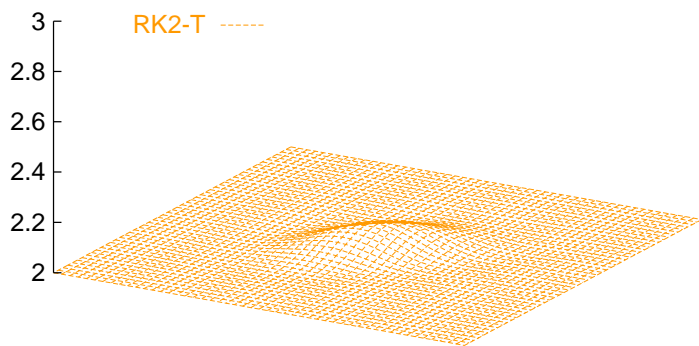
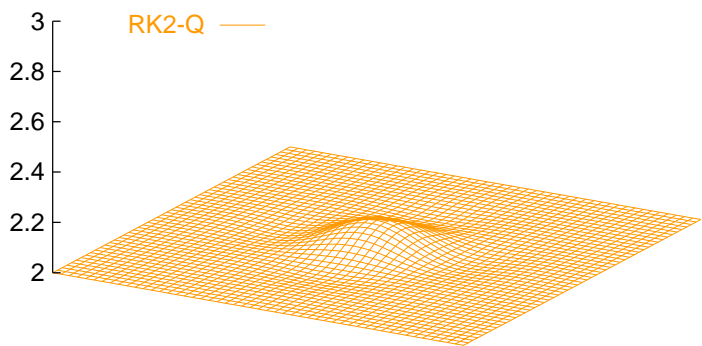
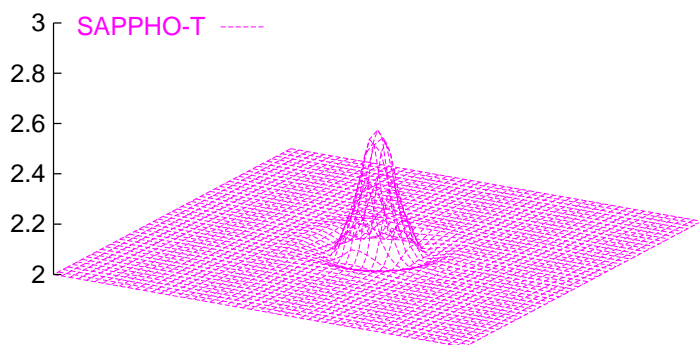
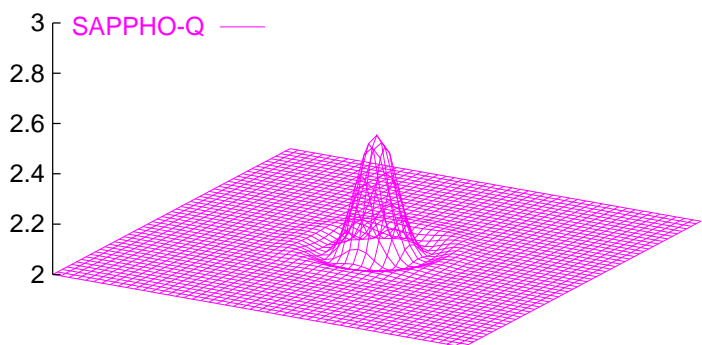
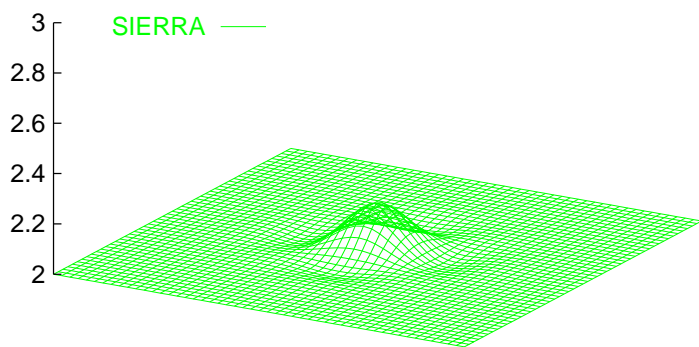
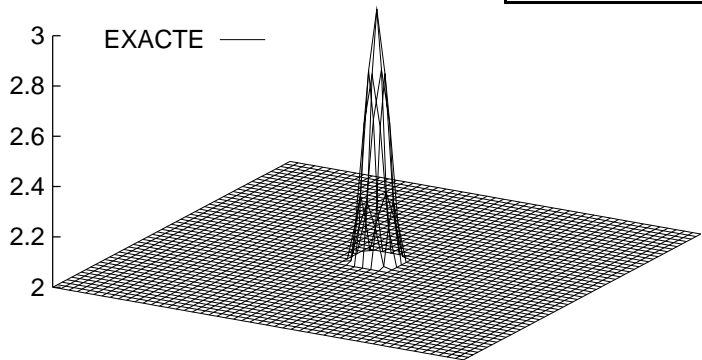


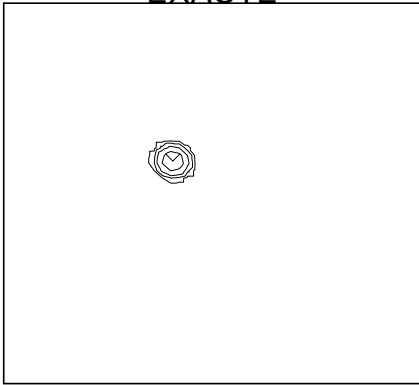
FIG.F:
Parcours de la cloche dans le plan (x, y) . Instant photos.
Les effets dispersifs perceptibles.

CLOCHE APRES ROTATION ENTIERE

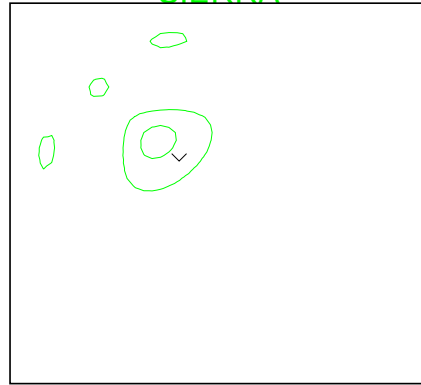


1/4 DE CERCLE - ISOS (2.05, 2.15, 2.30, 2.60)

EXACTE



SIERRA



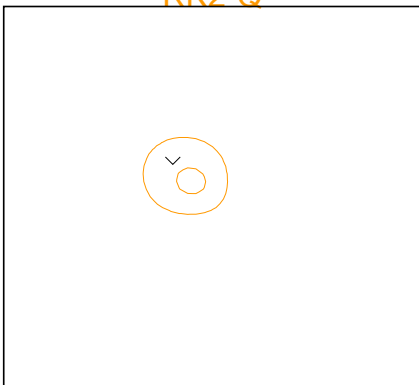
SAPPHO-Q



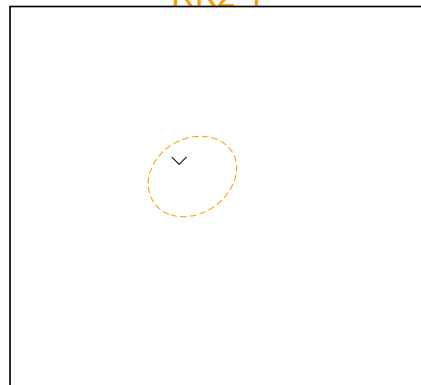
SAPPHO-T



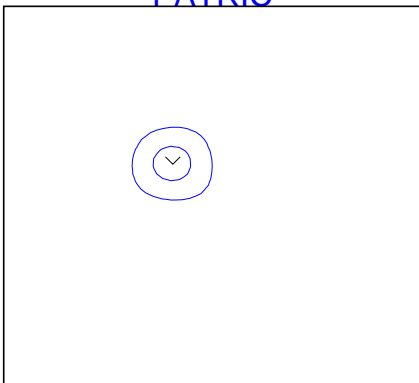
RK2-Q



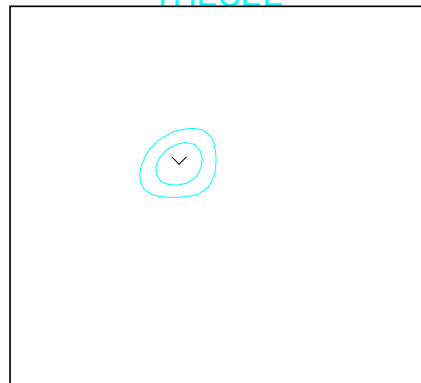
RK2-T



PATRIC

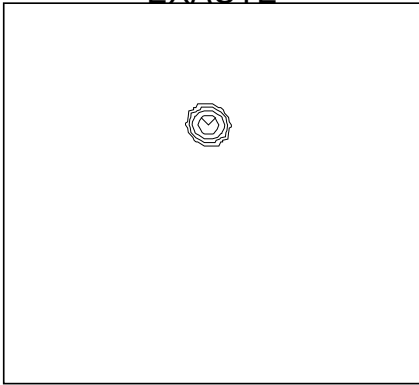


THESEE

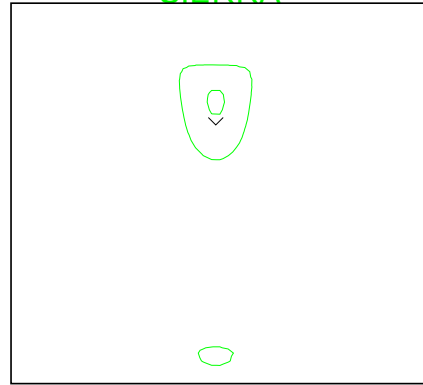


1/2 CERCLE - ISOS (2.05, 2.15, 2.30, 2.60)

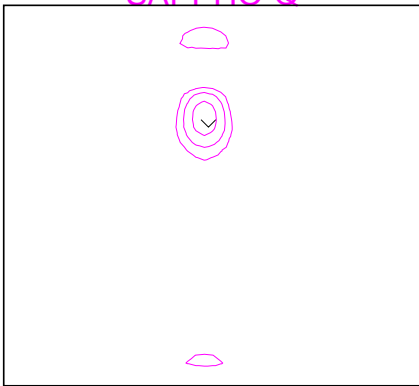
EXACTE



SIERRA



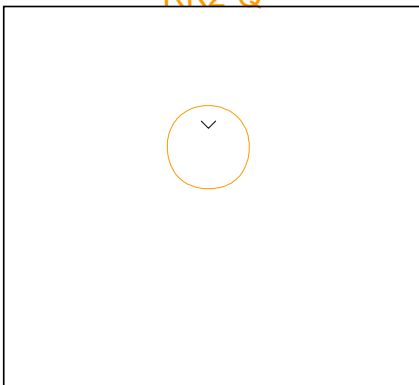
SAPPHO-Q



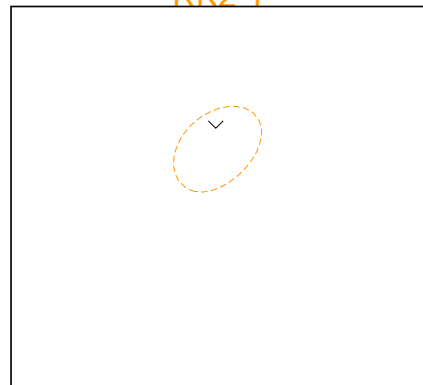
SAPPHO-T



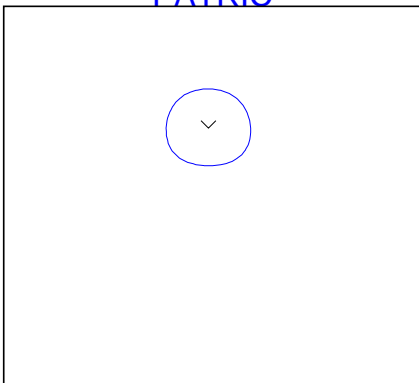
RK2-Q



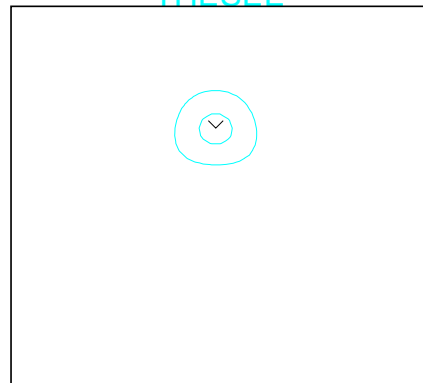
RK2-T



PATRIC

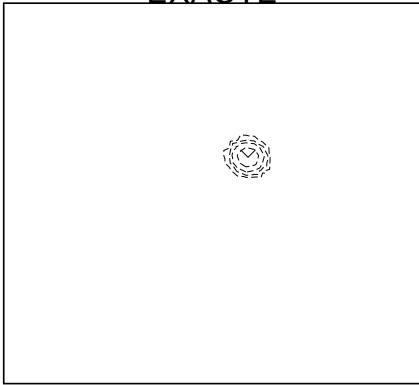


THESEE



3/4 DE CERCLE - ISOS (2.05, 2.15, 2.30, 2.60)

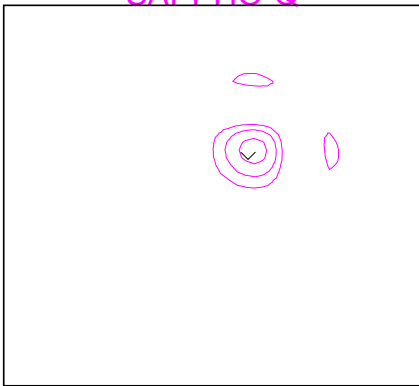
EXACTE



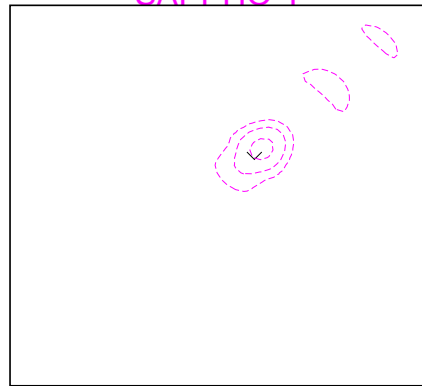
SIERRA



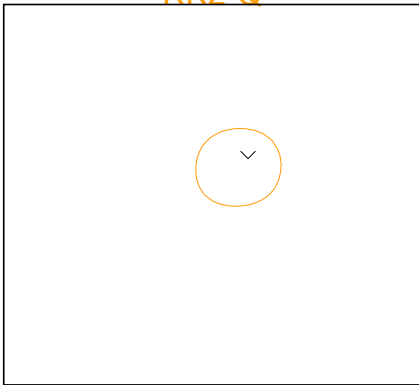
SAPPHO-Q



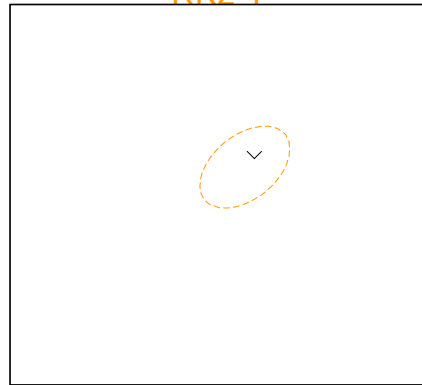
SAPPHO-T



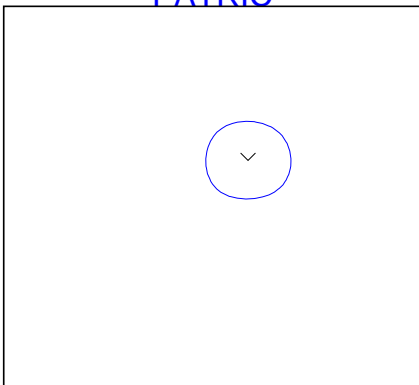
RK2-Q



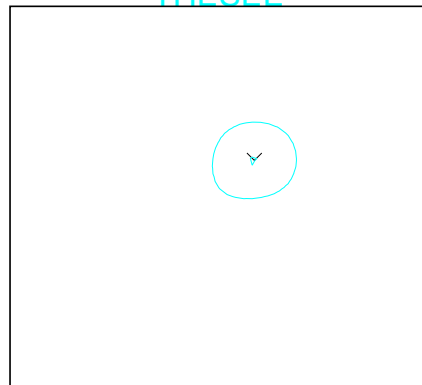
RK2-T



PATRIC

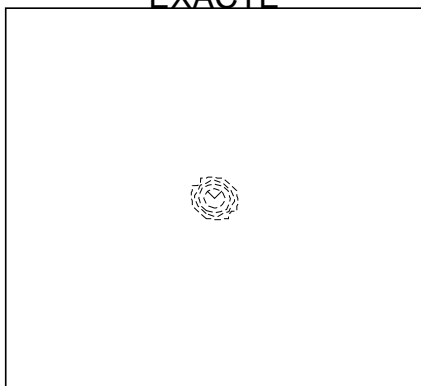


THESEE

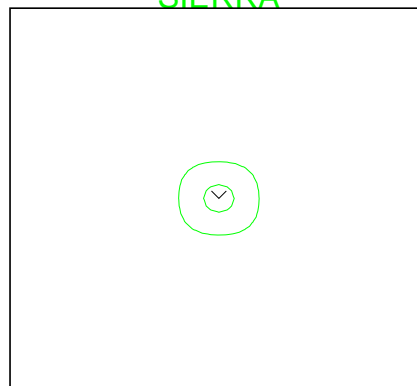


CERCLE COMPLET - ISOS (2.05, 2.15, 2.30, 2.60)

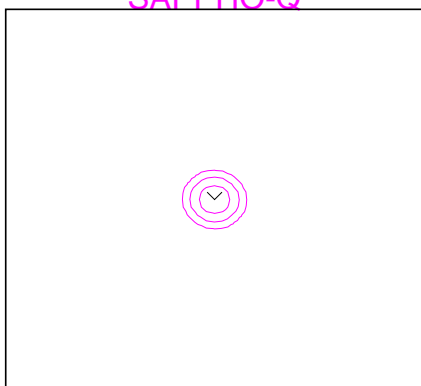
EXACTE



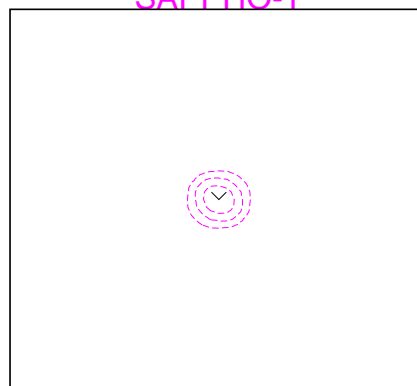
SIERRA



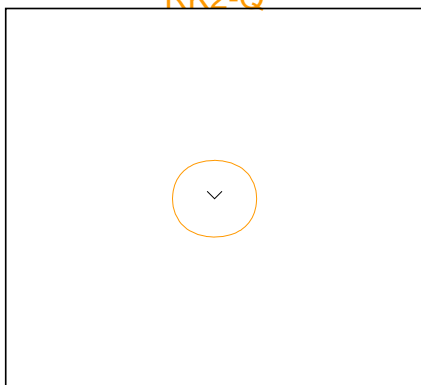
SAPPHO-Q



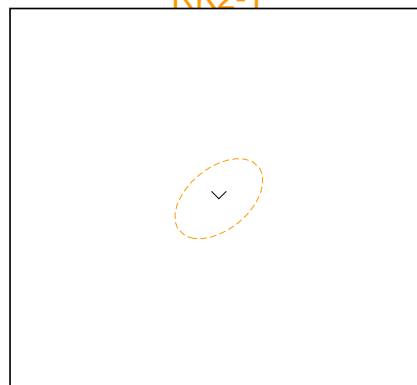
SAPPHO-T



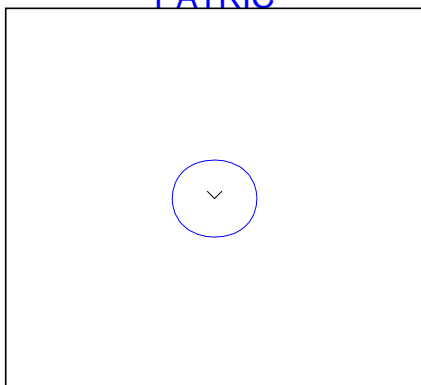
RK2-Q



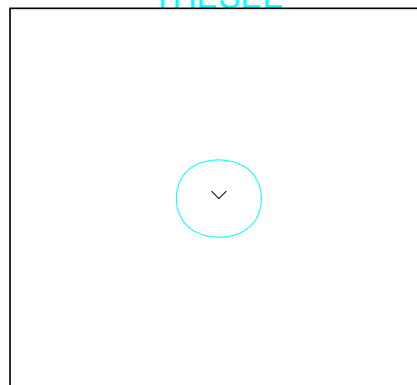
RK2-T



PATRIC



THESEE



7 CONCLUSION

L'étude présentée indique:

- qu'aucun des schémas étudiés n'est en mesure de pouvoir donner une solution correcte sur un maillage trop grossier par rapport à la longueur d'onde du phénomène que l'on veut observer. C'est ainsi que le schéma RK2-T (**FIG.5**), plus dissipatif que tous les autres, n'a pu rendre compte du phénomène de tourbillon détaché du cas test C1 de l'ONERA (**FIG.6**) [2, 3]. En effet, une instabilité infinitésimale selon l'axe y advectée suivant x et discrétisé en 30 points était tout de suite filtrée alors qu'elle perdurait pour tous les autres schémas.
- que pour des modes bien discrétisés, nous avons comme classement des schémas:
 - au niveau de la dissipation $O(3)$:
SAPPHO-Q & SAPPHO-T, SIERRA, THESEE, RK2-Q, PATRIC, RK2-T.
 - au niveau de la dispersion $O(2)$:
Forte avance: RK2-T.
Avance: RK2-Q.
Correcte: (SAPPHO-Q, SAPPHO-T), (PATRIC, THESEE).
Retard: SIERRA.
- que les codes PATRIC et THESEE sont peu dispersifs pour un nombre de Courant ν de **1**. Les codes SAPPHO sont indépendants d'une telle condition. Ils ont de bonnes performances surtout en dispersion car le paramètre γ des codes SAPPHO n'est pas réellement pris à 0 pour les équations d'Euler. Les codes SAPPHO sont donc présentés ici sous leur meilleure configuration.
Dans le cadre du cas test C1, deux fréquences peuvent être perçues [11] en fonction d'une infime avance **3600Hz** (**FIG.8**) ou d'un infime retard **2700Hz** (**FIG.7**). Ceci a pu être constaté par les codes SAPPHO et THESEE (le code PATRIC devrait pouvoir faire le même constat...) alors que le code SIERRA était rivé à la fréquence de 2700Hz tandis qu'à l'opposé le code RK2-Q n'obtenait que la fréquence de 3600Hz.
- que le code RK2-T est très sensible à l'orientation du mode de Fourier par rapport aux hypothénuses des triangles du maillage sur lequel il s'appuie et ce, pratiquement indifféremment de l'orientation de l'advection! Ceci se constate particulièrement sur l'erreur dissipative.
- qu'au point de vue de la stabilité, les codes SAPPHO sont les moins restrictifs sur le nombre de Courant ν .

LE CAS FATIDIQUE A RK2-T

EXACTE, TOUS SAUF RK2-T —
RK2-T —

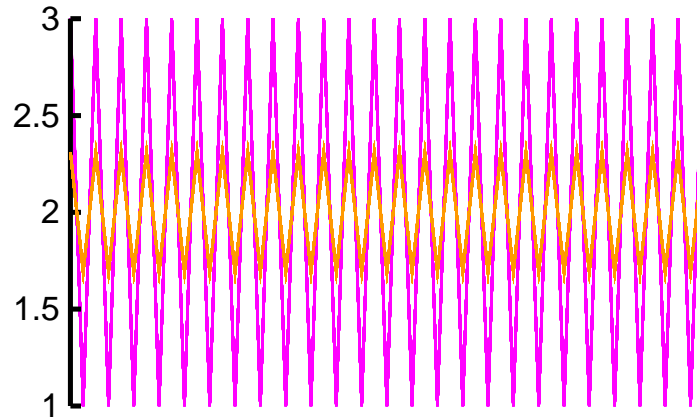


FIG.5: $\theta = 0$, $\Omega = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = 2\Delta$, $ct = \Delta$.

LE CAS TEST C1 DE L'ONERA

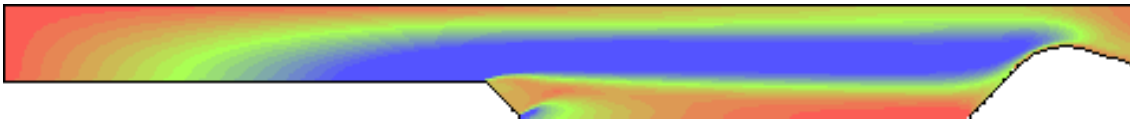


FIG.6 - RK2-T → solution STATIONNAIRE!?

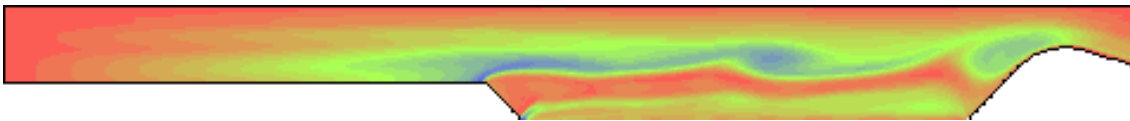


FIG.7 - SIERRA → solution INSTATIONNAIRE (2700HZ)?

SAPPHO, THESEE, PATRIC.
 ↑
 ↓

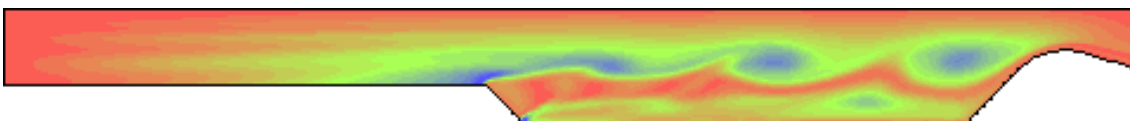


FIG.8 - RK2-Q → solution INSTATIONNAIRE (3600HZ)?

Références

- [1] LUPOGLAZOFF N, VUILLOT F., "*Numerical simulation of vortex shedding phenomenon in 2D test case solid rocket motors*", AIAA paper 92-0776, AIAA 30th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, USA, Jan.92.
- [2] R. CARPENTIER, "*Approximation et analyse numérique d'écoulements instationnaires. - Application à des instabilités tourbillonnaires.*", Thèse, Université de Nice Sophia Antipolis, 1995.
- [3] R. CARPENTIER, "*Comparaison entre des schémas 2D de type Roe sur maillage régulier triangle ou quadrangle. I: calcul au sommet - pentes centrées*", rapport INRIA N°2824, mars 1996.
- [4] P. L. ROE, "*Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*", J. Comp. Phys., **43**, pp. 357-372, 1981.
- [5] L. FEZOU, "*Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis*", Rapport INRIA 358, 1985.
- [6] LUPOGLAZOFF N, VUILLOT F., "*Simulation numérique bidimensionnelle des écoulements instationnaires dans les propulseurs à propergol solide*", La Recherche Aéronautique, No.1992-2, pp.21-41.
- [7] F. GODFROY, P. JACQUEMIN, P-Y. TISSIER, F. JOUVE, "*Three Dimensional Simulation of Unsteady Inviscid Flows using a Second Order Finite Volume Method. Application to Flows inside Solid Propellant Motors*", Computing Methods in Applied Sciences and Engineering GLOWINSKI (Ed.) Paris (1992).
- [8] A. HULIN, *BERTIN & Cie - BP 3 - 78373 PLAISIR Cedex*
- [9] R. CARPENTIER, "*Comparaison entre des schémas 2D de type Roe sur maillage régulier triangle ou quadrangle. II: calcul au sommet - Le $\beta\gamma$ schéma*", rapport INRIA à paraître.
- [10] R. CARPENTIER, A. de LA BOURDONNAYE & B. LARROUTUROU, "*On the derivation of the modified equation for the analysis of linear numerical methods*", M2AN, Vol.31, n° 4, 1997, p.459 à 470, 1997.
- [11] R. CARPENTIER, "*Le schéma $\beta\gamma$ quadrangle*", film INRIA audiovisuel & hypermédia, UCIS, 1997.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399