



HAL
open science

Imagerie microonde : reconstruction quantitative du profil de permittivité complexe d'hétérogénéités enterrées.

Cédric Dourthe, Armel de La Bourdonnaye, Christian Pichot

► **To cite this version:**

Cédric Dourthe, Armel de La Bourdonnaye, Christian Pichot. Imagerie microonde : reconstruction quantitative du profil de permittivité complexe d'hétérogénéités enterrées.. RR-3294, INRIA. 1997. inria-00073394

HAL Id: inria-00073394

<https://inria.hal.science/inria-00073394>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Imagerie microonde : reconstruction
quantitative du profil de permittivité complexe
d'hétérogénéités enterrées.***

Cédric Durthe — Arnel de La Bourdonnaye — Christian Pichot

N° 3294

Novembre 1997

THÈME 4



***rapport
de recherche***

Imagerie microonde : reconstruction quantitative du profil de permittivité complexe d'hétérogénéités enterrées.

Cédric Dourthe*, Armel de La Bourdonnaye* , Christian Pichot†

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Caiman

Rapport de recherche n° 3294 — Novembre 1997 — 59 pages

Résumé : Ce rapport propose plusieurs algorithmes d'inversion quantitative permettant la reconstruction des profils de permittivité et de conductivité d'objets enterrés à partir de la mesure d'un champ électromagnétique diffracté. Toutes les méthodes itératives développées dans le rapport utilisent les propriétés des approches multifréquence et multiincidence. Une technique de régularisation avec préservation des discontinuités de l'objet est enfin introduite dans le processus de reconstruction.

Chaque partie est illustrée à l'aide d'images reconstruites à partir de données simulées.

Mots-clés : Système de Maxwell, Tomographie du sous-sol, problèmes inverses

* Projet CAIMAN ; E-mail : cdourthe@sophia.inria.fr ; armel@sophia.inria.fr

† Laboratoire d'électronique Antennes et Applications, Université de Nice Sophia-Antipolis & CNRS, 250 Rue Albert Einstein, Bât. 4, Les Lucioles 1, 06560 Valbonne, France ; E-mail : pichot@alto.unice.fr

Microwave imaging: Quantitative reconstruction of the complex permittivity profile of buried heterogeneities

Abstract: This report deals with several quantitative inversion algorithms for reconstructing the permittivity and conductivity profiles of buried objects from scattered electromagnetic field. These iterative methods use properties of multifrequency and multiincidence approaches. An Edge-Preserving regularization technique is introduced into the inversion process.

Each part of the report has been illustrated with images reconstructed from simulated near-field data.

Key-words: Maxwell system, underground tomography, inverse problems

Table des matières

1	Introduction	5
2	Résolution du problème inverse	8
2.1	Relations matricielles	9
2.2	Formulation du problème inverse	10
2.3	Méthode itérative de type gradient conjugué GC	11
2.3.1	Calcul de la direction de descente	12
2.3.2	Calcul du facteur d'échelle optimal associé	14
2.4	Méthode itérative de type bigradient conjugué BiGC	15
2.4.1	Calcul des directions de descente	16
2.4.2	Calcul des facteurs d'échelle optimaux associés	18
2.5	Résultats des simulations	20
2.5.1	Étude de l'apport du multifréquence à partir du cas 1D	20
2.5.2	Reconstructions d'objets enterrés	24
3	Régularisation	35
3.1	Principes de la régularisation	35
3.2	Méthode BiGC avec régularisation	38
3.2.1	Calcul du bigradient	39
3.2.2	Calcul des facteurs d'échelle optimaux associés	40
3.3	Résultats numériques	41
3.3.1	Reconstruction du cylindre carré	41
3.3.2	Reconstruction d'un anneau carré	41
4	Conclusion	45
A	Calculs matriciels annexes	47
A.1	Relation 1	47
A.2	Relation 2	47
B	Paramètres de la méthode GC	48
B.1	Calcul de la fonction coût à l'itération $k+1$	48
B.2	Calcul de la fonctionnelle à l'itération $k+1$	49

C Paramètres de la méthode BiGC	49
C.1 Calcul de la fonction coût à l'itération $k+1$	49
C.2 Calcul de la fonctionnelle à l'itération $k+1$	51
D Paramètres de la méthode BiGC avec régularisation	53
D.1 Définition de la norme d'un gradient matriciel	53
D.2 Définition du laplacien pondéré discret	53
D.3 Calcul de la fonctionnelle à l'itération $k+1$	54

1 Introduction

On rappelle que le domaine d'étude (Fig. 1) est composé de trois milieux homogènes $\{\mathcal{D}_i\}_{i=1,3}$ caractérisés par une permittivité relative ε_{r_i} et une conductivité σ_i . La présence de trois milieux n'est pas restrictive, la théorie pouvant être aisément étendue au cas de N milieux.

L'objet est un cylindre infini suivant la direction \vec{z} , de section arbitraire \mathcal{D}_D enfoui à une profondeur d dans le milieu dissipatif \mathcal{D}_3 sous une couche d'épaisseur h . Le domaine inhomogène \mathcal{D}_D est caractérisé par une permittivité $\varepsilon_D(\vec{X})$ et une conductivité $\sigma_D(\vec{X})$.

L'objet est éclairé par un champ incident $\vec{E}^I(\vec{X}, t)$ de dépendance spatio-temporelle arbitraire. Ce champ est polarisé dans la direction \vec{z} (cas fondamental 2D-TM). Cette propriété est également vraie pour le champ diffracté $\vec{E}^D(\vec{X}, t)$ et le champ total $\vec{E}(\vec{X}, t)$. Les équations intégrales définissant le problème direct sont désormais exprimées en fonction du contraste de permittivité complexe normalisé C défini par

$$C(\vec{X}, \omega) = \varepsilon_{r_D}^* - \varepsilon_{r_3}^* = (\varepsilon_{r_D} - \varepsilon_{r_3}) + j\left(\frac{\sigma_D - \sigma_3}{\omega\varepsilon_0}\right)$$

On obtient alors les deux expressions fondamentales:

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_z(\vec{X}, \omega) &= \widetilde{E}_z^I(\vec{X}, \omega) + \int_{\mathcal{D}_D} k_0^2(\omega) C(\vec{X}', \omega) \widetilde{E}_z(\vec{X}', \omega) G(\vec{X}, \vec{X}', \omega) d\vec{X}', \\ &\quad \forall \vec{X} \in \mathcal{D}_D, \forall \omega. \end{aligned}$$

$$\widetilde{E}_z^D(\vec{X}, \omega) = \int_{\mathcal{D}_D} k_0^2(\omega) C(\vec{X}', \omega) \widetilde{E}_z(\vec{X}', \omega) G(\vec{X}, \vec{X}', \omega) d\vec{X}', \quad \forall \vec{X} \in \mathcal{D}_1, \forall \omega$$

avec les mêmes notations définies dans l'étude précédente [11, 12].

La résolution du problème direct reste semblable à celle effectuée pour l'approche qualitative (Méthode des Moments avec collocation de type Point/segment) [11].

Le problème de diffraction inverse consiste désormais à retrouver la permittivité complexe de l'objet à partir de la mesure du champ diffracté sur L_1 . On cherche donc, dans un premier temps, à établir une relation entre le contraste

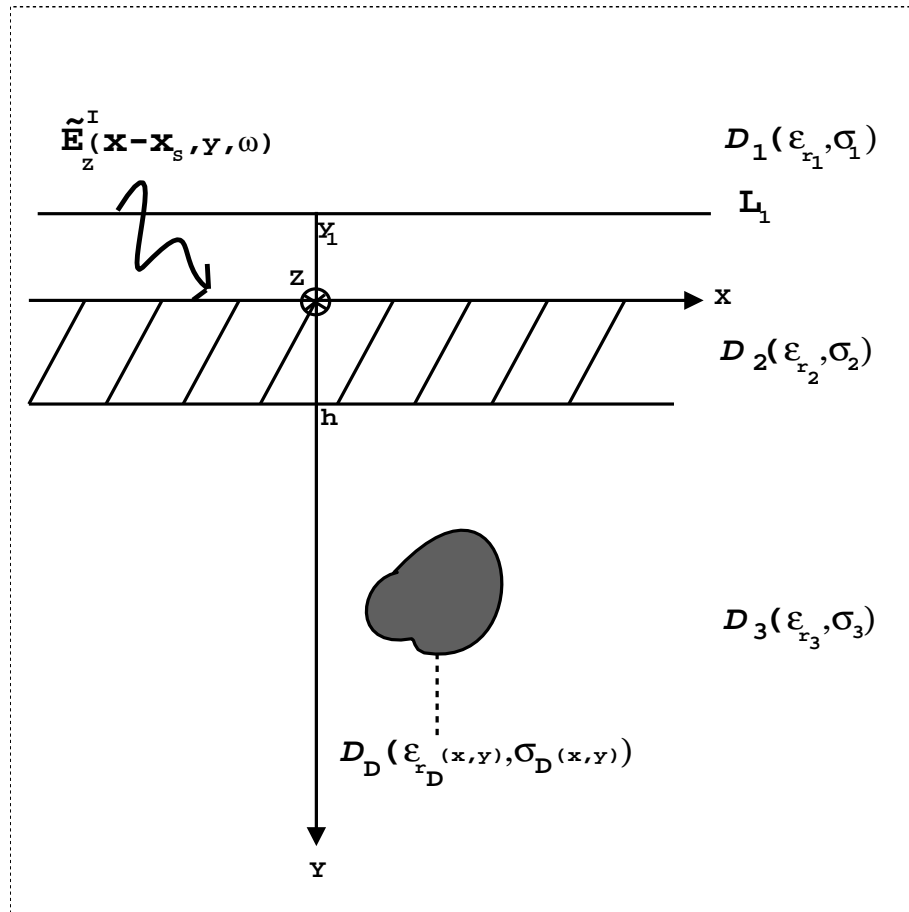


FIG. 1: *Géométrie du problème*

C et le champ électrique \widetilde{E}_z^D . Contrairement au cas de l'imagerie qualitative, où la relation spectrale était linéaire, le problème inverse défini ici apparaît comme non linéaire par rapport au paramètre C .

Les premières méthodes d'imagerie quantitative ont cependant contourné ce problème en étudiant des objets avec des hypothèses particulières (approximation de Born, de Rytov, haute fréquence...[19, 15]) conduisant à la linéarisation des solutions du problème inverse [4]. Parmi les techniques le plus souvent utilisées pour résoudre le problème linéarisé, on distingue les méthodes de rétropropagation des ondes électromagnétiques (techniques d'inversion essentiellement basées sur l'emploi de transformées de Fourier [10, 23]) ainsi que les techniques de résolution de systèmes linéaires [18, 1].

Les approximations employées initialement ne peuvent être généralisées à tous les types d'objets recherchés. La non linéarité du problème, couplé au besoin de résoudre différents problèmes sans hypothèse restrictive a conduit au développement de nouvelles méthodes itératives d'imagerie quantitative. Deux grandes classes sont principalement utilisées [25]: les méthodes itératives de type gradient conjugué (GC) [23, 30, 17, 13] et de type Newton-Kantorovich (NK) [2, 13, 27, 34, 20, 14, 9, 26, 3]. Ces deux classes de méthodes permettent de résoudre de manière itérative le problème inverse en minimisant une fonctionnelle adaptée au problème traité, généralement définie par l'écart quadratique moyen entre les valeurs mesurées et celles calculées numériquement. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode du gradient modifié [22, 2, 3] qui permet de résoudre simultanément les problèmes direct et inverse.

La principale différence entre les méthodes GC et NK provient de la technique utilisée pour minimiser la fonctionnelle. Elle conserve le caractère non linéaire de la fonctionnelle pour les méthodes GC tandis qu'elle linéarise localement celle-ci dans les méthodes NK (d'où le nom de méthodes itératives de type Born). D'autres méthodes explicitées dans l'espace libre profitent de l'approche multivue (sources et capteurs tout entourant l'objet) [21] et multifréquentielle [16] pour donner de l'objet une image super-résolution. Enfin, des méthodes de type probabiliste ont récemment été développées [13, 14, 6]. Ces techniques itératives de résolution, pour lesquelles aucune direction de recherche n'est privilégiée à chaque itération (optimisation globale), conduisent à d'excellents résultats mais restent très coûteuses en temps de calcul.

Cette partie propose d'adapter ce type de méthode au cas de la reconstruc-

tion d'objets enfouis dans des sols à pertes. On s'intéresse en particulier à l'extension multifréquentielle d'un algorithme d'imagerie de type GC [27], au cas des objets enterrés illuminés par un champ incident de dépendance spatio-temporelle arbitraire.

Dans un second temps, une régularisation est proposée afin d'améliorer les résultats obtenus précédemment. On se propose alors d'appliquer une technique de préservation des discontinuités [8] appliquée récemment avec succès dans le domaine de l'imagerie d'objets dans l'espace libre [29, 28].

2 Résolution du problème inverse

En utilisant les mêmes notations que celles définies précédemment [11, 12], on peut connaître le champ total à l'intérieur de l'objet:

$$\widetilde{E}_z^I(\vec{X}_m, \omega) = \sum_{n=1}^N \left\{ \delta_{m,n} - G_{m,n} C(\vec{X}_n, \omega) \right\} \widetilde{E}_z(\vec{X}_n, \omega), m=1, N; \forall \omega \quad (1)$$

$$\text{avec } \delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{si } \vec{X}_m = \vec{X}_n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } G_{m,n} = \int_{C_n} k_0^2(\omega) G(\vec{X}_m, \vec{X}_n, \omega) d\vec{X}_n, \forall \omega .$$

Puis le champ diffracté à l'extérieur de l'objet est calculé sur la ligne de mesure L_1 dans le milieu \mathcal{D}_1 :

$$\widetilde{E}_z^D(\vec{X}_m, \omega) = \sum_{n=1}^N G_n^m C(\vec{X}_n, \omega) \widetilde{E}_z(\vec{X}_n, \omega), \forall \vec{X}_m \in L_1, \forall \omega \quad (2)$$

$$\text{avec } G_n^m = \int_{C_n} k_0^2(\omega) G(\vec{X}_m, \vec{X}_n, \omega) d\vec{X}_n, \forall \vec{X}_m \in L_1, \forall \omega$$

Ces deux équations vont permettre de définir la relation fondamentale du problème d'imagerie quantitative. Par souci de simplicité, la notation matricielle est employée. Le problème est alors résolu en utilisant une méthode itérative de type gradient conjugué. Une variante à ce premier algorithme est aussi proposé, avant d'étudier quelques exemples de reconstructions simulées d'objets enterrés.

2.1 Relations matricielles

$$\text{Soient} \left\{ \begin{array}{l} N \text{ le nombre de points de discrétisation de } \mathcal{D}_D, \\ NOXI \text{ le nombre de points de mesure sur } L_1, \\ NXS \text{ le nombre de points source sur } L_1, \\ NTF \text{ le nombre de fréquences utilisées} \end{array} \right.$$

On définit, pour chaque fréquence et pour chaque position de source, les vecteurs suivants:

$$\begin{aligned} e^I &= \left\{ \widetilde{E}_z^I(\vec{X}_m, \omega) \right\}_{m=1..N} & e &= \left\{ \widetilde{E}_z(\vec{X}_m, \omega) \right\}_{m=1..N} \\ e^D &= \left\{ \widetilde{E}_z^D(\vec{X}_m, \omega) \right\}_{m=1..NOXI} & c &= \left\{ C(\vec{X}_m, \omega) \right\}_{m=1..N} \end{aligned}$$

- Dimension des matrices associées aux différents champs à une fréquence:

\mathbf{E}^I , matrice champ incident de dimension $N * NXS$

\mathbf{E} , matrice champ total de dimension $N * NXS$

\mathbf{E}^D , matrice champ diffracté de dimension $NOXI * NXS$

- Dimension des matrices de Green à une fréquence:

$$\mathbf{G}^O = \{G_{m,n}\}_{n=1..N}^{m=1..N},$$

matrice de Green intégrale Objet-Objet de dimension $N * N$

$$\mathbf{G}^R = \{G_n^m\}_{m=1..NOXI}^{n=1..N},$$

matrice de Green intégrale Objet-Recepteur de dimension $NOXI * N$

- Expression et dimension de la matrice associée au contraste:

$$\mathbf{C} \text{ telle que } \begin{cases} C_{m,m} = c_m, & m = 1..N \\ C_{m,n} = 0, & m = 1..N, n = 1..N, m \neq n \end{cases}$$

matrice de contraste de dimension N

Numériquement, chaque matrice est rangée ligne par ligne. Par exemple, le vecteur c est construit en faisant varier les points de \mathcal{D}_D suivant x_m en fixant

y_m . De même, E^I est constituée de NXS colonnes de N coefficients complexes. La matrice E^I sera rangée en fixant le numéro de ligne et en variant le numéro de colonne.

Par souci de simplicité, on notera de la même manière les matrices pour les différentes fréquences. Les matrices sont en fait considérées comme des listes de matrices construites à fréquence fixée. Le nombre de fréquences détermine la longueur de la liste.

2.2 Formulation du problème inverse

En utilisant les notations précédentes, on peut réécrire les équations sous forme matricielle pour chaque fréquence angulaire $\omega = 2\pi f$. On obtient le système:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^I &= (\mathbf{I} - \mathbf{G}^O \mathbf{C}) \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^D &= \mathbf{G}^R \mathbf{C} \mathbf{E} \end{cases} \quad (3)$$

où \mathbf{I} représente la matrice identité de dimension $N * N$.

En supposant la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{G}^O \mathbf{C}$ suffisamment régulière, on trouve alors l'équation matricielle non-linéaire suivante:

$$\mathbf{E}^D = \mathbf{G}^R \mathbf{C} (\mathbf{I} - \mathbf{G}^O \mathbf{C})^{-1} \mathbf{E}^I, \forall \omega \quad (4)$$

Les caractéristiques électromagnétiques ε et σ des domaines sont prises indépendantes de la fréquence. Cependant, la partie imaginaire des éléments de la matrice de contraste \mathbf{C} contient des termes fréquentiels (en $\frac{1}{\omega \varepsilon_0}$). On définit alors la variable \mathbf{C} dépendante de la fréquence, en fonction de la variable caractéristique $\chi = (\varepsilon, \sigma)$ indépendante de la fréquence ($\mathbf{C} = \mathbf{C}(\chi)$).

Notre problème s'écrit désormais en fonction de la variable caractéristique:

$$\boxed{\mathbf{E}^D = \mathbf{G}^R \mathbf{C}(\chi) (\mathbf{I} - \mathbf{G}^O \mathbf{C}(\chi))^{-1} \mathbf{E}^I, \forall \omega} \quad (5)$$

La résolution de non linéaire en χ permet ainsi de reconstruire la permittivité et la conductivité du ou des objets et donc le contraste dans le domaine désigné

par \mathcal{D}_D , à partir de la donnée du champ diffracté connu sur la ligne de mesure L_1 de \mathcal{D}_1 et du champ incident connu à l'intérieur de l'objet. Les données du milieu \mathcal{D}_3 sont elles aussi supposées connues.

La résolution du problème direct couplé (inversion de la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}}\mathbf{C}(\chi)$) est effectuée en utilisant une méthode directe de type Gauss-Jordan.

Pour trouver χ , on résout de manière itérative en utilisant une technique de minimisation de fonctionnelle à l'aide d'un algorithme de descente de type gradient conjugué [24].

2.3 Méthode itérative de type gradient conjugué GC

Le problème représenté par l'équation (5) est redéfini par équivalence en un problème de minimisation de fonctionnelle. Chercher χ qui satisfait (5) revient à chercher χ minimisant le critère J , ou fonctionnelle coût, défini par:

$$J(\chi) = \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \|\rho_{S,F}(\chi)\|_{L_1}^2 \quad (6)$$

avec le résidu* $\rho_{S,F}(\chi) = e^D - \mathbf{G}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}(\chi)(\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}}\mathbf{C}(\chi))^{-1}e^I$ calculé à chaque fréquence pour chaque position de source \vec{X}_S .

Le terme $\|\cdot\|_{L_1}$ désigne la norme associée au produit hermitien $(\cdot, \cdot)_{L_1}$ défini sur l'espace $\mathcal{L}^2(L_1)$ des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable sur L_1 par:

$$(u, v)_{L_1} = \int_{L_1} u(\vec{X}) \overline{v(\vec{X})} d\vec{X}, \forall u \in \mathcal{L}^2(L_1), \forall v \in \mathcal{L}^2(L_1) \quad (7)$$

où $\overline{v(\vec{X})}$ représente le complexe conjugué de $v(\vec{X})$.

Pour minimiser la fonctionnelle J , les méthodes de descente sont construites en choisissant à l'itération $k+1$ une direction de descente η^k le long de laquelle évolue χ^k , et un réel α^k appelé facteur d'échelle optimal pour la minimisation de J dans la direction η^k tels que:

$$\chi^{k+1} = \chi^k + \alpha^k \eta^k \quad (8)$$

* ρ représente l'écart entre le champ diffracté mesuré et le champ diffracté calculé

où χ^k représente la variable caractéristique à l'itération k .

Les nombreuses méthodes de descente dépendent du choix des paramètres de descente η^k . Pour notre problème, une méthode de gradient conjugué de type Polak-Ribière est utilisée [7].

Quant au paramètre α^k , il est recalculé à chaque nouvelle itération afin de rendre minimum le nouveau critère.

2.3.1 Calcul de la direction de descente

On cherche alors η^k dans le plan formé par les deux directions orthogonales η^{k-1} et g^k , où g^k représente le gradient de la fonctionnelle J . On a ainsi:

$$\eta^k = g^k + \beta^k \eta^{k-1} \quad (9)$$

avec le réel β^k défini par:

$$\beta^k = \frac{\langle g^k, g^k - g^{k-1} \rangle_{\mathcal{D}_D}}{|g^{k-1}|_{\mathcal{D}_D}^2} \quad (10)$$

Le terme $|\cdot|_{\mathcal{D}_D}$ désigne la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}_D}$ défini sur l'espace $\mathcal{L}^2(\mathcal{D}_D)$ des fonctions à valeurs réelles de carré intégrable sur \mathcal{D}_D par:

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{D}_D} = \int_{\mathcal{D}_D} u(\vec{X})v(\vec{X})d\vec{X}, \forall u \in \mathcal{L}^2(\mathcal{D}_D), \forall v \in \mathcal{L}^2(\mathcal{D}_D) \quad (11)$$

Afin de définir complètement la direction de descente, il faut donc dans un premier temps calculer le gradient $g^k = \nabla J(\chi^k)$.

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1 de la fonctionnelle à l'itération $k + 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} J(\chi^{k+1}) &= J(\chi^k) + \alpha^k \langle \nabla J(\chi^k), \eta^k \rangle_{\mathcal{D}_D} \\ &= J(\chi^k) + \alpha^k \langle \nabla_{\varepsilon_r} J(\chi^k), \eta_{\varepsilon_r}^k \rangle_{\mathcal{D}_D} + \alpha^k \langle \nabla_{\sigma} J(\chi^k), \eta_{\sigma}^k \rangle_{\mathcal{D}_D} \end{aligned} \quad (12)$$

Or, on montre que (69):

$$\begin{aligned} \|\rho_{S,F}(\chi^{k+1})\|_{L_1}^2 &= \|\rho_{S,F}(\chi^k)\|_{L_1}^2 - 2\alpha^k \mathcal{R}e \left(\rho_{S,F}(\chi^k), \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}^t} \mathbf{D}^k \mathbf{A}^k e^I \right)_{L_1} \\ &\quad + (\alpha^k)^2 \|\mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}^t} \mathbf{D}^k \mathbf{A}^k e^I\|_{L_1} \end{aligned} \quad (13)$$

avec $\mathbf{A}^k = [\mathbf{I} - \mathbf{G}^0 \mathbf{C}(\chi^k)]^{-1}$ et la matrice complexe $\mathbf{D}^k = \eta_{\varepsilon_r}^k + \frac{j}{\omega \varepsilon_0} \eta_{\sigma}^k$.

On peut noter que \mathbf{D}^k est une matrice diagonale de dimension $N * N$, $\mathbf{A}^k e^I$ est un vecteur de dimension N . On peut donc les commuter en changeant \mathbf{D}^k en vecteur d^k contenant la diagonale de \mathbf{D}^k et $\mathbf{A}^k e^I$ en matrice diagonale $\mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I)$.

En comparant (12) et (13), il vient donc:

$$\begin{aligned} \langle \nabla J(\chi^k), \eta^k \rangle_{\mathcal{D}_D} &= -2 \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \mathcal{R}e \left(\rho_{S,F}(\chi^k), \mathbf{G}^R \mathbf{A}^{k^t} \mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I) d^k \right)_{L_1} \\ &= -2 \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \mathcal{R}e \left(\mathbf{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I}) \overline{\mathbf{A}^k} \mathbf{G}^{R*} \rho_{S,F}(\chi^k), d^k \right)_{\mathcal{D}_D} \end{aligned} \quad (14)$$

avec $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{D}_D}$ le produit hermitien défini sur l'espace $\mathcal{L}^2(\mathcal{D}_D)$ des fonctions à valeurs complexes de carré intégrable sur \mathcal{D}_D par:

$$(u, v)_{\mathcal{D}_D} = \int_{\mathcal{D}_D} u(\vec{X}) \overline{v(\vec{X})} d\vec{X}, \forall u \in \mathcal{L}^2(\mathcal{D}_D), \forall v \in \mathcal{L}^2(\mathcal{D}_D) \quad (15)$$

En développant l'expression (14) suivant ε_r et σ , on obtient finalement:

$$g_{\varepsilon_r}^k = \nabla_{\varepsilon_r} J(\chi^k) = -2 \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \mathcal{R}e \left(\mathbf{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I}) \overline{\mathbf{A}^k} \mathbf{G}^{R*} \rho_{S,F}(\chi^k) \right) \quad (16)$$

$$g_{\sigma}^k = \nabla_{\sigma} J(\chi^k) = -2 \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \mathcal{I}m \left(\mathbf{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I}) \overline{\mathbf{A}^k} \mathbf{G}^{R*} \rho_{S,F}(\chi^k) \right) \quad (17)$$

La direction de descente η^k est alors calculée à chaque itération en injectant la valeur de g^k dans l'équation (9) avec β^k donné par l'équation (10).

2.3.2 Calcul du facteur d'échelle optimal associé

Après avoir défini la direction de descente η^k , il reste à lui associer un poids α^k pour permettre le calcul des estimées successives de χ . Pour cela, α^k est choisi comme minimum local de J à l'itération $k + 1$.

Soit à résoudre:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^k} J(\chi^{k+1}) = 0 \quad (18)$$

En dérivant l'équation (13), on définit le facteur d'échelle α^k par:

$$\alpha^k = \frac{\sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \mathcal{R}e \left(\rho_{S,F}(\chi^k), \mathbf{G}^R \mathbf{A}^{k^t} \mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I) d^k \right)_{L_1}}{\|\mathbf{G}^R \mathbf{A}^{k^t} \mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I) d^k\|_{L_1}^2} \quad (19)$$

Tous les différents paramètres sont à présent définis. Il reste donc à étudier quelques exemples témoignant de l'efficacité de cette méthode assez intuitive. Or, dès les premiers résultats, un constat s'impose: cette technique d'inversion ne semble pas adaptée aux cas traités. En effet, si l'on cherche à reconstruire l'image d'un diélectrique pur ($\varepsilon_{r_D} = 3$) enfoui dans un sable sec sans pertes ($\varepsilon_{r_3} = 2,55$) à une profondeur de 30 cm, l'image résultante ne permet pas de retrouver l'objet. Les valeurs du paramètre χ calculées ne réduisent pas l'erreur sur le champ diffracté, premier critère de convergence de l'algorithme mis en place (Fig. 2 courbe ERR-ED). Après 500 itérations, on conserve une erreur proche de 50%. De même, la permittivité calculée diffère complètement de la permittivité réelle de l'objet (Fig. 2 courbe ERR-EPS).

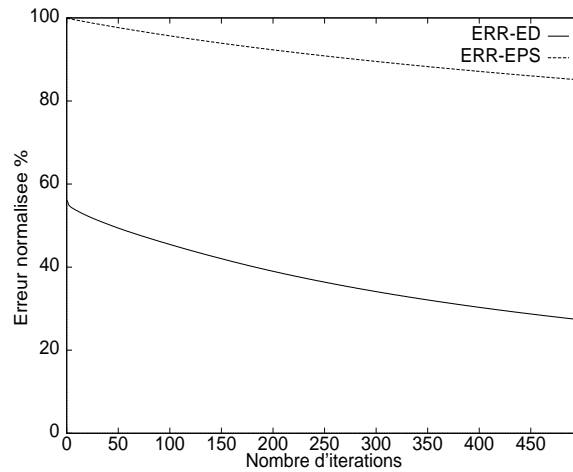


FIG. 2: Convergence de la méthode GC

Le manque d'efficacité de cette première méthode peut être expliqué en utilisant l'approche physique du problème. Les deux paramètres fondamentaux (la permittivité relative et la conductivité) sont ici considérés de manière complètement similaire: les deux gradients respectifs sont couplés pour calculer la direction de descente générale de l'algorithme. Or, dans l'exemple traité, on obtient une direction suivant ε_r de l'ordre de 10^{-2} tandis que celle suivant σ est proche de 10^{-1} . En couplant les deux directions indépendantes, on néglige l'information sur la permittivité au profit de celle concernant la conductivité. De plus, hormis les matériaux métalliques ($\sigma \approx 10^7 S.m^{-1}$), la part de la permittivité est prépondérante. Il paraît nécessaire de découpler l'étude du gradient et donc de traiter ces deux variables de façon indépendante en définissant une nouvelle méthode de minimisation.

2.4 Méthode itérative de type bigradient conjugué BiGC

Dans un premier temps, on sépare la variable caractéristique χ en deux paramètres ε et σ . On applique alors sur chacune des deux variables, une méthode de type gradient conjugué.

On cherche ainsi à minimiser la fonctionnelle J dépendant des deux nouveaux

paramètres:

$$J(\varepsilon_r, \sigma) = \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \|\rho_{S,F}(\varepsilon_r, \sigma)\|_{L_1}^2 \quad (20)$$

Afin de minimiser ce critère, on calcule à chaque itération de l'algorithme deux directions de descente η_{ε_r} et η_{σ} le long desquelles évoluent respectivement ε_r et σ , ainsi que deux facteurs d'échelle respectifs α_{ε_r} et α_{σ} tels que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{k+1} &= \varepsilon_r^k + \alpha_{\varepsilon_r}^k \eta_{\varepsilon_r}^k \\ \sigma^{k+1} &= \sigma^k + \alpha_{\sigma}^k \eta_{\sigma}^k \end{aligned} \quad (21)$$

2.4.1 Calcul des directions de descente

On procède de la même façon que pour la méthode du gradient conjugué. Ici, cependant, on cherche directement les deux directions en découpant le système obtenu précédemment:

$$\begin{aligned} \eta_{\varepsilon_r}^k &= g_{\varepsilon_r}^k + \beta_{\varepsilon_r}^k \eta_{\varepsilon_r}^{k-1} \\ \eta_{\sigma}^k &= g_{\sigma}^k + \beta_{\sigma}^k \eta_{\sigma}^{k-1} \end{aligned} \quad (22)$$

avec les réels $\beta_{\varepsilon_r}^k$ et β_{σ}^k définis par:

$$\begin{aligned} \beta_{\varepsilon_r}^k &= \frac{\langle g_{\varepsilon_r}^k, g_{\varepsilon_r}^k - g_{\varepsilon_r}^{k-1} \rangle_{\mathcal{D}_D}}{|g_{\varepsilon_r}^{k-1}|_{\mathcal{D}_D}^2} \\ \beta_{\sigma}^k &= \frac{\langle g_{\sigma}^k, g_{\sigma}^k - g_{\sigma}^{k-1} \rangle_{\mathcal{D}_D}}{|g_{\sigma}^{k-1}|_{\mathcal{D}_D}^2} \end{aligned} \quad (23)$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1 de la fonctionnelle à l'itération $k+1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} J(\varepsilon_r^{k+1}, \sigma^{k+1}) &= J(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \\ &+ \alpha_{\varepsilon_r}^k \langle \nabla_{\varepsilon} J(\varepsilon_r^k, \sigma^k), \eta_{\varepsilon_r}^k \rangle_{\mathcal{D}_D} \\ &+ \alpha_{\sigma}^k \langle \nabla_{\sigma} J(\varepsilon_r^k, \sigma^k), \eta_{\sigma}^k \rangle_{\mathcal{D}_D} \end{aligned} \quad (24)$$

Or, on montre (85):

$$\begin{aligned}
\|\rho_{S,F}(\varepsilon_r^{k+1}, \sigma^{k+1})\|_{L_1}^2 &= \|\rho_{S,F}(\varepsilon_r^k, \sigma^k)\|_{L_1}^2 \\
&- 2\alpha_{\varepsilon_r}^k < \mathcal{R}e \left(\mathbf{M}^{\mathbf{k}*} \rho_{S,F}(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \right), \eta_{\varepsilon_r}^k >_{\mathcal{D}_D} \\
&- 2\frac{\alpha_{\sigma}^k}{\omega\varepsilon_0} < \mathcal{I}m \left(\mathbf{M}^{\mathbf{k}*} \rho_{S,F}(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \right), \eta_{\sigma}^k >_{\mathcal{D}_D} \\
&+ (\alpha_{\varepsilon_r}^k)^2 \{ |\mathcal{R}e(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_{\varepsilon_r}^k|_{L_1}^2 + |\mathcal{I}m(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_{\varepsilon_r}^k|_{L_1}^2 \} \\
&+ \left(\frac{\alpha_{\sigma}^k}{\omega\varepsilon_0}\right)^2 \{ |\mathcal{R}e(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_{\sigma}^k|_{L_1}^2 + |\mathcal{I}m(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_{\sigma}^k|_{L_1}^2 \} \\
&+ 2\frac{\alpha_{\varepsilon_r}^k \alpha_{\sigma}^k}{\omega\varepsilon_0} < \mathcal{R}e(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_{\sigma}^k, \mathcal{I}m(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_{\varepsilon_r}^k >_{L_1} \\
&- 2\frac{\alpha_{\varepsilon_r}^k \alpha_{\sigma}^k}{\omega\varepsilon_0} < \mathcal{R}e(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_{\varepsilon_r}^k, \mathcal{I}m(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_{\sigma}^k >_{L_1}
\end{aligned} \tag{25}$$

avec la matrice complexe $\mathbf{M}^k = \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}t} \mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I)$ de dimension $NOXI * N$. Le terme $|\cdot|_{L_1}$ désigne la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_1}$ défini sur l'espace $\mathcal{L}^2(L_1)$ des fonctions à valeurs réelles de carré intégrable sur L_1 par:

$$\langle u, v \rangle_{L_1} = \int_{L_1} u(\vec{X}) v(\vec{X}) d\vec{X}, \forall u \in \mathcal{L}^2(L_1), \forall v \in \mathcal{L}^2(L_1) \tag{26}$$

En identifiant (24) avec (25), il vient:

$$g_{\varepsilon_r}^k = -2 \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \mathcal{R}e \left(\mathbf{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I}) \overline{\mathbf{A}^k} \mathbf{G}^{\mathbf{R}*} \rho_{S,F}(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \right) \tag{27}$$

$$g_{\sigma}^k = -2 \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \frac{1}{\omega\varepsilon_0} \mathcal{I}m \left(\mathbf{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I}) \overline{\mathbf{A}^k} \mathbf{G}^{\mathbf{R}*} \rho_{S,F}(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \right) \tag{28}$$

Les deux directions de descente $\eta_{\varepsilon_r}^k$ et η_{σ}^k sont alors calculées à chaque itération en injectant dans chaque équation de (22) la valeur respective du gradient calculée ici avec $\beta_{\varepsilon_r}^k$ et β_{σ}^k donnés par (23).

2.4.2 Calcul des facteurs d'échelle optimaux associés

Le calcul des poids associés à chaque direction de descente consiste toujours à minimiser le critère à l'itération $k + 1$. Ainsi, on cherche à trouver les réels $\alpha_{\varepsilon_r}^k$ et α_{σ}^k qui doivent satisfaire:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{\varepsilon_r}^k} J(\varepsilon_r^{k+1}, \sigma^{k+1}) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{\sigma}^k} J(\varepsilon_r^{k+1}, \sigma^{k+1}) = 0 \quad (30)$$

En dérivant l'équation (25), on arrive au système définissant les deux facteurs:

$$\begin{cases} A_1 \alpha_{\varepsilon_r}^k + B_1 \alpha_{\sigma}^k = C_1 \\ B_1 \alpha_{\varepsilon_r}^k + B_2 \alpha_{\sigma}^k = C_2 \end{cases} \quad (31)$$

soit

$$\boxed{\alpha_{\varepsilon_r}^k = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{B_1^2 - B_2 A_1} \text{ et } \alpha_{\sigma}^k = \frac{B_1 C_1 - A_1 C_2}{B_1^2 - B_2 A_1}} \quad (32)$$

avec les notations

$$A_1 = \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} |\mathcal{R}e(\mathbf{M}^k) \eta_{\varepsilon_r}^k|_{L_1}^2 + |\mathcal{I}m(\mathbf{M}^k) \eta_{\varepsilon_r}^k|_{L_1}^2 \quad (33)$$

$$B_1 = \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \frac{1}{\omega_{\varepsilon_r 0}} \left\{ \langle \mathcal{R}e(\mathbf{M}^k) \eta_{\sigma}^k, \mathcal{I}m(\mathbf{M}^k) \eta_{\varepsilon_r}^k \rangle_{L_1} - \langle \mathcal{R}e(\mathbf{M}^k) \eta_{\varepsilon_r}^k, \mathcal{I}m(\mathbf{M}^k) \eta_{\sigma}^k \rangle_{L_1} \right\} \quad (34)$$

$$B_2 = \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \left(\frac{1}{\omega_{\varepsilon_r 0}} \right)^2 \left\{ |\mathcal{R}e(\mathbf{M}^k) \eta_{\sigma}^k|_{L_1}^2 + |\mathcal{I}m(\mathbf{M}^k) \eta_{\sigma}^k|_{L_1}^2 \right\} \quad (35)$$

$$C_1 = -\frac{1}{2} \langle g_{\varepsilon_r}^k, \eta_{\varepsilon_r}^k \rangle_{\mathcal{D}_D} \quad (36)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \langle g_{\sigma}^k, \eta_{\sigma}^k \rangle_{\mathcal{D}_D} \quad (37)$$

Reprenons l'exemple précédent pour rendre compte de l'amélioration apportée par le découplage du gradient proposée ici. On étudie l'évolution de l'erreur sur le champ diffracté calculé ainsi que l'erreur sur le calcul de la permittivité (Fig. 3).

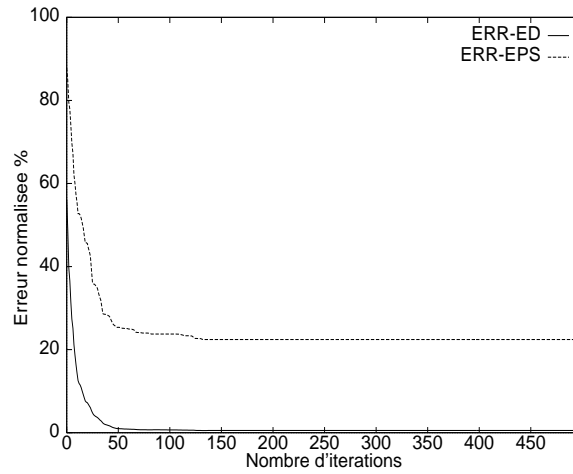


FIG. 3: Convergence de la méthode BiGC

En comparant les courbes de convergence obtenues avec les deux méthodes présentées, on peut noter que l'erreur sur le calcul du champ diffracté décroît plus vite pour la nouvelle méthode. En ce qui concerne l'erreur sur le calcul de la permittivité, l'utilisation du bigradient permet d'obtenir le meilleur résultat avec une erreur légèrement supérieure à 20% à partir de 50 itérations. L'amélioration apportée par l'utilisation du bigradient est clairement démontrée. Ceci s'explique par la différence des deux termes recherchés. En effet, ε et σ ne varient pas dans les mêmes espaces. Il faut donc les étudier séparément. Pour la suite de l'étude, on préfère donc utiliser la méthode de bigradient conjugué qui paraît mieux adaptée à notre configuration que la méthode de

gradient simple. On pourrait tout aussi bien découpler les deux paramètres α_{ϵ_r} et α_{σ} . Mais cette méthode ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants. Ceci peut être expliqué en considérant la définition même des coefficients de pondération α . En effet, ces coefficients sont calculés afin de minimiser la fonctionnelle à l'étape $k + 1$. Or, d'un point de vue numérique, il est préférable de minimiser la fonctionnelle globalement plutôt que de fixer l'un ou l'autre des paramètres pour obtenir le coefficient correspondant. La seconde méthode de minimisation entraîne des dégradations sur l'image résultante.

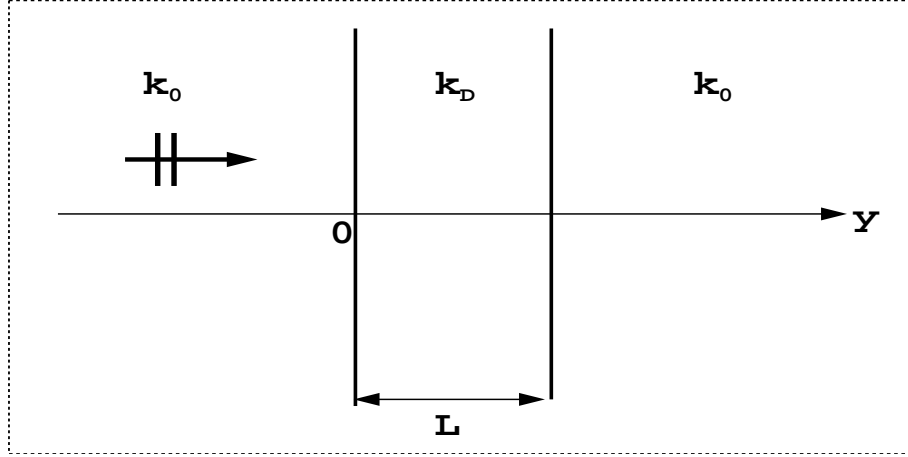
Il reste désormais à étudier, au travers de simulations, les différents paramètres de la méthode BiGC qui assurent la convergence des résultats.

2.5 Résultats des simulations

Cette partie propose à travers différentes simulations de rendre compte de l'apport primordial du paramètre fréquence (cas 1D et 2D). L'étude numérique est complétée par des reconstructions d'objets enterrés simulées pour différentes configurations (nombre de points de mesure, nombre de positions de la source...).

2.5.1 Étude de l'apport du multifréquence à partir du cas 1D

Prenons le cas monodimensionnel d'une plaque infinie suivant x , d'épaisseur L et de caractéristique k_D plongée dans l'air et illuminée à une fréquence ω par une onde plane d'incidence normale, d'amplitude unité (Fig. 4). Un rapide calcul nous donne l'expression du champ total dans les trois domaines présents

FIG. 4: Cas d'une plaque infinie d'épaisseur L illuminée par une onde plane

(n est le rapport $\frac{k_D}{k_0}$):

$$E(y) = e^{jk_0y} + \frac{k_0 - k_D}{k_0 + k_D} \frac{(1 - e^{2jk_D L})}{1 - \left(\frac{k_0 - k_D}{k_0 + k_D}\right)^2 e^{2jk_D L}} e^{-jk_0y} \quad , \text{ pour } y \leq 0$$

$$E(y) = \frac{2k_0}{k_0 + k_D} \frac{e^{jk_D L} e^{-jk_0 L}}{1 - \left(\frac{k_0 - k_D}{k_0 + k_D}\right)^2 e^{2jk_D L}} \left(e^{jk_D y} - \frac{k_0 - k_D}{k_0 + k_D} e^{2jk_D L} e^{-jk_D y} \right) \quad , \text{ pour } 0 \leq y \leq L$$

$$E(y) = \frac{4k_0 k_D}{(k_0 + k_D)^2} \frac{e^{jk_D L} e^{-jk_0 L}}{1 - \left(\frac{k_0 - k_D}{k_0 + k_D}\right)^2 e^{2jk_D L}} e^{jk_0 y} \quad , \text{ pour } y \geq L$$

La fonctionnelle J simplifiée devient alors (1 seul point source, 1 seul point de mesure):

$$J = \sum_{\omega} (E_{mes}^D - E_{cal}^D) = \sum_{\omega} \left(\frac{\frac{1-n}{1+n}(1 - e^{2jn k_0 L})}{1 - \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 e^{2jn k_0 L}} - \frac{\frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)}(1 - e^{2jn(\omega) k_0 L})}{1 - \left(\frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)}\right)^2 e^{2jn(\omega) k_0 L}} \right)$$

Du fait de la non linéarité du problème, la fonctionnelle s'annule pour $n(\omega) = n$ mais pas uniquement pour cette valeur.

Si on représente la fonctionnelle à une fréquence donnée ($f_M = 2$ GHz) simulée pour un contraste fixe ($n = 1, 5$) en fonction du paramètre $n(\omega)$, on observe plusieurs minima de la solution pour des valeurs de $n(\omega)$ supérieurs ou inférieurs à n (Fig. 5(a) avec $L = 0, 1$ m). Ces minima sont difficilement séparables du minimum global. Cette propriété compromet l'étude monofréquentiel dans ce cas là: n'importe quel minimum peut être considéré numériquement comme une solution du problème. En diminuant la fréquence d'étude ($f = 500$ MHz), les minima locaux ont tous disparu (Fig. 5(a)). L'étude en monofréquence semble suffisante pour reconstruire une image de l'objet, si on se place à cette fréquence. Cette remarque contraint néanmoins de choisir parfaitement la fréquence d'étude. C'est dans cette optique que s'insère la diversité de fréquence.

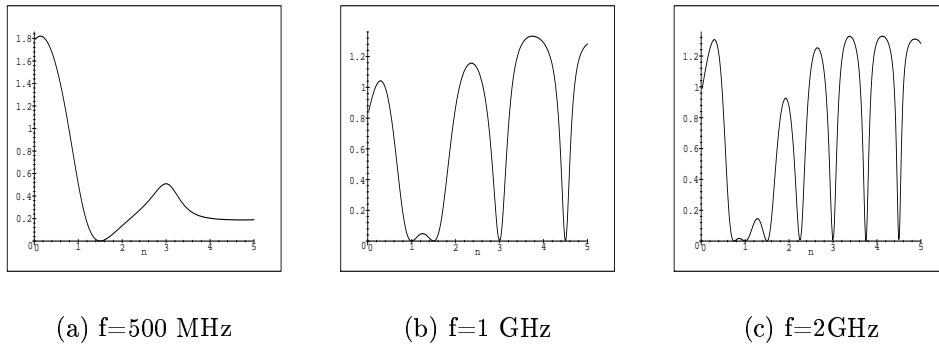


FIG. 5: Représentation de la fonctionnelle à une fréquence ($n=1,5$)

On se place désormais dans la bande de fréquence [1;2] GHz et on étudie l'influence sur le résultat du nombre de fréquences utilisées. Les résultats sont explicites: au fur et à mesure que le nombre de fréquences augmente, le minimum global apparaît comme le seul minimum apparent. Tous les minima locaux ont quasiment disparu (Fig. 6). La variation de fréquence, en augmentant le nombre de données accessibles, réduit le nombre de solutions envisageables. On peut alors espérer retrouver la bonne solution en utilisant la variation de fréquence dans l'algorithme de reconstruction.

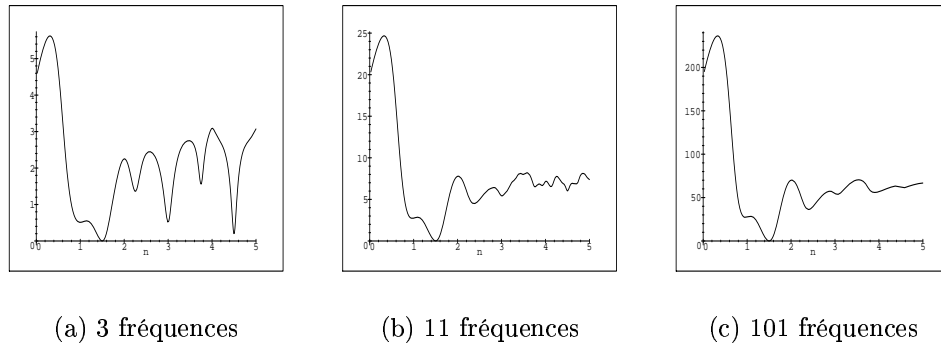


FIG. 6: Représentation de la fonctionnelle sur la bande $[1;2]$ GHz ($n=1,5$)

Si on remplit la plaque d'un matériau plus diffractant ($n=3$), le phénomène précédent est encore plus visible. De plus, si on utilise une seule fréquence, on remarque l'apparition de minima bien avant le minimum global (Fig. 7). Ces minima éloignés de la solution peuvent entraîner l'algorithme vers une solution complètement fautive, tout en garantissant la convergence de la méthode.

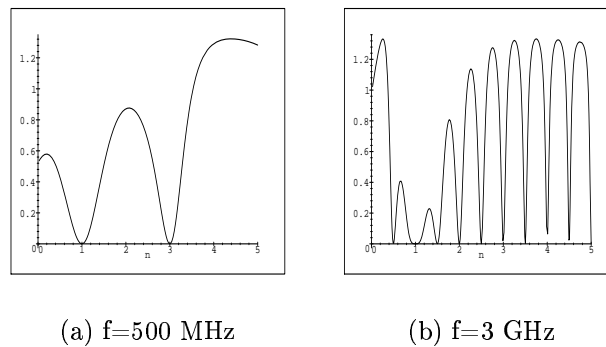


FIG. 7: Représentation de la fonctionnelle à une fréquence ($n=3$)

L'approche multifréquence permet alors de diminuer l'influence de ces minima en rehaussant la valeur de la fonctionnelle en ces points. Cette approche

ne garantit pas la convergence du résultat. Mais lorsqu'on observe la convergence de l'algorithme, on est certain d'obtenir la bonne solution (Fig. 8).

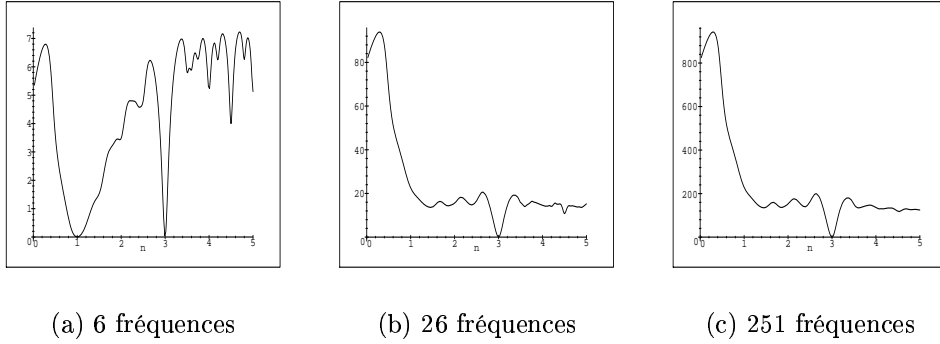
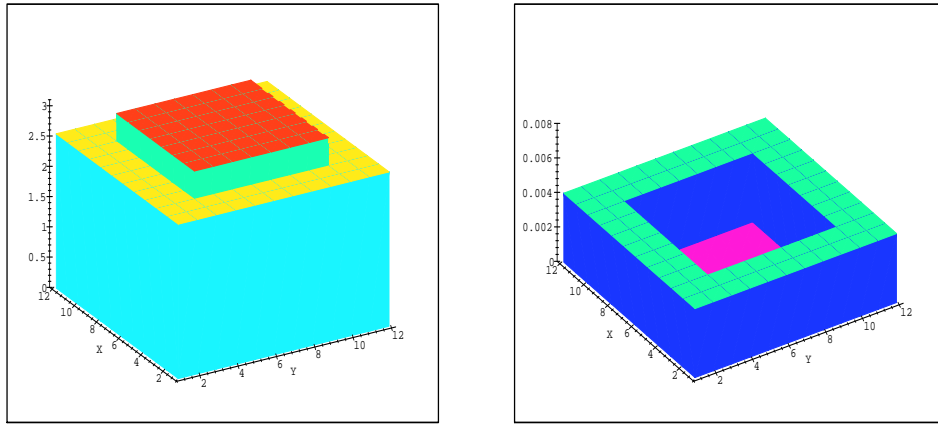


FIG. 8: Représentation de la fonctionnelle sur la bande $[0,5;3]$ GHz ($n=3$)

L'apport du multifréquence apparaît donc clairement dans le cas 1D. Avec cette approche, la convergence de la méthode n'est en général pas assurée. Elle permet néanmoins de réduire l'espace des solutions envisageables et parfois même d'aboutir à l'unicité de la solution. D'après ces résultats, le calcul d'une estimée initiale proche de la solution du problème ne semble pas nécessaire ici. Dans l'étude en multifréquence, le premier minimum conduisant à une faible valeur de la fonctionnelle (critère variable) correspond à la solution du problème. Dans toute la suite, on utilise une estimée initiale nulle.

2.5.2 Reconstructions d'objets enterrés

Dans toute cette étude, l'objet à reconstruire est un cylindre carré de 13 cm de coté enterré à une profondeur de 13,5 cm dans un sable sec de caractéristiques diélectriques ($\varepsilon_{r_3} = 2,55$, $\sigma_3 = 4.10^{-3} S.m^{-1}$). L'objet est défini par sa permittivité relative $\varepsilon_{r_D} = 3$ et par sa conductivité $\sigma_D = 0 S.m^{-1}$ (Fig. 9).



(a) Permittivité

(b) Conductivité $S.m^{-1}$ FIG. 9: *Profil réel*

On teste l'efficacité de l'algorithme BiGC en reconstruisant des images de cet objet pour différentes configurations (fréquence fixe, nombre de fréquences variable, domaine de discrétisation variable...). Les profils obtenus sont comparés au profil réel. Des courbes de convergence (évolution de l'erreur sur le champ diffracté et sur le contraste diélectrique) sont aussi présentées afin d'étudier le comportement de l'algorithme en fonction des paramètres. Plusieurs critères d'arrêt sont implémentés dans l'algorithme (erreur sur le calcul du champ diffracté, sur le calcul de la permittivité, de la conductivité, stabilité des données calculées...). Si l'un ou l'autre des critères n'est pas atteint, on affiche le résultat lorsque le nombre d'itérations dépasse 500.

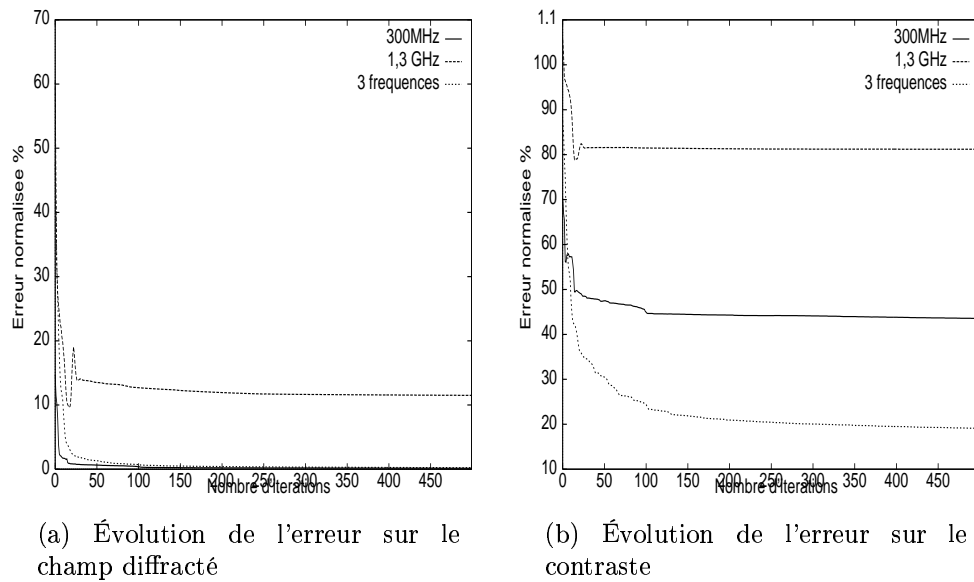
Dans toute la suite, on illumine l'objet avec une onde plane pour 11 angles d'incidence (en fait, cela revient à modéliser une source dont le champ est décomposé en un spectre d'ondes planes). Dans la plupart des simulations présentées, la ligne de mesure longue de 1,20 m est posée sur le sol. On utilise 11 points de mesure équirépartis. Le domaine contenant l'objet est discrétisé en 11×11 cellules carrées de 1,8 cm de côté.

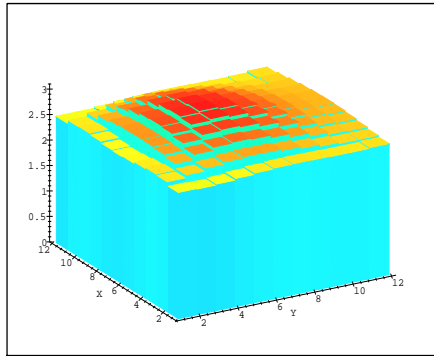
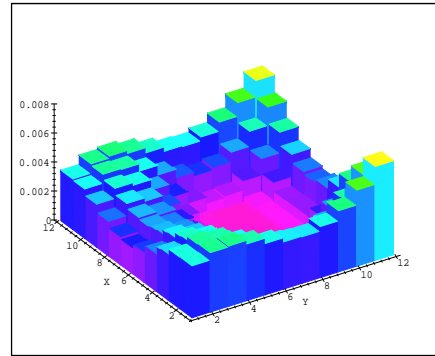
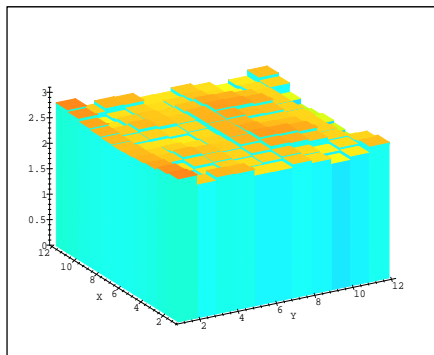
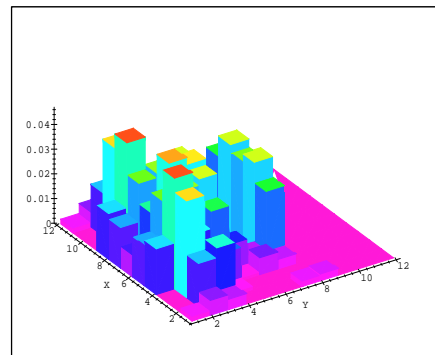
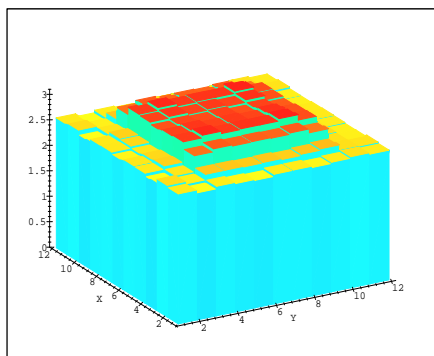
Apport du multifréquence

D'après les premiers résultats 1D, l'utilisation de plusieurs fréquences devrait permettre une meilleure approximation de la solution réelle. Cette propriété est étudiée dans le cas 2D pour des images reconstruites avec la méthode BiGC. On commence par reconstruire une image du diélectrique enterré successivement pour deux fréquences $f=300$ MHz et $f=1,3$ GHz. Ces deux reconstructions sont ensuite comparées à celle réalisée à l'aide de 3 fréquences équiréparties dans la bande $[0,3;1,3]$ GHz (Fig. 11).

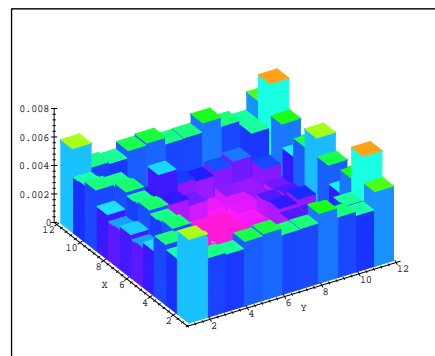
Comme pour l'approche 1D, la solution apparaît uniquement lorsqu'on utilise plusieurs fréquences. Lorsqu'on travaille avec une seule fréquence, on retrouve les deux cas envisagés précédemment. Ainsi, pour la fréquence haute ($f=1,3$ GHz), l'algorithme ne diverge pas (erreur sur le champ diffracté stabilisée à 10%) mais l'erreur sur le contraste n'est pas négligeable (de l'ordre de 80%) (Fig. 10). L'image reconstruite diffère complètement de l'image réelle tant en permittivité (Fig. 11(a)) qu'en conductivité (Fig. 11(b)). L'algorithme est en fait piégé dans un minimum local pour lequel on calcule un champ diffracté assez éloigné du champ diffracté réel. Pour la fréquence basse ($f=300$ MHz), le minimum atteint assure la convergence de l'algorithme avec une erreur faible (Fig. 10) mais ne permet toujours pas de reconstruire les caractéristiques réelles de l'objet et du sol. Le profil général du domaine semble lissé (Figs. 11(c) & 11(d)). L'objet reconstruit admet donc le même champ diffracté que l'objet réel sans pourtant posséder les mêmes caractéristiques diélectriques (mise en évidence de la non unicité de la solution du problème pour une seule fréquence). Enfin, lorsqu'on reconstruit l'image du domaine en utilisant 3 fréquences, on montre bien la convergence du résultat calculé vers la solution du problème avec une erreur de reconstruction non négligeable cependant (erreur sur le contraste de l'ordre de 20%). Le profil de permittivité reconstruit est proche du profil réel mais on note encore de petites imperfections dans l'image de la conductivité (fortes valeurs au bord du domaine) (Figs. 11(e) & 11(f)).

On peut espérer gommer une partie de ces problèmes en augmentant le nombre de données fréquentielles contenues dans la bande étudiée.

FIG. 10: *Courbes de convergence I*

(a) Permittivité ($f=300$ MHz)(b) Conductivité $S.m^{-1}$ ($f=300$ MHz)(c) Permittivité ($f=1,3$ GHz)(d) Conductivité $S.m^{-1}$ ($f=1,3$ GHz)

(e) Permittivité (3 fréquences)

(f) Conductivité $S.m^{-1}$ (3 fréquences)

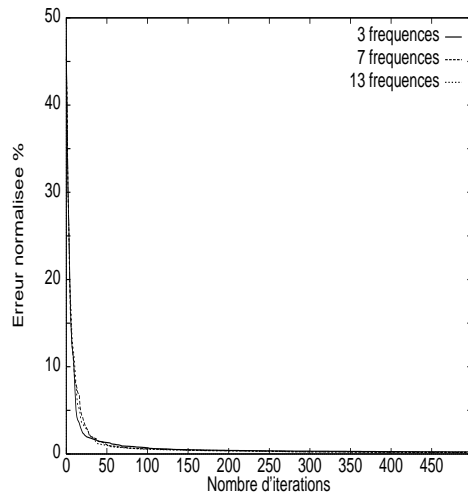
INRIA

FIG. 11: Profils reconstruits avec une ou plusieurs fréquences

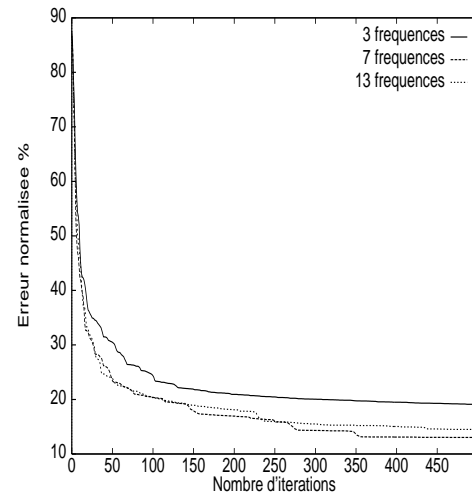
Dans un second temps, on reconstruit une image de l'objet enterré pour 3, 7 et 13 fréquences d'étude (Fig. 13).

Pour chacun des trois tests, l'erreur sur le champ diffracté reste très faible (proche de 2.10^{-3}), tandis que l'erreur sur le contraste se situe en dessous de 13% (Fig. 12). Comme on peut le constater, la qualité des reconstructions augmente avec le nombre de fréquences utilisées. L'augmentation du nombre de fréquences améliore donc sensiblement la qualité de l'image en diminuant le bruit présent. Toutefois, les bords de l'objet sont encore mal définis (Figs. 13(e) & 13(f)) et l'image de la conductivité n'est toujours pas satisfaisante. De plus, on observe peu de différences entre l'image reconstruite avec 7 fréquences et celle utilisant 13 fréquences. L'utilisation d'un nombre plus important de fréquences n'améliorent pas l'image résultante.

On se propose donc de définir une nouvelle méthode d'imagerie basée sur la méthode du bigradient conjugué en introduisant dans la fonctionnelle une information sur l'aspect géométrique de l'objet. Cette méthode devrait permettre une nette amélioration de la qualité des images comme dans le cas des objets non enterrés [33, 32]. Mais avant d'explicitier cette nouvelle technique, montrons l'influence sur l'image d'une reconstruction préalable du domaine d'investigation à l'aide de l'algorithme qualitatif.

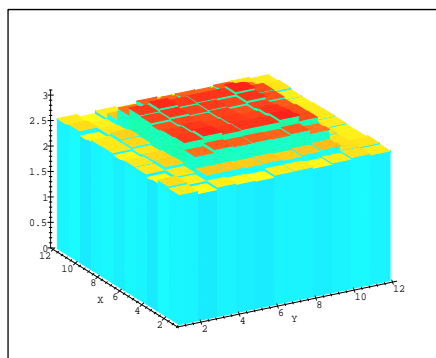


(a) Évolution de l'erreur sur le champ diffracté

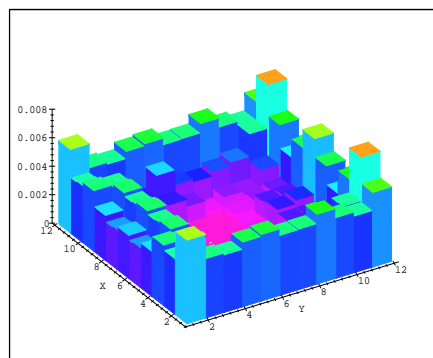


(b) Évolution de l'erreur sur le contraste

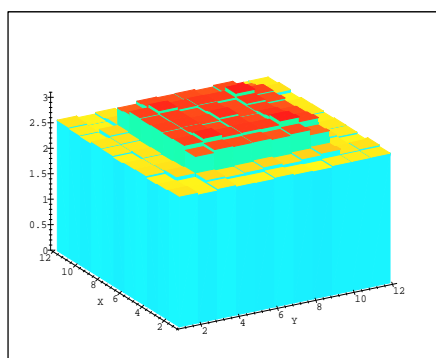
FIG. 12: *Courbes de convergence II*



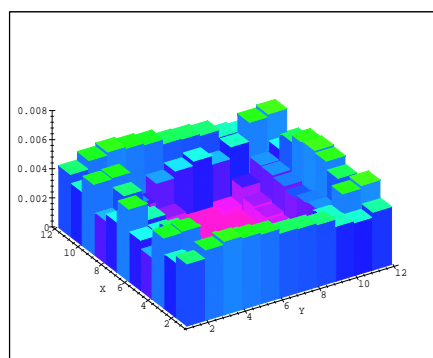
(a) Permittivité (3 fréquences)



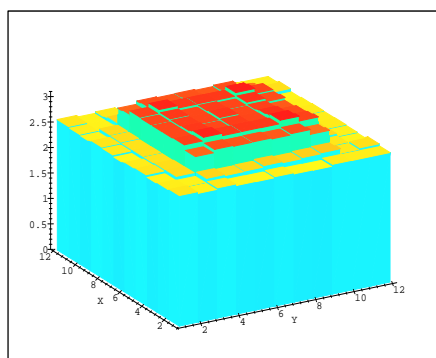
(b) Conductivité $S.m^{-1}$ (3 fréquences)



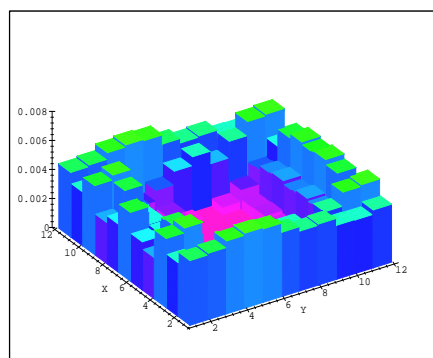
(c) Permittivité (7 fréquences)



(d) Conductivité $S.m^{-1}$ (7 fréquences)



(e) Permittivité (13 fréquences)



(f) Conductivité $S.m^{-1}$ (13 fréquences)

RR n° 3294

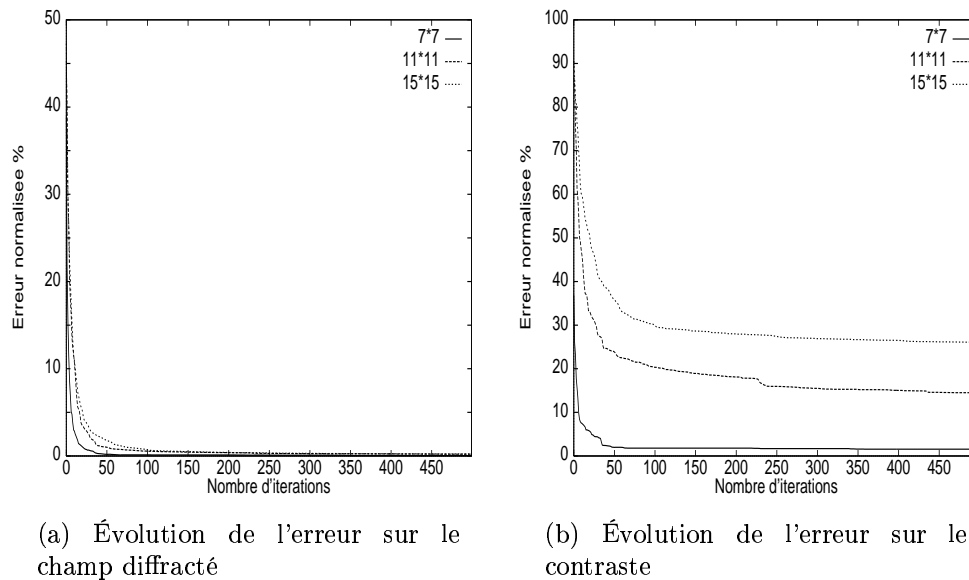
FIG. 13: Évolution de la reconstruction en fonction du nombre de fréquences

Bénéfice d'un traitement qualitatif préalable

On désire étudier dans cette partie l'effet que peut avoir une connaissance à priori du domaine d'investigation dans le sol. En effet, afin de restreindre le temps de calcul, il est utile de cibler la zone contenant l'objet recherché. Cette information peut être recueillie à l'aide d'une reconstruction préalable du sol en utilisant l'algorithme qualitatif très rapide. L'image résultante permet ainsi de mieux cerner les zones où doivent se trouver les objets enterrés.

Pour cette étude, les paramètres de la méthode (objet, sol, onde incidente,...) demeurent identiques à ceux utilisés précédemment. D'un point de vue numérique, le nombre de cellules discrétisant l'objet ne varie pas (7×7 cellules carrées). L'approche consiste à augmenter dans le domaine inconnu le nombre de cellules contenant du sable autour de l'objet. Pour le premier test, l'objet remplit complètement le domaine. Puis, on l'entoure d'une rangée de 2 cellules: il ne représente plus que 40% du domaine recherché discrétisé en 11×11 cellules. Enfin, on ajoute une rangée de 2 cellules pour que l'objet ne représente que 30% du domaine discrétisé en 15×15 cellules. Dans chaque cas, on respecte la règle $NOXI * NXS = N * N$ pour avoir un système bien déterminé.

Du point de vue de la convergence, l'erreur sur le champ diffracté devient très faible pour chacune des configurations (Fig. 14(a)). On note une convergence plus rapide quand l'objet remplit le domaine. Cette différence devient prépondérante dans la représentation de l'erreur sur le contraste (Fig. 14(b)). Pour le cas le plus favorable (l'objet représente 100% du domaine), l'algorithme converge rapidement vers la solution exacte (erreur de l'ordre de 2%). Dans les autres cas, la solution calculée converge vers un objet différent de l'objet réel. Cette différence s'accroît avec le nombre de cellules du domaine (15% d'erreur pour le cas 11×11 , 25% pour le cas 15×15). Ces différences sont tout aussi bien visibles lorsqu'on reconstruit une image respective des trois domaines d'étude (Fig. 15).

FIG. 14: *Courbes de convergence III*

Les différentes images confirment qu'il est important, en vue d'obtenir une image de meilleure qualité, de connaître de manière précise l'emplacement de l'objet enterré. De plus, le temps de calcul d'une itération de l'algorithme est proportionnel au nombre de cellules du domaine à reconstruire. Il est donc primordial de procéder à une étape de reconstruction qualitative dans un but discriminatoire. Puis, une fois le domaine ainsi déterminé, on applique la méthode BiGC.

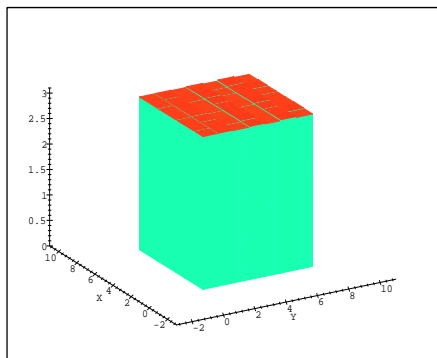
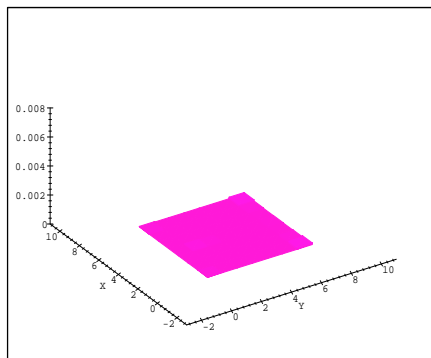
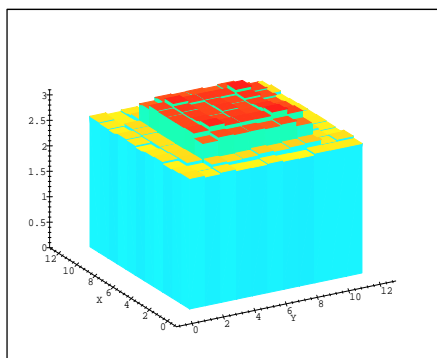
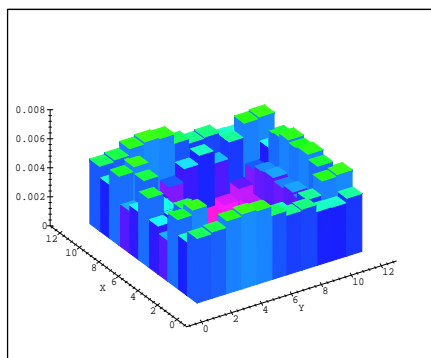
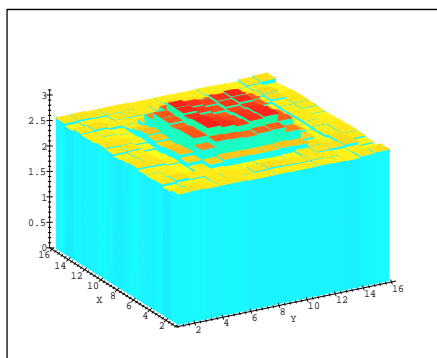
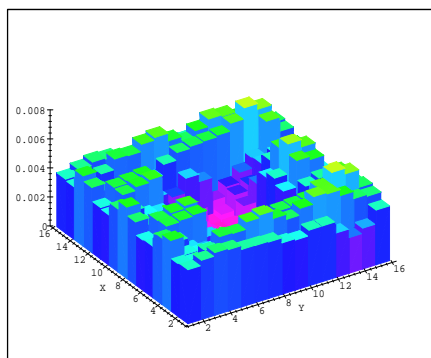
(a) Permittivité (7×7)(b) Conductivité $S.m^{-1}$ (7×7)(c) Permittivité (11×11)(d) Conductivité $S.m^{-1}$ (11×11)(e) Permittivité (15×15)(f) Conductivité $S.m^{-1}$ (15×15) INRIA

FIG. 15: Évolution de la reconstruction en fonction du domaine d'étude

3 Régularisation

Les résultats présentés dans le dernier chapitre ont laissé entrevoir certaines limites de l'approche multifréquentielle appliquée au cas des objets enterrés. Malgré l'amélioration apportée par l'augmentation du nombre de fréquences, la méthode d'imagerie ne permet pas une complète description de l'objet enfoui (bords de l'objet mal définis...). On peut cependant rapprocher les reconstructions simulées dans notre configuration avec celles obtenues à partir de données bruitées dans le cadre de l'imagerie multivue pour des objets dans l'espace libre [27]. En effet, le volume de données utilisées pour reconstruire l'objet est limité dans les deux problèmes. Une amélioration notable peut être alors apportée en incorporant une approche régularisante dans le processus d'imagerie.

Après un bref descriptif des principes des techniques de régularisation, un nouvel algorithme d'imagerie est développé à partir de la méthode de bigradient conjugué en y appliquant une technique de régularisation avec préservation des discontinuités. Les dernières reconstructions issues de simulations sont enfin présentées.

3.1 Principes de la régularisation

Le principe de la régularisation ne peut être abordé sans étudier le caractère mal-posé du problème inverse.

Si on définit l'ensemble P des paramètres qui décrivent l'objet (ses dimensions, sa hauteur d'enfouissement, sa constitution...) et l'ensemble D des données collectées (champ diffracté sur la ligne de mesure), le problème direct consiste à trouver la relation A entre les éléments de P et les éléments de D , tandis que le problème inverse se résuit à relier les deux ensembles dans le sens inverse (A^{-1}).

En pratique, on se heurte à de nombreux problèmes. Tout d'abord, il est difficile de décrire parfaitement l'objet. De plus, les mesures sont effectuées en un nombre fini de points. Ces deux constatations toujours vérifiées impliquent une mauvaise représentation du champ diffracté (à la fois dans le problème direct et dans le problème inverse).

De plus, la transformation A représentant l'opérateur des ondes est linéaire par rapport au champ alors que la relation définissant le problème inverse est

non linéaire dans l'approche quantitative. Cette non-linéarité du problème engendre souvent de multiples solutions ayant toutes le même champ diffracté. Enfin, lorsqu'on mesure réellement les données, un bruit de mesure souvent non négligeable apparaît. Ce paramètre nécessite un traitement avant son passage dans le processus d'imagerie (moyennage, calibration, ...). Une certaine stabilité de l'algorithme d'imagerie est aussi attendue (une petite erreur sur les données doit engendrer une petite erreur sur l'image reconstruite). Mais, lorsque le bruit est trop fort, on peut ne pas trouver de solution au problème, alors que le problème physique en admet une et une seule. Toutes ces propriétés inhérentes à l'étude du problème inverse définissent son caractère mal-posé. Le problème bien-posé est donc défini comme un problème possédant une unique solution qui de plus doit être stable (existence, unicité et stabilité de la solution). Si l'une des conditions n'est pas satisfaite, le problème est dit mal-posé. Une solution permettant la transformation du problème inverse mal-posé en un problème bien-posé consiste à introduire des contraintes avec un sens physique. Cette "connaissance à priori" de l'objet doit être indépendante des données. Ainsi, lors d'études des problèmes inverses linéarisés, on peut introduire des approximations (Born, Rytov..) permettant de considérer l'objet comme faiblement diffringent. L'utilisation d'une méthode d'imagerie qualitative avant l'étude du contraste conduit à la réduction du domaine ausculté et donc de l'ensemble des solutions envisageables. On peut montrer que la diversité en fréquence augmente les chances d'obtenir une unique solution. Les méthodes les plus développées à l'heure actuelle agissent sur l'objet enterré (sa forme, ses dimensions...). Ainsi, la régularisation au sens de Tikhonov conduit à un lissage de la zone auscultée, en introduisant une structure très lisse pour l'objet, sans grandes variations diélectriques à l'intérieur de celui-ci. Cette technique n'est pas généralisable à tout type d'objet. Au cours de cette étude, on s'est intéressé à une technique de régularisation qui préserve les discontinuités de l'objet (*Edge preserving*) [8, 28]. Cette régularisation a été appliquée avec succès à l'étude des objets dans l'espace libre (étude sur le contraste de permittivité complexe [27, 28, 33, 32, 31]). Ici, on étend la méthode au cas des objets enterrés en étudiant le procédé de régularisation séparément sur les contrastes réels de permittivité et de conductivité. Pour cela, on considère l'objet comme constitué de zones homogènes séparées par des discontinuités. Le terme de régularisation est alors introduit dans la

fonctionnelle à minimiser par l'intermédiaire d'une fonction φ agissant respectivement sur le gradient de la permittivité relative et sur le gradient de la conductivité. L'expression du terme de régularisation est alors complété par un réel λ qui définit l'importance que l'on accorde au terme de régularisation par rapport au terme d'attache aux données:

$$\lambda_{\varepsilon_r} \int_{\mathcal{D}_D} \varphi(\|\nabla \varepsilon_r(\vec{X})\|) d\vec{X} + \lambda_{\sigma} \int_{\mathcal{D}_D} \varphi(\|\nabla \sigma(\vec{X})\|) d\vec{X} \quad (38)$$

Plusieurs fonctions ont été définies et étudiées afin de lisser les zones homogènes tout en préservant les discontinuités de l'objet [27]. Chacune d'elles vérifie trois principales conditions imposées sur sa dérivée:

- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'(t)}{t} = \mathcal{M} < \infty$ pour obtenir un lissage isotropique des zones homogènes
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi'(t)}{t} = 0$ pour assurer la préservation des discontinuités
- $\frac{\varphi'(t)}{t}$ strictement décroissante pour avoir la stabilité du terme de régularisation

Pour cette étude, seules sont utilisées les fonctions de Geman & Mac Clure ($\frac{t^2}{1+t^2}$), et de Hebert & Leahy ($\log(1+t^2)$). Ces fonctions non convexes permettent un rehaussement des contours présents dans l'objet [5].

Avant de mettre en œuvre numériquement cette procédure de régularisation, on introduit une variable auxiliaire b ou variable de pondération telle que

$$\begin{cases} \varphi(t) = \min_{b \in]0, \mathcal{M}] } (bt^2 + \psi(b)) \\ b_{min} = \frac{\varphi'(t)}{2t} \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (39)$$

L'introduction de la variable auxiliaire rend quadratique le terme de régularisation. De plus, au cours du processus de reconstruction, la variable b décrit les contours reconstruits de l'objet ce qui permet de contrôler le déroulement de l'algorithme au cours des itérations.

L'existence des fonctions b et ψ (fonctions convexes) a été démontrée pour le cas des fonctions préservant les discontinuités [8].

A l'aide de la fonction de pondération, on va définir un algorithme de minimisation alternée sur la fonctionnelle globale:

- première étape: minimisation de la fonctionnelle en fixant la permittivité et la conductivité. Résolution analytique donnée par l'expression de b_{min} dans (39)
- deuxième étape: minimisation de la fonctionnelle en fixant la fonction de pondération. Méthode de bigradient conjugué sur la fonctionnelle avec régularisation.

3.2 Méthode BiGC avec régularisation

On reprend les notations définies dans le cas de la méthode BiGC en ajoutant un nouveau terme à la fonctionnelle étudiée. On cherche alors les paramètres ε_r et σ qui minimisent la fonctionnelle J :

$$\begin{aligned} J(\varepsilon_r, \sigma) &= \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \|\rho_{S,F}(\varepsilon_r, \sigma)\|_{L_1}^2 + \min_{b_{\varepsilon_r}} J_{R_{\varepsilon_r}}(\varepsilon_r, b_{\varepsilon_r}) + \min_{b_{\sigma}} J_{R_{\sigma}}(\sigma, b_{\sigma}) \\ &= J_{BiGC}(\varepsilon_r, \sigma) + J_{REG}(\varepsilon_r, \sigma) \end{aligned} \quad (40)$$

avec

$$J_{R_{\varepsilon_r}}(\varepsilon_r, b_{\varepsilon_r}) = \frac{\zeta_{\varepsilon_r}^2}{\delta_{\varepsilon_r}^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} [(b_{\varepsilon_r})_{p,q} \|(\nabla \varepsilon_r)_{p,q}\|^2 + \psi((b_{\varepsilon_r})_{p,q})] \quad (41)$$

$$J_{R_{\sigma}}(\sigma, b_{\sigma}) = \frac{\zeta_{\sigma}^2}{\delta_{\sigma}^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} [(b_{\sigma})_{p,q} \|(\nabla \sigma)_{p,q}\|^2 + \psi((b_{\sigma})_{p,q})] \quad (42)$$

Les gradients matriciels $\|\nabla \varepsilon_r\|$ et $\|\nabla \sigma\|$ sont définis en annexe (86).

Les variables ζ_{ε_r} et ζ_{σ} sont les paramètres de régularisation qui agissent respectivement sur ε_r et σ , alors que δ_{ε_r} et δ_{σ} fixent les seuils de discontinuité des deux variables étudiés (valeurs à partir desquelles l'algorithme détecte une discontinuité).

Les variables b_{ε_r} et b_σ sont quant à elles calculées en vue de minimiser le terme de régularisation dans (40), en fixant respectivement ε_r et σ . Leur expression est donnée à partir des φ fonctions, pour tous les points du domaine à reconstruire:

$$(b_{\varepsilon_r})_{p,q} = \frac{\varphi'(\frac{1}{\delta_{\varepsilon_r}} \|(\nabla \varepsilon_r)_{p,q}\|)}{\frac{2}{\delta_{\varepsilon_r}} \|(\nabla \varepsilon_r)_{p,q}\|} \text{ et } (b_\sigma)_{p,q} = \frac{\varphi'(\frac{1}{\delta_\sigma} \|(\nabla \sigma)_{p,q}\|)}{\frac{2}{\delta_\sigma} \|(\nabla \sigma)_{p,q}\|} \quad (43)$$

Une méthode itérative de type bigradient conjugué est alors appliquée pour calculer les valeurs de ε_r et σ recherchées.

3.2.1 Calcul du bigradient

Afin de calculer le bigradient du nouveau critère, on utilise le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonctionnelle à l'itération $k+1$ (24). D'après la définition de J , on montre que le nouveau gradient est composé de la somme des bigradients respectifs de J_{BiGC} et J_{REG} .

$$\nabla_{\varepsilon_r} J(\varepsilon_r^k, \sigma^k) = \nabla_{\varepsilon_r} J_{BiGC}(\varepsilon_r^k, \sigma^k) + \nabla_{\varepsilon_r} J_{REG}(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \quad (44)$$

$$\nabla_\sigma J(\varepsilon_r^k, \sigma^k) = \nabla_\sigma J_{BiGC}(\varepsilon_r^k, \sigma^k) + \nabla_\sigma J_{REG}(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \quad (45)$$

Or, on montre (93):

$$\begin{aligned} J_{REG}(\varepsilon_r^{k+1}, \sigma^{k+1}) &= J_{REG}(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \\ &\quad - 2\alpha_{\varepsilon_r}^k \left\langle \frac{\zeta_{\varepsilon_r}^2}{\delta_{\varepsilon_r}^2} \Delta_{b_{\varepsilon_r}} \varepsilon_r^k, \eta_{\varepsilon_r}^k \right\rangle_{\mathcal{D}_D} \\ &\quad - 2\alpha_\sigma^k \left\langle \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2} \Delta_{b_\sigma} \sigma^k, \eta_\sigma^k \right\rangle_{\mathcal{D}_D} \end{aligned} \quad (46)$$

D'où l'expression du nouveau bigradient:

$$\boxed{g_{\varepsilon_r}^k = -2 \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \mathcal{R}e \left(\text{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k} e^I) \overline{\mathbf{A}^k} \mathbf{G}^{\mathbf{R}^*} \rho_{S,F}(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \right) - 2 \frac{\zeta_{\varepsilon_r}^2}{\delta_{\varepsilon_r}^2} \Delta_{b_{\varepsilon_r,k}} \varepsilon_r^k} \quad (47)$$

$$g_\sigma^k = -2 \sum_{F=1}^{NTF} \sum_{S=1}^{NXS} \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \text{Im} \left(\text{Diag}(\overline{\mathbf{A}^k e^I}) \overline{\mathbf{A}^k} \mathbf{G}^{\mathbf{R}^*} \rho_{S,F}(\varepsilon_r^k, \sigma^k) \right) - 2 \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2} \Delta_{b_{\sigma^k}} \sigma^k$$
(48)

Les directions de descente $\eta_{\varepsilon_r}^k$ et η_σ^k sont ensuite calculées d'une façon analogue à celle définie précédemment.

3.2.2 Calcul des facteurs d'échelle optimaux associés

En reprenant les mêmes notations que pour la méthode BiGC sans régularisation, on montre d'après (93) que $\alpha_{\varepsilon_r}^k$ et α_σ^k satisfont le système suivant:

$$\begin{aligned} A_{R1} \alpha_{\varepsilon_r}^k + B_{R1} \alpha_\sigma^k &= C_{R1} \\ B_{R1} \alpha_{\varepsilon_r}^k + B_{R2} \alpha_\sigma^k &= C_{R2} \end{aligned}$$
(49)

soit

$$\alpha_{\varepsilon_r}^k = \frac{B_{R1} C_{R2} - B_{R2} C_{R1}}{B_{R1}^2 - B_{R2} A_{R1}} \text{ et } \alpha_\sigma^k = \frac{B_{R1} C_{R1} - A_{R1} C_{R2}}{B_{R1}^2 - B_{R2} A_{R1}}$$
(50)

avec les notations

$$A_{R1} = A_1 + \frac{\zeta_{\varepsilon_r}^2}{\delta_{\varepsilon_r}^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} (b_{\varepsilon_r})_{p,q} \|(\nabla \eta_{\varepsilon_r}^k)_{p,q}\|^2$$
(51)

$$B_{R1} = B_1$$
(52)

$$B_{R2} = B_2 + \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} (b_\sigma)_{p,q} \|(\nabla \eta_\sigma^k)_{p,q}\|^2$$
(53)

$$C_{R1} = C_1 + \left\langle \frac{\zeta_{\varepsilon_r}^2}{\delta_{\varepsilon_r}^2} \Delta_{b_{\varepsilon_r^k}} \varepsilon_r^k, \eta_{\varepsilon_r}^k \right\rangle_{\mathcal{D}_D}$$
(54)

$$C_{R2} = C_2 + \left\langle \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2} \Delta_{b_{\sigma^k}} \sigma^k, \eta_\sigma^k \right\rangle_{\mathcal{D}_D}$$
(55)

3.3 Résultats numériques

Nous ne présentons pas ici une étude qui se voudrait exhaustive mais plutôt une illustration de la technique de régularisation au travers de deux exemples numériques. Cependant, les images reconstruites en appliquant la méthode précédente, attestent de l'efficacité de la procédure de régularisation décrite dans la dernière partie. Chacune des simulations est comparée à l'image obtenue avec la méthode BiGC (sans régularisation). On utilise dans toute la suite 3 fréquences d'illumination équiréparties dans la bande $[0,3;1,3]$ GHz.

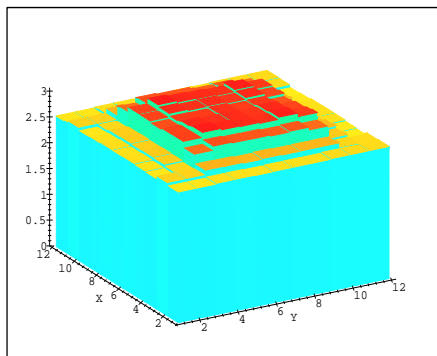
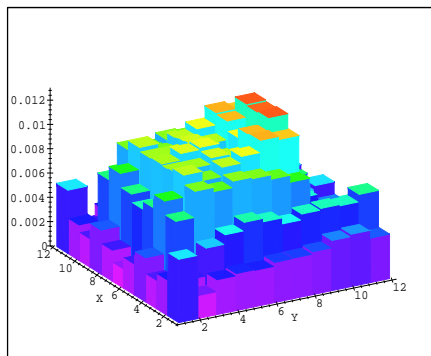
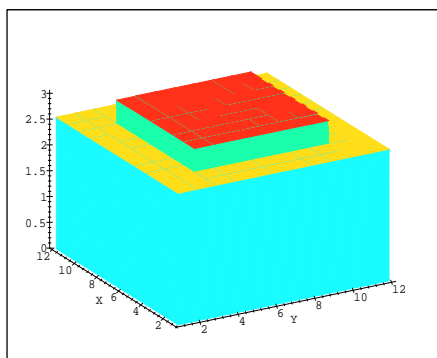
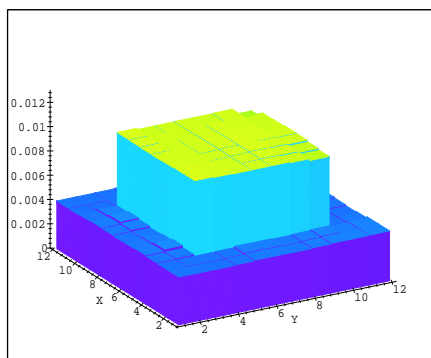
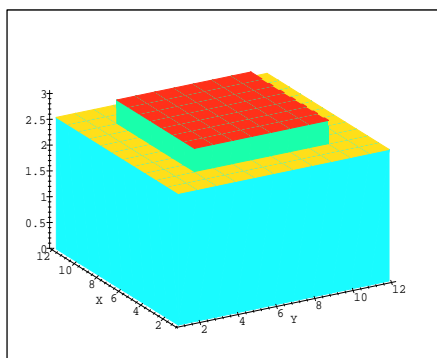
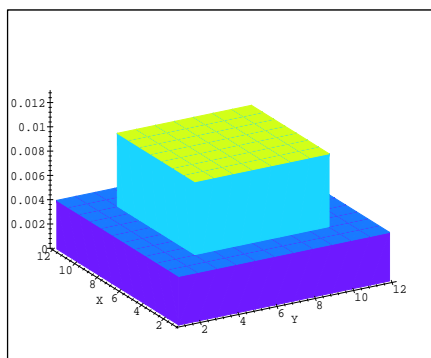
3.3.1 Reconstruction du cylindre carré

On reprend l'exemple du cylindre de section carrée étudié dans le chapitre précédent. Seule sa conductivité a changé ($\sigma = 10^{-2} S.m^{-1}$). Les autres caractéristiques restent les mêmes.

L'amélioration générale sur l'image apportée par l'introduction des paramètres régularisant ($\zeta_{\epsilon_r} = 6.10^{-3}$; $\delta_{\epsilon_r} = 1,2.10^{-3}$; $\zeta_{\sigma} = 4.10^{-1}$; $\delta_{\sigma} = 5.10^{-3}$) n'est pas négligeable (Fig. 16). Toutes les imperfections contenues dans l'image reconstruite à l'aide de la méthode BiGC (Figs. 16(a) et 16(b)) ont à présent disparu (Figs. 16(c) et 16(d)). Seules quelques cellules diffèrent de l'image exacte. En effet, la symétrie des objets n'est pas totalement respectée. Cette erreur s'explique par l'utilisation d'une formule décentrée à droite dans l'étape de discrétisation du gradient matriciel (86). Néanmoins, on peut convenir de l'exactitude des résultats obtenus: les caractéristiques de l'objet sont reconstruites de manière très précise (erreur sur le contraste proche de 1%). D'un point de vue géométrique, les bords de l'objet sont parfaitement reconstruits tant pour la permittivité que pour la conductivité. La forme de l'objet a été lissée tout aussi parfaitement. L'image obtenue est en tout point comparable à l'image réelle (Figs. 16(e) et 16(f)).

3.3.2 Reconstruction d'un anneau carré

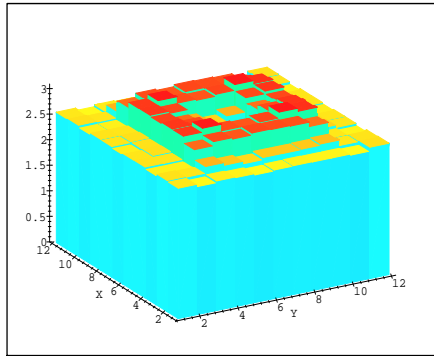
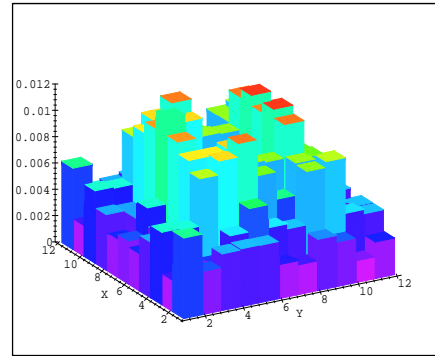
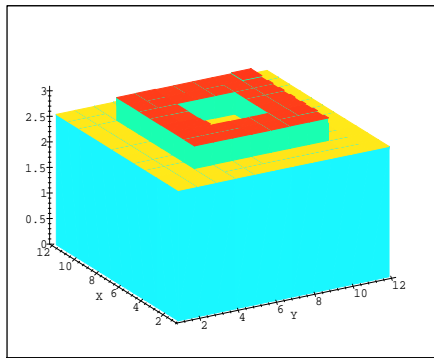
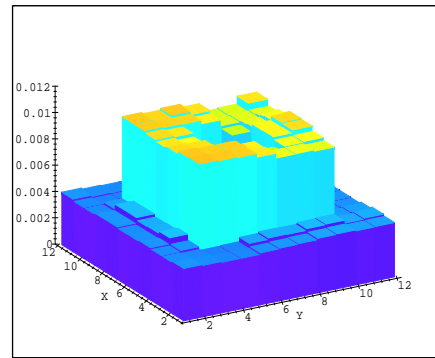
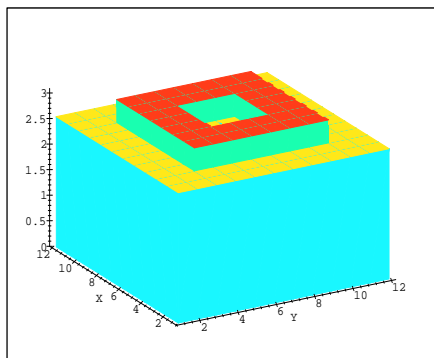
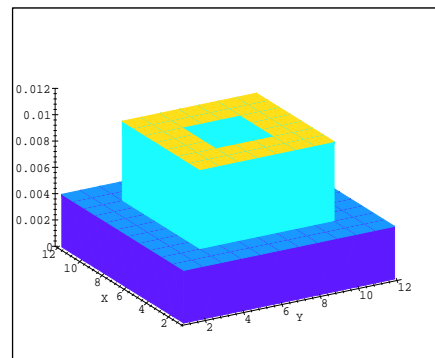
L'objet à reconstruire garde les mêmes caractéristiques que celui étudié dans l'exemple précédent. Seule la forme de la section du cylindre a été transformée en un anneau carré. La comparaison des images obtenues soit par la méthode BiGC (Figs. 16(a) et 16(b)) soit en introduisant dans celle-ci une

(a) Profil ε_r reconstruit BiGC(b) Profil σ reconstruit BiGC(c) Profil ε_r reconstruit régularisé(d) Profil σ reconstruit régularisé(e) Profil ε_r réel(f) Profil σ réel

INRIA

FIG. 16: *Comparaison des différentes reconstructions du cylindre carré*

part de régularisation (Figs. 16(c) et 16(d) pour $\zeta_{\varepsilon_r} = 6.10^{-3}$; $\delta_{\varepsilon_r} = 1, 2.10^{-3}$; $\zeta_{\sigma} = 4.10^{-1}$; $\delta_{\sigma} = 6.10^{-3}$) conduit à la même analyse que précédemment. La technique régularisante permet de reconstruire avec précision la forme et les caractéristiques de l'objet enterré. Les résultats sont très satisfaisants si on les compare avec l'image réelle (Figs. 16(e) et 16(f)), même si on note une moins bonne reconstruction de la conductivité pour la partie inférieure de l'objet. Cette différence peut être expliquée en comparant dans un premier temps la valeur respective des deux contrastes à reconstruire. On étudie de la même façon un contraste proche de l'unité pour la permittivité ($C_{\varepsilon_r} = 0, 45$) et un contraste très faible de conductivité ($C_{\sigma} = 6.10^{-4} S.m^{-1}$). Si l'erreur commise sur la conductivité est relativement forte (en comparant avec la donnée réelle), elle peut néanmoins être considérée comme faible si on compare les valeurs trouvées avec les valeurs cherchées pour la permittivité. De plus, d'un point de vue physique, la conductivité, qui est à l'origine du facteur d'atténuation des ondes, est toujours plus difficile à obtenir que la permittivité. Une augmentation du nombre de fréquences couplée à une analyse plus fine des paramètres de régularisation (étude de deux procédures de régularisation, par exemple) pourrait sensiblement améliorer l'image obtenue.

(a) Profil ε_r reconstruit BiGC(b) Profil σ reconstruit BiGC(c) Profil ε_r reconstruit régularisé(d) Profil σ reconstruit régularisé(e) Profil ε_r réel(f) Profil σ réel

INRIA

FIG. 17: Comparaison des différentes reconstructions de l'anneau carré

4 Conclusion

Cette étude a été consacrée au développement de techniques d'imagerie quantitative. Basées essentiellement sur des techniques de minimisation de fonctionnelles à valeurs réelles utilisant des algorithmes de type gradient conjugué, les méthodes développées ici ont amélioré les résultats obtenus avec la méthode spectrale du point de vue de la détection et de la localisation d'objets enterrés. De plus, cette deuxième génération d'algorithmes d'imagerie a permis de résoudre le problème inverse électromagnétique, toujours posé dans le cas fondamental 2D-TM, de manière quantitative en reconstruisant à la fois le profil de permittivité relative et de conductivité d'objets enfouis dans le sol. Bénéficiant essentiellement de l'illumination multiposition et de l'approche multifréquence, les images produites par la méthode BiGC ont su démontrer le pouvoir de super résolution de cette méthode. Cette propriété différencie ainsi ces nouveaux algorithmes des techniques de type qualitative limitées au critère de Rayleigh ($\frac{\lambda}{2}$), ou des techniques quantitatives de type Newton Kantorovich qui nécessitent dans tous les cas l'utilisation d'une procédure de régularisation. En complément, l'introduction d'une procédure de régularisation, de type préservation des discontinuités, à l'intérieur même du processus de minimisation a confirmé cette tendance pour aboutir, dans les exemples présentés, à des résolutions spatiales de l'ordre de $\frac{\lambda}{10}$ pour les fréquences hautes jusqu'à $\frac{\lambda}{30}$ pour les plus basses fréquences. Cette nouvelle technique a conduit aux meilleurs résultats tant en précision des reconstructions qu'en vitesse de convergence. La méthode n'est toutefois pas encore optimale. On note, en effet, des différences entre la permittivité et la conductivité reconstruite. Cependant, il est toujours plus difficile de reconstruire la conductivité, mais des progrès peuvent encore être apportés afin d'améliorer les résultats.

Les méthodes proposées restent aussi très coûteuses en temps de calcul et en volume de données. Du point de vue des mesures, si le champ diffracté est toujours mesuré sur une ligne de mesure près ou sur le sol, la résolution du problème inverse nécessite la connaissance du champ électrique à l'intérieur d'une portion surfacique du sol. De plus, l'algorithme que nous proposons nécessite à chaque itération l'inversion d'un problème direct. Or, le temps de calcul lié à cette inversion, effectuée pour chaque fréquence à l'aide d'une méthode de résolution directe, ne permet pas l'utilisation de cette technique d'imagerie pour

des applications en temps réel ou quasi réel. On peut néanmoins l'utiliser pour affiner des images reconstruites avec une méthode beaucoup plus rapide. Il est aussi possible d'optimiser le temps de calcul en résolvant le problème direct de manière itérative. Le cas 2D-TE doit aussi être envisagé. Le cas 3D, s'il reste à l'étude, ne pourra être utilisé actuellement que pour de petits cas tests avec peu de fréquences.

Il reste également à étendre de façon systématique les propriétés mises à jour en reconstruisant des images d'objets plus conducteurs (objets métalliques) pour des sols plus humides. Une étude de stabilité des algorithmes vis à vis du bruit de mesure devrait permettre de mieux définir les capacités de ces méthodes. Enfin, comme dans le cas de l'imagerie qualitative, il serait intéressant d'effectuer une phase de validation expérimentale des algorithmes de reconstruction. D'un point de vue pratique, il serait souhaitable dans un premier temps d'optimiser le nombre et la position des points de mesure afin de réduire les temps de calcul.

ANNEXES

A Calculs matriciels annexes

A.1 Calcul de $[\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1}$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1} &= \mathbf{A} + [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1} - \mathbf{A} \\
 &= \mathbf{A} + [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1} \{ \mathbf{I} - [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}] \mathbf{A} \} \\
 &= \mathbf{A} + [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1} \{ \mathbf{A}^{-1} - [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}] \} \mathbf{A} \\
 &= \mathbf{A} + [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}
 \end{aligned} \tag{56}$$

Finalement, on obtient:

$$\boxed{[\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1} = \mathbf{A} + [\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}} \tag{57}$$

A.2 Calcul de $[\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{B}]^{-1}$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} &= \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{A} \mathbf{B} \\
 &= \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{A} [\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{A}] [\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \\
 &= \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{B} + [\mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}] [\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \\
 &= \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{B} + [\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{B}] \mathbf{A} [\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} \\
 &= [\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{B}] [\mathbf{I} + \mathbf{A} [\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}]
 \end{aligned} \tag{58}$$

Finalement, on obtient:

$$\boxed{[\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{B}]^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} [\mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}} \tag{59}$$

B Paramètres de la méthode GC

B.1 Calcul de $\rho_{S,F}(\chi^{k+1})$

Soit $\chi^{k+1} = \chi^k + \alpha^k \eta^k$ la variable caractéristique à l'itération $k + 1$. On peut alors écrire la fonction coût à l'itération $k + 1$ pour chaque fréquence ω , pour toutes les positions de source \vec{X}_S :

$$\rho_{S,F}(\chi^{k+1}) = e^D - \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{C}(\chi^{k+1}) [\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{C}(\chi^{k+1})]^{-1} e^I \quad (60)$$

Or

$$\mathbf{C}(\chi^{k+1}) = \mathbf{C}(\chi^k) + \alpha^k \mathbf{C}(\eta^k)$$

Soit la matrice diagonale complexe $\mathbf{D}^k = \mathbf{C}(\eta^k)$ de dimension $N * N$. Alors, si on note $\mathbf{C}^k = \mathbf{C}(\chi^k)$ et $\mathbf{A}^k = [\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{C}^k]^{-1}$, on obtient:

$$\begin{aligned} \rho_{S,F}(\chi^{k+1}) &= e^D - \mathbf{G}^{\mathbf{R}} (\mathbf{C}^k + \alpha^k \mathbf{D}^k) [\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} (\mathbf{C}^k + \alpha^k \mathbf{D}^k)]^{-1} e^I \\ &= e^D - [\mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{C}^k + \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{D}^k] [\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{C}^k - \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{D}^k]^{-1} e^I \\ &= e^D - [\mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{C}^k + \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{D}^k] [\mathbf{A}^{k-1} - \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{D}^k]^{-1} e^I \end{aligned} \quad (61)$$

D'après (57), on montre que:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}^{k-1} - \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{D}^k]^{-1} &= [\mathbf{I} + [\mathbf{A}^{k-1} - \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{D}^k]^{-1} \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{D}^k] \mathbf{A}^k \\ &= [\mathbf{I} + \alpha^k [\mathbf{I} - \alpha^k \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{D}^k]^{-1} \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{D}^k] \mathbf{A}^k \end{aligned} \quad (62)$$

En utilisant le développement de Taylor de $[\mathbf{I} - \alpha^k \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{D}^k]^{-1}$ et en simplifiant les calculs au premier ordre en $\alpha^k \mathbf{D}^k$, on obtient:

$$[\mathbf{A}^{k-1} - \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{D}^k]^{-1} = [\mathbf{I} + \alpha^k \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{D}^k] \mathbf{A}^k \quad (63)$$

En introduisant ce résultat dans l'équation (61) et en simplifiant les calculs au premier ordre en $\alpha^k \mathbf{D}^k$, on obtient pour la fonction coût:

$$\begin{aligned} \rho_{S,F}(\chi^{k+1}) &= e^D - \mathbf{G}^{\mathbf{R}} (\mathbf{C}^k + \alpha^k \mathbf{D}^k) [\mathbf{I} + \alpha^k \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{D}^k] \mathbf{A}^k e^I \\ &= \{e^D - \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{C}^k \mathbf{A}^k e^I\} \\ &\quad - [\alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{C}^k \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{D}^k + \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{D}^k] \mathbf{A}^k e^I \\ &= \rho_{S,F}(\chi^k) - \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{R}} [\mathbf{I} + \mathbf{C}^k \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}}] \mathbf{D}^k \mathbf{A}^k e^I \end{aligned} \quad (64)$$

D'après (59), on peut écrire:

$$\mathbf{I} + \mathbf{C}^k \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} = [\mathbf{I} - \mathbf{C}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}}]^{-1} \quad (65)$$

Comme la matrice \mathbf{C}^k est diagonale, alors que la matrice $\mathbf{G}^{\mathbf{O}}$ est symétrique, on a:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{C}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}}] = [\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{C}^{k\top}]^t = [\mathbf{A}^{k^t}]^{-1} \quad (66)$$

Finalement, on obtient:

$$\boxed{\rho_{S,F}(\chi^{k+1}) = \rho_{S,F}(\chi^k) - \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{k^t} \mathbf{D}^k \mathbf{A}^k e^I} \quad (67)$$

B.2 Calcul de $\|\rho_{S,F}(\chi^{k+1})\|_{L_1}^2$

Par définition de la norme $\|\cdot\|_{L_1}$, on a:

$$\begin{aligned} \|\rho_{S,F}(\chi^{k+1})\|_{L_1}^2 &= \left(\rho_{S,F}(\chi^k) - \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{k^t} \mathbf{D}^k \mathbf{A}^k e^I, \right. \\ &\quad \left. \rho_{S,F}(\chi^k) - \alpha^k \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{k^t} \mathbf{D}^k \mathbf{A}^k e^I \right)_{L_1} \quad (68) \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \|\rho_{S,F}(\chi^{k+1})\|_{L_1}^2 &= \|\rho_{S,F}(\chi^k)\|_{L_1}^2 - 2\alpha^k \mathcal{R}e \left(\rho_{S,F}(\chi^k), \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{k^t} \mathbf{D}^k \mathbf{A}^k e^I \right)_{L_1} \\ &\quad + (\alpha^k)^2 \|\mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{k^t} \mathbf{D}^k \mathbf{A}^k e^I\|_{L_1}^2 \quad (69) \end{aligned}$$

C Paramètres de la méthode BiGC

C.1 Calcul de $\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1})$

Soit $\begin{cases} \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \alpha_\varepsilon^k \eta_\varepsilon^k \\ \sigma^{k+1} = \sigma^k + \alpha_\sigma^k \eta_\sigma^k \end{cases}$ la variable caractéristique à l'itération $k+1$.

On peut alors écrire la fonction coût à l'itération $k+1$ pour chaque fréquence ω , pour toutes les positions de source \vec{X}_S :

$$\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1}) = e^D - \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{C}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1}) [\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{C}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1})]^{-1} e^I \quad (70)$$

Or

$$\mathbf{C}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1}) = \mathbf{C}(\varepsilon^k, \sigma^k) + \mathbf{C}(\alpha_\varepsilon^k \eta_\varepsilon^k, \alpha_\sigma^k \eta_\sigma^k)$$

Soit la matrice diagonale complexe $\check{\mathbf{D}}^k = \mathbf{C}(\alpha_\varepsilon^k \eta_\varepsilon^k, \alpha_\sigma^k \eta_\sigma^k)$ de dimension $N * N$. Alors, si on note $\mathbf{C}^k = \mathbf{C}(\varepsilon^k, \sigma^k)$ et $\mathbf{A}^k = [\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{C}^k]^{-1}$, on obtient:

$$\begin{aligned} \rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1}) &= e^D - \mathbf{G}^{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^k + \check{\mathbf{D}}^k)[\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}}(\mathbf{C}^k + \check{\mathbf{D}}^k)]^{-1} e^I \\ &= e^D - [\mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{C}^k + \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \check{\mathbf{D}}^k][\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{C}^k - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \check{\mathbf{D}}^k]^{-1} e^I \\ &= e^D - [\mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{C}^k + \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \check{\mathbf{D}}^k][\mathbf{A}^{\mathbf{k}^{-1}} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \check{\mathbf{D}}^k]^{-1} e^I \end{aligned} \quad (71)$$

D'après (57), on montre que:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}^{\mathbf{k}^{-1}} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \check{\mathbf{D}}^k]^{-1} &= [\mathbf{I} + [\mathbf{A}^{\mathbf{k}^{-1}} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \check{\mathbf{D}}^k]^{-1} \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \check{\mathbf{D}}^k] \mathbf{A}^k \\ &= [\mathbf{I} + [\mathbf{I} - \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \check{\mathbf{D}}^k]^{-1} \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \check{\mathbf{D}}^k] \mathbf{A}^k \end{aligned} \quad (72)$$

En utilisant le développement de Taylor de $[\mathbf{I} - \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \check{\mathbf{D}}^k]^{-1}$ et en simplifiant les calculs au premier ordre en $\check{\mathbf{D}}^k$, on obtient:

$$[\mathbf{A}^{\mathbf{k}^{-1}} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \check{\mathbf{D}}^k]^{-1} = [\mathbf{I} + \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \check{\mathbf{D}}^k] \mathbf{A}^k \quad (73)$$

En introduisant ce résultat dans l'équation (71) et en simplifiant les calculs au premier ordre en $\check{\mathbf{D}}^k$, on obtient pour la fonction coût:

$$\begin{aligned} \rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1}) &= e^D - \mathbf{G}^{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^k + \check{\mathbf{D}}^k)[\mathbf{I} + \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \check{\mathbf{D}}^k] \mathbf{A}^k e^I \\ &= \{e^D - \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{C}^k \mathbf{A}^k e^I\} \\ &\quad - [\mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{C}^k \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \check{\mathbf{D}}^k + \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \check{\mathbf{D}}^k] \mathbf{A}^k e^I \\ &= \rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k) - \mathbf{G}^{\mathbf{R}}[\mathbf{I} + \mathbf{C}^k \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}}] \check{\mathbf{D}}^k \mathbf{A}^k e^I \end{aligned} \quad (74)$$

D'après (59), on peut écrire:

$$\mathbf{I} + \mathbf{C}^k \mathbf{A}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}} = [\mathbf{I} - \mathbf{C}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}}]^{-1} \quad (75)$$

Comme la matrice \mathbf{C}^k est diagonale, alors que la matrice $\mathbf{G}^{\mathbf{O}}$ est symétrique, on a:

$$[\mathbf{I} - \mathbf{C}^k \mathbf{G}^{\mathbf{O}}] = [\mathbf{I} - \mathbf{G}^{\mathbf{O}} \mathbf{C}^k]^t = [\mathbf{A}^{\mathbf{k}^t}]^{-1} \quad (76)$$

Finalement, on obtient:

$$\boxed{\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1}) = \rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k) - \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}^t} \check{\mathbf{D}}^k \mathbf{A}^k e^I} \quad (77)$$

C.2 Calcul de $\|\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1})\|_{L_1}^2$

Par définition de la norme, on a:

$$\begin{aligned} \|\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1})\|_{L_1}^2 &= \left(\rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k) - \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}^t} \check{\mathbf{D}}^k \mathbf{A}^k e^I, \right. \\ &\quad \left. \rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k) - \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}^t} \check{\mathbf{D}}^k \mathbf{A}^k e^I \right)_{L_1} \quad (78) \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \|\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1})\|_{L_1}^2 &= \|\rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k)\|_{L_1}^2 \\ &\quad - 2\mathcal{R}e \left(\rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k), \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}^t} \check{\mathbf{D}}^k \mathbf{A}^k e^I \right)_{L_1} \\ &\quad + \|\mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}^t} \check{\mathbf{D}}^k \mathbf{A}^k e^I\|_{L_1}^2 \quad (79) \end{aligned}$$

Comme $\check{\mathbf{D}}^k$ est diagonale et $\mathbf{A}^k e^I$ est un vecteur, on peut les commuter en utilisant le vecteur complexe \check{d}^k composé des éléments de la diagonale de $\check{\mathbf{D}}^k$, ainsi que la matrice diagonale complexe $\mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I)$ dont la diagonale est formée par les éléments du vecteur complexe $\mathbf{A}^k e^I$.

On peut donc écrire (79) sous la forme:

$$\begin{aligned} \|\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1})\|_{L_1}^2 &= \|\rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k)\|_{L_1}^2 \\ &\quad - 2\mathcal{R}e \left(\rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k), \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}^t} \mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I) \check{d}^k \right)_{L_1} \\ &\quad + \|\mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}^t} \mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I) \check{d}^k\|_{L_1}^2 \quad (80) \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{M}^k = \mathbf{G}^{\mathbf{R}} \mathbf{A}^{\mathbf{k}^t} \mathbf{Diag}(\mathbf{A}^k e^I)$ la matrice complexe de dimension $NOXI * N$. (80) devient:

$$\begin{aligned} \|\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1})\|_{L_1}^2 &= \|\rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k)\|_{L_1}^2 - 2\mathcal{R}e \left(\mathbf{M}^{\mathbf{k}^*} \rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k), \check{d}^k \right)_{\mathcal{D}_D} \\ &\quad + \|\mathbf{M}^k \check{d}^k\|_{L_1}^2 \quad (81) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}^k \check{d}^k\|_{L_1}^2 &= \langle \mathcal{R}e(\mathbf{M}^k \check{d}^k), \mathcal{R}e(\mathbf{M}^k \check{d}^k) \rangle_{L_1} \\ &\quad + \langle \mathcal{I}m(\mathbf{M}^k \check{d}^k), \mathcal{I}m(\mathbf{M}^k \check{d}^k) \rangle_{L_1} \end{aligned} \quad (82)$$

De plus,

$$\mathcal{R}e(\mathbf{M}^k \check{d}^k) = \alpha_\varepsilon^k \mathcal{R}e(\mathbf{M}^k) \eta_\varepsilon^k - \frac{\alpha_\sigma^k}{\omega \varepsilon_0} \mathcal{I}m(\mathbf{M}^k) \eta_\sigma^k \quad (83)$$

$$\mathcal{I}m(\mathbf{M}^k \check{d}^k) = \alpha_\varepsilon^k \mathcal{I}m(\mathbf{M}^k) \eta_\varepsilon^k + \frac{\alpha_\sigma^k}{\omega \varepsilon_0} \mathcal{R}e(\mathbf{M}^k) \eta_\sigma^k \quad (84)$$

En développant les produits hermitiens et les produits scalaires, on obtient finalement:

$$\begin{aligned} \|\rho_{S,F}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1})\|_{L_1}^2 &= \|\rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k)\|_{L_1}^2 \\ &\quad - 2\alpha_\varepsilon^k \langle \mathcal{R}e(\mathbf{M}^{\mathbf{k}*} \rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k)), \eta_\varepsilon^k \rangle_{\mathcal{D}_D} \\ &\quad - 2\frac{\alpha_\sigma^k}{\omega \varepsilon_0} \langle \mathcal{I}m(\mathbf{M}^{\mathbf{k}*} \rho_{S,F}(\varepsilon^k, \sigma^k)), \eta_\sigma^k \rangle_{\mathcal{D}_D} \\ &\quad + (\alpha_\varepsilon^k)^2 \{ |\mathcal{R}e(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_\varepsilon^k|_{L_1}^2 + |\mathcal{I}m(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_\varepsilon^k|_{L_1}^2 \} \\ &\quad + \left(\frac{\alpha_\sigma^k}{\omega \varepsilon_0}\right)^2 \{ |\mathcal{R}e(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_\sigma^k|_{L_1}^2 + |\mathcal{I}m(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_\sigma^k|_{L_1}^2 \} \\ &\quad + 2\frac{\alpha_\varepsilon^k \alpha_\sigma^k}{\omega \varepsilon_0} \langle \mathcal{R}e(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_\sigma^k, \mathcal{I}m(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_\varepsilon^k \rangle_{L_1} \\ &\quad - 2\frac{\alpha_\varepsilon^k \alpha_\sigma^k}{\omega \varepsilon_0} \langle \mathcal{R}e(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_\varepsilon^k, \mathcal{I}m(\mathbf{M}^{\mathbf{k}}) \eta_\sigma^k \rangle_{L_1} \end{aligned} \quad (85)$$

D Paramètres de la méthode BiGC avec régularisation

D.1 Définition de $\|\nabla \mathbf{A}\|$

Soient $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = A_{p,q} \quad \text{une matrice réelle de dimension } NL \times NC \\ A_p = A_{p,q} \quad \text{le vecteur de dimension } NC \text{ formé par la } p\text{-ème ligne de } \mathbf{A} \\ A_q = A_{p,q} \quad \text{le vecteur de dimension } NL \text{ formé par la } p\text{-ème colonne de } \mathbf{A} \end{array} \right.$

On définit la matrice de la norme du gradient $\|\nabla \mathbf{A}\|$ par:

$$\|(\nabla A)_{p,q}\| = [(\nabla_X A_p)_q^2 + (\nabla_Y A_q)_p^2]^{\frac{1}{2}}, \forall p = 1..NL, \forall q = 1..NC \quad (86)$$

où $(\nabla_X A_p)_q$ et $(\nabla_Y A_q)_p$ représentent respectivement le gradient selon X de \mathbf{A} et le gradient selon Y de \mathbf{A} tels que:

$$\begin{cases} (\nabla_X A_p)_q = 0 & \text{si } q = NC \\ (\nabla_X A_p)_q = A_{p,q+1} - A_{p,q} & \forall q = 1..NC-1 \end{cases} \quad (87)$$

et

$$\begin{cases} (\nabla_Y A_q)_p = 0 & \text{si } p = NL \\ (\nabla_Y A_q)_p = A_{p+1,q} - A_{p,q} & \forall p = 1..NL-1 \end{cases} \quad (88)$$

D.2 Définition de $\Delta_{\mathbf{B}} \mathbf{A}$

Soient \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} trois matrices réelles de dimension $NL \times NC$.

On construit les vecteurs A , B et C de dimension $NL \times NC$ contenant respectivement les éléments des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} .

On définit le laplacien de \mathbf{A} de poids \mathbf{B} comme la matrice $\Delta_{\mathbf{B}} \mathbf{A}$ de dimension $NL \times NC$ telle que:

$$\langle -\Delta_{\mathbf{B}} A, C \rangle_{\mathcal{D}_D} = \sum_{p=1}^{NL} \sum_{q=1}^{NC} (B)_{p,q} (\nabla A)_{p,q} (\nabla C)_{p,q} \quad (89)$$

où $\Delta_B A$ est le vecteur de dimension $NL \times NC$ contenant les éléments de $\Delta_{\mathbf{B}} \mathbf{A}$. En développant suivant la définition du gradient matriciel, on obtient:

$$\begin{aligned} (-\Delta_{\mathbf{B}} \mathbf{A})_{p,q} &= (B_{p,q-1} + 2B_{p,q} + B_{p-1,q})A_{p,q} \\ &\quad - B_{p,q-1}A_{p,q-1} - B_{p,q}A_{p,q+1} \\ &\quad - B_{p-1,q}A_{p-1,q} - B_{p,q}A_{p+1,q} \end{aligned} \quad (90)$$

D.3 Calcul de $J_{REG}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1})$

Soit $\begin{cases} \varepsilon^{k+1} = \varepsilon^k + \alpha_\varepsilon^k \eta_\varepsilon^k \\ \sigma^{k+1} = \sigma^k + \alpha_\sigma^k \eta_\sigma^k \end{cases}$ la variable caractéristique à l'itération $k + 1$.

D'après la définition de J_{REG} , on peut écrire:

$$\begin{aligned} J_{REG}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1}) &= \frac{\zeta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} [(b_\varepsilon)_{p,q} \|(\nabla \varepsilon^{k+1})_{p,q}\|^2 + \psi((b_\varepsilon)_{p,q})] \\ &\quad + \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} [(b_\sigma)_{p,q} \|(\nabla \sigma^{k+1})_{p,q}\|^2 + \psi((b_\sigma)_{p,q})] \end{aligned} \quad (91)$$

Or,

$$\|(\nabla(A + B))_{p,q}\|^2 = \|(\nabla A)_{p,q}\|^2 + \|(\nabla B)_{p,q}\|^2 + 2(\nabla A)_{p,q}(\nabla B)_{p,q}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
J_{REG}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1}) &= \frac{\zeta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} [(b_\varepsilon)_{p,q} \|(\nabla \varepsilon^k)_{p,q}\|^2 + \psi((b_\varepsilon)_{p,q})] \\
&+ \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} [(b_\sigma)_{p,q} \|(\nabla \sigma^k)_{p,q}\|^2 + \psi((b_\sigma)_{p,q})] \\
&+ \frac{\zeta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} [(b_\varepsilon)_{p,q} \alpha_\varepsilon^{k2} \|(\nabla \eta_\varepsilon^k)_{p,q}\|^2] \\
&+ 2 \frac{\zeta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} [\alpha_\varepsilon^k (b_\varepsilon)_{p,q} (\nabla \varepsilon^k)_{p,q} (\nabla \eta_\varepsilon^k)_{p,q}] \\
&+ \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} [(b_\sigma)_{p,q} \alpha_\sigma^{k2} \|(\nabla \eta_\sigma^k)_{p,q}\|^2] \\
&+ 2 \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} [(\alpha_\sigma^k (b_\sigma)_{p,q} (\nabla \sigma^k)_{p,q} \nabla \eta_\sigma^k)_{p,q}]
\end{aligned} \tag{92}$$

D'après (89) et (90), on peut écrire:

$$\begin{aligned}
J_{REG}(\varepsilon^{k+1}, \sigma^{k+1}) &= J_{REG}(\varepsilon^k, \sigma^k) \\
&- 2\alpha_\varepsilon^k < \frac{\zeta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2} \Delta_{b_\varepsilon} \varepsilon^k, \eta_\varepsilon^k >_{\mathcal{D}_D} - 2\alpha_\sigma^k < \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2} \Delta_{b_\sigma} \sigma^k, \eta_\sigma^k >_{\mathcal{D}_D} \\
&+ (\alpha_\varepsilon^k)^2 \frac{\zeta_\varepsilon^2}{\delta_\varepsilon^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} (b_\varepsilon)_{p,q} \|(\nabla \eta_\varepsilon^k)_{p,q}\|^2 \\
&+ (\alpha_\sigma^k)^2 \frac{\zeta_\sigma^2}{\delta_\sigma^2} \sum_{p=1}^{NX} \sum_{q=1}^{NY} (b_\sigma)_{p,q} \|(\nabla \eta_\sigma^k)_{p,q}\|^2
\end{aligned} \tag{93}$$

Références

- [1] I. AKDUMAN and A. ALKUMRU. A generalized art algorithm for inverse scattering problems related to buried cylindrical bodies. *Inverse problems*, 1(11):1125–1135, 1995.
- [2] K. BELKEBIR. *Imagerie microonde multifréquentielle d'objets enfouis dans un milieu homogène. Application au génie civil*. Thèse de doctorat en Sciences Physiques, Université de Paris-XI, 1994.
- [3] K. BELKEBIR, J.-M. ELISSALT, J.-M. GEFFRIN, and Ch. PICHOT. Newton-kantorovich and modified gradient inversion algorithms applied to ipswich data. *IEEE antennas and propagation magazine*, 38(3):41–44, June 1996.
- [4] M. BERTERO. Linear inverse and ill-posed problems. Technical Report INFN/TC-88/2, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, June 1988.
- [5] L. BLANC-FÉRAUD, P. CHARBONNIER, G. AUBERT, and M. BARLAUD. Non-linear image processing: Modeling and fast algorithm for regularization with edge detection. In *Proceedings of IEEE-ICIP*, pages 474–477, Washington, USA, October 1995.
- [6] H. CARFANTAN and A. MOHAMMAD-DJAFARI. Approche bayésienne et algorithme multirésolution pour un problème inverse non-linéaire en tomographie de diffraction. In *Actes du Quinzième colloque GRETSI*, Juan-les-Pins, France, September 1995.
- [7] J. CEA. *Optimisation. Théorie et algorithmes*. 1971.
- [8] P. CHARBONNIER, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT, and M. BARLAUD. Deterministic Edge-Preserving Regularization in Computed Imaging. *IEEE Trans. Image Processing*, IP-6(2):298–311, February 1997.
- [9] P. CHATURVEDI and R.G. PLUMB. Imaging subsurface contaminants using inverse scattering techniques. In *Proceedings of GPR '94, the fifth international conference on Ground Penetrating Radar*, pages 1229–1239, Kitchener, Ontario, Canada, June 1994.

-
- [10] A.J. DEVANEY. Geophysical diffraction tomography. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-22(1):3–13, January 1984.
- [11] C. DOURTHE and Ch. PICHOT. Application de l'imagerie microonde à la tomographie radar du sous-sol. Contrat LCPC/CNRS 95/211, 1995.
- [12] C. DOURTHE and Ch. PICHOT. Imagerie microonde: reconstruction quantitative du profil de permittivité complexe d'hétérogénéités enterrées. Rapport d'avancement du contrat LCPC/CNRS 96/029, 1997.
- [13] J.-M. ELISSALT. *Imagerie microonde: reconstruction quantitative bidimensionnelle - Applications au domaine biomédical*. Thèse de doctorat en Sciences Physiques, Université de Paris-XI, 1995.
- [14] A. FRANCHOIS. *Contribution à la tomographie microonde. Algorithmes de reconstruction quantitative et vérifications expérimentales*. Thèse de doctorat en Sciences Physiques, Université de Paris-XI, 1993.
- [15] T.M. HABASHI, R.W. GROOM, and B.R. SPIES. Beyond the born and rytov approximations: a nonlinear approach to electromagnetic scattering. *Journal of Geophysical Research*, 98(B2):1759–1775, February 1993.
- [16] T.M. HABASHI, M.L. ORISTAGLIO, and A.T. DE HOOP. Simultaneous reconstruction of two-dimensional permittivity and conductivity distributions employing a nonlinear inversion approach. *Radio Science*, (29):1101–1118, 1994.
- [17] H. HARADA, D.J.N. WALL, T. TAKENAKA, and M. TANAKA. Conjugate gradient method applied to inverse scattering problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43(8):784–792, August 1995.
- [18] D.A. HILL. Near-field detection of buried dielectric objects. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 27(4):364–368, July 1989.
- [19] K.I. HOPCRAFT and P.R. SMITH. *An introduction to electromagnetic inverse scattering*. Kluwer Academic Publishers, 1992.

-
- [20] N. JOACHIMOWICZ, Ch. PICHOT, and J.-P. HUGONIN. Inverse scattering: an iterative numerical method for electromagnetic imaging. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 39:1742–1752, December 1991.
- [21] A. KIRSCH. Numerical algorithms for the inverse scattering problem. In *Support de cours, École des ondes, Problèmes inverses en propagation d'ondes*, INRIA Rocquencourt, France, November 1996.
- [22] R.E. KLEINMAN and P.M. van den BERG. A modified gradient method for two-dimensional problems in tomography. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 42:17–35, 1992.
- [23] K.J. LANGENBERG, M. BRANDFAB, K. MAYER, T. KREUTER, A. BRULL, FELLINGER P., and D. HUO. Principles of microwave imaging and inverse scattering. Technical report, 1993.
- [24] P. LASCAUX and R. THEODOR. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur- Tome 1*. Masson, 1986.
- [25] D. LESSELIER, B. DUCHÊNE, L. SOURIAU, A. LITMAN, C. ROZIER, and V. MONEBHURRUN. Inversion d'objets enfouis dans des milieux stratifiés à partir de données d'aspect limité et à l'aide d'un formalisme d'ondes. de schémas de rétropropagation à des solutions non-linéarisées. In *Support de cours, École des ondes, Problèmes inverses en propagation d'ondes*, INRIA Rocquencourt, France, November 1996.
- [26] H.-T. LIN and Y.-W. KIANG. Microwave imaging for a dielectric cylinder. *IEEE Transactions on Microwave theory and techniques*, 42(8):1572–1579, August 1994.
- [27] P. LOBEL. *Problèmes de diffraction inverse: reconstruction d'image et optimisation avec régularisation par préservation des discontinuités- Application à l'imagerie microonde*. Thèse de doctorat en Sciences de l'ingénieur, Université de Nice-Sophia Antipolis, September 1996.
- [28] P. LOBEL, L. BLANC-FÉRAUD, Ch. PICHOT, and M. BARLAUD. A new regularization scheme for inverse scattering. *Inverse problems*, 13:403–410, 1997.

-
- [29] P. LOBEL, R. KLEINMAN, Ch. PICHOT, L. BLANC-FÉRAUD, and M. BARLAUD. Conjugate gradient method for solving inverse scattering with experimental data. *IEEE antennas and propagation magazine*, 38(3):48–51, June 1996.
- [30] J.R. MOSIG. La méthode des gradients conjugués: applications en électromagnétisme. *Annales Télécommunications*, 42(9-10):527–538, 1987.
- [31] Ch. PICHOT, P. LOBEL, L. BLANC-FÉRAUD, M. BARLAUD, K. BEL-KEBIR, J.M. ELISSALT, and J.M. GEFFRIN. Gradient and newton-kantorovich methods for microwave tomography. In *Inverse Problems in Medical Imaging and Nondestructive Testing*, pages 168–187. Springer-Verlag, Wien, 1997.
- [32] Ch. PICHOT, P. LOBEL, C. DOURTHE, L. BLANC-FÉRAUD, and M. BARLAUD. Inversion algorithms for microwave imaging using different modalities and for various applications. In *1st EMSL Workshop*. European Commission, Joint Research Center, Report EUR 17326 EN, 1997.
- [33] Ch. PICHOT, P. LOBEL, C. DOURTHE, L. BLANC-FÉRAUD, and M. BARLAUD. Microwave inverse scattering: quantitative reconstruction of complex permittivity for different applications. *IEICE Transactions on Electronics*, à paraître en automne 1997.
- [34] Y.M. WANG and W.C. CHEW. Limited-angle inverse scattering problems and their applications for geophysical explorations. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 2:96–111, 1991.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399