



**HAL**  
open science

## Un nouveau schéma de type volumes finis appliqué aux équations de Maxwell en milieu hétérogène

Malika Remaki, Loula Fatima Fezoui, Frédéric Poupaud

► **To cite this version:**

Malika Remaki, Loula Fatima Fezoui, Frédéric Poupaud. Un nouveau schéma de type volumes finis appliqué aux équations de Maxwell en milieu hétérogène. RR-3351, INRIA. 1998. inria-00073338

**HAL Id: inria-00073338**

**<https://inria.hal.science/inria-00073338>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Un nouveau schéma de type volumes finis  
appliqué aux équations de Maxwell en milieu  
hétérogène*

Malika Remaki-Loula Fézoui-Frédéric Poupaud

**N° 3351**

janvier 1998

THÈME 4



*Rapport  
de recherche*



# Un nouveau schéma de type volumes finis appliqué aux équations de Maxwell en milieu hétérogène

Malika Remaki-Loula Fézoui-Frédéric Poupaud

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet CAIMAN

Rapport de recherche n° 3351 — janvier 1998 — 23 pages

**Résumé :** Nous décrivons ici une méthode de volumes finis pour la résolution du système de Maxwell en milieu hétérogène. Nous utilisons une extension du schéma de Godunov pour satisfaire aux conditions de transmission aux interfaces.

Nous proposons, pour l'amélioration de la précision spatiale, une nouvelle définition des gradients qui nous semble plus compatible avec la formulation volumes finis.

**Mots-clés :** Electromagnétisme - Equations de Maxwell - Schéma de Godunov - Volumes finis.

# A new finite volume scheme for solving Maxwell equations in heterogeneous media

**Abstract:** We present here a finite volume scheme for solving Maxwell equations in heterogeneous media. A Godunov type scheme is used for flux calculation at cell interfaces. We propose a new definition of gradients which we believe to be more consistent with the finite volume formulation.

**Key-words:** Electromagnetism - Maxwell equations - Godunov scheme - Finite volumes.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Equations de Maxwell</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Approximation numérique</b>	<b>7</b>
3.1	Schéma de Godunov . . . . .	8
3.2	Schéma d'ordre supérieur . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Comparaison de deux méthodes de calcul du gradient</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>14</b>
5.1	Simulation d'un pulse . . . . .	14
5.2	Diffraction d'onde sur un matériau revêtu . . . . .	16
5.2.1	Cas des ondes transverses magnétiques . . . . .	16
5.2.2	Cas des ondes transverses électriques . . . . .	17
5.3	Courant source surfacique . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>21</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>22</b>

# 1 Introduction

L'attrait principal des volumes finis pour résoudre numériquement un système conservatif est sa grande tolérance vis-à-vis de la régularité du maillage et/ou des paramètres de calcul (discontinuité des coefficients et/ou de la solution). A priori, le maillage pourrait être quelconque: de type élément fini conforme ou non, mono-élément (maillage triangulaire en 2-D par exemple) ou multi-éléments (maillage hybride avec des triangles et des quadrangles). Des résultats encourageants ont été obtenus depuis l'introduction de ces méthodes au calcul numérique en électromagnétisme [18, 6]. Cependant la définition du volume de contrôle la plus utilisée (voir figure 1), rend l'indépendance vis-à-vis du maillage toute relative.

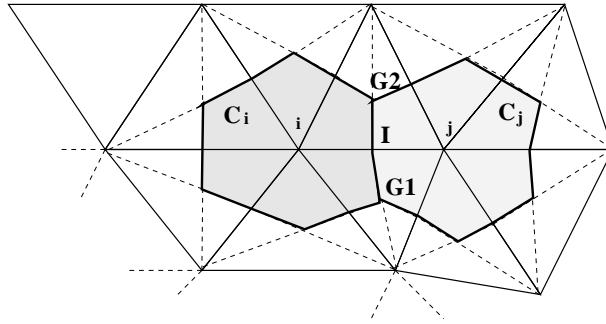


FIG. 1 – *Volumes de contrôle.*

En particulier, le calcul des gradients (nécessaire pour monter en précision) devient lourd et coûteux dans le cas de maillages hybrides et la méthode n'est plus adaptée (même sans calcul de gradients) dans le cas de systèmes linéaires à coefficients discontinus (cas des équations de Maxwell en milieu linéaire hétérogène). Un autre choix de volumes finis a été présenté par J.Durlofsky, S.Osher et B.Engquist [10] dans le cadre de la dynamique des fluides (voir figure 2). Ce choix a été motivé par une meilleure prise en compte des conditions aux limites.

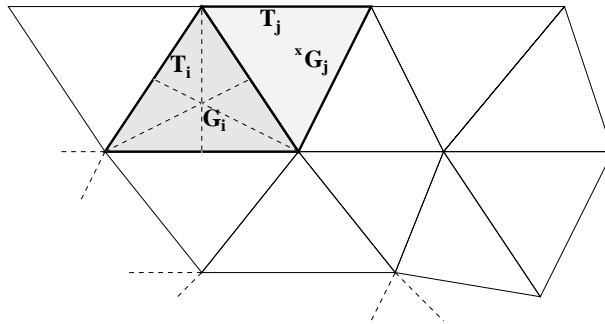


FIG. 2 – *Volumes de contrôle.*

Nous avons présenté une adaptation de cette méthode au cas des équations de Maxwell dans [8]. Nous présentons ici une amélioration significative de cette méthode en abandonnant l'interpolation linéaire dans le calcul des gradients (comme présentée dans [10] et [7]) au profit d'une définition de gradients 'faibles' qui se calculent alors comme des flux. Ce procédé a l'avantage de respecter la structure du maillage qui peut être alors hybride voire non conforme et de plus ce procédé est plus facile à implémenter et nous l'espérons moins coûteux que les procédés plus classiques.

## 2 Equations de Maxwell

La propagation d'ondes électromagnétiques en domaine temporel est gouvernée par les équations de Maxwell qui s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{H}) = -\mathbf{j} \\ \text{div}(\mathbf{D}) = \rho \\ \text{div}(\mathbf{B}) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  désignent respectivement l'induction et le champ magnétique et  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$ , le déplacement et le champ électrique. Les densités de charge  $\rho$  et de courant  $\mathbf{j}$  sont reliées par la loi de conservation:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}) = 0$$

Cette loi qui se déduit aisément de (1) ne sera plus considérée par la suite car nous nous intéressons ici à des milieux vides de charges (les sources de courant étant données). De même, les relations de divergence ne seront pas discutées ici et on pourra se référer à ([9]) pour une étude détaillée de leur vérification numérique.

### *Lois constitutives*

Les inductions et les champs sont reliés par des lois constitutives qui s'écrivent pour des milieux linéaires:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \mu(x)\mathbf{H} \\ \mathbf{D} = \varepsilon(x)\mathbf{E} \end{array} \right. \quad (2)$$

où la perméabilité magnétique  $\mu$  et la permittivité électrique  $\varepsilon$  dépendent éventuellement de la variable d'espace  $x$ .



Notons que les milieux hétérogènes considérés ici sont constitués de matériaux homogènes (ie  $\mu$  et  $\varepsilon$  sont constantes par morceaux) .

### *Polarisations TE et TM*

L'étude que nous présentons a été effectuée dans un cadre bidimensionnel. Dans ce cas, le système de Maxwell (1) se décompose en deux systèmes de trois équations associés l'un, à une polarisation transverse électrique (TE) et l'autre à une polarisation transverse magnétique (TM). En choisissant comme direction d'invariance l'axe  $Oz$ , le système (1) s'écrit en mode TM en dimension deux:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{D}_z}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial x} = -\mathbf{j}_z \end{array} \right. \quad (3)$$

Le cas TE s'écrit de façon analogue en considérant les champs  $B = {}^t(O, O, B_z)$  et  $D = {}^t(D_x, D_y, 0)$ .

### *Formulation conservative et hyperbolicité*

En posant  $\mathbf{Q} = {}^t(B, D)$  on peut écrire le système (1) sous une forme condensée à l'aide de l'opérateur divergence:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \text{div} \mathcal{F}(\mathbf{Q}) = -\mathbf{J} \quad (4)$$

Où la fonction vectorielle  $\mathcal{F}$  est appelée fonction de flux continue. En dimension deux d'espace et dans le cas TM, cette fonction est donnée par:

$$\mathcal{F}_x = {}^t(0, -D_z/\varepsilon, -B_y/\mu) \quad \mathcal{F}_y = {}^t(D_z/\varepsilon, 0, B_x/\mu) \quad \mathbf{J} = {}^t(0, 0, \mathbf{j}_z) \quad (5)$$

Cette formulation permet de mieux rendre compte du caractère hyperbolique du système de Maxwell. En effet, on peut vérifier aisément que la matrice jacobienne de  $\mathcal{F}$  possède un système complet de vecteurs propres sur  $\mathbb{R}$  avec trois valeurs propres réelles:  $c$ ,  $-c$ ,  $0$  où  $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$  est la vitesse de la lumière dans le milieu considéré. C'est sous cette forme que nous utiliserons par la suite les équations de Maxwell.

### 3 Approximation numérique

Nous rappellerons brièvement la méthode des volumes finis et insisterons sur le calcul des gradients qui est l'ingrédient nouveau que nous introduisons ici.

Considérons le système de Maxwell en mode TM par exemple dans un domaine  $\Omega$  borné du plan. On discrétise ce domaine par des éléments finis P1 tels que:  $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{NT} T_i$ , où  $NT$  est le nombre de triangles. On obtient une formulation faible en intégrant le système (3) sur  $\Omega$  avec les fonctions caractéristiques des triangles comme fonctions test. En supposant de plus que la dérivée par rapport au temps du champ  $\mathbf{Q}$  est constante en espace sur chaque triangle, on obtient finalement:

$$\text{Aire}(T_i) \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \right)_i + \int_{\partial T_i} \mathcal{F}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n}_i \, d\sigma = -\mathbf{J}_i, \quad (6)$$

où  $\mathbf{n}_i$  est la normale unitaire extérieure à  $\partial T_i$  et  $\mathbf{J}_i$  est une projection du courant (connu) sur le triangle  $T_i$ .

On distingue dans le terme intégral de (6), les flux internes, flux s'échangeant à l'interface entre  $T_i$  et un triangle (voisin par arête, figure 3) et les termes de bords qui expriment les conditions aux limites:

$$\text{Aire}(T_i)(\mathbf{Q})_i + \sum_{j=1}^3 \Phi_{ij} + \text{termes de bord} = -\mathbf{J}_i, \quad (7)$$

où  $\Phi_{ij}$  est une approximation des flux internes:

$$\Phi_{ij} = \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{Q}) \cdot \int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \mathbf{n}_{ij} \, d\sigma = \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{Q}) \cdot \eta_{ij}$$

$$\eta_{ij} = \int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \mathbf{n}_{ij}$$

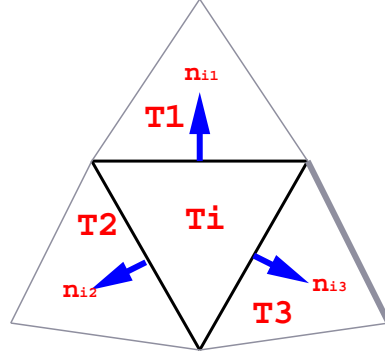


FIG. 3 – les trois voisins par arête du triangle  $T_i$

### 3.1 Schéma de Godunov

On rappelle brièvement le schéma de Godunov adapté à la résolution numérique d'un système à coefficients non constants (voir [5] pour plus de détails).

On peut écrire le flux de Godunov sous la forme:

$$\Phi_{ij} = \mathcal{A}(\eta_{ij}) \mathbf{Q}^G(Q_i, Q_j)$$

$\mathcal{A}(\eta_{ij}) = D\mathcal{F}(\mathbf{Q}) \cdot \eta_{ij}$ , où  $D\mathcal{F}$  est la différentielle (constante) de  $\mathcal{F}$ , et  $\mathbf{Q}^G(Q_i, Q_j)$  est la solution exacte du problème de Riemann à l'interface. Plus précisément si  $\mathbf{Q}$  est la solution de :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (\mathcal{A}\mathbf{Q}) = 0,$$

avec la donnée initiale:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{0}) = \begin{cases} Q_i & \text{si } r < r_{ij} \\ Q_j & \text{si } r > r_{ij} \end{cases}$$

où  $r$  joue le rôle de l'abscisse dans la direction de la normale  $\eta$ , et  $r_{ij}$  est l'abscisse du point de contact entre les deux triangles  $T_i$  et  $T_j$ .

On pose alors :  $\mathbf{Q}^G(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j) = \mathbf{Q}(\mathbf{r} = \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{0}^+)$ .

Nous avons fait le choix du schéma de Godunov (solveur exact du problème de Riemann) pour satisfaire exactement les conditions d'interface ( $\mathbf{n} \wedge [\mathbf{E}] = 0$ , et  $\mathbf{n} \wedge [\mathbf{H}] = \mathbf{j}$ ) ce qui n'est pas le cas d'un solveur de Riemann approché tel que le schéma de Steger et Warming par exemple. On pourra se référer à ([12]) pour l'expression de la solution exacte du problème de Riemann et pour des comparaisons entre ces deux solveurs.

Malgré la qualité des solutions obtenues par le schéma de Godunov, la précision spatiale reste d'ordre un; pour améliorer cette précision nous modifions le calcul des valeurs aux interfaces entre les triangles comme expliqué ci-après.

### 3.2 Schéma d'ordre supérieur

La procédure pour étendre à un ordre supérieur (deux ou trois) le schéma décrit ci-dessus, consiste en trois phases:

- *définir* et calculer des gradients de l'inconnue dans les volumes de contrôle (ici des triangles)
- *remplacer* les valeurs aux interfaces ( $\mathbf{Q}_i$  et  $\mathbf{Q}_j$ ) par des valeurs plus précises ( $\mathbf{Q}_{ij}$  et  $\mathbf{Q}_{ji}$ ) calculées au moyen de ces gradients,
- *injecter* ces nouvelles valeurs dans la fonction de flux numérique d'ordre un.

Supposons définis les gradients  $\nabla \mathbf{Q}_{T_i}$ , nous calculons les valeurs aux interfaces  $\mathbf{Q}_{ij}$  comme suit:

$$\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{Q}_i + (1 - 2\beta) \frac{(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i)}{2} + 2\beta \nabla \mathbf{Q}_{T_i} \cdot \mathbf{L}_{ij}$$

où  $\mathbf{L}_{ij}$  est le segment joignant le centre de gravité du triangle  $T_i$  au milieu de l'arête commune à  $T_i$  et  $T_j$  et  $\beta$  est un paramètre important pour la précision spatiale du schéma.

#### Calcul des gradients

La procédure pour définir le gradient approché d'une fonction à partir d'une représentation constante par morceaux n'est certes pas unique. Nous avons comparé dans ([7]) deux méthodes utilisant toutes deux une interpolation linéaire et nous avons conclu qu'aucune d'elles n'était réellement adaptée au cas des milieux hétérogènes sans parler de leur coût relativement élevé pour des simulations tridimensionnelles.

Nous proposons ici une procédure simple basé sur le même principe que le calcul des flux .

Nous définissons un gradient moyen (ou faible) comme suit:

$$\text{Aire}(T_i) \nabla \mathbf{Q}_{T_i} \simeq \int_{\partial T_i} \nabla \mathbf{Q} = \sum_{j=1}^3 \int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \mathbf{Q} \mathbf{n}_{ij} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{ij} \eta_{ij} \quad (8)$$

où  $\mathbf{B}_{ij}$  est une valeur approchée de  $\mathbf{Q}$  à l'interface entre  $T_i$  et  $T_j$  . Si nous prenons  $\mathbf{B}_{ij} = \frac{\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_j}{2}$  on obtient :

$$2\text{Aire}(T_i) \nabla \mathbf{Q}_{T_i} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{Q}_i \eta_{ij} + \sum_{j=1}^3 \mathbf{Q}_j \eta_{ij} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{Q}_j \eta_{ij}$$

car la somme des normales  $\eta_{ij}$  (non unitaires!) est nulle.  
On notera par la suite cette définition des gradients par (GVF).

Nous rappelons ici la méthode proposée par J.Durlofsky, S.Osher et B.Engquist [10] pour définir le gradient approché, et nous comparerons par la suite les deux méthodes de calcul. La méthode consiste en une interpolation linéaire sur un maillage dual : soient  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  trois triangles appartenant à un maillage dual (4)

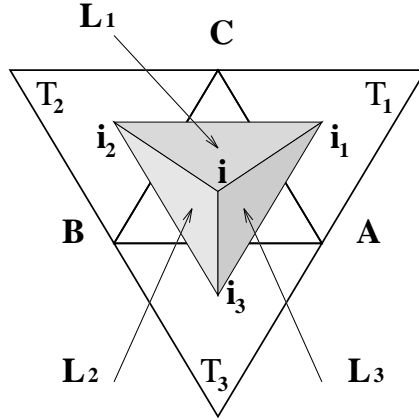


FIG. 4 – Trois candidats pour une interpolation linéaire sur  $(BAC)$ .

Le gradient sur le triangle  $T_i = (BAC)$  est donné par :

$$\vec{\nabla}^D \mathbf{Q}_{T_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^3 \text{Aire}(L_j)} \sum_{j=1}^3 \text{Aire}(L_j) \vec{\nabla} \mathbf{Q}_{L_j} ,$$

où  $\vec{\nabla} \mathbf{Q}_{L_j}$  est l'interpolation de Galerkin sur le triangle  $L_j$ . On notera par la suite cette définition (GD).

### Condition aux limites

Pour calculer le flux sur la frontière métallique  $\Gamma$ , nous avons utilisé la même technique qu'au paragraphe 3.1 en résolvant un demi problème de Riemann avec une condition initiale et une condition aux limites, et le problème est ainsi bien posé. Soit  $\mathbf{Q}_b$  la valeur de  $\mathbf{Q}$  dans un triangle  $T_b$  du bord. On résout :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_t + \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{A}(\mathbf{n}) \mathbf{Q} = 0 & , r > 0 , \\ \mathbf{Q}(r, t = 0) = \mathbf{Q}_b & r > 0 , \\ \mathbf{Q}_3(t, 0) = -\frac{1}{\varepsilon} E_3^{inc} & , r = 0 , \end{cases} \quad (9)$$

On pose alors :  $\mathbf{Q}_\Gamma^G = \mathbf{Q}(t > 0, \mathbf{r} = \mathbf{0})$

Le flux  $\Phi_b$  sur le bord est défini alors comme dans 3.1 par :  $\Phi_b = \mathcal{A}(\mathbf{n})\mathbf{Q}_\Gamma^G$ .

où  $E_3^{inc}$  représente le champ incident, et  $\mathbf{n}$  la normale unitaire au bord. (Pour plus de détails voir [7]).

## 4 Comparaison de deux méthodes de calcul du gradient

Dans ce paragraphe nous présentons une comparaison des deux méthodes de calcul du gradient approché citées précédemment (GVF) et (GD). Nous les avons comparées à travers deux cas tests, le premier consiste à calculer le gradient d'une fonction régulière sinusoïdale, et le deuxième cas consiste à calculer le gradient d'une fonction discontinue. Considérons la fonction régulière  $u_1$ , et la fonction discontinue  $u_2$  données par :

$$u_1(x, y) = \cos(\omega * x) * \sin(y) \quad (10)$$

$$u_2(x, y) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{a} * \sin(\frac{\pi}{b} * y) * \sin(\omega * x) & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{a} * \sin(\frac{\pi}{b} * y) * \sin(\omega * x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (11)$$

a et b étant deux réels  $>0$  ( $a = 1, b = 2$ ),  $\omega = 2\pi f$  avec  $f = 0.1$ .

Les figures 5 et 6 représentent la dérivée en x des deux fonctions citées ci-dessus calculée avec les deux méthodes. Comparée au calcul exact, on constate que les deux méthodes de calcul sont comparables que ce soit pour calculer des gradients de fonctions continues ou discontinues (figures 5 et 6). ces comparaisons sont effectuées sur un maillage structuré. Nous avons ensuite comparé les deux gradients à travers le cas test discontinu précédent (avec  $f = 0.6$ ) sur un maillage non structuré (figure 7). Les résultats restent comparables (figure 8). L'avantage de la méthode GVF est qu'elle est facile à implémenter, et d'un coût relativement faible par rapport à la méthode GD.

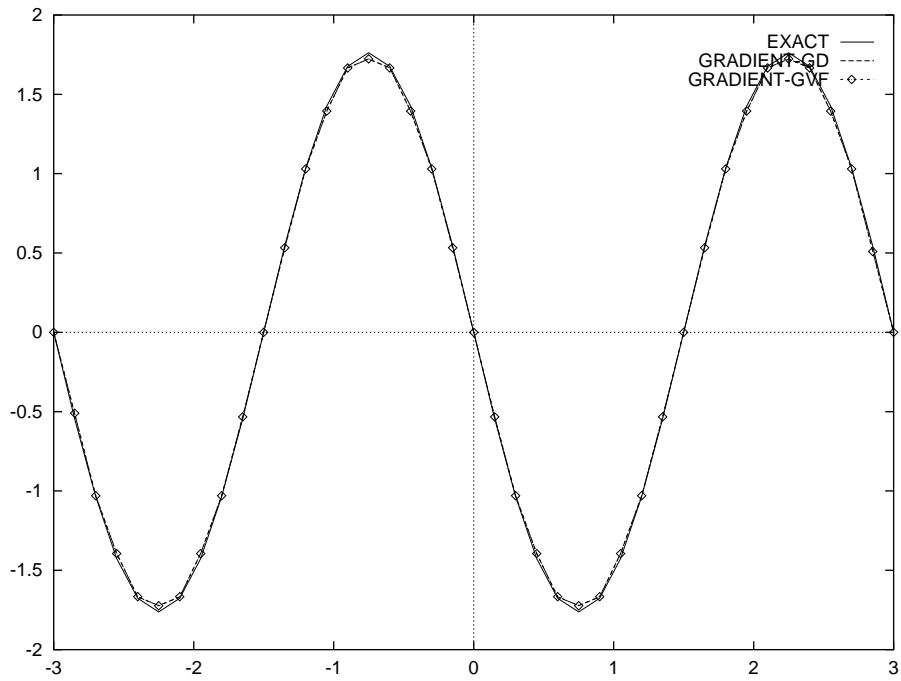


FIG. 5 – Gradients approchés et exact d'une fonction régulière

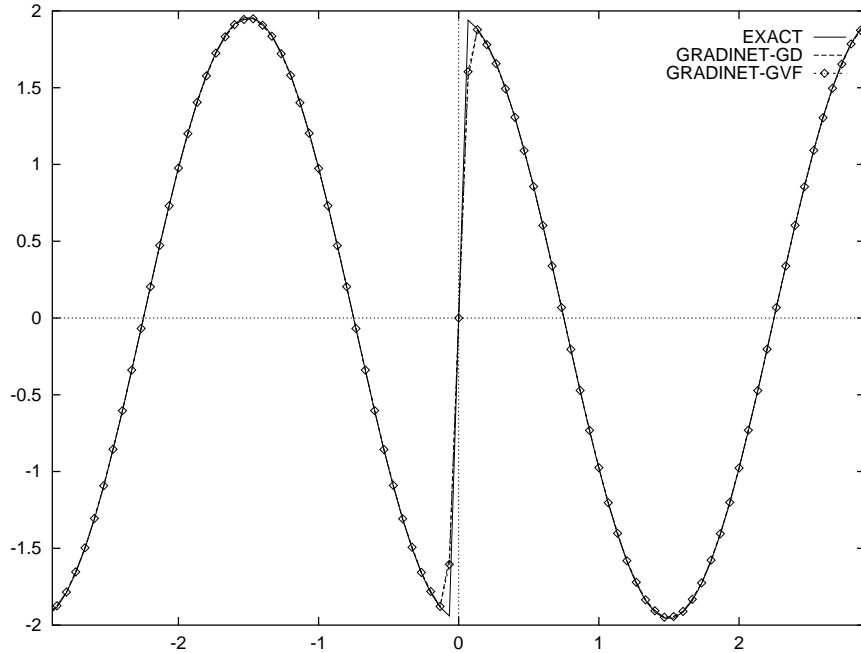


FIG. 6 – Gradients approchés et exact d'une fonction discontinue

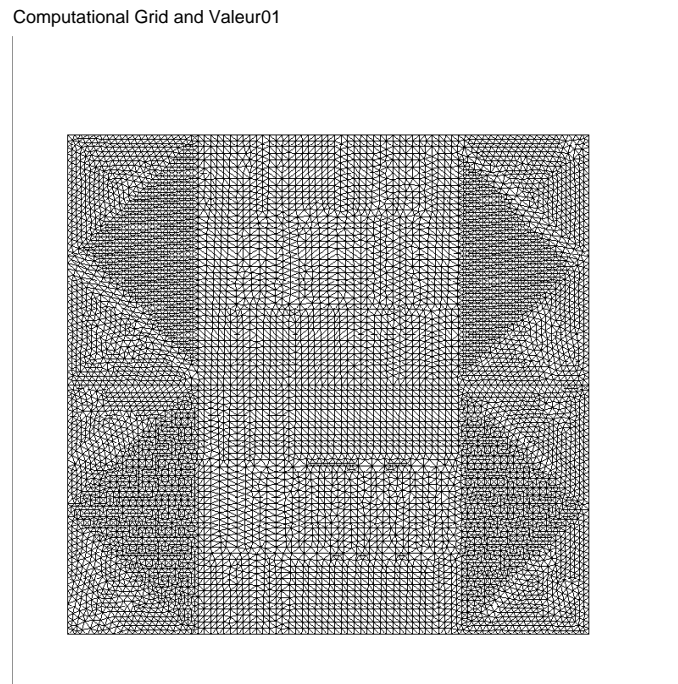


FIG. 7 – maillage non structuré

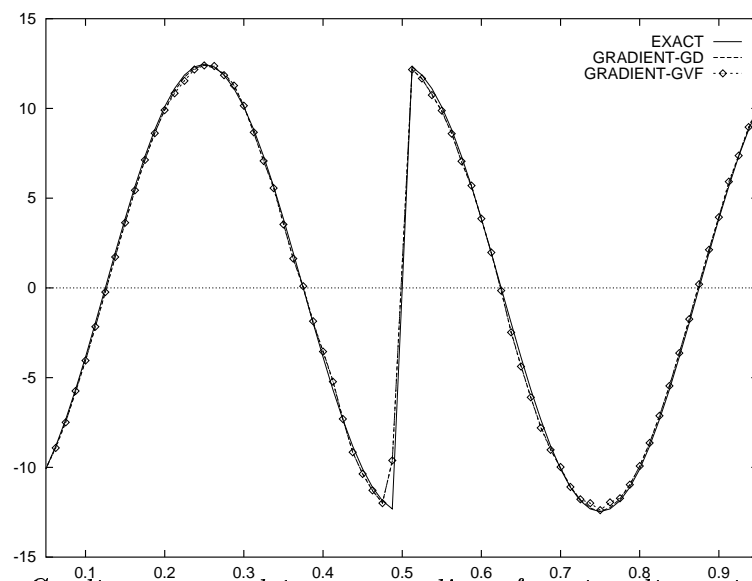


FIG. 8 – Gradients approchés et exact d'une fonction discontinue



## 5 Résultats numériques

Afin de vérifier la qualité de notre méthode d'approximation, nous avons effectué une série de cas tests numériques. Nous présentons ici la simulation numérique de la propagation d'un pulse à l'intérieur d'une cavité carrée composée du vide et du verre, la diffraction d'une onde plane sur un matériau revêtu d'une couche de diélectrique, et enfin la simulation d'un champ électromagnétique généré par un courant source surfacique. Les maillages utilisés dans tous les cas tests correspondent à environ 15 points par longueur d'onde.

### 5.1 Simulation d'un pulse

On simule ici l'évolution d'une pulsation en mode TM, dans une cavité carrée semi ouverte de longueur  $d = 6m$ . à droite de  $x = 0$  le vide et à gauche du verre (matériau d'indice  $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ , et  $\mu = \mu_0$  où  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  sont les indices du vide) (9). On envoie une onde de type pulse dans la partie vide, de longueur d'onde  $\lambda = 3m$  donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_z(x, y) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{n=3} \alpha_n \cos(2n\omega(\cos\theta(x - \frac{y_0}{4}) + \sin\theta(y - \frac{y_0}{4}))) \chi_{[y_0 - \frac{\lambda}{4}, y_0 + \frac{\lambda}{4}]} \\ \mathbf{H}_y(x, y) = \mathbf{E}_z \\ \mathbf{H}_x(x, y) = \sin\theta \mathbf{E}_z \end{cases} \quad (12)$$

Avec  $\alpha_0 = 0.43750$ ,  $\alpha_1 = -0.53125$ ,  $\alpha_2 = 0.06250$ , et  $\alpha_3 = 0.03125$ ;  $\chi_{[a,b]}$  est la fonction caractéristique de  $[a, b]$  et  $\theta$  l'angle d'incidence. L'onde venant frapper sur le verre se décompose en une partie transmise et une partie réfléchie (figures 10 et 11). La solution calculée numériquement après un temps  $t = 6.66ns$  approche bien la solution exacte (figure 11).

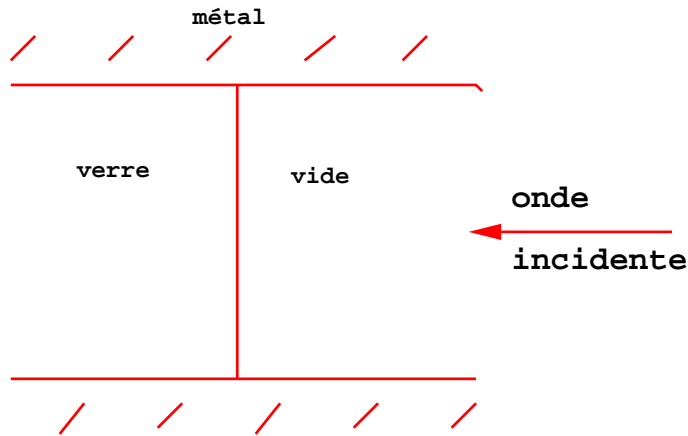
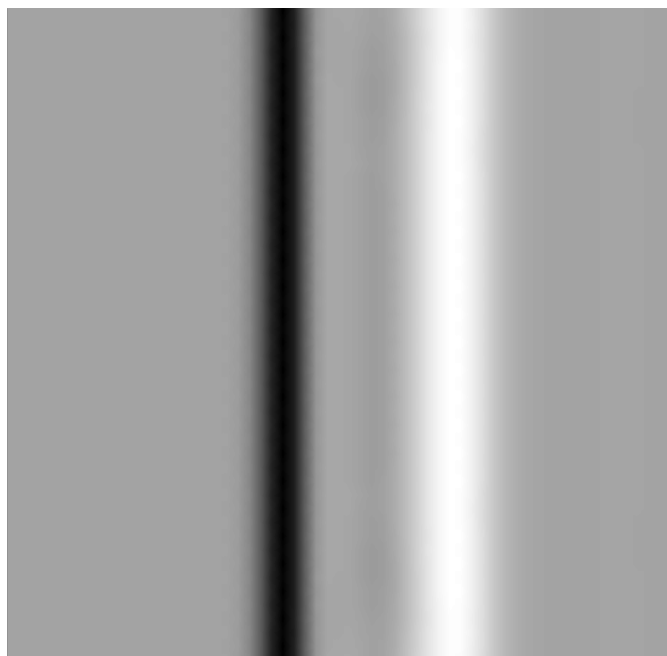
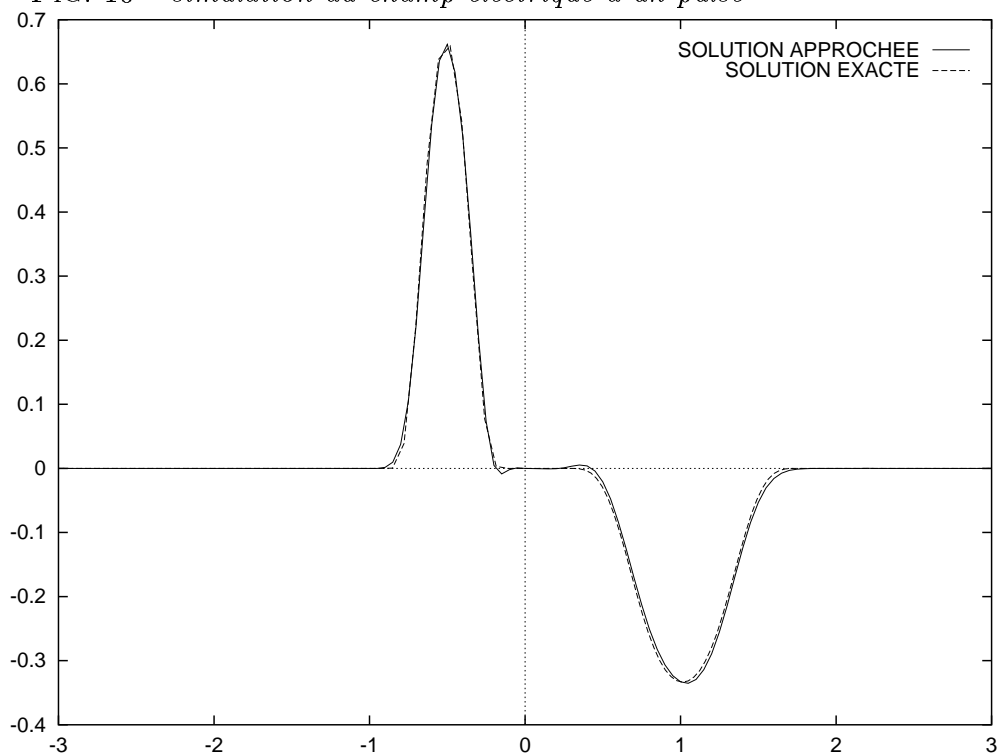


FIG. 9 – boîte métallique

FIG. 10 – *simulation du champ électrique d'un pulse*FIG. 11 – *coupe en y du champ électrique après un temps  $t = 6.66ns$*

## 5.2 Diffraction d'onde sur un matériau revêtu

Nous rappelons que le but de ce travail est la recherche d'une méthode pour résoudre essentiellement des problèmes dans des milieux hétérogènes. Nous présentons ici un cas test où 'l'hétérogénéité' du milieu varie suivant les directions. Nous avons étudié la diffraction d'une onde plane sur un disque de rayon  $R = 0.459m$ , revêtu d'une couche de diélectrique d'épaisseur  $e = 0.1m$ . Cette couche inclut une répartition périodique de disques métalliques totalement réfléchissants, avec une périodicité de  $0.1m$ , le rayon de ces disques est égal à  $0.025m$ . Nous avons utilisé un maillage correspondant à environ 14 points par longueur d'onde (12), et nous avons effectué ce cas test dans les deux cas de polarisation (magnétique et électrique).

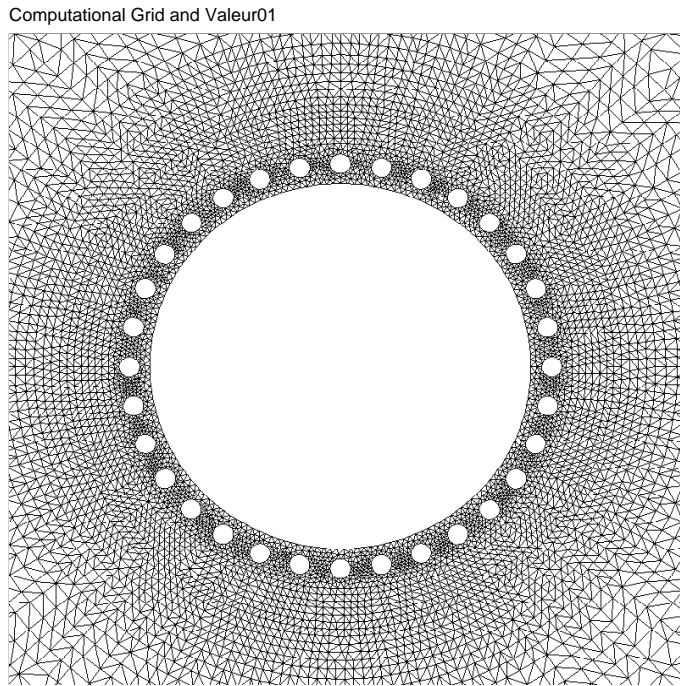
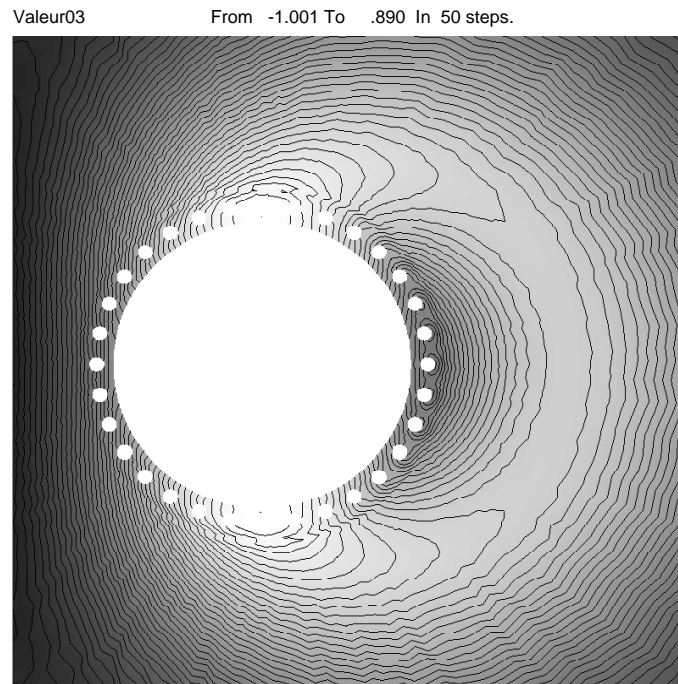


FIG. 12 – un zoom du maillage du disque revêtu

### 5.2.1 Cas des ondes transverses magnétiques

La figure (13) représente le champ diffracté  $E_z$ , on note la faible influence des disques réfléchissants sur l'onde diffractée. Nous avons comparé cette solution à celle obtenue par une méthode d'éléments finis par Anabelle Zebic ([21]), où le maillage utilisé correspond à environ 20 points par longueur d'onde. les deux solutions sont comparables.

FIG. 13 – *champ électrique diffracté*

### 5.2.2 Cas des ondes transverses électriques

Nous avons effectué la même expérience qu'au paragraphe 5.2.1 avec cette fois-ci une polarisation électrique. La figure (14) représente le champ diffracté  $H_z$ . Contrairement au cas précédent (polarisation magnétique), ici l'influence des disques est importante et ceci est dû aux conditions sur le bord.

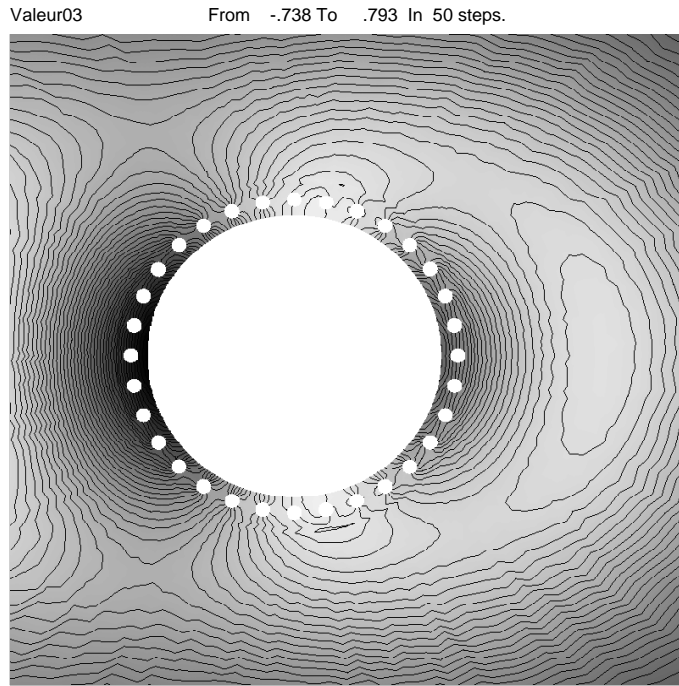


FIG. 14 – *champ magnétique diffracté*

### 5.3 Courant source surfacique

Dans un milieu linéaire, nous avons la relation suivante:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{H}) = -\mathbf{j} \quad (13)$$

Nous considérons maintenant un courant  $\mathbf{J}_s$  traversant la section ( $x = 0$ ) d'un guide d'onde (figure 15).

$$\mathbf{J}_s = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi y}{d}\right) \cos(\omega t) \quad (14)$$

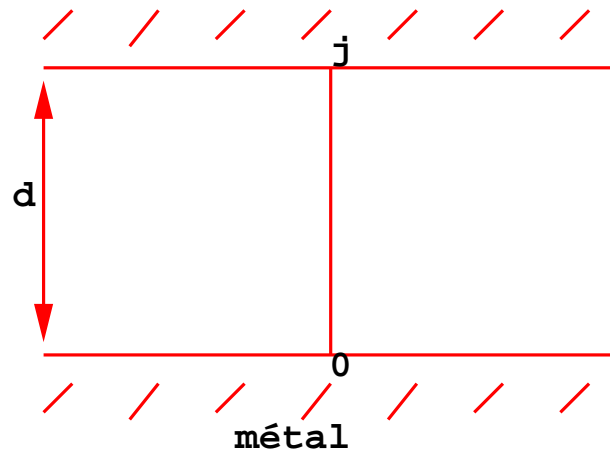


FIG. 15 – Courant surfacique dans un guide d'onde rectangulaire

Nous avons considéré une fréquence  $f = 0.3$  GHz, et  $d = 1$  m.

La solution exacte de ce problème se trouve dans [1] page 97.

La figure 16 représente le champ électrique et le champ magnétique. On note bien la discontinuité du champ magnétique en  $x = 0$ . Les coupes en  $y = \frac{d}{2}$  des deux champs (figures 17 et 18), comparées aux solutions exactes montrent la bonne qualité des solutions approchées.

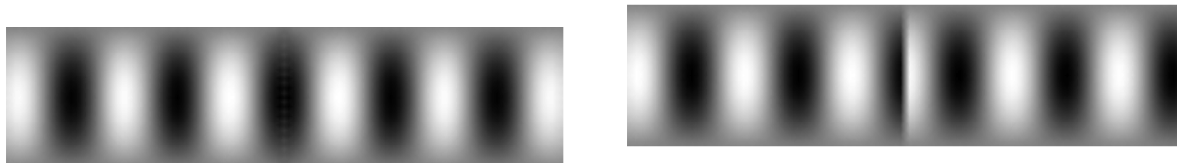
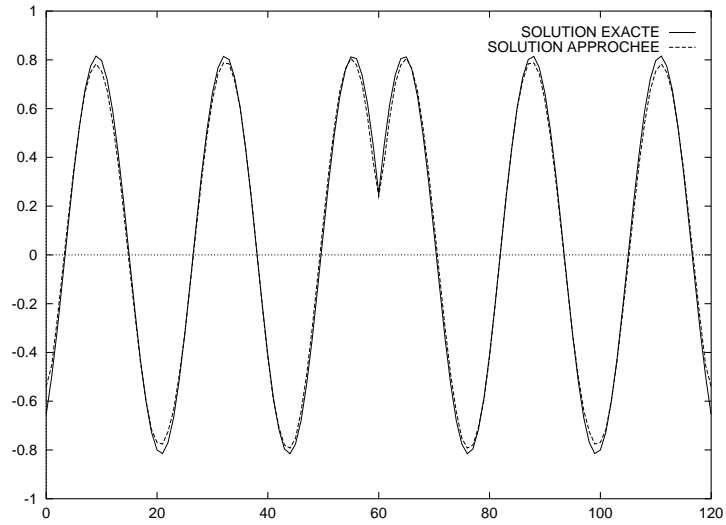
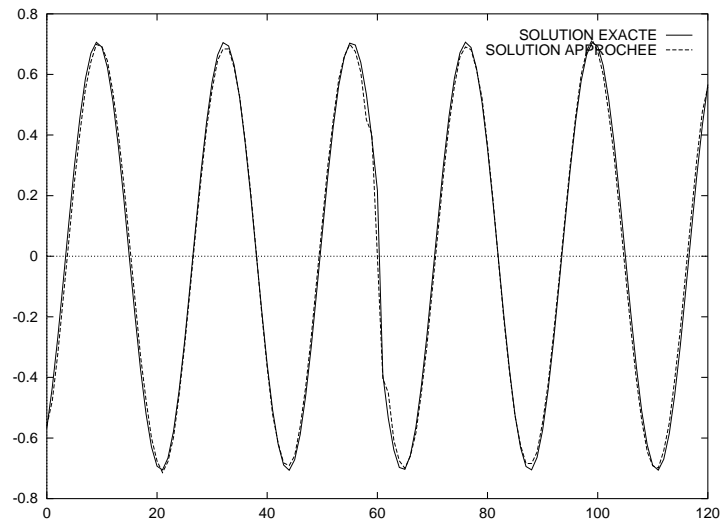


FIG. 16 – champ électrique à gauche et champ magnétique à droite

FIG. 17 – coupe en  $y$  du champ électriqueFIG. 18 – coupe en  $y$  du champ magnétique

## 6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce rapport, une méthode numérique visant à traiter des problèmes d'électromagnétisme dans des domaines hétérogènes. Le choix des volumes de contrôle qui sont les éléments de la discrétisation, et la méthode de calcul des gradients volumes finis, semblent bien adaptés à notre résolution. En effet, ces volumes de contrôle permettent de bien définir l'interface entre deux matériaux d'indice différents, et le calcul du gradient GVF fait intervenir peu de points autour de la cellule considérée.

L'utilisation d'un solveur de Riemann exact nous a permis de prendre en compte les conditions de saut. Les différentes expériences numériques (courant surfacique, diffraction d'onde sur un matériau revêtu...etc) ont montré le bon comportement de la méthode, et aucune oscillation n'apparaît à la surface de discontinuité.



## Références

- [1] Roger F. Harrington., *Time-Harmonic electromagnetic fields*, (1961).
- [2] Berenger, J.P., *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Physics, vol 114, pp. 185-200, (1994).
- [3] CARPENTIER R., *Approximation et analyse numérique d'écoulement instationnaires. Application à des instabilités tourbillonnaires*, Thèse de doctorat de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, (1995).
- [4] CHAMPIER S., *Convergence de schémas numériques type volumes finis pour la résolution d'équations hyperboliques*, Thèse de l'Université de Saint-Etienne, (1992).
- [5] CIONI J.P., *Résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de volumes finis*, Thèse de doctorat de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, (1995).
- [6] CIONI J.P. - FEZOU L. - ISSAUTIER D., *High-order upwind schemes for solving time-domain Maxwell equations*, La Recherche Aérospatiale, Vol 5, pp. 319-328, (1994).
- [7] CIONI J.P. - REMAKI M., *Comparaison de deux méthodes de volumes finis en électromagnétisme*, rapport de recherche INRIA no 3166, mai 1997.
- [8] REMAKI M., FEZOU L., *Schéma de Godunov pour la résolution des équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène*, 29<sup>eme</sup> Congrès National D'analyse Numérique, CANum'97.
- [9] DEPEYRE S., ISSAUTIER D., *Application aux schémas volumes finis d'une méthode de pénalisation des contraintes pour le système de Maxwell*, Rapport CERMICS no 39 (1995).
- [10] DURLOFSKY L.J. - OSHER S. - ENGQUIST B., *Triangle based TVD scheme for hyperbolic conservation laws*, rapport ICASE No 90-10, janvier 1990.
- [11] GALLOUET T., *Volumes finis*, (à paraître)
- [12] GIMONET G., CIONI J.P., FEZOU L., POUPAUD F., *Approximation numérique des équations de Maxwell en milieu hétérogène monodimensionnel par un solveur de Riemann exact*, rapport CERMICS No 95 – 37, (Avril 1995).
- [13] KRÖNER D, ROKYTA M, WIERSE M., *A lax mendroff type theorem for upwind finite volume schemes in 2-D*, Mathematische fakultät. University Freiburg, (1996).

- 
- [14] KRÖNER D, ROKYTA M., *A-priori error estimates for upwind volume schemes in several space dimensions*, Mathematische fakultät. University Freiburg, (1996).
- [15] KRÖNER D, ROKYTA M., *convergence of upwind finite volume schemes for scalar conservation laws in two dimensions*, SIAM J, Nuemr, anal. vol 31, No 2, pp 324-343, (april 1994).
- [16] KRÖNER D, NOELLE S, ROKYTA M., *Convergence of higher order upwind finite volume schemes on unstructured grids for scalar conservation laws in several space dimensions*, Freiburg University, (1993).
- [17] LAX P.D. - HARTEN A. - VAN LEER B., *On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Revue, Vol 25, No 1, (1983).
- [18] SHANKAR V. - HALL W.F. - MOHAMMADIAN A.H., *A time-domain differential solver for electromagnetic scattering problem*, *Proceeding on the IEEE*, Vol 77, pp. 709-721, No 5, (1989).
- [19] VILA J.P, VILLEDIEU P., *Convergence de la méthode des volumes finis pour les systèmes de Friedrichs*, C.R.Acad.Sci.Paris, t. 325, série I, p. 671-676, (1997).
- [20] WIERSE M., *Higher order upwind schemes on unstructured grids for the compressible euler equations in timedependent geometries in 3D*, PhD thesis, university Freiburg, 1994.
- [21] ZEBIC A., *Calcul d'ondes diffractées par des obstacles revêtus de couches minces de matériaux absorbants*, Rapport de recherche INRIA n°2091, (1993).



---

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis  
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399