



HAL
open science

Comparaison entre des schémas 2D de type Roe sur maillage régulier triangle ou quadrangle : II: calcul au sommet - Le $\beta\gamma$ schéma

Romuald Carpentier

► **To cite this version:**

Romuald Carpentier. Comparaison entre des schémas 2D de type Roe sur maillage régulier triangle ou quadrangle : II: calcul au sommet - Le $\beta\gamma$ schéma. RR-3360, INRIA. 1998. inria-00073329

HAL Id: inria-00073329

<https://inria.hal.science/inria-00073329>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Comparaison entre des schémas 2D de type Roe sur
maillage régulier triangle ou quadrangle.***

II: calcul au sommet - Le $\beta\gamma$ schéma.

Romuald CARPENTIER

N° 3360

Février 1998

THÈME 4



***Rapport
de recherche***

Comparaison entre des schémas 2D de type Roe sur maillage régulier triangle ou quadrangle.

II: calcul au sommet - Le $\beta\gamma$ schéma.

Romuald CARPENTIER

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet SINUS

Rapport de recherche n° 3360 — Février 1998 — 33 pages

Résumé : On s'intéresse à des schémas advectifs de précision suffisante pour prédire correctement certains couplages aéro-acoustiques. Dans le prolongement de [3], on introduit des paramètres β et γ dans le schéma de Roe afin d'obtenir des schémas plus précis. Utilisant une équation test d'advection bidimensionnelle, la technique de l'équation équivalente nous permet d'ajuster ces paramètres. On conduit ensuite une expérimentation numérique pour analyser et comparer les erreurs d'approximations obtenues sur un maillage triangulaire et quadrangulaire.

Mots-clés : triangle - quadrangle - dispersion - dissipation - tourbillon

Comparison between two-dimensional Roe schemes on a regular triangular or quadrangular mesh.

II: vertex centered - The $\beta\gamma$ scheme.

Abstract: We are interested in advective schemes of sufficient accuracy to predict correctly certain aero-acoustic couplings. Following [3], we introduce in the Roe scheme parameters β and γ to potentially enhance the formal accuracy. We perform a modified equation analysis on the two dimensional wave equation, and determine values to be assumed by these parameters and analyse and compare the numerical errors obtained on a triangular or quadrangular mesh.

Key-words: triangle - quadrangle - dispersion - dissipation - vortex

Table des matières

1	INTRODUCTION	4
2	METHODES DE CALCUL	5
2.1	Généralités	5
2.2	Les paramètres β et γ	6
2.3	Intégration temporelle	8
2.4	Expression du flux	8
3	ETUDE GENERALE	9
3.1	La stabilité	10
3.2	Les équations équivalentes	13
3.3	Les erreurs approchées d'ordre 2 et 3	16
3.4	Les erreurs approchées d'ordre 4 et 5	17
4	COMPARAISON DES GEOMETRIES	17
4.1	La dispersion	18
4.2	La dissipation	23
4.3	Conclusion	23
5	EFFETS DES PARAMETRES	23
5.1	L'effet β	25
5.2	L'effet γ	26
6	APPLICATION	27
6.1	Configurations	27
6.2	Stabilités	28
6.3	Résultats du modèle linéaire	29
6.4	Résultats du modèle non linéaire	29
6.5	Conclusions et perspectives	32

1 INTRODUCTION

Dans le cadre de la segmentation des propulseurs à poudre d'Ariane 5, un programme concernant les instabilités aéro-acoustiques a été proposé par le CNES (ASSM [1]). Nous avons résolu en [2] un problème hyperbolique (équations d'Euler) bidimensionnel et instationnaire, de façon explicite en volumes finis au moyen du solveur de Roe [4]. Nous sommes parvenus dans la capture de phénomènes tourbillonnaires (*FIG.1*) à des solutions très différentes (tourbillons absents en triangle, présents en quadrangle), montrant qu'une analyse des erreurs numériques était nécessaire et utile [3].

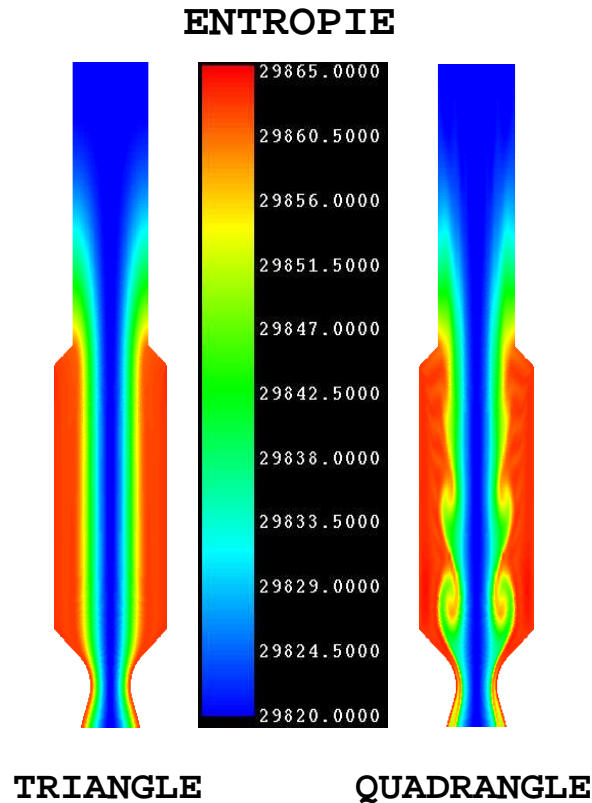


FIG. 1 – *Quadrangle: stationnaire - Triangle: instationnaire*

Nous proposons ici d'améliorer notablement les schémas numériques précédents en introduisant des paramètres β et γ . Dans cette voie, après avoir décrit les méthodes d'approximation pour le problème concret, nous nous intéressons à l'équation d'advection bidimensionnelle comme modèle linéaire d'inconnue scalaire U , de module de vitesse d'advection c dans la direction θ .

$$U_t + c \cos \theta U_x + c \sin \theta U_y = 0 \quad (1)$$

Nous donnons par le biais de [8, 9], les équations équivalentes jusqu'à l'ordre 4 et les conditions de stabilité. Nous analysons alors les erreurs numériques que ces schémas engendrent

et les comparerons. Enfin, nous concluons sur un résultat surprenant mais cohérent entre les discrétisations en triangle et en quadrangle à propos des solutions instationnaires du problème décrit ci-dessus et détaillé en [3] ou [2].

2 METHODES DE CALCUL

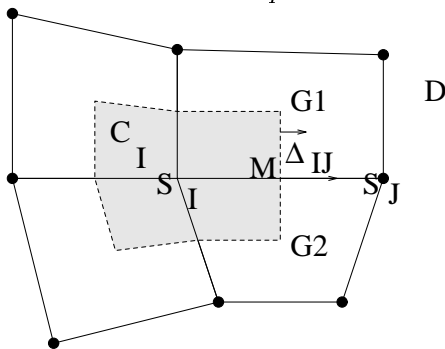
Nous présentons ici de manière assez générale la méthodologie de discrétisation pour un problème hyperbolique 2D:

$$U_t + F_x(U) + G_y(U) = 0 \quad (2)$$

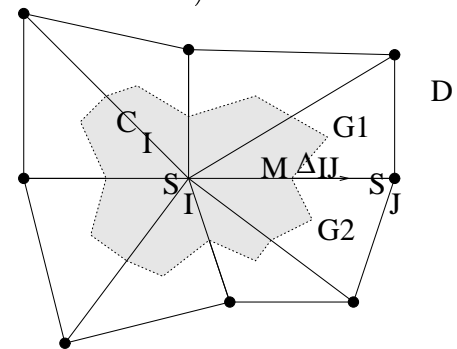
Puis, nous indiquons comment interviennent les paramètres β et γ , ainsi que l'intégration temporelle utilisée. Enfin, nous donnons l'expression du flux total en un noeud de calcul en fonction de ses voisins dans le cadre de l'équation d'advection bidimensionnelle.

2.1 Généralités

Considérons un domaine D discrétisé en NS points fixés notés S_I ($I = 1, NS$). A partir de ces points, nous pavons le domaine D , soit par des quadrangles, soit par des triangles, de manière que l'union de ces formes géométriques constitue une partition du domaine. Sur chacun de ces maillages, nous construisons le maillage dual par jonction successive des milieux M des segments issus de S_I avec les barycentres des formes géométriques. Ces segments délimitent les cellules C_I associées aux sommets S_I (voir figures ci-dessous).



Maillage quadrangle



Maillage triangle

Appliquons dans un calcul au sommet, la formule de Green à (2) dans une formulation de volumes finis sur une cellule C :

$$\int \int_C U_t \, dx dy + \int_{\partial C} \mathcal{F}(U, \vec{n}) \, d\sigma = 0 \quad (3)$$

où $\vec{n}(n_x, n_y)$ est la normale unitaire locale à la cellule C , ∂C le contour de cette cellule et \mathcal{F} le flux défini par:

$$\mathcal{F}(U, \vec{n}) = F(U) \cdot n_x + G(U) \cdot n_y \quad (4)$$

Appliquons (3) à une cellule C_I incluant le sommet S_I alors noeud de calcul. Dans le cas de **conditions périodiques** évitant les situations particulières des bords du domaine D , le flux \mathcal{F} s'exprime comme la somme des flux sur le contour intersectant les contours des cellules C_J voisines (U_I est la valeur de U au noeud S_I):

$$\int_{\partial C_I} \mathcal{F}(U_I, \vec{n}) d\sigma = \sum_J \int_{\partial C_I \cap \partial C_J} \mathcal{F}(U_I, \vec{\Delta}_{IJ}) d\sigma \quad (5)$$

où $\vec{\Delta}_{IJ}(\Delta_x, \Delta_y)$ est la normale intégrée du contour commun entre la cellule C_I et une cellule C_J voisine.

Pour exprimer (3) sur la cellule C_I sous une forme discrétisée, nous avons recours aux approximations suivantes:

- temporelle (*condensation de la matrice de masse*)

$$\int \int_{C_I} U_t dx dy \simeq \text{aire}(C_I) \frac{dU_I}{dt}$$

Ce qui revient à supposer U constante par cellule.

- spatiale (*décomposition du flux de Roe*)

$$\int_{\partial C_I \cap \partial C_J} \mathcal{F}(U_I, \vec{\Delta}_{IJ}) d\sigma \simeq \Phi(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ})$$

que nous écrirons :

$$\Phi(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) = \frac{\mathcal{F}(U_I, \vec{\Delta}_{IJ}) + \mathcal{F}(U_J, \vec{\Delta}_{IJ})}{2} + \frac{1}{2} |\mathcal{A}(\tilde{U}_{IJ}, \vec{\Delta}_{IJ})| (U_I - U_J) \quad (6)$$

où \mathcal{A} (diagonalisable aux valeurs propres réelles dans le cadre d'un problème hyperbolique) est la jacobienne de \mathcal{F} prise en une valeur \tilde{U}_{IJ} moyenne de Roe [4].

L'équation (3) s'exprime alors comme:

$$\frac{dU_I}{dt} = \Psi_I(U) \quad (7)$$

avec: $\Psi_I(U) = -\frac{1}{\text{aire}(C_I)} \sum_J \Phi(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ})$

2.2 Les paramètres β et γ

- Le paramètre γ

Nous modifions le schéma de Roe classique en pondérant la matrice de Roe par γ , facteur multiplicatif à valeur réelle. Cela se traduit par la modification de (6) en (8):

$$\Phi(U_I, U_J, \vec{\Delta}_{IJ}) = \frac{\mathcal{F}(U_I, \vec{\Delta}_{IJ}) + \mathcal{F}(U_J, \vec{\Delta}_{IJ})}{2} + \frac{\gamma}{2} |\mathcal{A}(\tilde{U}_{IJ}, \vec{\Delta}_{IJ})| (U_I - U_J) \quad (8)$$

• Le paramètre β

Pour obtenir l'ordre 2 en espace, nous estimons les variables U_I et U_J sur le bord $\partial C_I \cap \partial C_J$ au moyen d'une estimation des gradients dans les cellules C_I et C_J . Puis nous introduisons les valeurs U_{IJ} et U_{JI} interpolées dans l'expression du flux Φ en lieux et places de U_I et U_J . Ceci est la méthode M.U.S.C.L. introduite par Van Leer [5] et étendue au cas des éléments finis par Fezoui [6].

Nous réalisons un décentrage du calcul du gradient au moyen du paramètre β à valeur réelle de manière spécifique à la géométrie utilisée et de la façon suivante:

– En triangle:

$$\begin{aligned} U_I &\longmapsto U_{IJ} = U_I + \frac{1}{2} \left\{ (1 - \beta)(U_J - U_I) + \beta(\vec{\nabla}U_{T_{am}} \cdot S_I \vec{S}_J) \right\} \\ U_J &\longmapsto U_{JI} = U_J - \frac{1}{2} \left\{ (1 - \beta)(U_J - U_I) + \beta(\vec{\nabla}U_{T_{av}} \cdot S_I \vec{S}_J) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

où les gradient $\vec{\nabla}U_{T_{am}}$ et $\vec{\nabla}U_{T_{av}}$ sont les gradients respectifs des triangles amont et aval (voir figure 2). Ils sont estimés au moyen des éléments finis P1 associé à chacun des triangles.

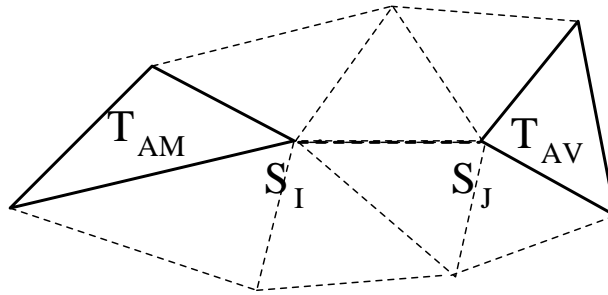


FIG. 2 – *Triangles amont et aval.*

– En quadrangle:

$$\begin{aligned} U_I &\longmapsto U_{IJ} = U_I + \frac{1}{2} \left\{ (1 - 2\beta)(U_J - U_I) + 2\beta(\vec{\nabla}U_I \cdot S_I \vec{S}_J) \right\} \\ U_J &\longmapsto U_{JI} = U_J - \frac{1}{2} \left\{ (1 - 2\beta)(U_J - U_I) + 2\beta(\vec{\nabla}U_J \cdot S_I \vec{S}_J) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

où les gradients $\vec{\nabla}U_I$ et $\vec{\nabla}U_J$ sont les gradients "centrés" relatifs aux cellules C_I et C_J obtenus par circulation (11) autour de ces cellules.

$$\vec{\nabla}U_I = \frac{1}{\text{aire}(C_I)} \sum_J \frac{U_I + U_J}{2} \vec{\Delta}_{IJ} \quad (11)$$

2.3 Intégration temporelle

Ecrivons d'abord une intégration temporelle d'ordre 1 en temps :

$$\frac{U_I^{n+1} - U_I^n}{\Delta t} = \Psi_I(U^n) \quad (12)$$

où n est l'indice relatif au temps $t = n\Delta t$.

Dans la mesure, où nous escomptons obtenir une précision spatiale jusqu'à l'ordre 4, nous utilisons une méthode d'intégration temporelle de type Runge Kutta du même ordre (RK4) donnée par:

$$U_I^{n+1} = U_I^n + \frac{\Delta t}{6} \{K_1(U^n) + 2K_2(U^n) + 2K_3(U^n) + K_4(U^n)\} \quad (13)$$

avec :

$$K_4(U^n) = \Psi_I(U^n + \Delta t K_3(U^n))$$

$$K_3(U^n) = \Psi_I(U^n + \frac{\Delta t}{2} K_2(U^n))$$

$$K_2(U^n) = \Psi_I(U^n + \frac{\Delta t}{2} K_1(U^n))$$

$$K_1(U^n) = \Psi_I(U^n)$$

2.4 Expression du flux

Nous nous plaçons dans le cadre de l'équation d'advection 2D donnée en (1) sur des maillages réguliers, orthogonaux, de cotes $\Delta x = \Delta y = \Delta$ où les hypoténuses des triangles sont orientées selon la première bissectrice. Les indices j et k sont relatifs aux coordonnées du noeud de calcul ($x = j\Delta$, $y = k\Delta$). Nous obtenons pour le flux Ψ_I les expressions suivantes:

– En quadrangle:

$$\Psi(U_I^n) = -\frac{1}{4\Delta^2} \{$$

$$\begin{array}{l}
 U_{j,k+2}^n \quad (\quad \quad \quad -\beta\chi_2 \quad \quad \quad +\beta\gamma|\chi_2|) \\
 +U_{j,k+1}^n \quad (\quad \quad \quad 2(1+\beta)\chi_2 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|\chi_2|) \\
 +U_{j-2,k}^n \quad (\quad \quad \quad \beta\chi_1 \quad \quad \quad +\beta\gamma|\chi_1|) \\
 +U_{j-1,k}^n \quad (-2(1+\beta)\chi_1 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|\chi_1|) \\
 +U_{j,k}^n \quad (\quad \quad \quad \quad \quad \quad 6\beta\gamma|\chi_1| \quad +6\beta\gamma|\chi_2|) \\
 +U_{j+1,k}^n \quad (\quad \quad \quad 2(1+\beta)\chi_1 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|\chi_1|) \\
 +U_{j+2,k}^n \quad (\quad \quad \quad -\beta\chi_1 \quad \quad \quad +\beta\gamma|\chi_1|) \\
 +U_{j,k-1}^n \quad (\quad \quad \quad -2(1+\beta)\chi_2 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|\chi_2|) \\
 +U_{j,k-2}^n \quad (\quad \quad \quad \beta\chi_2 \quad \quad \quad +\beta\gamma|\chi_2|)
 \end{array} \quad (14)$$

}

– En triangle:

$$\Psi(U_I^n) = -\frac{1}{12\Delta^2} \{$$

$$\begin{array}{l}
 U_{j,k+2}^n \quad (\quad \quad -2\beta\chi_2 \quad \quad +\beta\chi_1 \quad \quad \quad +\beta\gamma|2\chi_2 - \chi_1|) \\
 +U_{j+2,k+2}^n \quad (\quad \quad -\beta\chi_2 \quad \quad -\beta\chi_1 \quad \quad \beta\gamma|\chi_2 + \chi_1|) \\
 +U_{j,k+1}^n \quad (\quad \quad 4(1+\beta)\chi_2 \quad -2(1+\beta)\chi_1 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|2\chi_2 - \chi_1|) \\
 +U_{j+1,k+1}^n \quad (\quad \quad 2(1+\beta)\chi_2 \quad +2(1+\beta)\chi_1 \quad -4\beta\gamma|\chi_2 + \chi_1|) \\
 +U_{j-2,k}^n \quad (\quad \quad -\beta\chi_2 \quad \quad +2\beta\chi_1 \quad \quad \quad +\beta\gamma|\chi_2 - 2\chi_1|) \\
 +U_{j-1,k}^n \quad (\quad \quad 2(1+\beta)\chi_2 \quad -4(1+\beta)\chi_1 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|\chi_2 - 2\chi_1|) \\
 +U_{j,k}^n \quad (\quad \quad \quad \quad \quad \quad 6\beta\gamma|\chi_2 + \chi_1| \quad +6\beta\gamma|2\chi_2 - \chi_1| \quad +6\beta\gamma|\chi_2 - 2\chi_1|) \\
 +U_{j+1,k}^n \quad (-2(1+\beta)\chi_2 \quad +4(1+\beta)\chi_1 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|\chi_2 - 2\chi_1|) \\
 +U_{j+2,k}^n \quad (\quad \quad \beta\chi_2 \quad \quad -2\beta\chi_1 \quad \quad \quad +\beta\gamma|\chi_2 - 2\chi_1|) \\
 +U_{j-1,k-1}^n \quad (-2(1+\beta)\chi_2 \quad -2(1+\beta)\chi_1 \quad -4\beta\gamma|\chi_2 + \chi_1|) \\
 +U_{j,k-1}^n \quad (-4(1+\beta)\chi_2 \quad +2(1+\beta)\chi_1 \quad \quad \quad -4\beta\gamma|2\chi_2 - \chi_1|) \\
 +U_{j-2,k-2}^n \quad (\quad \quad \beta\chi_2 \quad \quad +\beta\chi_1 \quad \quad +\beta\gamma|\chi_2 + \chi_1|) \\
 +U_{j,k-2}^n \quad (\quad \quad 2\beta\chi_2 \quad \quad -\beta\chi_1 \quad \quad \quad +\beta\gamma|2\chi_2 - \chi_1|)
 \end{array} \quad (15)$$

}

avec: $\chi_1 = c\Delta \cos \theta$ et $\chi_2 = c\Delta \sin \theta$

3 ETUDE GENERALE

La fonction gain ou facteur d'amplification noté G permet de déterminer à la fois, la stabilité, l'équation équivalente et l'erreur exacte d'un schéma.

Pour définir G , nous écrivons $U(x = (j+l)\Delta, y = (k+m)\Delta, t = (n+1)\Delta t)$ soit $U_{j+l,k+m}^{n+1}$ comme un mode quelconque de Fourier ($\xi \cos \Omega, \xi \sin \Omega$) défini ici en coordonnées polaires où

Ω est la direction perpendiculaire aux isovaleurs de ce mode.

$U_{j+l,k+m}^{n+1}$ est référencé par rapport à $U(x = j\Delta, y = k\Delta, t = n\Delta t)$ soit $U_{j,k}^n$ de la manière suivante:

$$U_{j+l,k+m}^{n+1} = G e^{i\Delta\xi(l\cos\Omega+m\sin\Omega)} U_{j,k}^n \text{ avec: } i^2 = -1 \quad (16)$$

D'après (13) et en utilisant la linéarité du modèle, nous avons:

$$U_{j,k}^{n+1} = U_{j,k}^n + \Delta t \Psi + \frac{\Delta t^2}{2} \Psi \circ \Psi + \frac{\Delta t^3}{6} \Psi \circ \Psi \circ \Psi + \frac{\Delta t^4}{24} \Psi \circ \Psi \circ \Psi \circ \Psi \quad (17)$$

Du fait que $\Psi(U_I^n)$ est une composition finie et linéaire de valeurs $U_{j+l,k+m}^n$ (14) (15):

$$\Psi(U_I^n) = \sum_{l,m} A_{l,m} U_{j+l,k+m}^n \quad (18)$$

Nous pouvons poser de (18) en utilisant (16):

$$g = \Delta t \sum_{l,m} A_{l,m} e^{i\Delta\xi(l\cos\Omega+m\sin\Omega)} \quad (19)$$

où les A sont des fonctions indépendantes de ξ , Ω et Δt mais dépendantes de toutes les autres variables: c , Δ , θ et β , γ .

De (17), en utilisant (19) et (16), G s'écrit:

$$G = 1 + g + \frac{g^2}{2} + \frac{g^3}{6} + \frac{g^4}{24} \quad (20)$$

g et G sont alors fonctions de toutes les variables indépendantes:

$$\beta, \gamma, c, \Delta, \Delta t, \theta, \Omega, \xi.$$

A la place du pas de temps Δt nous utilisons le nombre de Courant ν , défini par:

$$\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta} \quad (21)$$

3.1 La stabilité

Nous voulons déterminer le nombre de Courant ν laissant, au sens de Von Neumann, n'importe quel mode de Fourier stable. Cela s'écrit:

$$\text{Trouver } \nu / \|G\| \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \forall \Omega \in [0, 2\pi] \quad (22)$$

En fait, G (20) est une fonction périodique car g (19) l'est aussi envers les variables $\xi_1 = \Delta\xi \cos\Omega$ et $\xi_2 = \Delta\xi \sin\Omega$ sur une même période de $[0, 2\pi]$. Ainsi, (22) peut se traduire en:

$$\text{Trouver } \nu / \|G\| \leq 1 \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in [0, 2\pi] \quad (23)$$

Plus que l'inéquation (23), nous allons chercher le nombre de Courant critique ν_c , vérifiant l'égalité:

$$\text{Trouver } \nu_c / \|G\| = 1 \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in [0, 2\pi] \quad (24)$$

Dès lors que $\nu \leq \nu_c$, le schéma sera stable et instable dans le cas contraire.

Reste que ν_c au travers de (24) est encore une fonction de θ , β et γ ... Il est alors proposé de chercher le nombre de Courant critique convenant à toute direction d'advection θ que nous noterons: ν_{cmin} et qui sera défini par:

$$\text{Trouver } \nu_{cmin} / \|G\| = 1 \quad \forall \xi_1, \xi_2, \theta \in [0, 2\pi] \quad (25)$$

ν_{cmin} ne sera alors plus qu'une fonction de β et γ que nous prendrons à valeur dans $[0, 1]$. Explicitons maintenant, l'expression de G en décomposant g en sa partie réelle g_r et imaginaire g_i .

$$g = g_r + ig_i$$

$$\begin{aligned} G = & \left\{ 1 + g_r + \frac{1}{2}(g_r^2 - g_i^2) + \frac{g_r}{6}(g_r^2 - 3g_i^2) + \frac{1}{24}(g_r^4 - 6g_r^2g_i^2 + g_i^4) \right\} \\ & + i \left\{ \frac{g_i}{6}(6 + 6g_r + 3g_r^2 - g_i^2 + g_r(g_r^2 - g_i^2)) \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

avec:

– en quadrangle:

$$\begin{aligned} g_r &= -\beta\gamma\nu \left\{ |\cos \theta|(1 - \cos \xi_1)^2 + |\sin \theta|(1 - \cos \xi_2)^2 \right\} \\ g_i &= -\nu \left\{ \cos \theta \sin \xi_1(1 + \beta(1 - \cos \xi_1)) + \sin \theta \sin \xi_2(1 + \beta(1 - \cos \xi_2)) \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

– en triangle:

$$\begin{aligned} g_r &= -\frac{\beta\gamma\nu}{3} \left\{ |2 \cos \theta - \sin \theta|(1 - \cos \xi_1)^2 + |\cos \theta - 2 \sin \theta|(1 - \cos \xi_2)^2 \right. \\ & \quad \left. + |\cos \theta + \sin \theta|(1 - \cos(\xi_1 + \xi_2))^2 \right\} \\ g_i &= -\frac{\nu}{3} \left\{ (\cos \theta + \sin \theta) \sin(\xi_1 + \xi_2)(1 + \beta(1 - \cos(\xi_1 + \xi_2))) \right. \\ & \quad \left. + (2 \cos \theta - \sin \theta) \sin \xi_1(1 + \beta(1 - \cos \xi_1)) \right. \\ & \quad \left. + (2 \sin \theta - \cos \theta) \sin \xi_2(1 + \beta(1 - \cos \xi_2)) \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

La relative lourdeur de l'expression de $\|G\|$, nous conduit à faire une représentation numérique de $\nu_{cmin}(\beta, \gamma)$ qui va décrire une nappe donnée dans la figure 3. Pour toute valeur de ν en dessous de cette nappe, le schéma est stable pour n'importe quel angle θ .

Nous y constatons:

- que ν_{cmin} est identique pour les 2 schémas envisagés. Cela signifie que pour n'importe quel couple (β, γ) donné, la plus petite valeur de ν_c est identique en quadrangle et en triangle lorsque θ parcourt l'intervalle $[0, 2\pi]$.

- que la situation la plus intéressante au niveau du nombre de Courant de façon à préserver la stabilité, est de prendre $\beta = 0$. Alors, quelque soit γ , nous pouvons prendre $\nu \simeq 2$.
- que ν_{cmin} est une fonction décroissante avec β croissant alors qu'elle varie plus faiblement avec γ .
- que la situation la moins intéressante au niveau du nombre de Courant de façon à préserver la stabilité, est de prendre $\beta = 1$ et $\gamma = 1$. ν_{cmin} vaut alors environ $\frac{1}{2}$!

Dans la mesure, où nous serons amenés à regarder la situation particulière de $\beta = \frac{1}{3}$ et $\gamma = 0$, de la figure (FIG.3), nous obtenons un nombre de Courant critique valable pour toute direction d'advection θ de valeur approximative:

$$\nu_{cmin} \simeq 1.45 \quad (29)$$

Les paramètres β et γ étant fixés, nous pouvons faire une représentation polaire de ν_c (24)

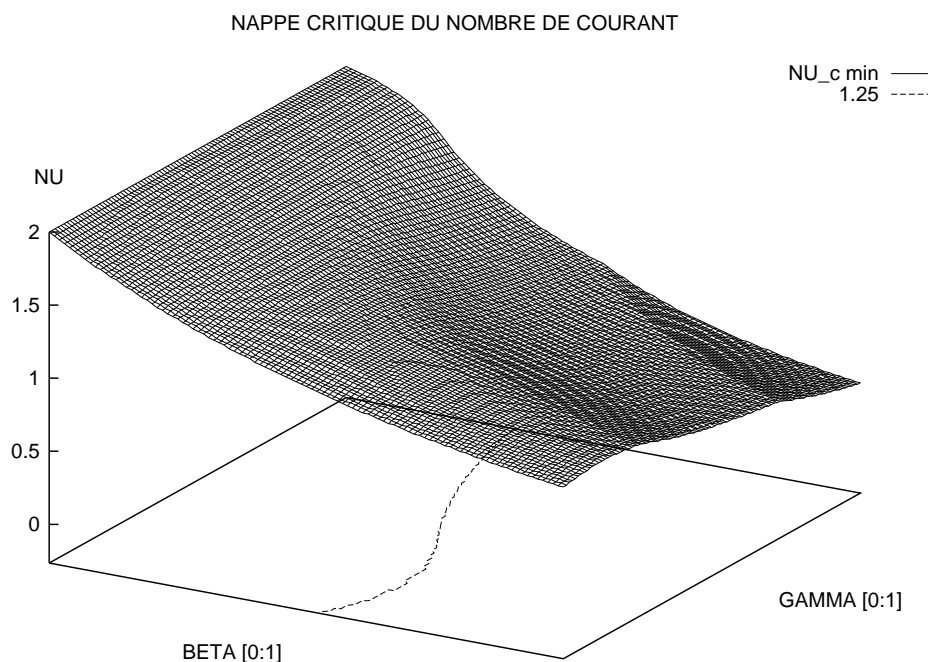


FIG. 3 – La nappe $\nu_{c min}(\beta, \gamma)$ - Triangle = Quadrangle

en fonction de θ (FIG.4). Nous constatons alors une forme en losange pour la discrétisation quadrangulaire démontrée dans [2] et ovoïde pour la géométrie triangulaire allongée ici selon les hypoténuses des triangles (première bissectrice). Ces courbes sont tangentes selon la seconde bissectrice et est la plus petite valeur admissible (au sens de la stabilité) de ν pour

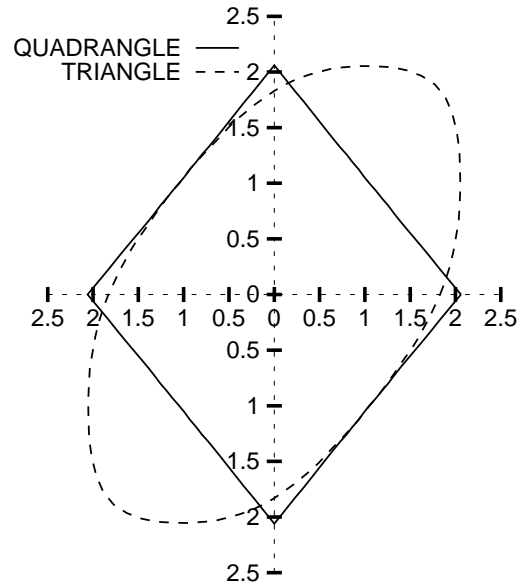


FIG. 4 – Le nombre de Courant critique $\nu_c(\theta)$ - $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = 0$

tout θ . Nous y trouvons donc la valeur ν_{cmin} .

Par la suite, nous prendrons systématiquement:

$$\boxed{\nu = 1}$$

3.2 Les équations équivalentes

Un schéma numérique ne résout jamais parfaitement bien le modèle que l'on considère. En réalité, il va résoudre l'équation équivalente:

$$U_t + c \cos \theta U_x + c \sin \theta U_y = c \sum_{j,k \in \mathbb{N}^* - \{1\}} \alpha_{j,k} U_{jx,ky} \quad (30)$$

où les $\alpha_{j,k}$ sont des coefficients réels dépendant de Δ tendant vers 0 lorsque Δ tend vers 0 si nous avons *consistance* du schéma au modèle (1).

Si nous avons pour état initial, U_o , un mode de Fourier (ξ, Ω) et d'amplitude \mathcal{U} :

$$U_o = \mathcal{U} \cos \xi \{x \cos \Omega + y \sin \Omega\} \quad (31)$$

Il est aisé de voir que la solution exacte U_e de (1) est donnée par:

$$U_e = \mathcal{U} \cos \xi \{x \cos \Omega + y \sin \Omega - ct \cos(\theta - \Omega)\} \quad (32)$$

correspondant à la translation de U_o dans la direction Ω d'une distance De ayant pour valeur:

$$D_e = ct \cos(\theta - \Omega) \quad (33)$$

Un schéma numérique, par (30), sous la même condition initiale (31), va donner la solution calculée U_c [2] [7] suivante:

$$U_c(t) = \mathcal{G}\mathcal{U} \cos \xi \{x \cos \Omega + y \sin \Omega - [D_e + \mathcal{D}]\} \quad (34)$$

$$\text{avec } \mathcal{G} = e^{ct} \left\{ \sum_{j+k \text{ pair}-\{0\}} (-1)^{\frac{j+k}{2}} (\xi)^{j+k} (\cos \Omega)^j (\sin \Omega)^k \alpha_{j,k} \right\} \quad (35)$$

$$\text{et } \mathcal{D} = -ct \sum_{j+k \text{ impair}-\{1\}} (-1)^{\frac{j+k-1}{2}} (\xi)^{j+k-1} (\cos \Omega)^j (\sin \Omega)^k \alpha_{j,k} \quad (36)$$

Deux types de différences distinctes apparaissent entre les expressions de $U_e(t)$ (32) et $U_c(t)$ (34):

- la dissipation consistant à modifier l'amplitude \mathcal{U} par le facteur \mathcal{G} donné dans (35) ($j+k$ pair),
- la dispersion consistant à modifier le déplacement D_e du mode par l'ajout de \mathcal{D} (36) ($j+k$ impair).

Nous constatons que ces différences sont spécifiques à la parité de la somme $j + k$ et nous observerons plus bas que la puissance en Δ de $\alpha_{j,k}$ est en $j + k - 1$ pour ce modèle d'équation d'advection bidimensionnelle.

Le but de ce paragraphe n'est pas de donner l'erreur dispersive et dissipative totale de chaque schéma, mais en regardant les équations équivalentes tronquées, nous allons vérifier et donner:

- la consistance du schéma, c'est à dire qu'il n'existe aucun $\alpha_{j,k}$ d'ordre Δ^0 .
- l'ordre du schéma qui est la puissance en Δ du premier $\alpha_{j,k}$ non nul.
- les valeurs à donner aux paramètres β, γ pour augmenter l'ordre des schémas.
- les erreurs approchées pour des modes de Fourier correctement discrétisés par le maillage, c'est à dire répondant à la condition:

$$\Delta \xi \ll 1 \quad (37)$$

En conséquence, donnons maintenant les $\alpha_{j,k}$ jusqu'à l'ordre 4 en Δ pour chacun des schémas. L'obtention de ces termes à partir de (14) et (15) est immédiate en utilisant la méthodologie introduite dans [8] et développée dans [9].

- Dispersion en Δ^2

EN QUADRANGLE TERMES EN Δ^2 (Dispersion)			EN TRIANGLE TERMES EN Δ^2 (Dispersion)		
$\alpha_{j,k}$	Valeur		$\alpha_{j,k}$	Valeur	
$\alpha_{3,0}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)}$	$\cos \theta(3\beta - 1)$	$\alpha_{3,0}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)}$	$\cos \theta(3\beta - 1)$
$\alpha_{2,1}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)}$	0	$\alpha_{2,1}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)}$	$(3\beta - 1)(\cos \theta + \sin \theta)$
$\alpha_{1,2}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)}$	0	$\alpha_{1,2}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)}$	$(3\beta - 1)(\cos \theta + \sin \theta)$
$\alpha_{0,3}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)}$	$\sin \theta(3\beta - 1)$	$\alpha_{0,3}$	$\frac{\Delta^2}{(2)(3)}$	$\sin \theta(3\beta - 1)$

- Dissipation en Δ^3

EN QUADRANGLE TERMES EN Δ^3 (Dissipation)			EN TRIANGLE TERMES EN Δ^3 (Dissipation)		
$\alpha_{j,k}$	Valeur		$\alpha_{j,k}$	Valeur	
$\alpha_{4,0}$	$\frac{\Delta^3}{2^2}$	$(-\beta\gamma \cos \theta)$	$\alpha_{4,0}$	$\frac{\Delta^3}{2^2}$	$\beta\gamma(- \cos \theta + \sin \theta - 2\cos \theta - \sin \theta)$
$\alpha_{3,1}$	$\frac{\Delta^3}{2^2 3}$	0	$\alpha_{3,1}$	$\frac{\Delta^3}{2^2 3}$	$(-4\beta\gamma \cos \theta + \sin \theta)$
$\alpha_{2,2}$	$\frac{\Delta^3}{2^2 3}$	0	$\alpha_{2,2}$	$\frac{\Delta^3}{2^2 3}$	$(-6\beta\gamma \cos \theta + \sin \theta)$
$\alpha_{1,3}$	$\frac{\Delta^3}{2^2 3}$	0	$\alpha_{1,3}$	$\frac{\Delta^3}{2^2 3}$	$(-4\beta\gamma \cos \theta + \sin \theta)$
$\alpha_{0,4}$	$\frac{\Delta^3}{2^2}$	$(-\beta\gamma \sin \theta)$	$\alpha_{0,4}$	$\frac{\Delta^3}{2^2}$	$\beta\gamma(- \cos \theta + \sin \theta - \cos \theta - 2\sin \theta)$

Des tableaux précédents donnant les $\alpha_{j,k}$, nous déduisons:

- la consistance des schémas au modèle,
- un ordre 2 minimal des schémas pour tous les couples (β, γ) ,
- un ordre 3 des schémas si $\beta = \frac{1}{3}$,
- un ordre 4 des schémas si $\beta = \frac{1}{3}$ et $\gamma = 0$,

De plus, nous remarquons jusqu'à l'ordre 4, une indépendance des $\alpha_{j,k}$ envers le nombre de Courant ν du fait de l'intégration temporelle de Runge-Kutta d'ordre 4.

Par ailleurs, nous constatons, pour la géométrie quadrangle et jusqu'à l'ordre 4, des $\alpha_{j,k}$ nuls si le produit $jk \neq 0$.

3.3 Les erreurs approchées d'ordre 2 et 3

En utilisant (35) et (36), nous obtenons les erreurs approchées dispersives d'ordre 2 et dissipatives d'ordre 3 suivantes:

- En quadrangle:

$$\mathcal{D}_{\Delta^2} = ct\Delta^2\xi^2 (3\beta - 1) L(\theta, \Omega) \quad (38)$$

où $L(\theta, \Omega) = (\cos^3 \Omega \cos \theta + \sin^3 \Omega \sin \theta)/6$

$$\mathcal{G}_{\Delta^3} = \exp^{ct\Delta^3\xi^4} \beta\gamma L'(\theta, \Omega) \quad (39)$$

où $L'(\theta, \Omega) = -3(\cos^4 \Omega |\cos \theta| + \sin^4 \Omega |\sin \theta|)/12$

- En triangle:

$$\mathcal{D}_{\Delta^2} = ct\Delta^2\xi^2 (3\beta - 1) L(\theta, \Omega) \quad (40)$$

où $L(\theta, \Omega) = (\cos^3 \Omega \cos \theta + \sin^3 \Omega \sin \theta + \cos \Omega \sin \Omega (\cos \Omega + \sin \Omega) (\cos \theta + \sin \theta))/6$

$$\mathcal{G}_{\Delta^3} = \exp^{ct\Delta^3\xi^4} \beta\gamma L'(\theta, \Omega) \quad (41)$$

où $L'(\theta, \Omega) = -\{3\cos^4 \Omega (|\cos \theta + \sin \theta| + |2\cos \theta - \sin \theta|) + 3\sin^4 \Omega (|\cos \theta + \sin \theta| + |\cos \theta - 2\sin \theta|) + 2\cos \Omega \sin \Omega |\cos \theta + \sin \theta| (2 + 3\cos \Omega \sin \Omega)\} / 12$

Ainsi, pour toutes les discrétisations considérées, l'erreur dispersive d'ordre 2 est proportionnelle au facteur $3\beta - 1$ (38) (40) tandis que l'erreur dissipative d'ordre 3 est une puissance du facteur $\beta\gamma$ (39) (41). En conséquence:

- β règle la dispersion d'ordre 2 avec la possibilité de changer son signe,
- γ règle, à β fixé, la dissipation d'ordre 3 avec la possibilité de l'annuler.

3.4 Les erreurs approchées d'ordre 4 et 5

Avec $\beta = \frac{1}{3}$, nous n'avons plus d'erreur dispersive d'ordre 2. Avec $\gamma = 0$, nous n'avons plus d'erreur dissipative d'ordre 3. En conséquence, il nous faut monter en ordre par les équations équivalentes pour pouvoir comparer les cas triangulaires et quadrangulaires. Nous donnons, sans le détail des équations équivalentes, les expressions de \mathcal{D}_{Δ^4} et de \mathcal{G}_{Δ^5} pour les deux cas:

– En quadrangle:

$$\mathcal{D}_{\Delta^4} = ct\Delta^4\xi^4 M(\theta, \Omega) \quad (42)$$

$$\text{où } M(\theta, \Omega) = \left\{ -4(\cos^5 \Omega \cos \theta + \sin^5 \Omega \sin \theta) - \nu^4 \cos^5(\Omega - \theta) \right\} / 120$$

$$\mathcal{G}_{\Delta^5} = \exp^{ct\Delta^5\xi^6} M'(\theta, \Omega) \quad (43)$$

$$\text{où } M'(\theta, \Omega) = - \left\{ \nu^5 \cos^6(\Omega - \theta) \right\} / 144$$

– En triangle:

$$\mathcal{D}_{\Delta^4} = ct\Delta^4\xi^4 M(\theta, \Omega) \quad (44)$$

$$\text{où } M(\theta, \Omega) = \left\{ -4(\cos^5 \Omega \cos \theta + \sin^5 \Omega \sin \theta) - \nu^4 \cos^5(\Omega - \theta) - \frac{20}{3} \cos \Omega \sin \Omega (\cos \Omega + \sin \Omega) (1 + \cos \Omega \sin \Omega) (\cos \theta + \sin \theta) \right\} / 120$$

$$\mathcal{G}_{\Delta^5} = \exp^{ct\Delta^5\xi^6} M'(\theta, \Omega) \quad (45)$$

$$\text{où } M'(\theta, \Omega) = - \left\{ \nu^5 \cos^6(\Omega - \theta) \right\} / 144$$

Nous obtenons une erreur dispersive d'ordre 4 différente entre le cas triangle et le cas quadrangle. Ce n'est pas vérifié pour l'erreur dissipative d'ordre 5. Cette dernière est alors uniquement fonction du nombre de Courant ν ce qui indique que l'usage d'un Runge-Kutta d'ordre 6, nous permettrait d'éliminer cette erreur dissipative...

4 COMPARAISON DES GEOMETRIES

Cette comparaison porte sur les erreurs approchées calculées au paragraphe précédent. Deux types d'erreurs s'offrent donc à nous:

- La dispersion
- La dissipation

Avant, d'aller plus loin, nous voulons donner quelques généralités sur les représentations qui vont suivre:

- Chacune des erreurs du schéma triangle ou quadrangle a un facteur commun ou une puissance positive commune si bien que **qualitativement**, nous pouvons nous restreindre à la comparaison des fonctions de θ et de Ω . Les effets des paramètres β et γ seront discutés ultérieurement.
- Nous multiplions les erreurs dispersives par le signe du déplacement exact $\cos(\Omega - \theta)$ en affectant aux fonctions de θ et de Ω un indice supérieur *. Ceci a pour avantage de faire porter aux erreurs dispersives un signe positif si avance ou négatif si retard par rapport au déplacement advectif de la solution exacte.
- Nous prendrons pour les erreurs d'ordre 4 et 5, un nombre de Courant identique $\boxed{\nu = 1}$ qui satisfera toujours la stabilité des schémas pour les applications qui seront menées.
- Nous remarquerons que l'erreur obtenue dans une configuration (θ_0, Ω_0) donnée se retrouve dans la configuration $(\theta_0 + p\pi, \Omega_0 + q\pi)$, quelque soit p et q de \mathbb{Z} et quelque soit la nature de l'erreur. Ceci provient bien évidemment du fait que les fonctions de θ et Ω sont périodiques et a pour conséquence, outre une réduction du domaine de variation de (θ, Ω) à $[0, \pi] \times [0, \pi]$, de ne pas avoir à considérer l'orientation prise.

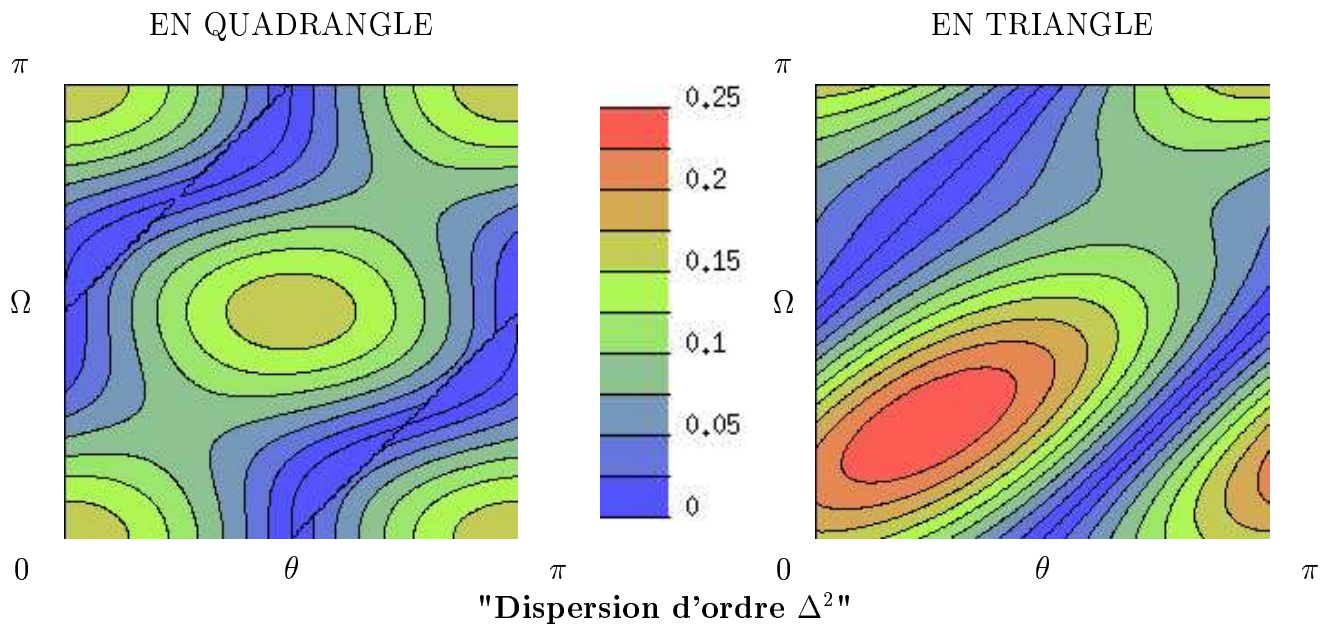
4.1 La dispersion

Deux cas se distinguent:

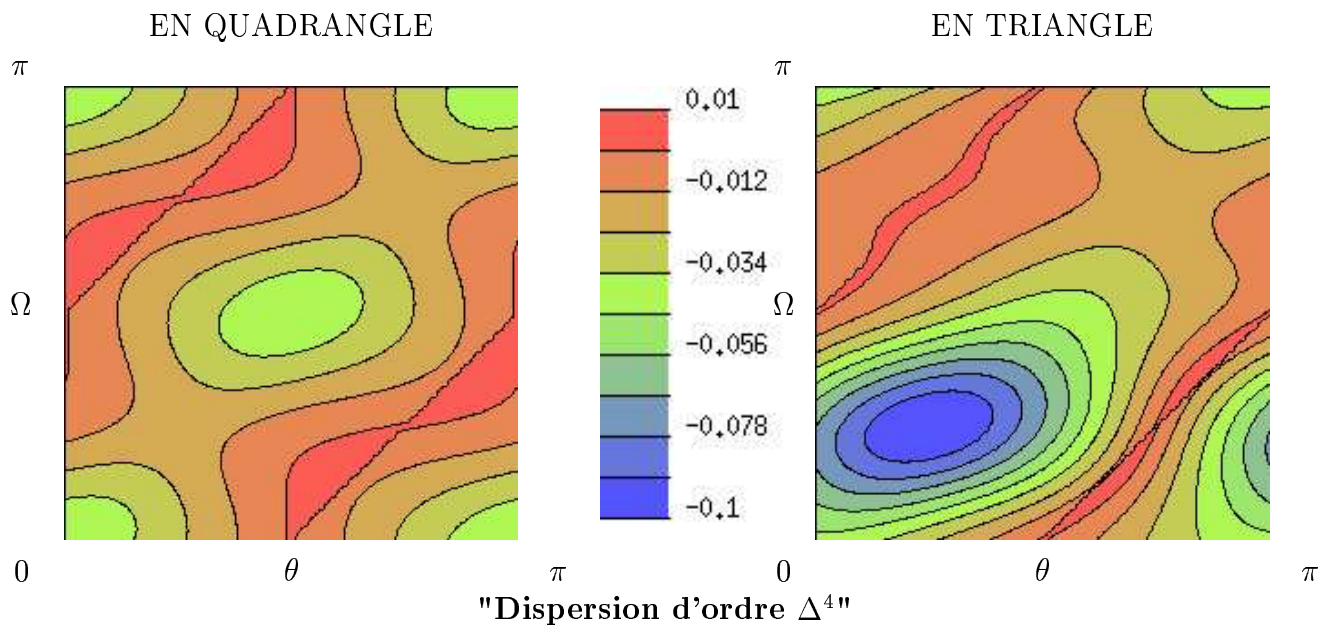
- Le cas $\beta \neq \frac{1}{3}$
La première erreur dispersive est d'ordre 2 et est représentée par $L^*(\theta, \Omega)$ sur la moitié supérieure de la page 19. Le plus souvent, cette erreur a un effet d'avance mais il faut garder à l'esprit qu'avec le paramètre β , cette erreur est modulable à souhait jusqu'à pouvoir devenir un retard. Reste qu'à β fixé, elle est plus importante en triangle qu'en quadrangle sauf dans le cas où $\Omega = \theta \pm \frac{\pi}{2}$ (isovaleurs glissant sur elles-mêmes).
- Le cas $\beta = \frac{1}{3}$
La première erreur dispersive est d'ordre 4 et est représentée par $M^*(\theta, \Omega)$ sur la moitié inférieure de la page 19. Cette erreur correspond le plus souvent à un retard et est toujours plus importante en triangle qu'en quadrangle.

Des représentations polaires en fonction de θ sont données page 20 pour $\Omega = \theta$ et $\Omega = \theta + \frac{\pi}{2}$. A l'extérieur du disque de rayon 0.2, nous constatons un effet d'avance, de retard à l'intérieur et d'exactitude à l'ordre près sur le cercle.

REPRESENTATION DE $L^*(\theta, \Omega)$

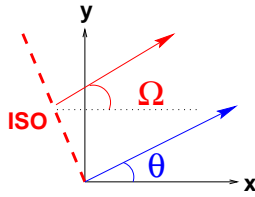


REPRESENTATION DE $M^*(\theta, \Omega)$

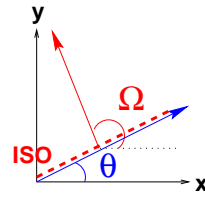


DISPERSION: REPRESENTATIONS POLAIRES PARTICULIERES...

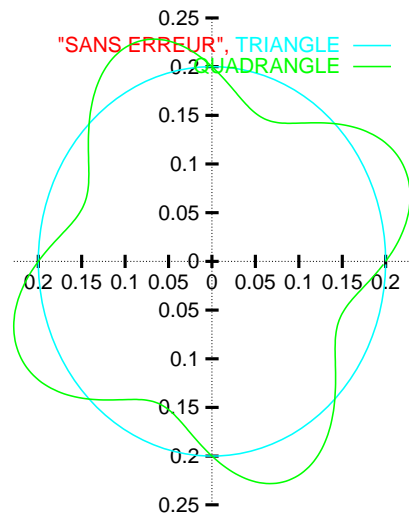
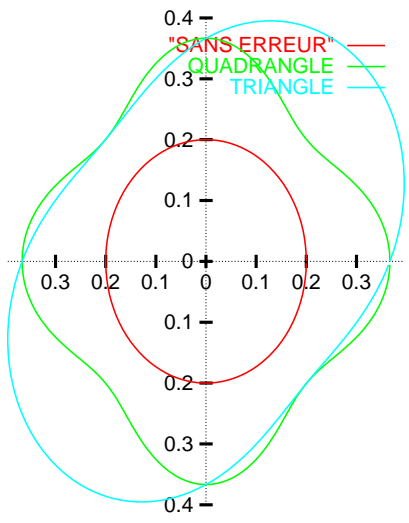
CAS: $\Omega = \theta$



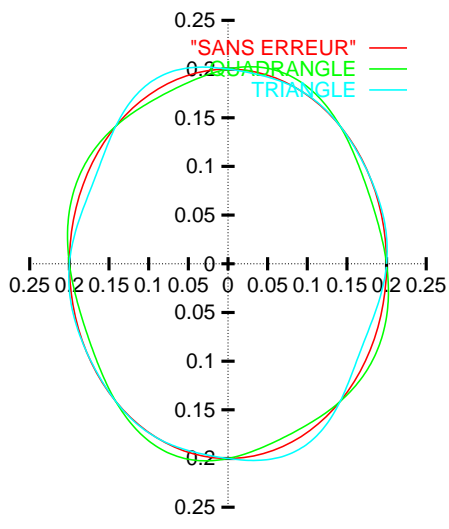
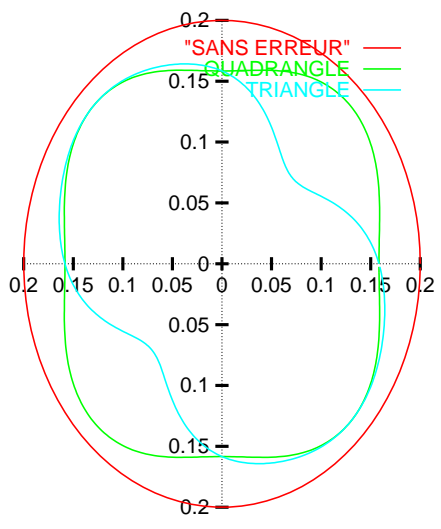
CAS: $\Omega = \theta + \pi/2$



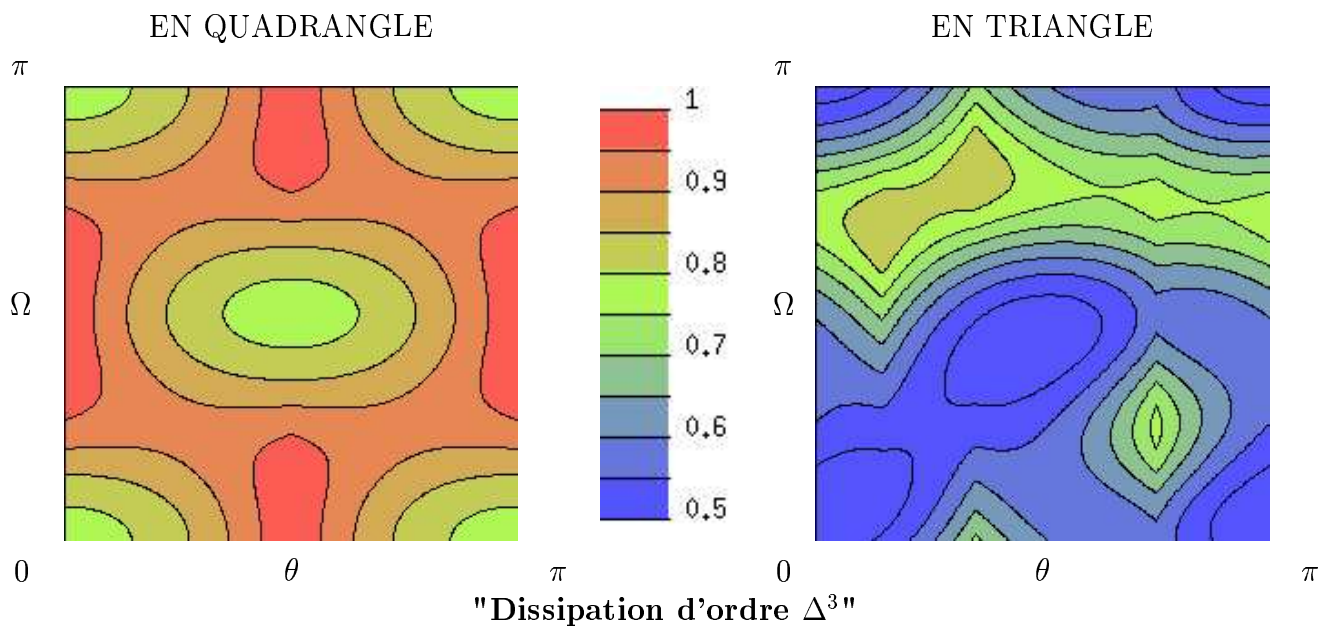
...DE $L^*(\theta) + 0.2$ (ordre Δ^2)...



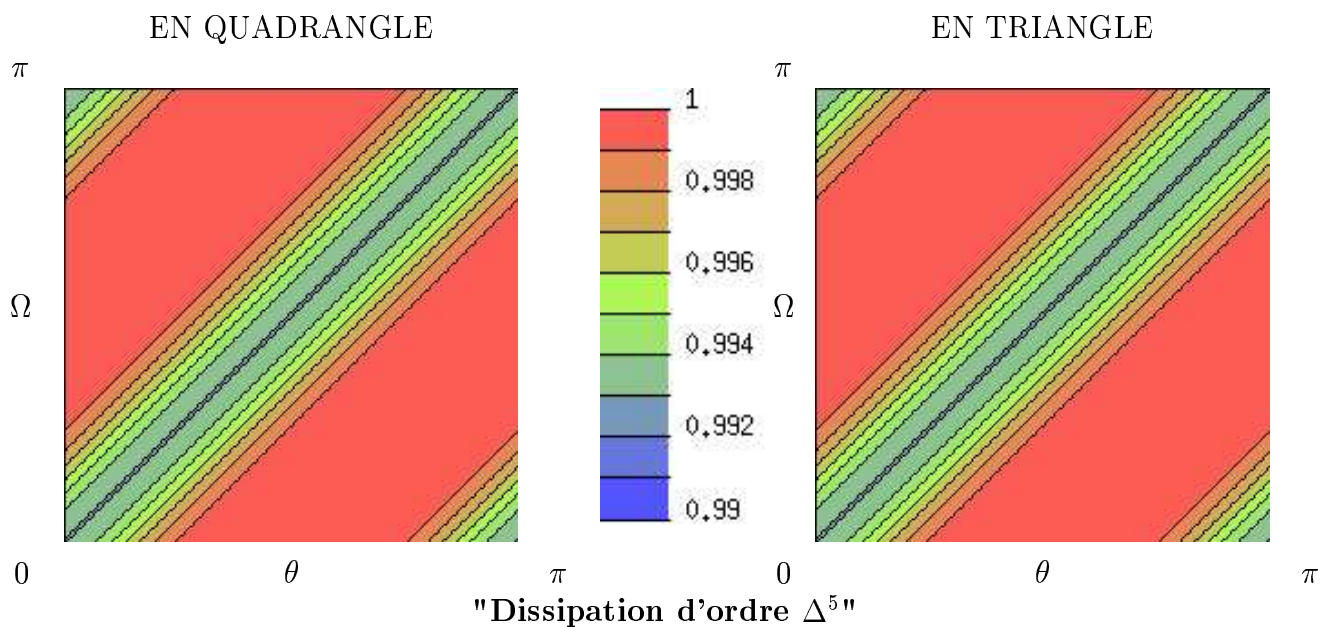
...DE $M^*(\theta) + 0.2$ (Ordre Δ^4).



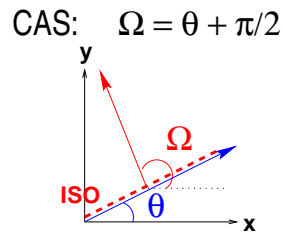
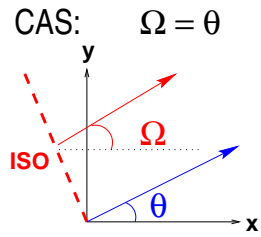
REPRESENTATION DE $L'(\theta, \Omega)$



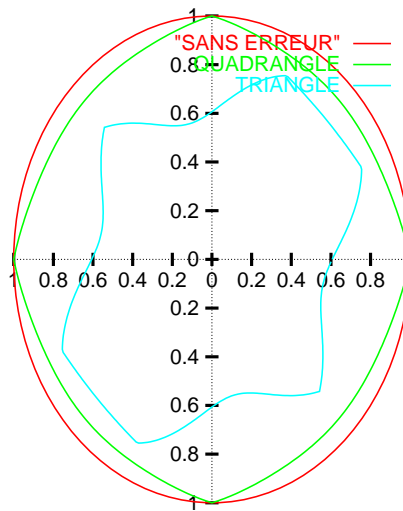
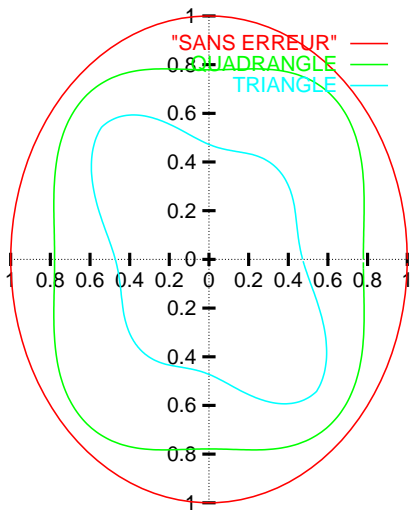
REPRESENTATION DE $M'(\theta, \Omega)$



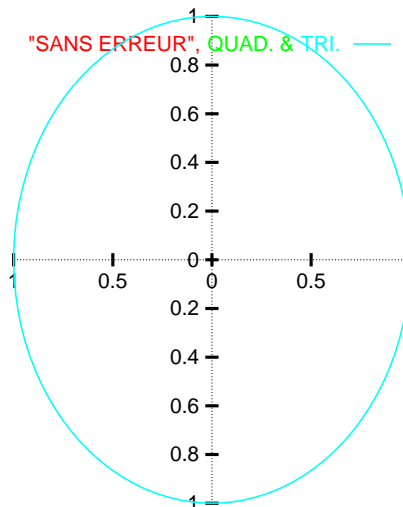
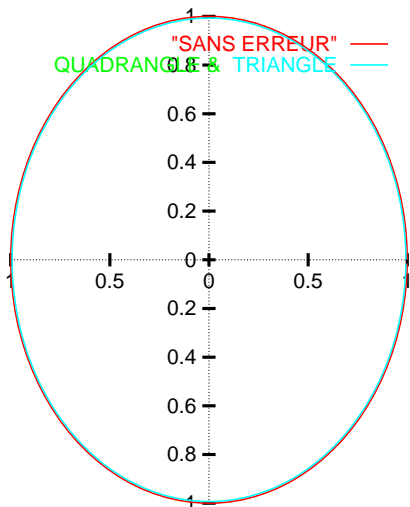
DISSIPATION: REPRESENTATIONS POLAIRES PARTICULIERES...



...DE $EXP(L'(\theta))$ (Ordre Δ^3)...



...DE $EXP(M'(\theta))$ (Ordre Δ^5).



4.2 La dissipation

- Le cas $\beta\gamma \neq 0$

La première erreur dissipative est d'ordre 3 et est représentée par $EXP(L'(\theta, \Omega))$ sur la moitié supérieure de la page 21. Elle est toujours et nettement moins importante en quadrangle qu'en triangle. Cette erreur est modulable par le paramètre γ de manière exponentielle. On peut constater, comme dans [7], la caractéristique du schéma à maillage triangulaire qui est de moins dissiper des modes de Fourier dont les isovaleurs seraient colinéaires aux hypoténuses des triangles et ce, pratiquement indépendamment de l'orientation de l'advection θ !

- Le cas $\beta\gamma = 0$

La première erreur dissipative est d'ordre 5 et est représentée par $EXP(M'(\theta, \Omega))$ sur la moitié inférieure de la page 21. Elle est très faible, ne dépendant que du nombre de Courant et identique en triangle comme en quadrangle. Cette erreur se montre plus importante lorsque la direction θ de l'advection est colinéaire à la direction donnée par Ω . Au contraire, elle est beaucoup plus faible pour une advection faisant glisser les isovaleurs du mode de Fourier sur elles-mêmes (coupes page 22). Enfin, ce qui est très remarquable et explicitement donné par les expressions (43) ou (45), est que l'erreur est constante sur toute famille (θ, Ω) telle que:

$$\Omega = \theta + \text{constante}$$

4.3 Conclusion

Nous constatons qu'en règle générale à β et γ fixés, les erreurs d'ordre 2 et 3 commises en triangles sont plus importantes que les erreurs commises en quadrangles. Cependant, grâce aux paramètres $\beta = \frac{1}{3}$ et $\gamma = 0$, ces premières erreurs peuvent disparaître laissant en importance alors place aux erreurs d'ordre 4 et 5. Au niveau de l'erreur dispersive d'ordre 4, nous constatons alors un effet de retard toujours plus important en triangle qu'en quadrangle. En ce qui concerne l'erreur dissipative d'ordre 5, les deux discrétisations se valent puisque cette erreur est subordonnée à l'intégration temporelle choisie et au nombre de Courant pris.

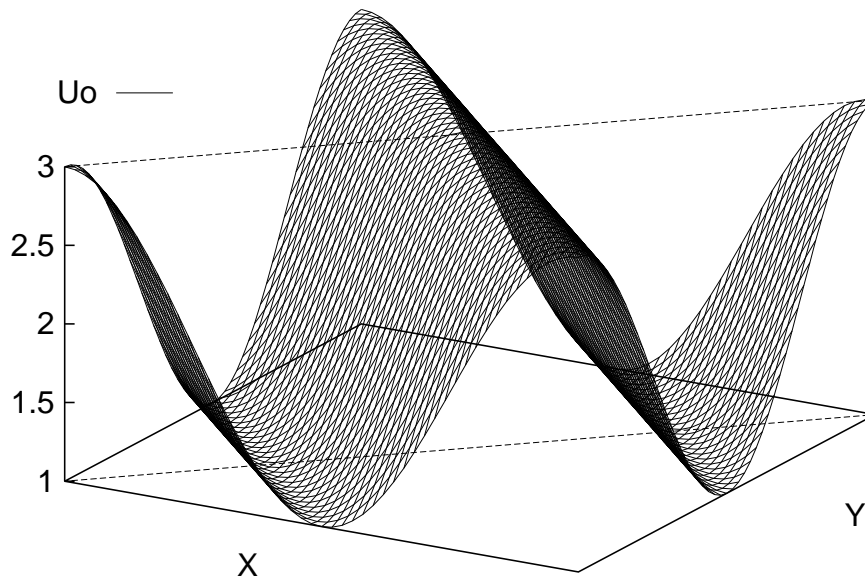
5 EFFETS DES PARAMETRES

Dans ce paragraphe, nous voulons illustrer à partir d'un mode de Fourier bien discrétisé par le maillage la modification de la solution par rapport à la solution exacte. Pour ce faire, plaçons nous sur une grille régulière, orthogonale avec condition de bord périodique de dimension 1×1 en 51×51 points ($\Delta = 2.10^{-2}$). Nous prendrons pour modèle

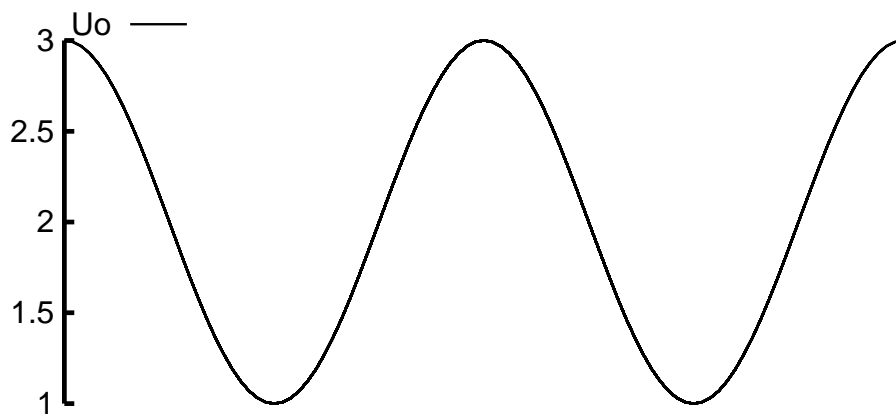
le module de la vitesse d'advection $c = 1$, la direction d'advection $\theta = \frac{\pi}{4}$ et pour condition initiale:

$$U_o = 2 + \cos(x + y) \quad \text{soit de (31): } \mathcal{U} = 1, \quad \Omega = \frac{\pi}{4}, \quad \xi = \sqrt{2} \quad (46)$$

ayant pour représentation bidimensionnelle, l'allure suivante:



que nous regarderons dans le plan de coupe défini ci-dessus en pointillé:



nous permettant une meilleure visualisation des erreurs commises.

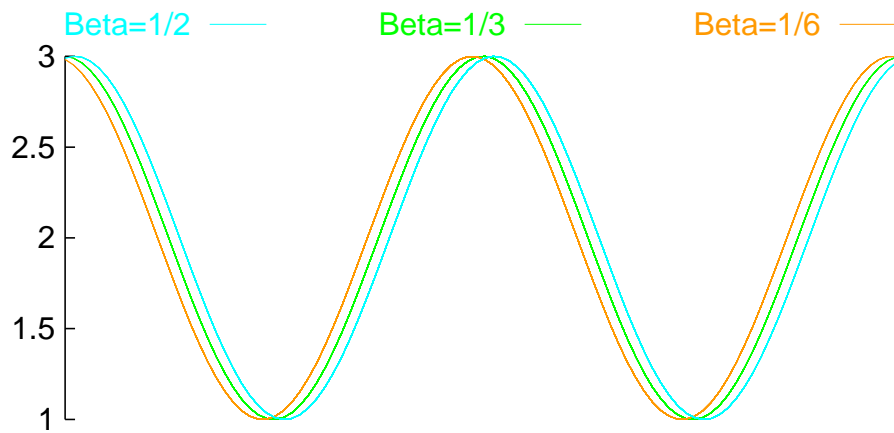
5.1 L'effet β

Comme nous l'avons mis en évidence lors du calcul des équations équivalentes, le paramètre β permet de régler l'erreur **dispersive** d'ordre 2 et ce proportionnellement au facteur:

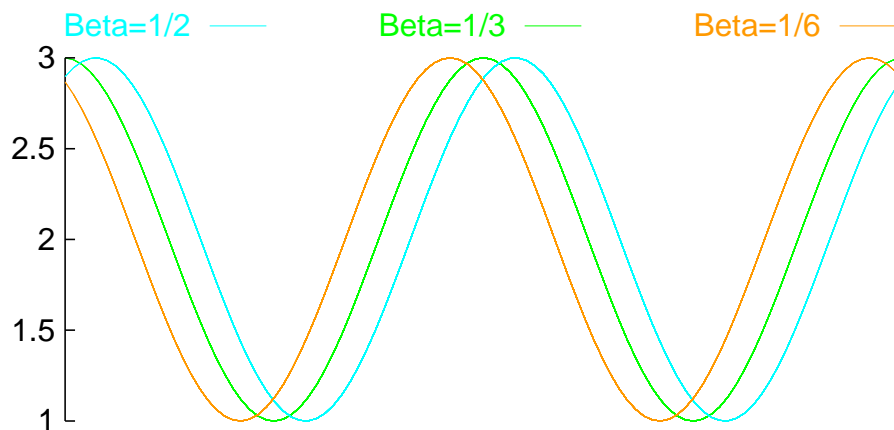
$$3\beta - 1.$$

Pour découpler cet effet de l'erreur dissipative, nous prendrons $\gamma = 0$ dans les expériences menées ci-dessous après une advection sur une distance de $10\sqrt{2}$ (10 fois la grille).

EN QUADRANGLE



EN TRIANGLE



$$\beta < \frac{1}{3} \Rightarrow \text{retard} \quad \beta > \frac{1}{3} \Rightarrow \text{avance.}$$

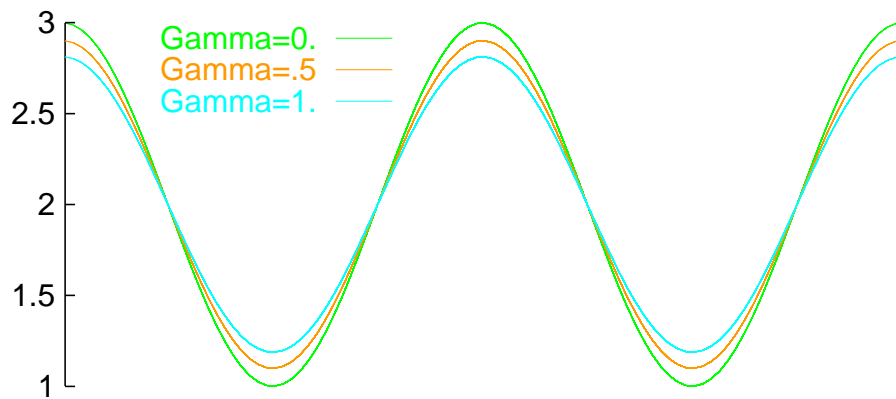
5.2 L'effet γ

A β fixé que nous prendrons à $\frac{1}{3}$ pour supprimer la dispersion d'ordre 2, nous avons vu que la dissipation d'ordre 3 est à une puissance du produit:

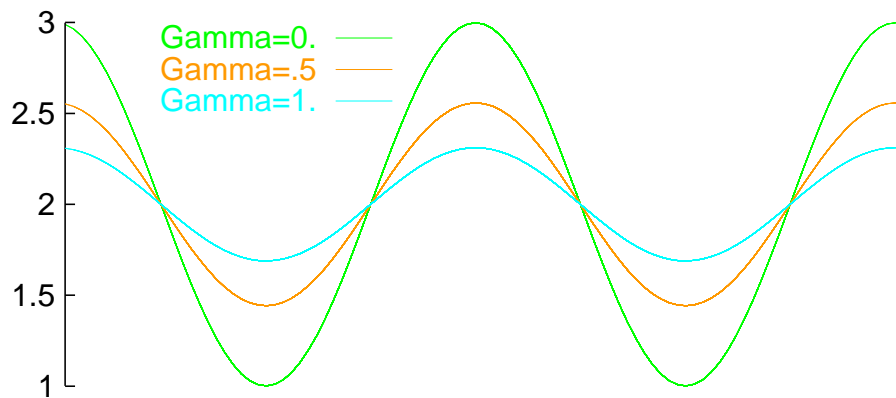
$$\beta\gamma.$$

Si bien que pour β donné, la **dissipation** d'ordre 3 se règle au moyen du paramètre γ pouvant entièrement disparaître pour $\gamma = 0$. Nous menons quelques expériences ci-dessous après une advection sur une distance de $100\sqrt{2}$ (100 fois la grille).

EN QUADRANGLE



EN TRIANGLE



$\beta\gamma \searrow \Rightarrow$ **dissipation** \searrow

6 APPLICATION

Le schéma " $\beta\gamma$ " a donc la faculté d'avoir ses premières erreurs dispersives et dissipatives réglables aux moyens des paramètres β et γ . Maintenant, nous voulons utiliser ce schéma sur le système des équations d'Euler bidimensionnel dans le cadre du cas test C1 de l'ONERA afin de juger de sa sensibilité envers l'erreur de **dispersion** par la solution instationnaire qu'il donne.

Le passage des résultats obtenus sur le modèle linéaire de l'advection à ce système non linéaire est clairement sujet à caution. Cependant, les résultats numériques donnés à la fin de ce chapitre sur le cas test C1 épousent presque *trop bien* (nous y reviendrons à la conclusion) le changement de signe de l'erreur dispersive du modèle linéaire!

6.1 Configurations

Puisque nous souhaitons rendre compte d'une sensibilité à la dispersion, il convient de travailler avec une dissipation d'ordre 3 constante à défaut de pouvoir être nulle. En effet, prendre $\gamma = 0$ dans le système des équations d'Euler, c'est supprimer entièrement la matrice de Roe et donc couper court à toute viscosité artificielle ce qui empêche le passage du moindre calcul. En conséquence, voulant néanmoins limiter l'erreur de dissipation d'ordre 3, nous avons pris un produit $\beta\gamma$ constant de valeur $\frac{1}{10}$.

Restait à spécifier quelques valeurs du paramètre β de manière à disposer d'une erreur dispersive d'ordre 2 avec retard, nulle et avec avance. Nous donnons dans le tableau ci-dessous, les configurations de calcul envisagées:

CONFIGURATIONS			
β	γ	$3\beta - 1$ (dispersion O(2))	$\beta\gamma$ (dissipation O(3))
$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{10}$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

6.2 Stabilités

Il convient de vérifier que prendre un nombre de Courant

$$\nu = 1$$

satisfait la stabilité de toutes les configurations envisagées. Pour ce faire, nous représentons en fonction de β une coupe de la figure 3 pour un produit $\beta\gamma$ constant de valeur $\frac{1}{10}$.

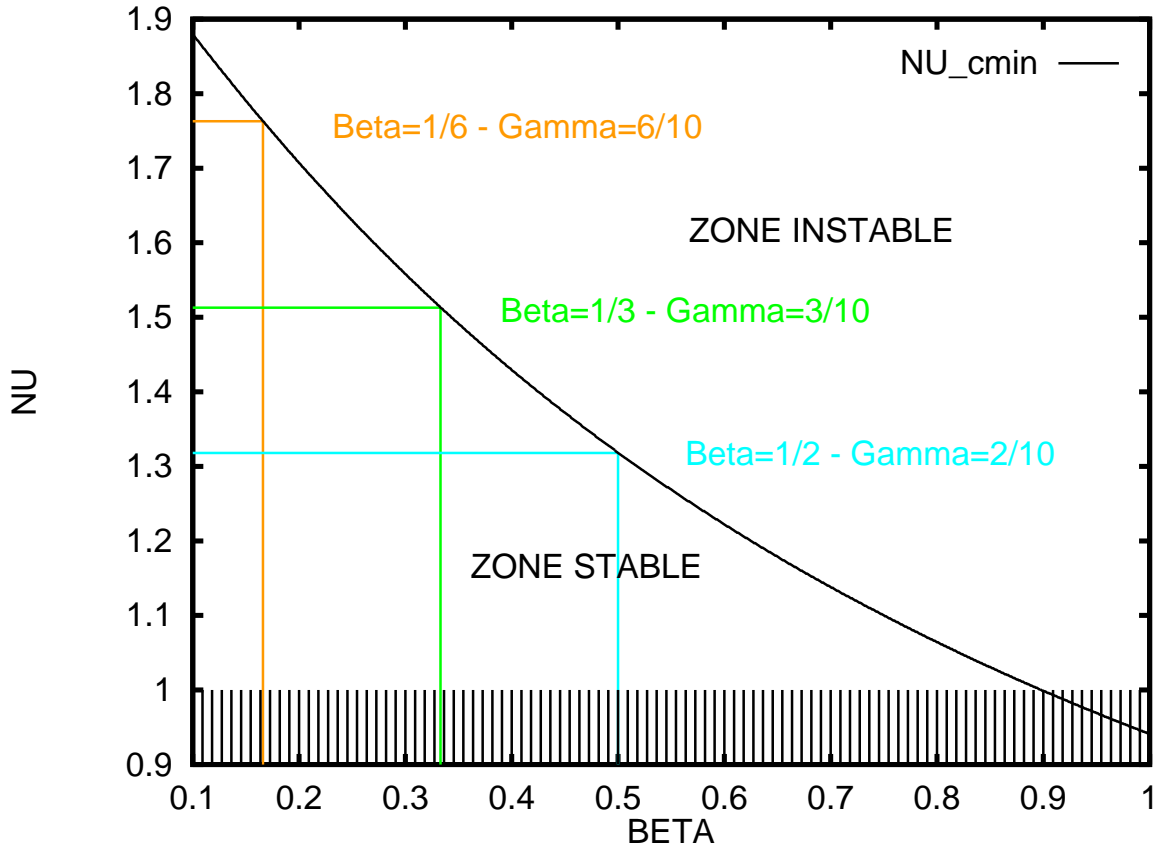


FIG. 5 – Zone de stabilité et d'instabilité pour tout θ à $\beta\gamma = \frac{1}{10}$

Nous constatons sur la figure 5 que plus le schéma **retarde** ($\beta < \frac{1}{3}$) et plus il est stable. Au contraire, plus le schéma **avance** ($\beta > \frac{1}{3}$) et plus sa zone de stabilité se restreint. Cependant, pour les cas nous intéressant, prendre $\nu = 1$ laisse toujours stable toutes les configurations quelque soit la direction d'advection θ prise. En conséquence, $\nu = 1$ est la valeur du nombre de Courant que nous prendrons tant pour le modèle advectif que pour celui du système des équations d'Euler.

Rappelons enfin que la figure 5 est représentative de la stabilité du schéma à maillage quadrangulaire comme celui à maillage triangulaire.

6.3 Résultats du modèle linéaire

Avec ces configurations des paramètres β et γ , reprenons la condition initiale (46) et examinons sur la figure 6 les modifications dispersives et dissipatives du schéma " $\beta\gamma$ " quadrangulaire après un parcours de $100\sqrt{2}$ dans la direction $\theta = \frac{\pi}{4}$ à la vitesse $c = 1$. Nous reviendrons à la conclusion sur le schéma triangulaire.

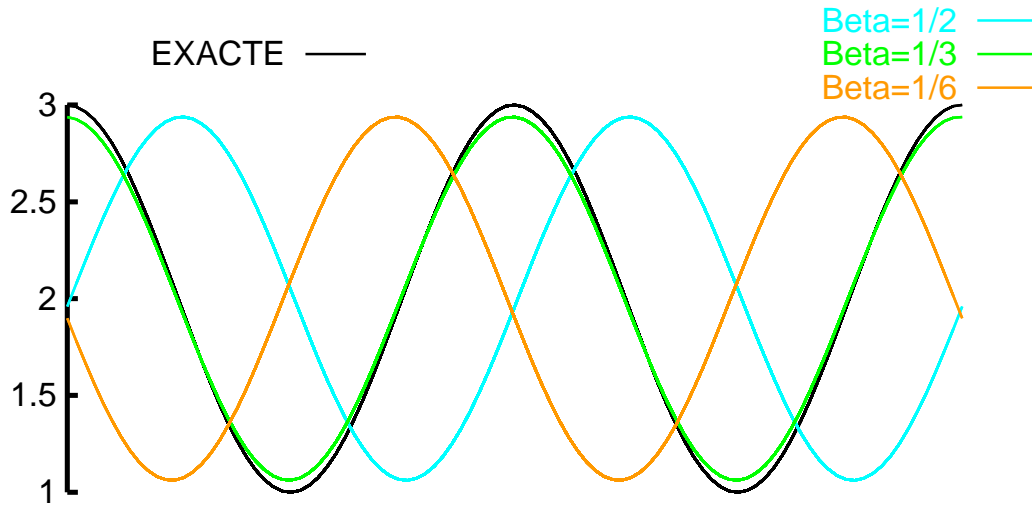


FIG. 6 – Effets dispersifs et dissipatifs linéaires des configurations.

Nous constatons (sans surprise d'après l'étude menée précédemment) que nous obtenons une configuration (en bleu) avec une erreur dispersive de type avance, une configuration (en orange) avec une erreur dispersive de type retard et une configuration (en vert) avec une erreur dispersive d'ordre 2 nulle. Notons que le retard et l'avance sont quantitativement identiques.

Pour ce qui est de l'erreur dissipative, le fait de ne pas avoir pris un produit $\beta\gamma = 0$ engendre une erreur d'ordre 3 non nulle mais qui est **identique** pour toutes les configurations et qui reste assez modeste par rapport aux schémas classiques [7].

6.4 Résultats du modèle non linéaire

Le modèle non linéaire est bien entendu celui du système des équations d'Euler. Le problème étudié est celui du détachement tourbillonnaire bidimensionnel à l'intérieur des propulseurs à poudre d'Ariane V [3, 2].

La condition initiale commune à toutes les configurations du schéma " $\beta\gamma$ " est de prendre une densité constante ($\rho = 1$), une pression constante ($P = 100\,000$), une vitesse nulle et ce dans tout le domaine de calcul.

Un **film** [10] a été réalisé sur l'établissement des états instationnaires car, sur un maillage commun de 318×31 points, ils sont de deux types... L'un de ces états est une réponse acoustique à une fréquence d'environ 2 700 Hz alors que l'autre est une réponse à une fréquence d'environ 3 600 Hz .

Le schéma " $\beta = \frac{1}{6}, \gamma = \frac{6}{10}$ " (retard dispersif) donne la fréquence de 2 700 Hz (orange). Le schéma " $\beta = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{2}{10}$ " (avance dispersive) donne la fréquence de 3 600 Hz (bleu). Conclure ici que l'état instationnaire observé est fonction de la dispersion d'ordre 2 semble très osé et nécessite un approfondissement au moyen du schéma " $\beta = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{3}{10}$ " où la dispersion d'ordre 2 devient nulle (vert).

En fait, informatiquement, la valeur $\beta = \frac{1}{3}$ n'étant pas une valeur décimale, n'est pas programmable. En conséquence, nous avons pris deux valeurs de β infiniment voisines l'une de l'autre à 10^{-10} près:

$$\beta = 0.3333333333 \text{ et } \beta = 0.3333333334$$

Les résultats obtenus indiquent qu'il y a passage d'une fréquence à une autre pour la valeur $\beta = \frac{1}{3}$! C'est aussi la valeur où la dispersion d'ordre 2 change de signe mais aussi où le schéma " $\beta\gamma$ " devient plus précis.

Pour appuyer encore ce propos, un constat semblable à été fait dans [2] avec le schéma " $\beta\gamma$ " triangulaire où la fréquence de 2 700 Hz était apparue pour des valeurs $\beta = \frac{1}{10}, \gamma = \frac{1}{3}$ engendrant un schéma avec retard et la fréquence de 3 600 Hz pour $\beta = \frac{1}{3}, \gamma = \frac{1}{10}$ engendrant un schéma plus précis que la version précédente et de même dissipation d'ordre 3. Cependant l'histoire ne dit pas comment $\frac{1}{3}$ avait été alors informatiquement approximé.

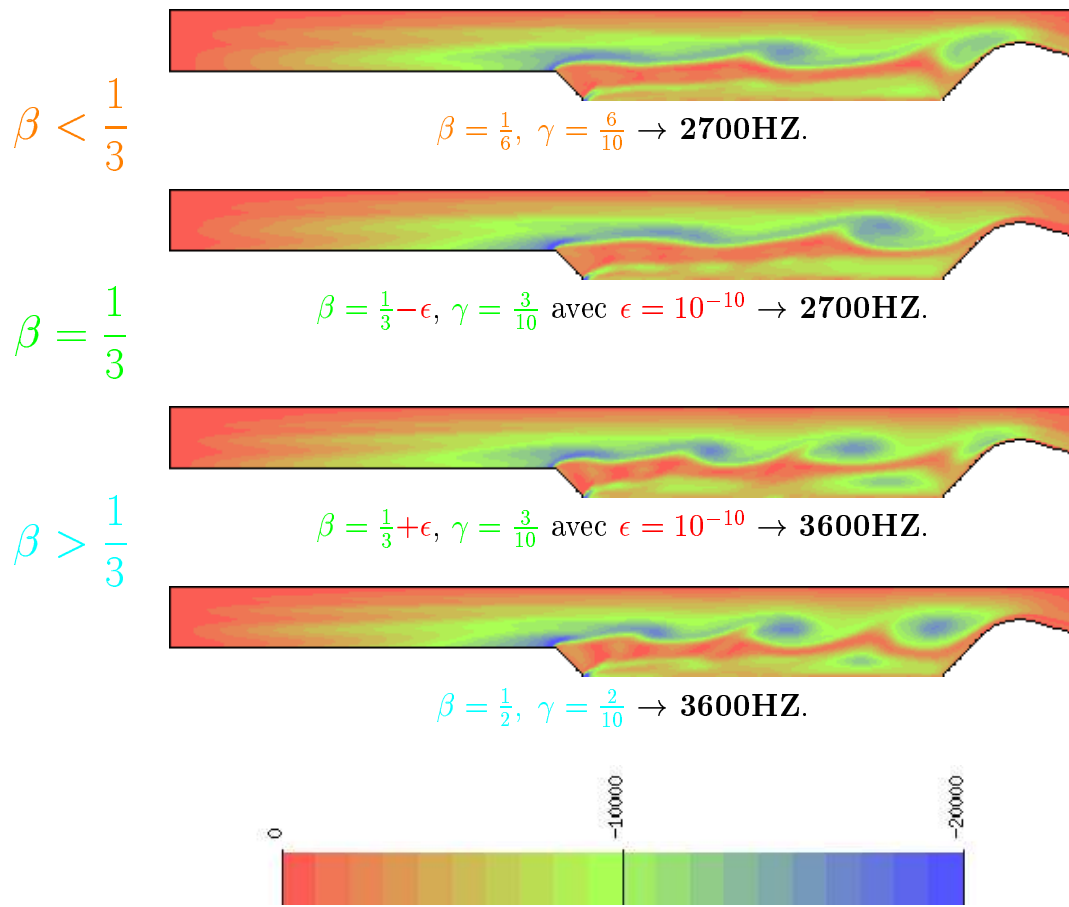
Pour confirmer l'existence de ces deux fréquences, la société BERTIN les a également obtenues au moyen du code THESEE qui, très curieusement est un schéma numérique à très faible dispersion d'ordre 2 [7].

Enfin, toujours d'après [7], le code de l'ONERA montrant linéairement une dispersion avec force retard n'a pu que donner la fréquence de 2 700 Hz alors qu'inversement les codes du CERMICS montrant linéairement une dispersion avec force avance n'ont pu que donner la fréquence de 3 600 Hz .

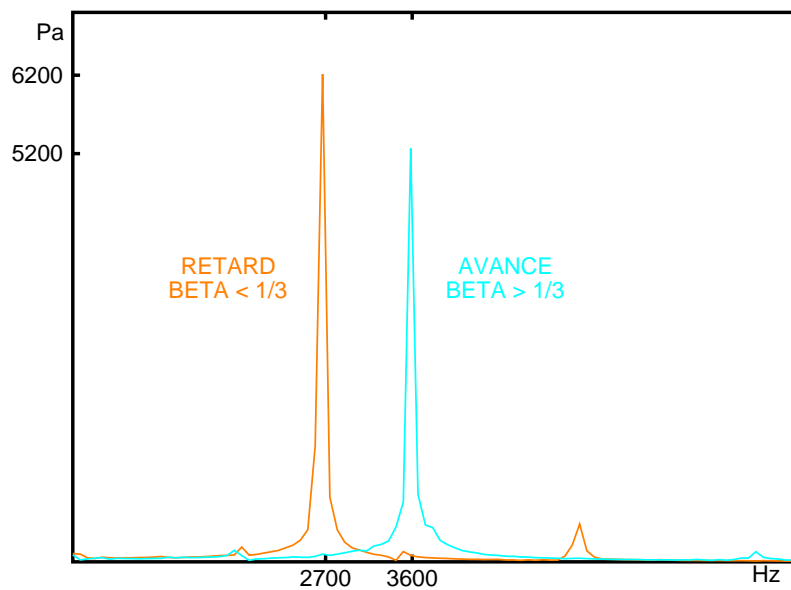
En conséquence, face à toutes ces coïncidences, nous sommes tentés de conclure que l'état instationnaire du cas test C1 dépend très fortement de la nature de l'erreur dispersive du schéma réalisant la simulation numérique.

Sur la page 31, nous montrons les solutions obtenues par le " $\beta\gamma$ " schéma quadrangulaire dans une représentation du rotationnel où l'on constate pour principale différence entre les deux solutions, la présence d'un tourbillon secondaire pariétal.

REPRESENTATION DU ROTATIONNEL



Légende des couleurs



Analyse spectrale de la pression au fond avant

6.5 Conclusions et perspectives

Les solutions instationnaires obtenues sur le système des équations d'Euler se calquent **trop bien** sur l'erreur dispersive d'ordre 2 du modèle bidimensionnel advectif. "Trop bien" dans le sens où, à la valeur $\beta = \frac{1}{3}$, l'erreur dispersive doit être alors recherchée à l'ordre 4. Or, à cet ordre, l'étude linéaire indique que la dispersion est de nature à engendrer le plus souvent un **retard** dispersif... En conséquence, nous avons "pêché" par excès de zèle en allant chercher une variation de β de l'ordre de 10^{-10} pour prouver que la valeur $\beta = \frac{1}{3}$ est la valeur frontière pour l'obtention de ces états instationnaires [10]!... Notons cependant que s'il est osé de faire un rapprochement entre les erreurs d'un modèle linéaire et non linéaire à l'ordre 2, il est encore plus douteux de le faire à l'ordre 4...

Il n'en reste pas moins vrai que cette étude permet de constater une sensibilité du cas test C1 de l'ONERA à l'égard de la dispersion linéaire d'ordre 2.

Par ailleurs, dans [3] on a montré la sensibilité de ce cas test à la dissipation linéaire d'ordre 3 allant de l'atténuation de l'amplitude de l'onde acoustique jusqu'à la disparition du phénomène de tourbillon détaché.

Enfin, dans [2] on a montré la sensibilité de ce cas test à la condition initiale prise.

En conséquence, les perspectives données à cette étude sont:

- la résolution de ce cas test sur maillage plus fin permettant l'obtention d'une solution instationnaire unique quelque soit les valeurs données aux paramètres β et γ .
- le développement d'un schéma non linéaire précis à l'ordre 4 pour valider une telle solution.

Références

- [1] "Fonctionnement des moteurs à propergol solide segmentés pour lanceurs spatiaux", Colloque CNES-ONERA, 8 et 9 décembre 1992.
- [2] R. CARPENTIER, "Approximation et analyse numérique d'écoulements instationnaires. - Application à des instabilités tourbillonnaires.", Thèse, Université de Nice Sophia Antipolis, 1995.
- [3] R. CARPENTIER, "Comparaison entre des schémas 2D de type Roe sur maillage régulier triangle ou quadrangle. I: calcul au sommet - pentes centrées", Rapport INRIA 2824, 1996.
- [4] P. L. ROE, "Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes", J. Comp. Phys., **43**, pp. 357-372, 1981.
- [5] B. VAN LEER, "Towards the ultimate conservative difference scheme: III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow", J. Comp. Phys., **23**, pp. 263-275, 1977.
- [6] L. FEZOU, "Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis", Rapport INRIA 358, 1985.
- [7] R. CARPENTIER, "Analyse des erreurs dispersives et dissipatives de quelques schémas advectifs modernes. Application à l'aéro-acoustique", Rapport INRIA 3253, 1997
- [8] R. CARPENTIER, A. de LA BOURDONNAYE & B. LARROUTUROU, "Sur le calcul des équations équivalentes pour l'analyse des méthodes numériques linéaires", C.R. Acad. Sci. Paris, t.319, Série I, p. 757-760, 1994.
- [9] R. CARPENTIER, A. de LA BOURDONNAYE & B. LARROUTUROU, "On the derivation of the modified equation for the analysis of linear numerical methods", M2AN, Vol.31, n° 4, 1997, p.459 à 470.
- [10] R. CARPENTIER, "Le schéma $\beta\gamma$ quadrangle", INRIA audiovisuel & hypermédia, UCIS 97, film en Français PAL 8mn.
<http://www.inria.fr/UCIS-AV+H/Videotheque/0-Fiches-Videos/374-fra.html>.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399