



**HAL**  
open science

## Simulation numérique de structures poly-articulées

Henri Chajmowicz

► **To cite this version:**

Henri Chajmowicz. Simulation numérique de structures poly-articulées. [Rapport de recherche] RR-3384, INRIA. 1998. inria-00073305

**HAL Id: inria-00073305**

**<https://inria.hal.science/inria-00073305>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Simulation numérique de structures  
poly-articulées*

Henri CHAJMOWICZ

**N° 3384**

Mars 1998

————— THÈME 4 —————



*Rapport  
de recherche*



## Simulation numérique de structures poly-articulées

Henri CHAJMOWICZ\*

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Mostra

Rapport de recherche n° 3384 — 10 Mars 1998 — 73 pages

**Résumé :** Dans un précédent rapport, nous avons exposé les aspects mathématiques et mécaniques d'une adaptation de la modélisation géométriquement exacte au cas de structures élastiques poly-articulées. On retrouve ce type de structures lorsque l'on modélise des structures spatiales, des bras manipulateurs en robotique ou des suspensions automobiles pour ne donner que quelques exemples.

Ce rapport contient les caractéristiques principales de l'outil de simulation que nous avons élaboré à partir de notre modèle mécanique. Cet outil sert à prévoir les positions d'équilibre de structures poly-articulées sous chargement connu, ainsi que leur mouvement dans le cas dynamique.

La résolution de problèmes géométriquement non-linéaires sous contraintes nous a amené à introduire des méthodes de résolution numériques particulières qui sont ici exposées en détail. Ce rapport est également illustré par de nombreux tests montrant l'efficacité de notre logiciel dans des cas statiques et dynamiques.

**Mots-clé :** Systèmes poly-articulés, modèles géométriquement exacts, structures géométriquement non-linéaires, méthodes éléments finis, contraintes linéaires et non-linéaires, simulation numérique.

*(Abstract: pto)*

\* E-mail: Henri.Chajmowicz@inria.fr

## Numerical simulation of multi-body structures

**Abstract:** In a previous report, we exposed both the the mechanical and mathematical aspects of an adaptation of the geometrically exact formalism to the case of elastic multi-body structures. Such structures appear when one has to model spatial structures, flexible robot arms or car suspensions, just to name a few examples.

This report contains the main features of the simulation tool we worked out, based on our mechanical model. This tool is used to predict the equilibrium positions of multi-body structures under a known loading, as well as their displacements in the dynamic case.

We introduced specific numerical methods, in order to solve geometrically non-linear problems under constraints. We also describe those methods in detail.

This report is illustrated with numerous tests, showing the efficiency of our software both for static and dynamic cases.

**Key-words:** Multi-body systems, geometrically exact models, geometrically non-linear structures, finite elements methods, linear and non-linear constraints, numerical simulation.

## Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                      | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>Modélisation géométriquement exacte</b>               | <b>5</b>  |
| 2.1      | Modèle mécanique général . . . . .                       | 9         |
| 2.1.1    | Conditions aux limites et contraintes . . . . .          | 9         |
| 2.1.2    | Configurations admissibles . . . . .                     | 12        |
| 2.1.3    | Formulation variationnelle . . . . .                     | 14        |
| 2.2      | Modèle inextensible . . . . .                            | 14        |
| 2.2.1    | Configurations admissibles . . . . .                     | 14        |
| 2.2.2    | Formulation variationnelle . . . . .                     | 16        |
| <b>3</b> | <b>Cas statique</b>                                      | <b>17</b> |
| 3.1      | Résolution numérique pour le cas inextensible . . . . .  | 17        |
| 3.1.1    | Approximation par éléments finis . . . . .               | 17        |
| 3.1.2    | Linéarisation de la formulation variationnelle . . . . . | 19        |
| 3.1.3    | Résolution du problème linéarisé . . . . .               | 24        |
| 3.2      | Tests numériques . . . . .                               | 32        |
| 3.2.1    | Cas sans raccord . . . . .                               | 32        |
| 3.2.2    | Cas avec raccord . . . . .                               | 43        |
| <b>4</b> | <b>Cas dynamique</b>                                     | <b>54</b> |
| 4.1      | Modèle mécanique . . . . .                               | 54        |
| 4.2      | Configurations admissibles . . . . .                     | 54        |
| 4.2.1    | Conditions aux limites et contraintes . . . . .          | 54        |
| 4.2.2    | Conditions initiales . . . . .                           | 55        |
| 4.3      | Formulation variationnelle . . . . .                     | 56        |
| 4.3.1    | Cadre fonctionnel . . . . .                              | 56        |
| 4.3.2    | Formulation variationnelle . . . . .                     | 57        |
| 4.3.3    | Discrétisation en temps . . . . .                        | 57        |
| 4.4      | Résolution numérique pour le cas inextensible . . . . .  | 60        |
| 4.4.1    | Cas sans raccord : Poutre en rotation . . . . .          | 60        |
| 4.4.2    | Poutres en flexion . . . . .                             | 61        |
| <b>5</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>71</b> |

## 1 Introduction

Un bras *souple* est un système de corps flexibles (maillons) reliés par des articulations permettant divers types de mouvements relatifs, qui sont des mouvements de corps rigides non infinitésimaux, mais d'amplitudes généralement limitées par des butées mécaniques.

Ce type de système intervient dans l'étude des structures spatiales déployables, des satellites, des pales d'hélicoptères ou des bras manipulateurs de robots. Une autre domaine d'application important est l'industrie automobile où l'on cherche à mieux modéliser le comportement des composants des suspensions et des boîtes de vitesse, en prenant en compte leur flexibilité.

Nous avons choisi, pour représenter les maillons, une modélisation mécanique de type barre, se ramenant à un modèle mathématique **unidimensionnel** de poutre évoluant dans un espace tridimensionnel. Pour des raisons d'efficacité et d'adaptation au problème physique posé, nous avons retenu, et adapté, une description géométriquement exacte (**Simo** [1985], **Mani** [1987], **Chajmowicz** [1996]). Cette modélisation prend en compte *sans approximation* tous les types de déformations élastiques, y compris le cisaillement transverse et la torsion.

Sur la base de cette modélisation, nous présentons dans ce rapport un outil logiciel permettant le calcul de la position (cas statique) ou de la trajectoire (cas dynamique) d'un bras souple *inextensible* soumis à un chargement connu.

L'organisation de ce rapport est la suivante : la section 2 est consacrée à un rappel du formalisme géométriquement exact pour une chaîne de poutres en grands déplacements, portant une charge utile à son extrémité. Nous introduisons également dans cette section, la notion de contrainte d'inextensibilité et la description du modèle de jonction utilisé. Cette section comprend enfin la formulation variationnelle du problème d'équilibre de la structure (cas statique).

Nous détaillons dans la section 3 la discrétisation de la formulation variationnelle donnée à la section 2. Nous donnons la description de l'algorithme de résolution proprement dit et exposons des cas-tests statiques.

## 2 Modélisation géométriquement exacte

**Remarque préliminaire** : nous considérons, dans tout ce qui suit, une chaîne ouverte composée de  $nt$  maillons, le maillon numéro 1 étant supposé solidaire d'un support rigide.

### Configuration de référence de la barre $i$

Nous nous donnons une configuration de référence, physique, dans laquelle chacune des barres associées aux poutres de la chaîne est considérée comme un cylindre droit, d'axe moyen constituée par la poutre associée, supposée *rectiligne* en configuration de référence.

La configuration de référence est identifiée avec la configuration initiale dans le cas dynamique.

Nous associons à la barre  $i$  la base principale d'inertie  $\{e^i\} = (\underline{e}_1^i, \underline{e}_2^i, \underline{e}_3^i)$ , le vecteur  $\underline{e}_3^i$  étant choisi de façon à orienter la poutre  $i$  en configuration de référence. Le point de contact  $O_i$  entre la poutre  $i$  et la poutre  $i - 1$  est choisi comme origine du repère principal d'inertie  $[O_i, \{e^i\}]$  de la barre  $i$ .

### Domaine de référence associé à la barre $i$

$$\Omega_i = \{({}^iX_1, {}^iX_2, {}^is), 0 \leq s \leq l_i, ({}^iX_1, {}^iX_2) \in \mathcal{S}_i({}^is)\}$$

où  ${}^is$  désigne l'abscisse curviligne sur la poutre  $i$ ,  $l_i$  sa longueur de référence,  $\mathcal{S}_i({}^is)$  sa section droite à l'abscisse  ${}^is$ , en configuration de référence.

### Modèle de la configuration déformée de la barre $i$

$${}^i\mathbf{x}({}^iX_1, {}^iX_2, {}^is) = {}^i\mathbf{r}({}^is) + {}^iX_1 {}^i\mathbf{d}_1({}^is) + {}^iX_2 {}^i\mathbf{d}_2({}^is) \quad \forall ({}^iX_1, {}^iX_2, {}^is) \in \Omega_i$$

Cette représentation permet la prise en compte de l'allongement et des flexions de la barre  $i$ , ainsi que des cisaillements transverses et de la torsion, mais n'autorise pas les déformations *dans le plan* des sections droites.

Suivant **Bourgat, Le Tallec & Mani** [1988], les mesures de déformations suivantes sont introduites :

$${}^iu_j = \frac{1}{2} e_{[j,k,l]} {}^i\mathbf{d}'_k \cdot {}^i\mathbf{d}_l \quad (1)$$

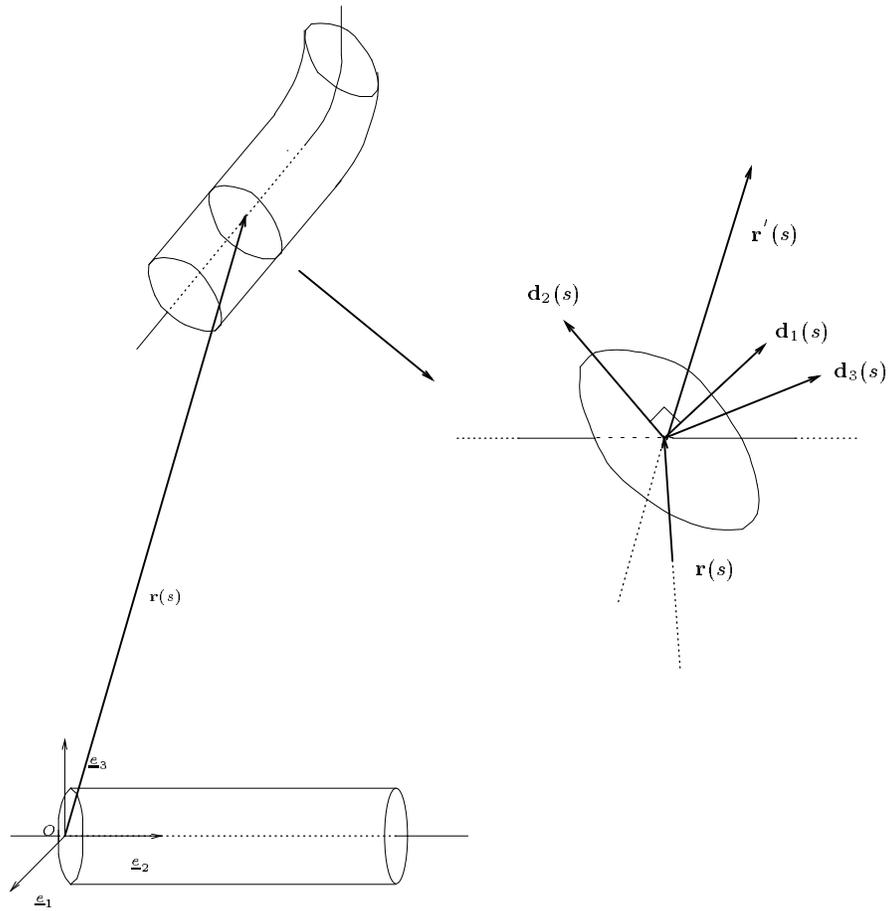


FIG. 1 – Configurations et repères

et :

$${}^i v_k = {}^i \mathbf{r}' \cdot {}^i \mathbf{d}_k \quad (2)$$

où  $e_{[j,k,l]}$  est la signature de la permutation qui envoie  $[1, 2, 3]$  sur  $[j, k, l]$  et où  $'$  désigne la dérivation par rapport à  ${}^i s$ .

L'interprétation mécanique de ces quantités est la suivante : dans la base locale  $\{{}^i \mathbf{d}\}$ , les quantités  ${}^i u_1$  et  ${}^i u_2$  mesurent la flexion,  ${}^i u_3$  la torsion,  ${}^i v_1$  et  ${}^i v_2$  le cisaillement et  ${}^i v_3$  l'allongement de la fibre moyenne.

**Loi de comportement (Simo [1985]) de la barre  $i$  :**

$$\begin{cases} {}^i \mathbf{m}({}^i s, t) = \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i u_l}({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k, t) {}^i \mathbf{d}_l({}^i s, t) \\ {}^i \mathbf{n}({}^i s) = \frac{\partial {}^i w^e}{\partial {}^i v_l}({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k, t) {}^i \mathbf{d}_l({}^i s, t) \end{cases} \quad (3)$$

Mécaniquement, la quantité  ${}^i \mathbf{n}$  s'interprète comme une densité d'*efforts* intérieurs, la quantité  ${}^i \mathbf{m}$  comme une densité de *moments* intérieurs.

**Quantités mécaniques et géométriques utiles :**

- ${}^i \mathbf{E}, {}^i \mathbf{G}$  : module d'Young et module de cisaillement de la barre  $i$  ;
- ${}^i \mathbf{f}({}^i s)$  : densité linéique d'efforts extérieurs exercés sur la barre  $i$  ;
- $\mathcal{F}$  : force appliquée à l'extrémité du dernier maillon de la chaîne.

$$\begin{aligned} {}^i \mathbf{S} &= \int_{\mathcal{S}_i({}^i s)} d {}^i X_1 d {}^i X_2, \\ {}^i \mathbf{I}_1 &= \int_{\mathcal{S}_i({}^i s)} ({}^i X_2)^2 d {}^i X_1 d {}^i X_2, \\ {}^i \mathbf{I}_2 &= \int_{\mathcal{S}_i({}^i s)} ({}^i X_1)^2 d {}^i X_1 d {}^i X_2, \end{aligned}$$

Nous nous restreignons au cas de barres à sections *transversalement isotropes et indépendantes de l'abscisse curviligne* et nous adoptons, pour la densité linéique d'énergie de déformation, l'expression suivante :

$${}^i w^e = \frac{{}^i \mathbf{G}^i \mathbf{S}}{2} ({}^i v_1^2 + {}^i v_2^2) + \frac{{}^i \mathbf{E}^i \mathbf{S}}{2} ({}^i v_3 - 1)^2 + \frac{{}^i \mathbf{E}^i \mathbf{I}}{2} ({}^i u_1^2 + {}^i u_2^2) + {}^i \mathbf{G}^i \mathbf{I}^i u_3^2 \quad (4)$$

où  ${}^i \mathbf{I}$  est la valeur commune de  ${}^i \mathbf{I}_1$  et de  ${}^i \mathbf{I}_2$ , supposée indépendante de  ${}^i s$ .

### Modèle de jonction pivot

Les articulations de la chaîne transmettent intégralement les déplacements, ainsi que les efforts et moments intérieurs.

L'axe de l'articulation, de vecteur directeur  $\mathbf{u}_i$  est tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= {}^i \mathbf{d}_{0j_i}(0) \\ &= \varepsilon_i {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}j_{i-1}}(l_{i-1}). \end{aligned}$$

où  $\varepsilon_i$  appartient à  $\{-1; +1\}$ .

Les indices  $({}^0 k_i, {}^0 l_i)$  sont tels que la famille :

$$\{{}^i \mathbf{d}_{0j_i}(0), {}^i \mathbf{d}_{0k_i}(0), {}^i \mathbf{d}_{0l_i}(0)\}$$

constitue une base orthonormée *directe*. Les indices  $({}^{l_{i-1}} k_{i-1}, {}^{l_{i-1}} l_i)$  sont tels que la famille

$$\{{}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}j_{i-1}}(l_{i-1}), {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}), {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}l_i}(l_{i-1})\}$$

constitue une base orthonormée *directe*.

Le mouvement relatif entre les poutres  $i$  et  $i - 1$  ayant lieu **dans le plan commun aux quatre vecteurs**

$$\{{}^i \mathbf{d}_{0k_i}(0), {}^i \mathbf{d}_{0l_i}(0), {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}), {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}l_i}(l_{i-1})\}$$

il est légitime de considérer l'expression suivante pour le moment qui s'exerce à l'articulation de la barre  $i - 1$  et de la barre  $i$  :

$$\mathcal{M} = -\kappa_{i-1} \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{B}_i, \quad (5)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &= (\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0l_i}(0)), \\ \mathcal{B}_i &= (\cos({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1l_{i-1}}(l_{i-1})). \end{aligned}$$

Le réel  $\kappa_{i-1}$  est strictement positif. Les deux réels  ${}^0\theta_i$  et  ${}^{i-1}\theta_{i-1}$  sont choisis de façon à annuler le moment articulaire en configuration de référence. Nous illustrons ci-après notre construction par un exemple (Figures 2 et 3).

## 2.1 Modèle mécanique général

### Équations d'équilibre de la poutre $i$

$$\begin{cases} {}^i\mathbf{m}'(s) + {}^i\mathbf{r}'(s) \wedge {}^i\mathbf{n}(s) = 0 \\ {}^i\mathbf{n}'(s) + {}^i\mathbf{f}(s) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

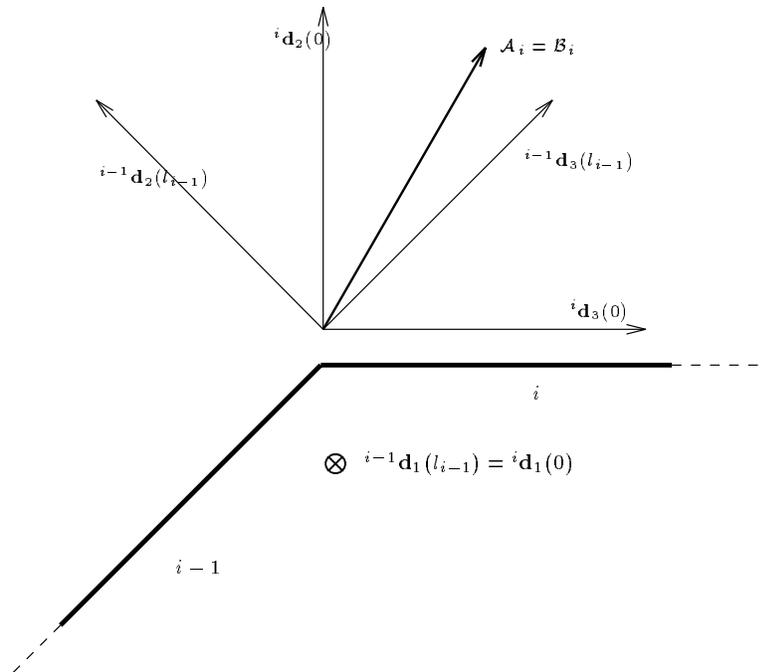
Ces équations sont à résoudre sur l'espace des **configurations admissibles du système**, que nous allons détailler dans ce qui suit.

#### 2.1.1 Conditions aux limites et contraintes

Dans le cas où la première poutre de la chaîne est encastée dans un support rigide fixe, nous avons les conditions :

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{r}(0) &= 0, \\ {}^1\mathbf{d}_j(0) &= \mathbf{d}_j^0 \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (7)$$

où  $(\mathbf{d}_1^0, \mathbf{d}_2^0, \mathbf{d}_3^0)$  est une base orthonormée fixe.

FIG. 2 – *Configuration de référence*

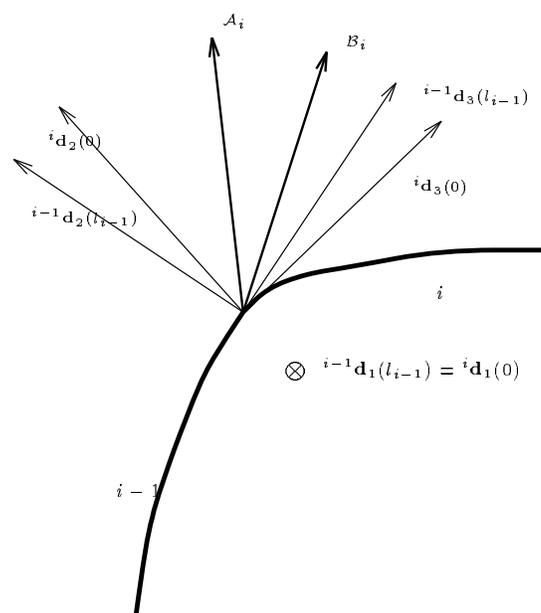


FIG. 3 – Configuration déformée

Dans le cas où il existe une liaison pivot, entre la première poutre de la chaîne et un support rigide fixe, nous supposons que l'un des vecteurs  $\{^1\mathbf{d}_j(0)\}_{j=1,\dots,3}$  se confond avec un des vecteurs directeurs normés, noté  $\mathbf{u}_0$ , de l'axe de cette liaison. Nous écrivons donc :

$$\begin{aligned} ^1\mathbf{r}(0) &= 0, \\ ^1\mathbf{d}_{j_0}(0) &= \mathbf{u}_0, \\ ^1\mathbf{m}(0) \cdot ^1\mathbf{d}_{j_0}(0) &= 0, \quad \text{pour un } j_0 \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Nous avons également des conditions de compatibilité des champs d'efforts et de moments internes avec le chargement extérieur :

$$\begin{cases} {}^{nt}\mathbf{n}(l_{nt}) = \mathcal{F}, \\ {}^{nt}\mathbf{m}(l_{nt}) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Enfin, l'orthonormalité des vecteurs  $\{^i\mathbf{d}_j\}_{j=1,\dots,3}$ , se traduit par les contraintes :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, nt \quad ^i\mathbf{d}_j \cdot ^i\mathbf{d}_k &= \delta_j^k \\ (^i\mathbf{d}_1 \wedge ^i\mathbf{d}_2) \cdot ^i\mathbf{d}_3 &> 0 \end{aligned} \tag{10}$$

### 2.1.2 Configurations admissibles

Soient les espaces :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i &= H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3), \\ \mathcal{H} &= \prod_{i=1}^{nt} \mathcal{H}_i^4, \\ \mathcal{H}_{3,i} &= H^1(0, l_i; \mathbb{R}^{3 \times 3}) \end{aligned} \tag{11}$$

L'espace des **configurations** admissibles s'identifie à :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & \{ \{ {}^i \mathbf{r}, \{ {}^i \mathbf{d}_j \}_{j=1,2,3} \}_{i=1,\dots,nt} = ({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1 \mathbf{r}(0) = 0 \text{ et } {}^i \mathbf{r}(l_i) = {}^{i+1} \mathbf{r}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1 \mathbf{d}_j(0) = \mathbf{d}_j^0 \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (7) est imposé ;} \\ & {}^1 \mathbf{d}_{j_0}(0) = \mathbf{u}_0 \text{ si (8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad {}^i \mathbf{d}_{0_{j_i}}(0) = \varepsilon_i {}^{i-1} \mathbf{d}_{i-1_{j_{i-1}}}(l_{i-1}) ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad {}^i \mathbf{d}_j \cdot {}^i \mathbf{d}_k = \delta_j^k ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad ({}^i \mathbf{d}_1 \wedge {}^i \mathbf{d}_2) \cdot {}^i \mathbf{d}_3 > 0 \} \end{aligned}$$

Nous envisageons de plus les espaces de **variations admissibles**  $\delta\mathcal{K}(({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j))$  donnés par :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{K}(({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j)) = & \{ ({}^i \mathbf{p}, {}^i \mathbf{g}_j) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1 \mathbf{p}(0) = 0 \text{ et } {}^i \mathbf{p}(l_i) = {}^{i+1} \mathbf{p}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1 \mathbf{g}_j(0) = 0 \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (7) est imposé ;} \\ & {}^1 \mathbf{g}_{j_0}(0) = 0 \text{ si (8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad {}^i \mathbf{g}_{0_{j_i}}(0) = \varepsilon_i {}^{i-1} \mathbf{g}_{i-1_{j_{i-1}}}(l_{i-1}) \} \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad \exists \mathcal{U}_i \in \mathcal{H}_i \text{ tel que : } {}^i \mathbf{g}_j = \mathcal{U}_i \wedge {}^i \mathbf{d}_j \forall j \in \{1, 2, 3\} \} \end{aligned}$$

**Remarque** : Géométriquement  $\delta\mathcal{K}(({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j))$  s'interprète comme l'espace tangent à  $\mathcal{K}$  au point  $({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j)$ .

□

### 2.1.3 Formulation variationnelle

On montre que les équations d'équilibre (6) sont équivalentes au problème variationnel  $[\mathcal{P}]$ :

Trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}$  tel que:  $\forall ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \delta\mathcal{K}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j))$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j))}{\partial ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) &+ \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} &\{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0l_i}(0)\} \\ &\cdot \{\cos({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{i-1k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{i-1l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &+ \{\cos({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &\cdot \{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{0l_i}(0)\} \end{aligned} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{p} d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt}) \end{aligned}$$

où l'on a posé:

$$\mathcal{J}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) d^i s$$

la densité  ${}^i w^e$  étant définie par (4).

**Remarque** : Ce problème variationnel possède au moins une solution si les forces extérieures  ${}^i\mathbf{f}$  et  $\mathcal{F}$  sont indépendantes de la configuration courante du système.

□

## 2.2 Modèle inextensible

### 2.2.1 Configurations admissibles

Nous avons par définition des mesures de déformation :

$${}^i v_k = {}^i \mathbf{r}' \cdot {}^i \mathbf{d}_k.$$

Les cisaillements sont mesurés par  ${}^i v_1$  et  ${}^i v_2$ , l'allongement par  ${}^i v_3 - 1$ .

En introduisant dans la définition de l'espace des configurations admissibles  $\mathcal{K}$ , la contrainte d'*inextensibilité*:

$${}^i \mathbf{r}' = {}^i \mathbf{d}_3 \quad (12)$$

on se restreint donc aux déformations sans cisaillement, ni allongement.

Nous définissons l'espace fonctionnel :

$$\mathcal{H}^{in} = \prod_{i=1}^{nt} H^2(0, l_i; \mathbb{R}^3) \times [H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3)]^3$$

Notre nouvel espace des configurations admissibles est alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{in} = & \{({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j) \in \mathcal{H}^{in} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1 \mathbf{r}(0) = 0 \text{ et } {}^i \mathbf{r}(l_i) = {}^{i+1} \mathbf{r}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1 \mathbf{d}_j(0) = \mathbf{d}_j^0 \quad j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (7) est imposé ;} \\ & {}^1 \mathbf{d}_{j_0}(0) = \mathbf{u}_0 \text{ si (8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad {}^i \mathbf{d}_{0_{j_i}}(0) = \varepsilon_i {}^{i-1} \mathbf{d}_{i-1_{j_{i-1}}}(l_{i-1}) ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad {}^i \mathbf{d}_j \cdot {}^i \mathbf{d}_k = \delta_j^k ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad ({}^i \mathbf{d}_1 \wedge {}^i \mathbf{d}_2) \cdot {}^i \mathbf{d}_3 > 0 ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad {}^i \mathbf{r}' = {}^i \mathbf{d}_3 \} \end{aligned}$$

ainsi que les espaces de variations admissibles :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{K}^{in}({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j) = & \{({}^i \mathbf{p}, {}^i \mathbf{g}_j) \in \mathcal{H}^{in} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1 \mathbf{p}(0) = 0 \text{ et } {}^i \mathbf{p}(l_i) = {}^{i+1} \mathbf{p}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1 \mathbf{g}_j(0) = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (7) est imposé ;} \\ & {}^1 \mathbf{g}_{j_0}(0) = 0 \text{ si (8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad {}^i \mathbf{g}_{0_{j_i}}(0) = \varepsilon_i {}^{i-1} \mathbf{g}_{i-1_{j_{i-1}}}(l_{i-1}) \} \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad \exists \mathcal{U}_i \in \mathcal{H}_i \text{ tel que : } {}^i \mathbf{g}_j = \mathcal{U}_i \wedge {}^i \mathbf{d}_j \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad {}^i \mathbf{p}' = {}^i \mathbf{g}_3 \} \end{aligned}$$

### 2.2.2 Formulation variationnelle

Nous particularisons le problème variationnel  $[\mathcal{P}]$  afin de rechercher des solutions des équations d'équilibre (6) vérifiant de plus la condition d'inextensibilité (12). Nous cherchons donc à résoudre le problème variationnel  $[\mathcal{P}]^{in}$  :

Trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}^{in}$  tel que :  $\forall ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \delta\mathcal{K}^{in}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)}{\partial ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) &+ \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} &\{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0l_i}(0)\} \\ &\cdot \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{i-1k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{i-1l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &+ \{\cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &\cdot \{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{0l_i}(0)\} \end{aligned} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{p} d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt}) \end{aligned}$$

Dans ce qui précède, on a posé :

$$\mathcal{J}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) d^i s \quad (13)$$

ainsi que :

$${}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) = \frac{{}^i\mathbf{E}^i\mathbf{I}}{2} ({}^i u_1^2 + {}^i u_2^2) + {}^i\mathbf{G}^i\mathbf{I} {}^i u_3^2$$

On remarque que pour tout élément  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  de  $\mathcal{K}^{in}$ , on peut écrire :

$${}^i w^e({}^i s, {}^i u_j, {}^i v_k) = \frac{({}^i\mathbf{E} - {}^i\mathbf{G})^i\mathbf{I}}{2} \|\mathbf{r}''\|^2 + \frac{{}^i\mathbf{G}^i\mathbf{I}}{2} (\|\mathbf{d}'_1\|^2 + \|\mathbf{d}'_2\|^2) \quad (14)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme usuelle dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Le problème variationnel  $[\mathcal{P}]^{in}$  possède au moins une solution si les forces extérieures sont indépendantes de la configuration courante.**

### 3 Cas statique

#### 3.1 Résolution numérique pour le cas inextensible

##### 3.1.1 Approximation par éléments finis

D'après l'expression (14), l'énergie de déformation est quadratique **dans les variables de déformation**  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$ . Le problème variationnel  $[\mathcal{P}]^{in}$  est un problème *linéaire*, d'ordre 2 dans les variables  $\{{}^i\mathbf{r}\}_{\{i=1,\dots,nt\}}$  et d'ordre 1 dans les variables  $\{{}^i\mathbf{d}_j\}_{\{i=1,\dots,nt; j=1,2,3\}}$ .

En conséquence, nous choisissons une interpolation  $P_1$  pour les variables  $\{{}^i\mathbf{d}_j\}_{\{i=1,\dots,nt; j=1,2,3\}}$  et  $P_3$  pour les variables  $\{{}^i\mathbf{r}\}_{\{i=1,\dots,nt\}}$ . Plus précisément, on définit un ensemble de partitions *régulières* des  $nt$  poutres de la chaîne :

$$\bigcup_{j=1}^{M^i} [a_{j-1}^i, a_j^i] \quad i = 1, \dots, nt$$

où les points  $a_0^i$  et  $a_{M^i}^i$  ont pour abscisses respectives 0 et  $l_i$  sur la poutre  $i$ .

Pour chacune de ces partitions, on définit des espaces  $U_{h^1}^i$  et  $U_{h^3}^i$  d'éléments finis par :

- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h^1}^i$  appartiennent à  $P_1([a_{j-1}^i, a_j^i])$  ;
- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h^1}^i$  sont déterminées par leurs valeurs en  $a_{j-1}^i$  et  $a_j^i$  ;
- $U_{h^1}^i \subset C^0([0, l_i])$  ;

et :

- sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h^3}^i$  appartiennent à  $P_3([a_{j-1}^i, a_j^i])$  ;
- Sur chaque intervalle  $[a_{j-1}^i, a_j^i]$ , les fonctions de  $U_{h^3}^i$  sont déterminées par leurs valeurs en  $a_{j-1}^i$  et  $a_j^i$  et celles de leurs dérivées premières en ces points ;
- $U_{h^3}^i \subset C^1([0, l_i])$ .

Nous notons  $\{\mathbf{M}_i\}$  l'ensemble des points  $\{a_j^i\}_{\{j=1,\dots,M^i\}}$  et nous définissons les espaces d'approximation  $\mathcal{K}_h^{in}$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_h^{in} = & \{ \{ \mathbf{r}^h, \{ \mathbf{d}_j^h \}_{j=1,2,3} \}_{i=1,\dots,nt} = ({}^i \mathbf{r}^h, {}^i \mathbf{d}_j^h) \in \prod_{i=1}^{nt} \{U_{h^3}^i\}^3 \times \{U_{h^1}^i\}^9 \text{ tel que :} \\ & {}^1 \mathbf{r}^h(0) = \mathbf{0} \text{ et } {}^i \mathbf{r}^h(l_i) = {}^{i+1} \mathbf{r}^h(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1 \mathbf{d}_j^h(0) = \mathbf{d}_j^0 \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (7) est imposé ;} \\ & {}^1 \mathbf{d}_{j_0}^h(0) = \mathbf{u}_0 \text{ si (8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad {}^i \mathbf{d}_{0_{j_i}}^h(0) = \varepsilon_i {}^{i-1} \mathbf{d}_{i-1_{j_{i-1}}}^h(l_{i-1}) ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2, \forall M \in \{\mathbf{M}_i\} \quad {}^i \mathbf{d}_j^h(M) \cdot {}^i \mathbf{d}_k^h(M) = \delta_j^k ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall M \in \{\mathbf{M}_i\} \quad ({}^i \mathbf{d}_1^h(M) \wedge {}^i \mathbf{d}_2^h(M)) \cdot {}^i \mathbf{d}_3^h(M) > 0 ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall M \in \{\mathbf{M}_i\} \quad [{}^i \mathbf{r}^h]'(M) = {}^i \mathbf{d}_3^h(M) \} \end{aligned}$$

et  $\bar{\mathbf{H}}_h^{in}$  par :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}_h^{in} (({}^i \mathbf{r}^h, {}^i \mathbf{d}_j^h)) = & \{ ({}^i \mathbf{p}^h, \mathcal{U}_i^h)_{i=1\dots nt} = (\mathbf{p}^h, \mathcal{U}^h) \in \prod_{i=1}^{nt} \{U_{h^3}^i\}^3 \times \{U_{h^1}^i\}^3 \\ & \text{vérifiant les conditions :} \\ & {}^1 \mathbf{p}^h(0) = \mathbf{0} \text{ et } {}^i \mathbf{p}^h(l_i) = {}^{i+1} \mathbf{p}^h(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & \mathcal{U}_1^h(0) = \mathbf{0} \text{ si (7) est imposé ;} \\ & \mathcal{U}_1^h(0) \wedge {}^1 \mathbf{d}_{j_0}^h(0) = \mathbf{0} \text{ si (8) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad \mathcal{U}_i^h(0) \wedge {}^i \mathbf{d}_{0_{j_i}}^h(0) = \varepsilon_i \mathcal{U}_{i-1}^h(l_{i-1}) \wedge {}^{i-1} \mathbf{d}_{i-1_{j_{i-1}}}^h(l_{i-1}) \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad \forall M \in \{\mathbf{M}_i\} \quad [{}^i \mathbf{p}^h]'(M) = \mathcal{U}_i^h(M) \wedge {}^i \mathbf{d}_3^h(M) \} \end{aligned}$$

ainsi que l'espace tangent  $\delta \mathcal{K}_h^{in}(({}^i \mathbf{r}^h, {}^i \mathbf{d}_j^h))$  :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{K}_h^{in}(({}^i \mathbf{r}^h, {}^i \mathbf{d}_j^h)) = & \{ ({}^i \mathbf{p}^h, {}^i \mathbf{g}_j^h) \in \prod_{i=1}^{nt} \{U_{h^3}^i\}^3 \times \{U_{h^1}^i\}^9 \text{ vérifiant :} \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad \forall M \in \{\mathbf{M}_i\} \quad {}^i \mathbf{g}_j^h(M) = \mathcal{U}_i^h(M) \wedge {}^i \mathbf{d}_j^h(M) \forall j \in \{1, 2, 3\} ; \} \end{aligned}$$

**Remarque :** Nous choisissons d'imposer toutes les contraintes (inextensibilité, orthonormation) *en chaque nœud du maillage*.

□

### 3.1.2 Linéarisation de la formulation variationnelle

Nous revenons, dans cette section, à la formulation variationnelle du problème continu.

Soit  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  un point de  $\mathcal{K}^{in}$  et soit l'espace fonctionnel :

$$\bar{\mathbf{H}}^{in}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) = \{({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)_{i=1\dots nt} = (\mathbf{p}, \mathcal{U}) \in \prod_{i=1}^{nt} H^2(0, l_i; \mathbb{R}^3) \times H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3)\}$$

vérifiant les conditions :

$${}^1\mathbf{p}(0) = 0 \text{ et } {}^i\mathbf{p}(l_i) = {}^{i+1}\mathbf{p}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ;$$

$$\mathcal{U}_1(0) = 0 \text{ si (7) est imposé ;}$$

$$\mathcal{U}_1(0) \wedge {}^1\mathbf{d}_{j_0}(0) = 0 \text{ si (8) est imposé ;}$$

$$\forall i \in \{2, \dots, nt\} \mathcal{U}_i(0) \wedge {}^i\mathbf{d}_{0j_i}(0) = \varepsilon_i \{\mathcal{U}_{i-1}(l_{i-1}) \wedge {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1j_{i-1}}(l_{i-1})\}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, nt\} {}^i\mathbf{p}' = \mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_3\}$$

L'espace tangent  $\delta\mathcal{K}^{in}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  à  $\mathcal{K}^{in}$  au point  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  est paramétré par un vecteur arbitraire  $(\mathbf{p}, \mathcal{U})$  appartenant à  $\bar{\mathbf{H}}^{in}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$ , par la formule :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{K}^{in}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) = & \{({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \mathcal{H}^{in} \text{ vérifiant :} \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} {}^i\mathbf{g}_j = \mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_j \forall j \in \{1, 2, 3\} ; \} \end{aligned}$$

En prenant en compte cette paramétrisation particulière de l'espace tangent, le problème  $[\mathcal{P}]^{in}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \text{Trouver } ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}^{in} \text{ tel que : } \forall (\mathbf{p}, \mathcal{U}) \in \bar{\mathbf{H}}^{\bar{in}} (({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) \times \bar{\mathbf{H}}^{\bar{in}} (({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) : \\
& \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ({}^i\mathbf{E} - {}^i\mathbf{G}) {}^i\mathbf{I} \cdot {}^i\mathbf{r}'' \cdot {}^i\mathbf{p}'' d^i s + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{G} {}^i\mathbf{I} \cdot {}^i\mathbf{d}'_1 \cdot [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_1]' d^i s \\
& + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{G} {}^i\mathbf{I} \cdot {}^i\mathbf{d}'_2 \cdot [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_2]' d^i s \\
& + \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} & \{ \cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0l_i}(0) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) [\mathcal{U}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1k_{i-1}}](l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) [\mathcal{U}_{i-1} \wedge {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1l_{i-1}}](l_{i-1}) \} \\ & + \{ \cos({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{l_{i-1}}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1l_{i-1}}(l_{i-1}) \} \\ & \cdot \{ \cos({}^0\theta_i) [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_{0k_i}](0) + \sin({}^0\theta_i) [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_{0l_i}](0) \} \end{aligned} \right\} = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{p} d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt})
\end{aligned} \tag{15}$$

Notons que le second membre :

$$\sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{f} \cdot {}^i\mathbf{p} d^i s + \mathcal{F} \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt}) \tag{16}$$

de l'équation (15) s'écrit également :

$$\sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{F} \cdot [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{r}'] d^i s. \tag{17}$$

où  ${}^i\mathbf{F}$  est défini par :

$${}^i\mathbf{F}(^i s) = \int_{^i s}^{l_i} {}^i\mathbf{f}(\sigma) d\sigma + {}^i\mathbf{N} = {}^i\mathbf{n}(^i s).$$

Dans la suite, nous ferons référence à l'équation (16) sous le nom de *forme symétrique* du second membre et à l'équation (17) sous le nom de *forme non symétrique*

du second membre.

Nous procédons par *linéarisation* de l'équation (15). Le principe de cette linéarisation est le suivant : nous remplaçons symboliquement, dans (15), la variable  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  appartenant à  $\mathcal{K}^{in}$ , par :  $([{}^i\mathbf{r}]_k, [{}^i\mathbf{d}_j]_k) + ({}^i\hat{\mathbf{p}}, {}^i\hat{\mathbf{g}}_j)$  où

$$\begin{cases} ([{}^i\mathbf{r}]_k, [{}^i\mathbf{d}_j]_k) \in \mathcal{K}^{in} \\ ({}^i\hat{\mathbf{p}}, {}^i\hat{\mathbf{g}}_j) \in \delta\mathcal{K}^{in}([{}^i\mathbf{r}]_k, [{}^i\mathbf{d}_j]_k) \end{cases}$$

Le terme d'énergie élastique

$$\begin{aligned} \mathbf{E}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j, ({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = & \\ \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ({}^i\mathbf{E} - {}^i\mathbf{G}) {}^i\mathbf{I} \cdot {}^i\mathbf{r}'' \cdot {}^i\mathbf{p}'' d^i s & + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{G} {}^i\mathbf{I} \cdot {}^i\mathbf{d}'_1 \cdot [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_1]' d^i s \\ & + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{G} {}^i\mathbf{I} \cdot {}^i\mathbf{d}'_2 \cdot [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{d}_2]' d^i s \end{aligned}$$

fournit alors les deux fonctionnelles :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1^k({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i) = & \\ \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ({}^i\mathbf{E} - {}^i\mathbf{G}) {}^i\mathbf{I} \cdot [{}^i\mathbf{r}]_k'' \cdot {}^i\mathbf{p}'' d^i s & + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{G} {}^i\mathbf{I} \cdot [[{}^i\mathbf{d}_1]_k]' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_1]_k]' d^i s \\ & + \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{G} {}^i\mathbf{I} \cdot [[{}^i\mathbf{d}_2]_k]' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_2]_k]' d^i s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2^k(({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i), ({}^i\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}}_i)) = & \\
\sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ({}^i\mathbf{E} - {}^i\mathbf{G}) {}^i\mathbf{I} \quad & {}^i\hat{\mathbf{p}}'' \cdot {}^i\mathbf{p}'' \, d^i s \\
+ \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{G} {}^i\mathbf{I} \quad & ([\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_1]_k]' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_1]_k]' + [\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_2]_k]' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_2]_k]') \, d^i s \\
+ \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} ({}^i\mathbf{E} - {}^i\mathbf{G}) {}^i\mathbf{I} \quad & [{}^i\mathbf{r}]_k'' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\hat{\mathbf{p}}]'] \, d^i s \\
+ \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{G} {}^i\mathbf{I} \quad & ([[{}^i\mathbf{d}_1]_k]' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge (\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_1]_k)])' + [[{}^i\mathbf{d}_2]_k]' \cdot [\mathcal{U}_i \wedge (\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_2]_k)])' \, d^i s
\end{aligned}$$

Le terme de moment ponctuel :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j), ({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = & \\
\sum_{i=1}^{nt-1} \kappa_i \left\{ \right. & \left. \begin{aligned} & \{\cos({}^0\theta_{i+1}) {}^{i+1}\mathbf{d}_{0k_{i+1}}(0) + \sin({}^0\theta_{i+1}) {}^{i+1}\mathbf{d}_{0l_{i+1}}(0)\} \\ & \cdot \{\cos({}^l_i\theta_i) [\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_{l_i k_i}]](l_i) + \sin({}^l_i\theta_i) [\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_{l_i l_i}]](l_i)\} \\ & + \{\cos({}^l_i\theta_i) [{}^i\mathbf{d}_{l_i k_i}](l_i) + \sin({}^l_i\theta_i) [{}^i\mathbf{d}_{l_i l_i}](l_i)\} \\ & \cdot \{\cos({}^0\theta_{i+1}) [\mathcal{U}_{i+1} \wedge [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0k_{i+1}}]](0) + \sin({}^0\theta_{i+1}) [\mathcal{U}_{i+1} \wedge [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0l_{i+1}}]](0)\} \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

fournit les deux fonctionnelles :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1^k(({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = & \\
\sum_{i=1}^{nt-1} \kappa_i \left\{ \right. & \left. \begin{aligned} & \{\cos({}^0\theta_{i+1}) [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0k_{i+1}}]_k(0) + \sin({}^0\theta_{i+1}) [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0l_{i+1}}]_k(0)\} \\ & \cdot \{\cos({}^l_i\theta_i) [\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_{l_i k_i}]_k](l_i) + \sin({}^l_i\theta_i) [\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_{l_i l_i}]_k](l_i)\} \\ & + \{\cos({}^l_i\theta_i) [{}^i\mathbf{d}_{l_i k_i}]_k(l_i) + \sin({}^l_i\theta_i) [{}^i\mathbf{d}_{l_i l_i}]_k(l_i)\} \\ & \cdot \{\cos({}^0\theta_{i+1}) [\mathcal{U}_{i+1} \wedge [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0k_{i+1}}]_k](0) + \sin({}^0\theta_{i+1}) [\mathcal{U}_{i+1} \wedge [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0l_{i+1}}]_k](0)\} \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_2^k(({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i), ({}^i\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}}_i)) = & \\
\sum_{i=1}^{nt-1} \kappa_i \left\{ \right. & \{ \mathcal{U}_i(l_i) - \mathcal{U}_{i+1}(0) \} \\
& \cdot \{ \cos({}^0\theta_{i+1}) \cos({}^{l_i}\theta_i) [ [\hat{\mathcal{U}}_{i+1} \wedge [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0_{k_{i+1}}}]_k ](0) \wedge [{}^i\mathbf{d}_{l_i k_i}]_k(l_i) + [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0_{k_{i+1}}}]_k(0) \wedge [\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_{l_i k_i}]_k(l_i)] \\
& + \cos({}^0\theta_{i+1}) \sin({}^{l_i}\theta_i) [ [\hat{\mathcal{U}}_{i+1} \wedge [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0_{k_{i+1}}}]_k ](0) \wedge [{}^i\mathbf{d}_{l_i l_i}]_k(l_i) + [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0_{k_{i+1}}}]_k(0) \wedge [\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_{l_i l_i}]_k(l_i)] \\
& + \sin({}^0\theta_{i+1}) \cos({}^{l_i}\theta_i) [ [\hat{\mathcal{U}}_{i+1} \wedge [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0_{l_{i+1}}}]_k ](0) \wedge [{}^i\mathbf{d}_{l_i k_i}]_k(l_i) + [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0_{l_{i+1}}}]_k(0) \wedge [\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_{l_i k_i}]_k(l_i)] \\
& + \sin({}^0\theta_{i+1}) \sin({}^{l_i}\theta_i) [ [\hat{\mathcal{U}}_{i+1} \wedge [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0_{l_{i+1}}}]_k ](0) \wedge [{}^i\mathbf{d}_{l_i l_i}]_k(l_i) + [{}^{i+1}\mathbf{d}_{0_{l_{i+1}}}]_k(0) \wedge [\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [{}^i\mathbf{d}_{l_i l_i}]_k(l_i)] \} \left. \right\}
\end{aligned}$$

Sous sa forme *non symétrique*, le second membre :

$$\mathbf{F}(({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j), ({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{F} \cdot [\mathcal{U}_i \wedge {}^i\mathbf{r}'] d^i s$$

fournit les deux opérateurs :

$$\mathbf{F}_1^k(({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{F} \cdot [\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{r}]'_k] d^i s$$

et :

$$\mathbf{F}_2^k(({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i), ({}^i\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}}_i)) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i\mathbf{F} \cdot [\mathcal{U}_i \wedge (\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [{}^i\mathbf{r}]'_k)] d^i s.$$

Nous introduisons enfin les opérateurs :

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^k &= \mathbf{E}_1^k + \mathbf{M}_1^k - \mathbf{F}_1^k \\
\mathbf{H}^k &= \mathbf{E}_2^k + \mathbf{M}_2^k - \mathbf{F}_2^k
\end{aligned} \tag{18}$$

Avec ces notations, la version linéarisée de l'équation (15) est :

$$\boxed{\mathbf{H}^k(({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i), ({}^i\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}}_i)) + \mathbf{R}^k(({}^i\mathbf{p}, \mathcal{U}_i)) = 0} \tag{19}$$

### 3.1.3 Résolution du problème linéarisé

Notre algorithme de résolution s'écrit de la façon suivante :

#### 1. Initialisation

On choisit  $([{}^i\mathbf{r}^h]_0, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_0)$  dans  $\mathcal{K}_h^{in}$ .

#### 2. Résolution du problème

$$\begin{aligned} \text{Trouver } ({}^i\hat{\mathbf{p}}^h, \hat{\mathcal{U}}_i^h) \in \bar{\mathbf{H}}_h^{in} \left( ([{}^i\mathbf{r}^h]_k, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_k) \right) \text{ tel que} \\ \forall ({}^i\mathbf{p}^h, \mathcal{U}_i^h) \in \bar{\mathbf{H}}_h^{in} \left( ([{}^i\mathbf{r}^h]_k, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_k) \right) \\ \mathbf{H}^k \left( ({}^i\mathbf{p}^h, \mathcal{U}_i^h), ({}^i\hat{\mathbf{p}}^h, \hat{\mathcal{U}}_i^h) \right) = -\mathbf{R}^k \left( ({}^i\mathbf{p}^h, \mathcal{U}_i^h) \right) \end{aligned} \quad (20)$$

#### 3. Test d'arrêt

- Le test d'arrêt est satisfait : **Fin**.
- Le test d'arrêt n'est pas satisfait : **Actualisation** de  $([{}^i\mathbf{r}^h]_k, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_k)$  à l'aide de  $({}^i\hat{\mathbf{p}}^h, \hat{\mathcal{U}}_i^h)$ ,  $k \rightarrow k + 1$  et retour à l'étape 2.

**Remarque :** L'intérêt de l'utilisation de (19) à l'étape 2 est de pouvoir prendre en compte la courbure de l'espace tangent dans le calcul de la direction de descente, ce qui conduit, d'après nos observations numériques, à un algorithme plus robuste.

□

Nous allons maintenant détailler les étapes de cet algorithme.

#### • Interpolation

On note  ${}^i s_j$  et  ${}^i s_{j+1}$  les abscisses respectives, sur la poutre  $i$ , des points  $a_j^i$  et  $a_{j+1}^i$  et soit  $\lambda$  la coordonnée barycentrique attachée à  $a_{j+1}^i$  sur le segment  $[a_j^i, a_{j+1}^i]$ :

$$\lambda = \frac{{}^i s - {}^i s_j}{{}^i s_{j+1} - {}^i s_j}.$$

Nous posons alors :

$$\begin{aligned}
[{}^i\mathbf{r}^h]_k &= \Pi_h^{\mathbf{r}} [{}^i\mathbf{r}]_k \\
&= [{}^i\mathbf{r}]_k ({}^i s_j) (1 + 2\lambda) (1 - \lambda)^2 + [{}^i\mathbf{r}]_k ({}^i s_{j+1}) (3 - 2\lambda) \lambda^2 \\
&\quad + [{}^i\mathbf{r}'_k] ({}^i s_j) ({}^i s_{j+1} - {}^i s_j) \lambda (1 - \lambda)^2 - [{}^i\mathbf{r}'_k] ({}^i s_{j+1}) ({}^i s_{j+1} - {}^i s_j) (1 - \lambda) \lambda^2 \\
[{}^i\mathbf{d}_j^h]_k &= \Pi_h^{\mathbf{d}} [{}^i\mathbf{d}_j]_k \\
&= [{}^i\mathbf{d}_j]_k ({}^i s_j) (1 - \lambda) + [{}^i\mathbf{d}_j]_k ({}^i s_{j+1}) \lambda \quad j = 1, 2
\end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}
{}^i\mathbf{p}^h &= {}^i\mathbf{p} ({}^i s_j) (1 + 2\lambda) (1 - \lambda)^2 + {}^i\mathbf{p} ({}^i s_{j+1}) (3 - 2\lambda) \lambda^2 \\
&\quad + (\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{r}'_k]) ({}^i s_j) ({}^i s_{j+1} - {}^i s_j) \lambda (1 - \lambda)^2 - (\mathcal{U}_i \wedge [{}^i\mathbf{r}'_k]) ({}^i s_{j+1}) ({}^i s_{j+1} - {}^i s_j) (1 - \lambda) \lambda^2 \\
{}^i\mathbf{g}_j^h &= \Pi_h^{\mathbf{d}} (\mathcal{U}_i) \wedge \Pi_h^{\mathbf{d}} ([{}^i\mathbf{d}_j]_k) \quad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
{}^i\hat{\mathbf{p}}^h &= {}^i\hat{\mathbf{p}} ({}^i s_j) (1 + 2\lambda) (1 - \lambda)^2 + {}^i\hat{\mathbf{p}} ({}^i s_{j+1}) (3 - 2\lambda) \lambda^2 \\
&\quad + (\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [{}^i\mathbf{r}'_k]) ({}^i s_j) ({}^i s_{j+1} - {}^i s_j) \lambda (1 - \lambda)^2 - (\hat{\mathcal{U}}_i \wedge [{}^i\mathbf{r}'_k]) ({}^i s_{j+1}) ({}^i s_{j+1} - {}^i s_j) (1 - \lambda) \lambda^2 \\
{}^i\hat{\mathbf{g}}_j^h &= \Pi_h^{\mathbf{d}} (\hat{\mathcal{U}}_i) \wedge \Pi_h^{\mathbf{d}} ([{}^i\mathbf{d}_j]_k) \quad j = 1, 2
\end{aligned}$$

**Commentaire :** Si les interpolations des variables  $[{}^i\mathbf{r}]_k$  et  $[{}^i\mathbf{d}_\alpha]_k$  sont des interpolations  $P_3$  et  $P_1$  classiques, celles des variables  ${}^i\mathbf{p}$ ,  ${}^i\mathbf{g}$ ,  ${}^i\hat{\mathbf{p}}$  et  ${}^i\hat{\mathbf{p}}$  sont modifiées de façon à tenir compte des contraintes *ponctuelles* qui interviennent dans la définition de l'espace des configurations admissibles.

## • Initialisation

La démarche que nous avons adoptée est la suivante: pour chaque poutre de la chaîne, nous choisissons une configuration géométrique raisonnable, caractérisée par des paramètres de forme que nous détaillerons plus loin et nous *imposons a priori* les conditions aux limites ponctuelles (encastrement, conditions de raccord).

Pour construire la configuration géométrique initiale, nous nous sommes inspirés du cas d'une poutre en flexion donné par **Le Tallec, Mani, Rochinha** [1992] (figure (4)) pour lequel la configuration initiale est *circulaire* et située *dans le plan déterminé*

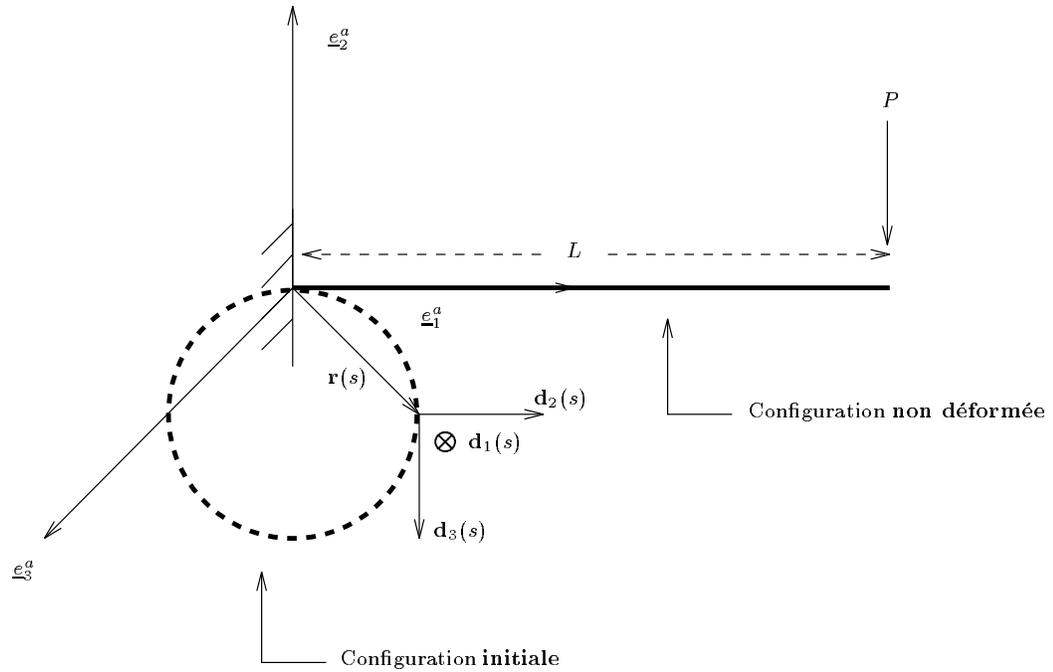


FIG. 4 – *Configuration initiale*

par la structure et la résultante des efforts extérieurs. De façon explicite, la configuration initiale est donnée, en composantes dans le repère absolu  $(O, \underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a, \underline{e}_3^a)$ , par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(s) = \frac{L}{2\pi} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{e}_1^a + (-1 + \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right)) \underline{e}_2^a \right. \\ \mathbf{d}_1(s) = -\underline{e}_3^a \\ \mathbf{d}_2(s) = \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{e}_1^a + \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{e}_2^a \\ \left. \mathbf{d}_3(s) = \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{e}_1^a - \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{e}_2^a \right. \end{array} \right.$$

Nous avons développé cette idée en introduisant le **paramètre de forme**  $\alpha$ , **réel non nul**, qui permet de “dérouler” la configuration initiale précédente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(s) = \frac{L}{2\pi\alpha} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi\alpha s}{L}\right) \underline{e}_1^a + (-1 + \cos\left(\frac{2\pi\alpha s}{L}\right)) \underline{e}_2^a \right\} \\ \mathbf{d}_1(s) = -\underline{e}_3^a \\ \mathbf{d}_2(s) = \sin\left(\frac{2\pi\alpha s}{L}\right) \underline{e}_1^a + \cos\left(\frac{2\pi\alpha s}{L}\right) \underline{e}_2^a \\ \left. \mathbf{d}_3(s) = \cos\left(\frac{2\pi\alpha s}{L}\right) \underline{e}_1^a - \sin\left(\frac{2\pi\alpha s}{L}\right) \underline{e}_2^a \right. \end{array} \right.$$

puis le **paramètre de forme**  $\beta$  qui permet de traduire la torsion d'une configuration rectiligne (qui correspond au cas limite où  $\alpha$  est nul) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(s) = s \underline{e}_1^a \\ \mathbf{d}_1(s) = -\sin\left(\frac{2\pi\beta s}{L}\right)\underline{e}_2^a - \cos\left(\frac{2\pi\beta s}{L}\right)\underline{e}_3^a \\ \mathbf{d}_2(s) = \cos\left(\frac{2\pi\beta s}{L}\right)\underline{e}_2^a - \sin\left(\frac{2\pi\beta s}{L}\right)\underline{e}_3^a \\ \mathbf{d}_3(s) = \underline{e}_1^a \end{array} \right.$$

Pour généraliser de façon plus complète cette initialisation, nous avons introduit la notion de *plan de charge* de la poutre  $i$ . Ce plan est engendré par deux vecteurs non colinéaires  $a_i$  et  $b_i$  :  $a_i$  est un vecteur directeur normé de la poutre  $i$  en configuration de référence et  $b_i$  est un vecteur directeur normé d'une approximation raisonnable de la direction de la résultante des efforts extérieurs qui s'exercent sur la poutre  $i$ .

Dans un cas simple, tel que celui de la figure (4), le plan de charge est le plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a)$ , le vecteur  $\underline{e}_1^a$  étant un vecteur directeur de la poutre encastree en configuration de référence et le vecteur  $\underline{e}_2^a$  dirigeant l'effort ponctuel appliqué.

Nous posons alors :

$$\begin{aligned} b'_i &= b_i, \\ c_i &= a_i \wedge b'_i, \end{aligned}$$

si le produit scalaire  $(a_i ; b_i)$  des vecteurs  $a_i$  et  $b_i$  est nul et :

$$b'_i = \frac{a_i - \frac{(a_i ; a_i)}{(a_i ; b_i)} b_i}{\left\| a_i - \frac{(a_i ; a_i)}{(a_i ; b_i)} b_i \right\|}$$

$$c_i = a_i \wedge b'_i,$$

dans le cas contraire. Soit  $E_{i-1}$  le point extrémité de la poutre  $i-1$  en configuration *initiale* et soit le vecteur :

$$\mathbf{T}_{i-1} = \overrightarrow{OE_{i-1}}.$$

Nous choisissons alors la configuration initiale suivante de la poutre  $i$  :

$$\begin{aligned} [{}^i\mathbf{r}]_0({}^i s) &= \mathbf{T}_{i-1} + \frac{l_i}{2\pi\alpha_i} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi\alpha_i {}^i s}{l_i}\right) a_i + (-1 + \cos\left(\frac{2\pi\alpha_i {}^i s}{l_i}\right)) b'_i \right\} \\ [{}^i\mathbf{d}_1]_0({}^i s) &= -c_i \\ [{}^i\mathbf{d}_2]_0({}^i s) &= \sin\left(\frac{2\pi\alpha_i {}^i s}{l_i}\right) a_i + \cos\left(\frac{2\pi\alpha_i {}^i s}{l_i}\right) b'_i \\ [{}^i\mathbf{d}_3]_0({}^i s) &= \cos\left(\frac{2\pi\alpha_i {}^i s}{l_i}\right) a_i - \sin\left(\frac{2\pi\alpha_i {}^i s}{l_i}\right) b'_i \end{aligned} \tag{21}$$

lorsque le réel  $\alpha_i$  n'est pas nul et :

$$\begin{aligned} [{}^i\mathbf{r}]_0({}^i s) &= \mathbf{T}_{i-1} + {}^i s a_i \\ [{}^i\mathbf{d}_1]_0({}^i s) &= -\sin\left(\frac{2\pi\beta_i {}^i s}{l_i}\right) b'_i - \cos\left(\frac{2\pi\beta_i {}^i s}{l_i}\right) c_i \\ [{}^i\mathbf{d}_2]_0({}^i s) &= \cos\left(\frac{2\pi\beta_i {}^i s}{l_i}\right) b'_i - \sin\left(\frac{2\pi\beta_i {}^i s}{l_i}\right) c_i \\ [{}^i\mathbf{d}_3]_0({}^i s) &= a_i \end{aligned} \tag{22}$$

dans le cas contraire.

La configuration initiale approchée ( $[{}^i\mathbf{r}^h]_0, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_0$ ) est obtenue à partir des valeurs des configurations initiales (21) et (22) aux nœuds du maillage et par imposition des

conditions aux limites et de jonction.

### • Résolution

L'interpolation du problème (20) nous amène à la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbf{K} \\ \end{array} \right]_k \cdot \left[ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathcal{U}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{R}_k \end{array} \right] \quad (23)$$

dont la matrice et le second membre dépendent des variables  $([{}^i\mathbf{r}^h]_k, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_k)$  (ce qui est rappelé par l'indice  $_k$ ) et dont les inconnues sont les valeurs et les dérivées des variables  $({}^i\hat{\mathbf{p}}, {}^i\hat{\mathcal{U}})$  aux nœuds du maillage. La matrice de ce système est **non symétrique**. Ce fait peut surprendre, étant donnée la nature conservative du système, mais il s'explique aisément par le fait que l'espace-tangent à l'espace des configurations admissibles **dépend** du point de tangence. Nous introduisons donc un défaut de symétrie lorsque nous effectuons la linéarisation du système. Cependant, la norme de cette partie antisymétrique décroît avec la norme du vecteur  $[\mathbf{R}_k]$  : on montre d'ailleurs qu'elle est nulle lorsque les variables  $([{}^i\mathbf{r}^h]_k, [{}^i\mathbf{d}_j^h]_k)$  représentent une configuration d'équilibre (voir **Chajmowicz** [1996], p. 89). Nous inversons cette matrice par une méthode de Gauss.

### • Actualisation

En chaque nœud  $M$  du maillage de la poutre  $i$ , nous opérons l'actualisation :

$$[{}^i\mathbf{r}^h]_{k+1}(M) = [{}^i\mathbf{r}^h]_k(M) + \lambda_k {}^i\hat{\mathbf{p}}(M).$$

L'actualisation des variables  $\{[{}^i\mathbf{d}_j^h]_k\}$  ainsi que des dérivées  $\{[{}^i(\mathbf{r}')^h]_k\}$  se fait selon un processus particulier (voir par exemple **Hughes & Winget** [1980]) :

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c|c|c} {}^i \mathbf{d}_1^h & {}^i \mathbf{d}_2^h & [{}^i \mathbf{r}^h]' \end{array} \right]_{k+1} (M) \\ &= \mathcal{M}(\lambda_k [\hat{\mathcal{U}}_i(M)]_1, \lambda_k [\hat{\mathcal{U}}_i(M)]_2, \lambda_k [\hat{\mathcal{U}}_i(M)]_3) \cdot \left[ \begin{array}{c|c|c} {}^i \mathbf{d}_1^h & {}^i \mathbf{d}_2^h & [{}^i \mathbf{r}^h]' \end{array} \right]_k (M) \end{aligned}$$

où :

$$\mathcal{M}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3) = \text{Id} + \frac{1}{\mathcal{D}} [\tilde{\mathcal{U}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{U}}^2] \quad (24)$$

avec :

$$\mathcal{D} = 1 + \frac{(\mathcal{U}_1)^2 + (\mathcal{U}_2)^2 + (\mathcal{U}_3)^2}{4}$$

et :

$$\tilde{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{U}_3 & \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_3 & 0 & -\mathcal{U}_1 \\ -\mathcal{U}_2 & \mathcal{U}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Remarque 1 :** Dans ce qui précède, le scalaire  $\lambda_k$  est choisi (par recherche linéaire sur  $[0;1]$ ) de façon à minimiser la norme du vecteur  $[R_{k+1}]$ .

**Remarque 2 :** Dans l'équation (24), les quantités  $(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3)$  apparaissent comme les paramètres de Rodrigues d'une matrice de rotation. Il s'agit d'un paramétrage *algébrique* des rotations finies.

### • Test d'arrêt

Nous choisissons un test d'arrêt sur la norme du second membre du système (23), soit :

$$||[R_k]|| \leq \varepsilon$$

## 3.2 Tests numériques

### 3.2.1 Cas sans raccord

#### Cas 1 : effort ponctuel

Nous testons d'abord notre algorithme sur un cas sans raccord, celui d'une seule poutre encastree, soumise à un effort ponctuel en son extremité libre. Nous avons adapté notre algorithme à ce cas en annulant les termes  $\mathbf{M}_1^k$  et  $\mathbf{M}_2^k$  dans l'expression des operateurs  $\mathbf{R}^k$  et  $\mathbf{H}^k$  (équation (18)).

On suppose que la poutre est chargée dans son plan et qu'elle ne travaille donc qu'en flexion pure (Fig. 5).

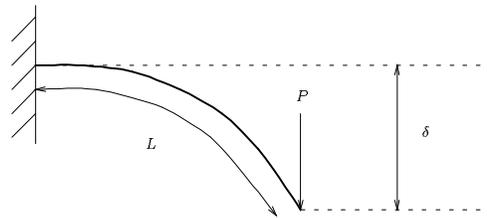


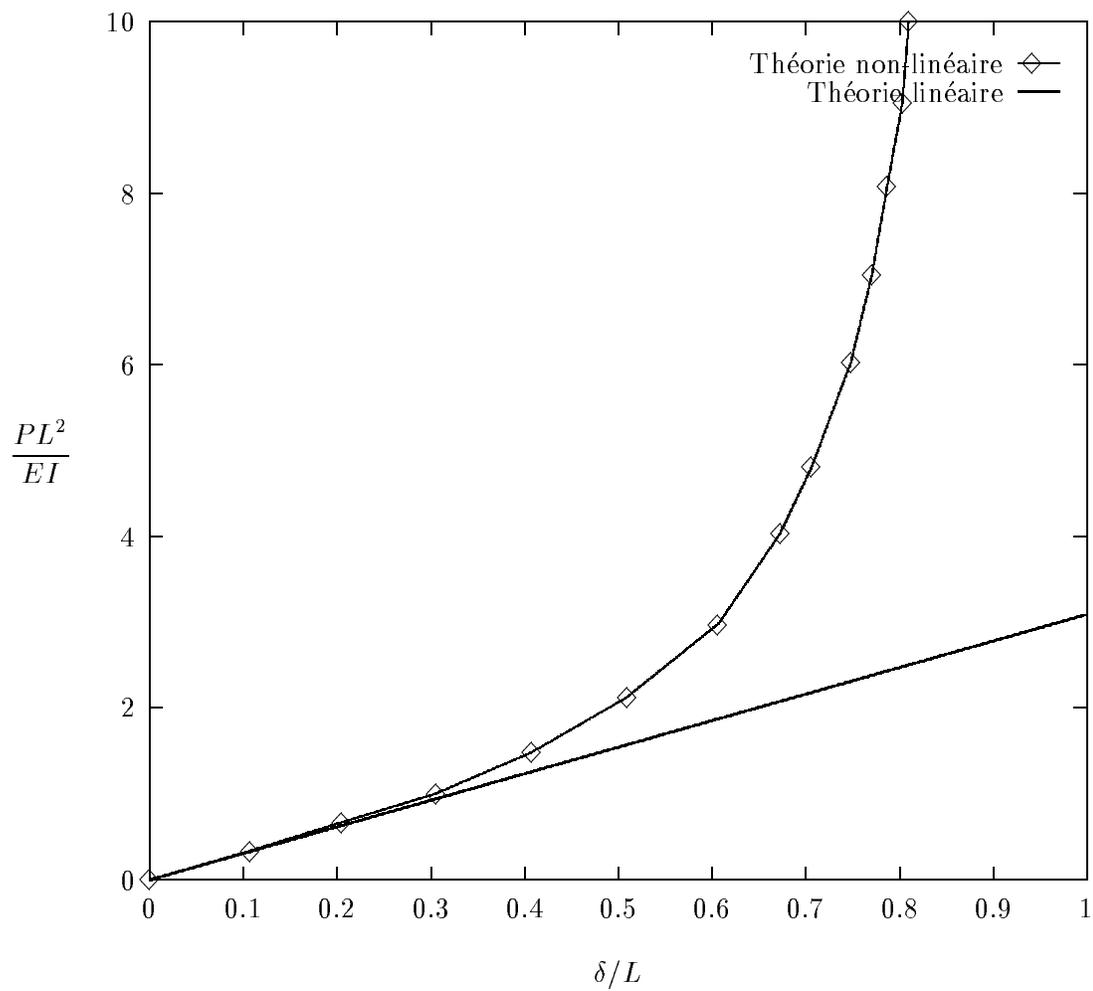
FIG. 5 – Poutre encastree en flexion: effort ponctuel

La poutre est caractérisée par son module d'Young  $\mathbf{E}$ , son moment d'inertie à la flexion  $\mathbf{I}$  et sa longueur  $L$ . On dispose d'une solution exacte (**Bisshopp & Drucker** [1945]). Nous représentons ici cette solution ainsi que l'écart avec la théorie linéaire classique (figure 6).

Nous testons notre algorithme avec les paramètres suivants :

$$\mathbf{EI} = 1000 N \times m^2$$

$$L = 10 m$$

FIG. 6 – *Solution exacte*

Nous prenons  $\beta = 0.$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$  et nous travaillons avec 30 éléments de poutre. Les résultats obtenus sont les suivants :

| $\frac{PL^2}{EI}$ | $\frac{\delta}{L}$ calculé | $\frac{\delta}{L}$ analytique | Erreur relative | Nombre d'itérations | $\alpha$ |
|-------------------|----------------------------|-------------------------------|-----------------|---------------------|----------|
| 1.                | 0.3017                     | 0.306                         | 1.4%            | 21                  | 0.1      |
| 2.                | 0.4935                     | 0.495                         | 0.3%            | 15                  | 0.15     |
| 3.                | 0.6034                     | 0.6037                        | 0.04%           | 19                  | 0.15     |
| 4.                | 0.6702                     | 0.6704                        | 0.03%           | 16                  | 0.2      |
| 5.                | 0.7141                     | 0.7132                        | 0.1%            | 21                  | 0.2      |
| 6.                | 0.7450                     | 0.7461                        | 0.15%           | 26                  | 0.25     |
| 7.                | 0.7679                     | 0.7685                        | 0.07%           | 23                  | 0.25     |
| 8.                | 0.7856                     | 0.7853                        | 0.04%           | 24                  | 0.25     |
| 9.                | 0.7997                     | 0.8                           | 0.04%           | 26                  | 0.25     |
| 10.               | 0.8114                     | 0.810                         | 0.17%           | 28                  | 0.25     |

Nous avons également examiné l'effet d'un raffinement du maillage :

| Nombre d'éléments | $\frac{\delta}{L}$ calculé | Nombre d'itérations |
|-------------------|----------------------------|---------------------|
| 10                | 0.8175                     | 9                   |
| 20                | 0.8123                     | 17                  |
| 30                | 0.8113                     | 28                  |
| 50                | 0.8109                     | 56                  |

ceci pour  $\frac{PL^2}{EI} = 10$ ,  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 0.$

### Cas 2 : moment ponctuel

Jusqu'à maintenant, nous n'avons pas considéré le cas des structures chargées à l'aide de moments ponctuels. En effet, les moments ponctuels les plus courants

sont les moments d'axe fixe, et les moments s'exerçant suivant un axe solidaire de la structure (dits également *follower moments*). On montre (**Argyris** [1982], **Simo & Vu-Quoc** [1986.2]) que ces deux types de moments ne constituent pas un chargement *conservatif* en général. Certains auteurs (**Ziegler** [1952], **Beck** [1955], **Argyris** [1982]) ont développé des expressions de moments conservatifs, qui ne sont cependant valables que sous des hypothèses mécaniques restrictives et pour des chargements particuliers.

Cependant, pour montrer l'efficacité de notre algorithme, nous présentons le cas d'une poutre de module d'Young  $\mathbf{E}$ , de moment d'inertie  $\mathbf{I}$  et de longueur  $L$ , encastree en l'une de ses extrémités et chargée avec un moment ponctuel  $\mathcal{M} = M\mathbf{e}_2^a$ .

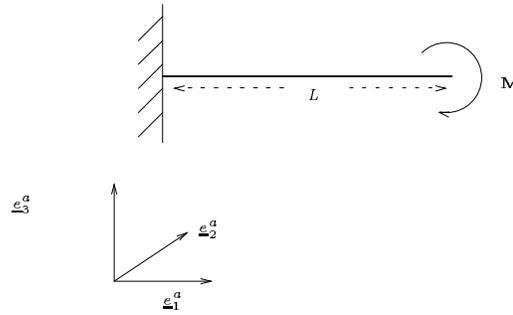


FIG. 7 – Poutre encastree en flexion : moment ponctuel

Soient les espaces fonctionnels :

$$\mathcal{H}^{in} = H^2(0, L; \mathbb{R}^3) \times [H^1(0, L; \mathbb{R}^3)]^3$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{in} = \{ & (\mathbf{r}, \mathbf{d}_j) \in \mathcal{H}^{in} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & \mathbf{r}(0) = \mathbf{0} ; \\ & \mathbf{d}_1(0) = \mathbf{e}_2^a ; \mathbf{d}_2(0) = \mathbf{e}_3^a ; \mathbf{d}_3(0) = \mathbf{e}_1^a ; \\ & \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{d}_k = \delta_j^k ; \\ & (\mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_2) \cdot \mathbf{d}_3 > 0 ; \\ & \mathbf{r}' = \mathbf{d}_3 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{K}^{in}((\mathbf{r}, \mathbf{d}_j)) = & \{(\mathbf{p}, \mathbf{g}_j) \in \mathcal{H}^{in} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1\mathbf{p}(0) = \mathbf{0} ; \\ & {}^1\mathbf{g}_j(0) = \mathbf{0} \forall j \in \{1, 2, 3\} ; \\ & \exists \mathcal{U} \in H^1(0, L; \mathbb{R}^3) \text{ tel que : } \mathbf{g}_j = \mathcal{U} \wedge \mathbf{d}_j \forall j \in \{1, 2, 3\} ; \\ & \mathbf{p}' = \mathbf{g}_3\} \end{aligned}$$

Le problème variationnel à résoudre s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{r}, \mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}^{in} \text{ tel que : } \forall (\mathbf{p}, \mathbf{g}_j) \in \delta\mathcal{K}^{in}((\mathbf{r}, \mathbf{d}_j)) : \\ \int_0^L \mathbf{EI} \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{p}'' = \mathbf{M} \underline{\underline{e}}_2^a \cdot \mathcal{U}(L). \end{array} \right. \quad (25)$$

On recherche la valeur de  $\mathbf{M}$  correspondant à une déformée circulaire dans le plan  $(\underline{\underline{e}}_1^a, \underline{\underline{e}}_3^a)$ , c'est à dire telle que le champ  $(\mathbf{r}, \mathbf{d}_j)$  défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) &= \frac{L}{2\pi} \left( \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{\underline{e}}_1^a + \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right)\right) \underline{\underline{e}}_3^a \right) \\ \mathbf{d}_1(s) &= \underline{\underline{e}}_2^a \\ \mathbf{d}_2(s) &= -\sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{\underline{e}}_1^a + \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{\underline{e}}_3^a \\ \mathbf{d}_3(s) &= \cos\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{\underline{e}}_1^a + \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \underline{\underline{e}}_3^a \end{aligned} \quad (26)$$

soit solution du problème (25). Cette valeur est :

$$\mathbf{M}^c = \frac{2 \mathbf{EI} \pi}{L}$$

Nous quantifions l'écart à la solution exacte par la variable :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \|\mathbf{r}(s_i) - \mathbf{r}_e(s_i)\|_{\mathbb{R}^3}^2}{\sum_{i=1}^N \|\mathbf{r}_e(s_i)\|_{\mathbb{R}^3}^2}}$$

où  $N$  est le nombre de nœuds du maillage,  $s_i$  l'abscisse curviligne du  $i^{\text{ème}}$  nœud du maillage et  $\mathbf{r}_e(s_i)$  la solution exacte prévue par (26).

Pour  $\mathbf{EI} = 1000. N \times m^2$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$  et pour un maillage comprenant 30 éléments, nous obtenons ainsi les résultats suivants :

| $\frac{\mathbf{EI}}{L}$ | $\sigma$              | Nombre d'itérations pour $\alpha = 0.95$ |
|-------------------------|-----------------------|--|
| 10.                     | $2.416 \cdot 10^{-2}$ | 24                                       |
| 100.                    | $2.416 \cdot 10^{-2}$ | 22                                       |
| 1000.                   | $2.416 \cdot 10^{-2}$ | 23                                       |
| 10000.                  | $2.416 \cdot 10^{-2}$ | 23                                       |

Nos tests numériques semblent indiquer que la valeur de  $\sigma$  ne dépend que de la finesse du maillage. Les paramètres mécaniques jouent également un rôle : lorsque le rapport  $\frac{\mathbf{EI}}{L}$  est trop faible (de l'ordre de l'unité, ou inférieur), notre algorithme ne converge plus que pour des valeurs de  $\alpha$  très proches de 1.

Nous avons également testé notre algorithme pour  $\frac{\mathbf{EI}}{L} = 10 N \times m$ ,  $\varepsilon = 10^{-5}$  et  $\alpha = 1. :$

| Nombre d'éléments | $\sigma$              | Nombre d'itérations |
|-------------------|-----------------------|---------------------|
| 20                | $5.565 \cdot 10^{-2}$ | 5                   |
| 30                | $2.416 \cdot 10^{-2}$ | 4                   |
| 50                | $8.575 \cdot 10^{-3}$ | 4                   |
| 100               | $2.127 \cdot 10^{-3}$ | 3                   |

### Cas 3 : torsion

Pour prouver la capacité de notre algorithme à prendre en compte les effets de torsion, nous l'appliquons à un cas test présenté dans **Bourgat, Le Tallec, Mani** [1988] : une poutre flexible, de longueur  $l$ , située dans le plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$  est suspendue par ses extrémités encastées verticalement et soumise à une densité linéique d'efforts. Elle présente alors une configuration plane. On impose ensuite une rotation de  $90^\circ$  à son extrémité supérieure.

Nous ne pouvons pas estimer a priori les valeurs de la torsion  $u_3(s)$  le long du flexible. Cependant, nous pouvons faire la remarque suivante : l'équation d'équilibre

$$\mathbf{m}' + \mathbf{r}' \wedge \mathbf{n} = 0$$

jointe à la condition d'inextensibilité (12) nous permet d'affirmer qu'à l'équilibre, la relation :

$$\forall s \in [0, l] : \mathbf{m}'(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) = 0$$

est vérifiée. La loi de comportement :

$$\mathbf{m}(s) = \frac{\partial w^e}{\partial u_l}(s, u_j, v_k) \mathbf{d}_l(s)$$

jointe à l'expression

$$w^e(s) = \frac{\mathbf{EI}}{2} (u_1^2(s) + u_2^2(s)) + \mathbf{GI} u_3^2(s)$$

de la densité d'énergie  $w^e$  nous fournit l'expression de la densité de moments intérieurs :

$$\mathbf{m}(s) = \mathbf{EI}(u_1(s)\mathbf{d}_1(s) + u_2(s)\mathbf{d}_2(s)) + 2\mathbf{GI}u_3(s)\mathbf{d}_3(s)$$

Puisque pour tout  $s$  la base  $\{\mathbf{d}_1(s), \mathbf{d}_2(s), \mathbf{d}_3(s)\}$  est orthonormée, nous avons également les conditions :

$$\begin{aligned} \forall s \in [0, l] : \quad & \mathbf{d}_1(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) = 0 \\ & \mathbf{d}_2(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) = 0 \\ & \mathbf{d}_3(s) \cdot \mathbf{d}_3'(s) = 0 \\ & \mathbf{d}_3(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) = 1 \end{aligned} \tag{27}$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \forall s \in [0, l] : \mathbf{m}'(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) &= 2 \mathbf{G} \mathbf{I} u_3'(s) \\ &+ \mathbf{E} \mathbf{I} (u_1(s) \mathbf{d}_1'(s) + u_2(s) \mathbf{d}_2'(s)) \cdot \mathbf{d}_3(s) \end{aligned} \quad (28)$$

Or :

$$u_1(s) = \mathbf{d}_2'(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) \text{ et } u_2(s) = \mathbf{d}_3'(s) \cdot \mathbf{d}_1(s)$$

Donc :

$$\begin{aligned} u_1(s) \mathbf{d}_1'(s) + u_2(s) \mathbf{d}_2'(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) &= (\mathbf{d}_2'(s) \cdot \mathbf{d}_3(s)) (\mathbf{d}_1'(s) \cdot \mathbf{d}_3(s) + \mathbf{d}_3'(s) \cdot \mathbf{d}_1(s)) \\ &= 0 \text{ d'après (27)} \end{aligned}$$

La relation (28) nous permet alors d'affirmer qu'à l'équilibre nous avons :

$$\forall s \in [0, l] : u_3''(s) = 0.$$

Nous prévoyons donc une torsion **constante** dans la longueur du flexible.

Nous avons du également modifier notre algorithme de résolution. En effet, dans sa version de base, notre algorithme exige la connaissance **explicite** des efforts et des moments ponctuels en bout de chaîne, et ceci même lorsque cette chaîne est réduite à une seule poutre comme c'est le cas pour le système mécanique de la figure 5. Nous avons remplacé l'opérateur  $\mathbf{H}^k$  par l'opérateur *symétrique*  $\mathbf{S}^k$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^k((\mathbf{p}, \mathcal{U}), (\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathcal{U}})) &= \int_0^l (\mathbf{E} - \mathbf{G}) \mathbf{I} \hat{\mathbf{p}}'' \cdot \mathbf{p}'' ds \\ &+ \int_0^l \mathbf{G} \mathbf{I} ([\hat{\mathcal{U}} \wedge [\mathbf{d}_1]_k]' \cdot [\mathcal{U} \wedge [\mathbf{d}_1]_k]' + [\hat{\mathcal{U}} \wedge [\mathbf{d}_2]_k]' \cdot [\mathcal{U} \wedge [\mathbf{d}_2]_k]') ds \end{aligned}$$

Nous avons également modifié l'expression de l'opérateur  $\mathbf{R}^k$  pour prendre en compte la forme symétrique (16) du second membre :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^k((\mathbf{p}, \mathcal{U})) &= \\ &\int_0^l (\mathbf{E} - \mathbf{G}) \mathbf{I} [\mathbf{r}]_k'' \cdot \mathbf{p}'' ds + \int_0^l \mathbf{G} \mathbf{I} [[\mathbf{d}_1]_k]' \cdot [\mathcal{U} \wedge [\mathbf{d}_1]_k]' ds \\ &+ \int_0^l \mathbf{G} \mathbf{I} [[\mathbf{d}_2]_k]' \cdot [\mathcal{U} \wedge [\mathbf{d}_2]_k]' ds - \left\{ \int_0^l \mathbf{f} \cdot \mathbf{p} ds + \mathcal{F} \cdot \mathbf{p}(l) \right\} \end{aligned}$$

Cette expression ne requiert pas la connaissance de l'effort ponctuel  $\mathcal{F}$  en raison de la condition de blocage  $\mathbf{p}(l) = 0$ .

Les paramètres mécaniques du test sont les suivants :

$$\mathbf{EI} = 4350 N \times m^2$$

$$\mathbf{GI} = 4000 N \times m^2$$

$$l = 32.6m$$

$$\mathbf{f} = 75 N/m$$

Les extrémités ont pour coordonnées :  $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 10)$ ,  $\mathbf{r}(l) = (1.8, 0, 25)$ . Notre maillage comprend 100 éléments de taille égale. La configuration plane est obtenue en 34 itérations pour  $\alpha = 0, \beta = 0$ . La configuration déformée après torsion est obtenue en 201 itérations, et nous nous servons de la configuration plane pour initialiser l'algorithme. Nous donnons ici les trois projections de la déformée, dans les plans  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$  (figure 8),  $(\underline{e}_2^a, \underline{e}_3^a)$  (figure 9) et  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a)$  (figure 10). Nous choisissons pour ce test, une interpolation  $P_2$  des variables  $\mathbf{d}_j$ , afin d'assurer une meilleure approximation de la torsion  $u_3(s)$ .

Ces déformées présentent un bon accord avec le cas test présenté dans **Bourgat, Le Tallec, Mani** [1988] ([**BLTM.88**]), en particulier en ce qui concerne le gauchissement de la barre sous l'effet de la torsion imposée (plans  $(\underline{e}_2^a, \underline{e}_3^a)$  et  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a)$ ). Cependant les valeurs de la torsion calculées en quelques points du maillage semblent plus en accord avec la physique du problème (torsion constante le long du flexible).

| Valeur de $u_3$    | $s = 9$ | $s = 20$ | $s = 32.6$ |
|--------------------|---------|----------|------------|
| <b>Calculée</b>    | 0.01782 | 0.01787  | 0.01792    |
| [ <b>BLTM.88</b> ] | 0.0184  | 0.0197   | 0.0203     |

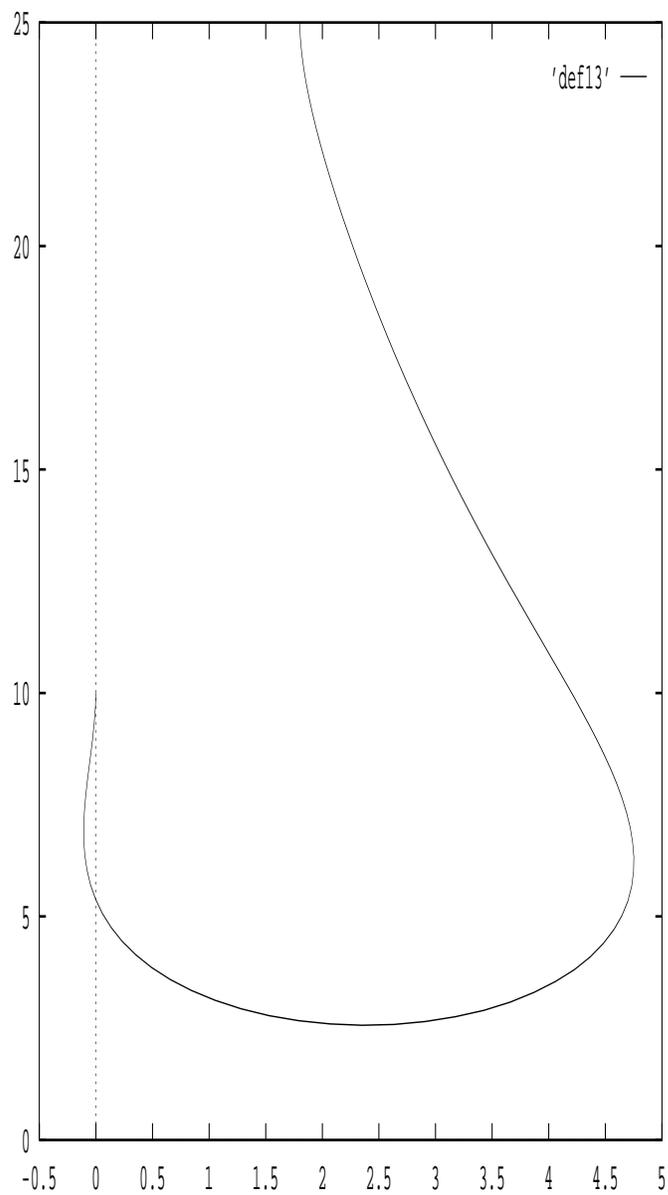
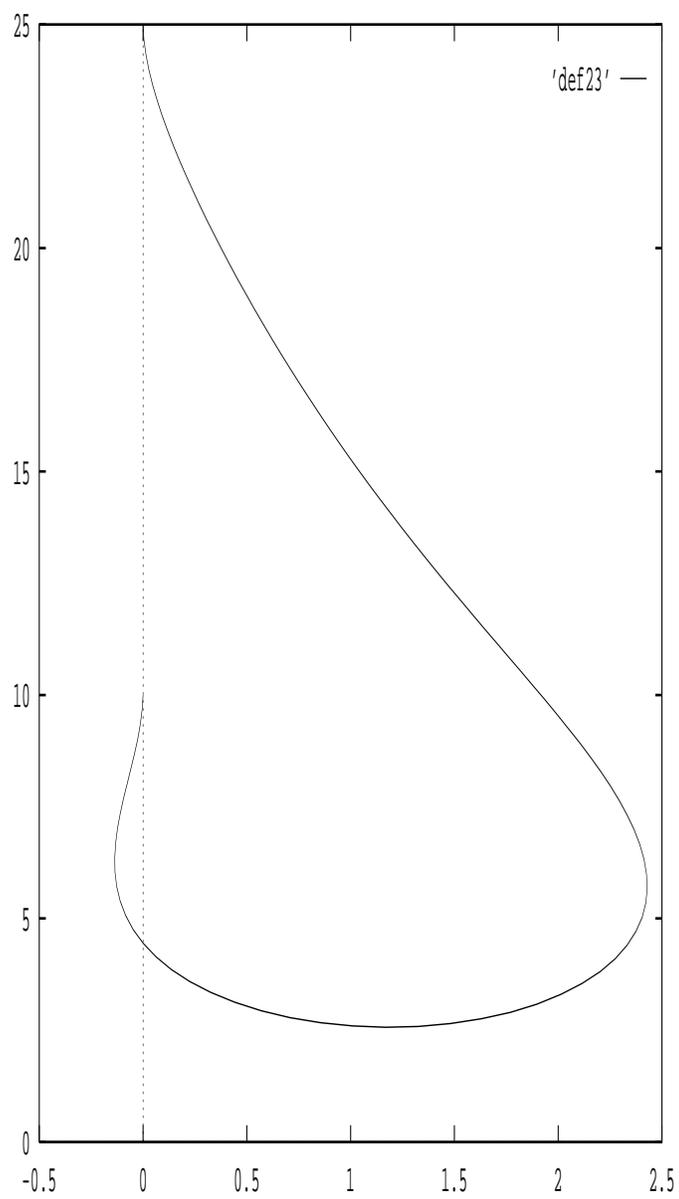
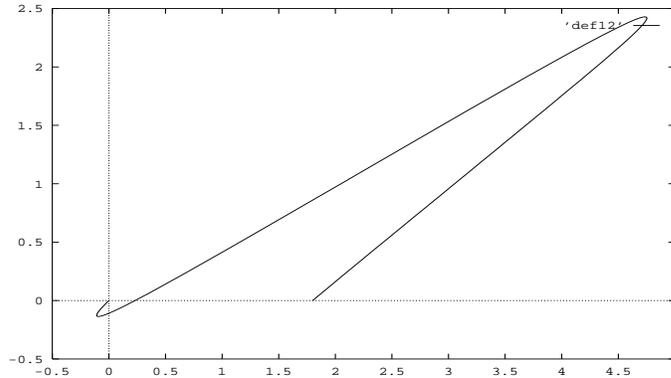


FIG. 8 – Plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$

FIG. 9 – *Plan*  $(\underline{e}_2^a, \underline{e}_3^a)$

FIG. 10 – Plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a)$ 

### 3.2.2 Cas avec raccord

Nous présentons dans cette section des résultats de simulation concernant des chaînes à trois maillons, travaillant en flexion et en torsion. Le lecteur pourra trouver des cas-tests concernant des chaînes modèles à deux maillons dans **Chajmowicz** [1996].

#### Cas 1 : Poutres en flexion

Nous considérons maintenant une structure formée de trois poutres, chargée dans son plan, le plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$ , par une force ponctuelle  $\mathbf{F}$ , agissant à l'extrémité libre de la chaîne.

Les trois poutres sont supposées formées du même matériau. Les paramètres mécaniques et géométriques du test sont résumés ci-après :

$$\begin{aligned} \mathbf{EI} &= 166.67 \text{ N} \times \text{m}^2 \\ \mathbf{GI} &= 10 \text{ N} \times \text{m}^2 \\ L1 &= 2\sqrt{2} \text{ m}, \quad L2 = \sqrt{2} \text{ m}, \quad L3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} \end{aligned}$$

Les deux articulations, d'axe  $\underline{e}_2^a$  ont pour raideur  $\kappa = 50 \text{ N} \times \text{m}$ . Notre maillage est formé de 10 éléments par poutre. La configuration initiale est caractérisée par les paramètres  $\alpha = 0.1, \beta = 0..$  Enfin les plans de charge sont respectivement dirigés :

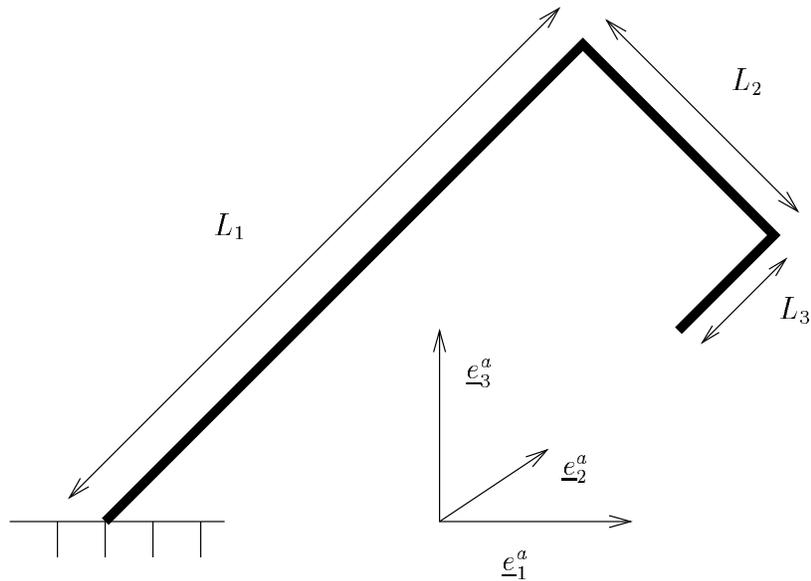


FIG. 11 – Poutres en flexion

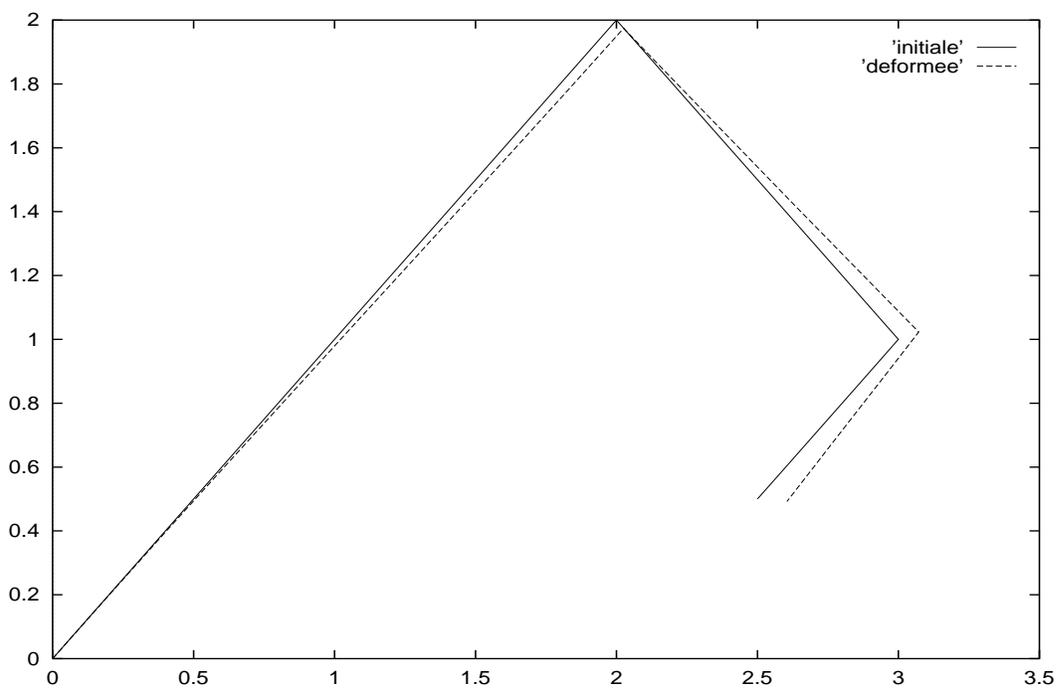
Pour la poutre 1 par les vecteurs :  $\underline{e}_1^a + \underline{e}_3^a$  et  $-\underline{e}_1^a + \underline{e}_3^a$

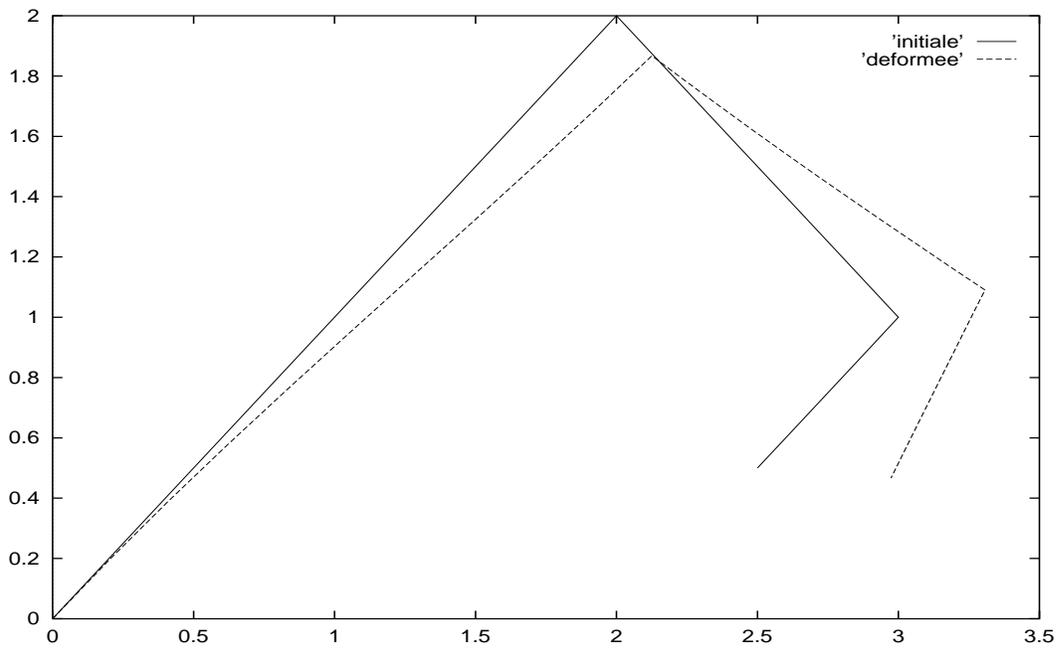
Pour la poutre 2 par les vecteurs :  $\underline{e}_1^a - \underline{e}_3^a$  et  $\underline{e}_1^a + \underline{e}_3^a$

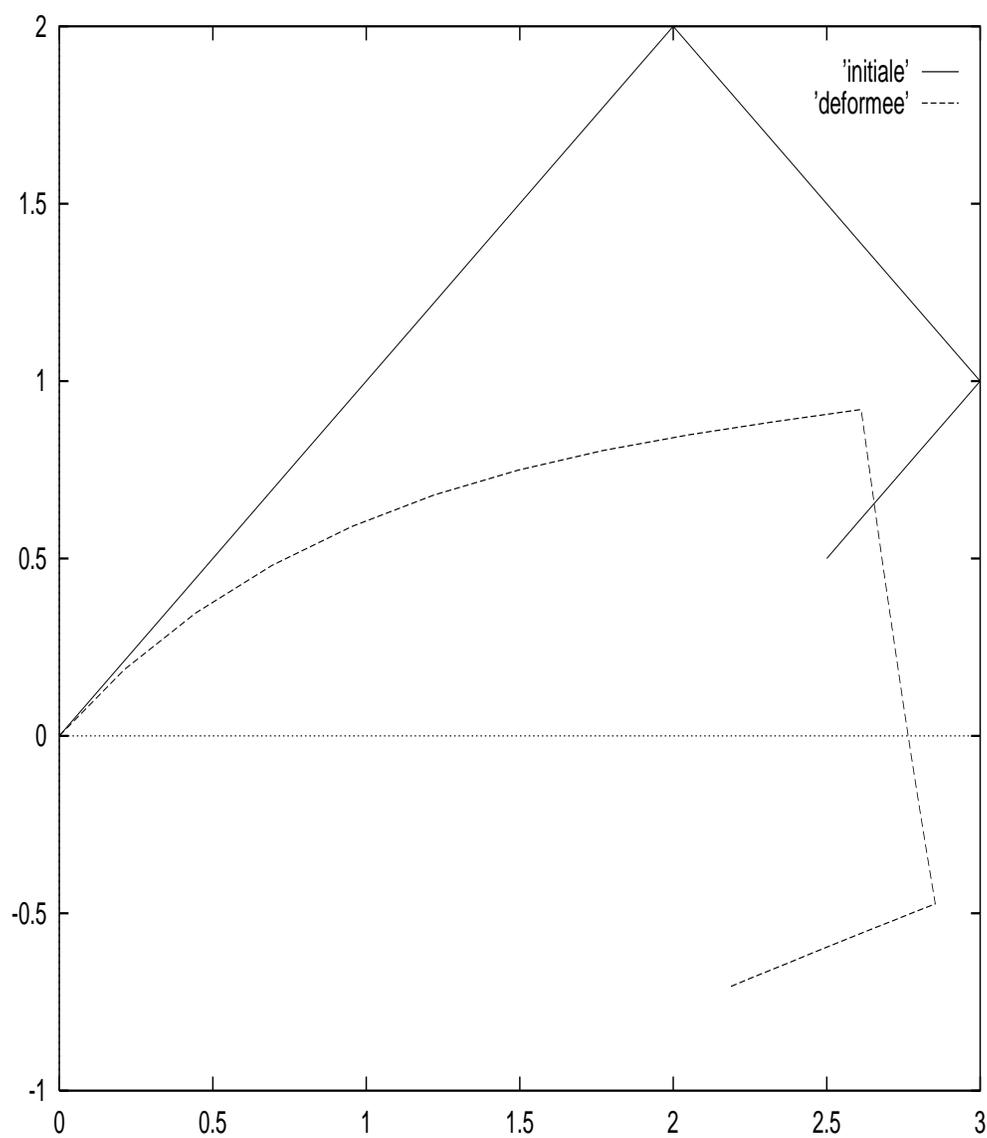
Pour la poutre 3 par les vecteurs :  $-\underline{e}_1^a - \underline{e}_3^a$  et  $\underline{e}_1^a - \underline{e}_3^a$

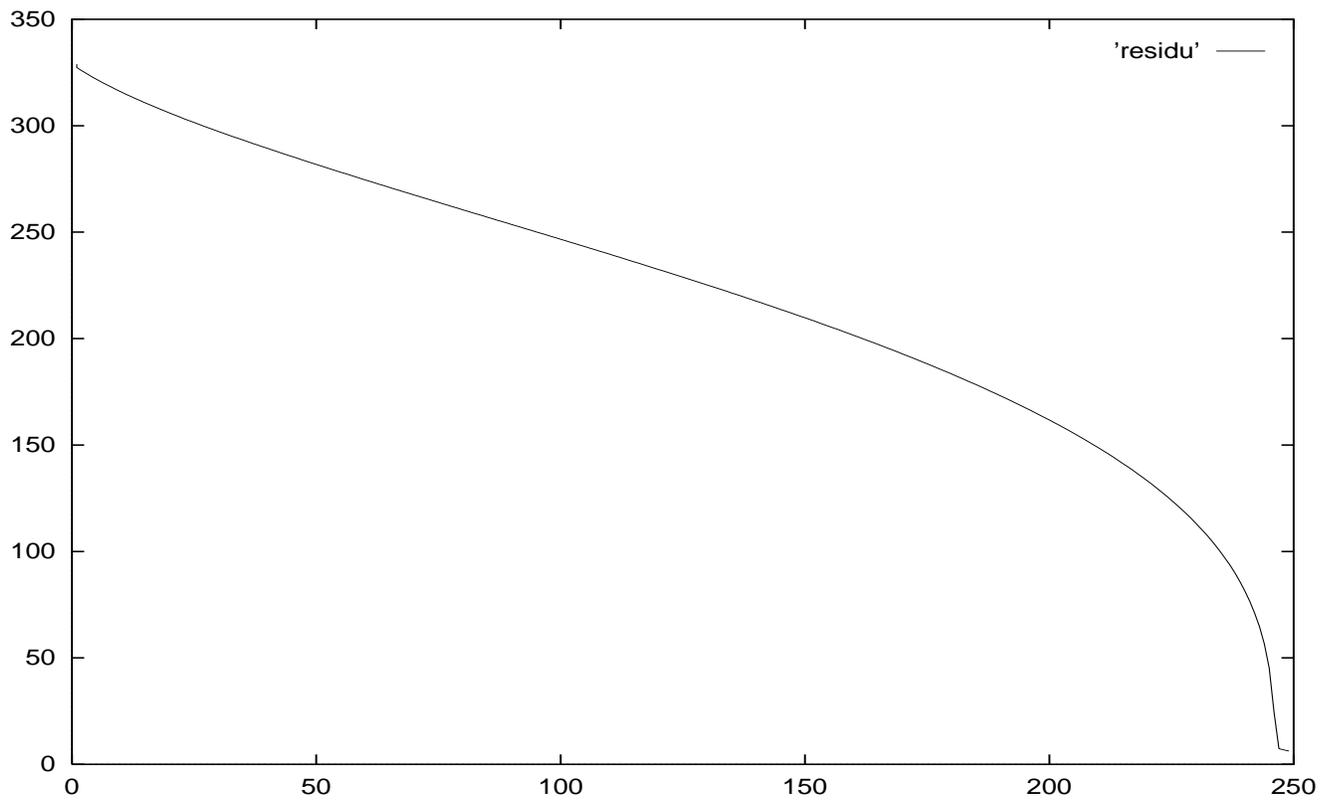
Nous donnons (figures 12 à 14) les configurations déformée (en trait pointillé) et non déformée (en trait continu), pour les valeurs un effort  $\mathbf{F}$  de  $+1 N$  et  $+5 N$  suivant  $\underline{e}_1^a$  puis un effort  $\mathbf{F}$  de  $-10 N$  suivant  $\underline{e}_3^a$ .

Nous donnons également, figure 15, la courbe de descente du résidu en fonction du nombre d'itérations pour le premier de ces tests (effort unitaire selon  $\underline{e}_1^a$ ) ainsi que la courbe donnant l'évolution de la partie antisymétrique de l'opérateur de linéarisation (figure 16).

FIG. 12 -  $\mathbf{F} = +1N$  selon  $\underline{e}_1^a$

FIG. 13 -  $\mathbf{F} = +5N$  selon  $\underline{e}_1^a$

FIG. 14 -  $\mathbf{F} = -10N$  selon  $e_3^a$

FIG. 15 – *Résidu*

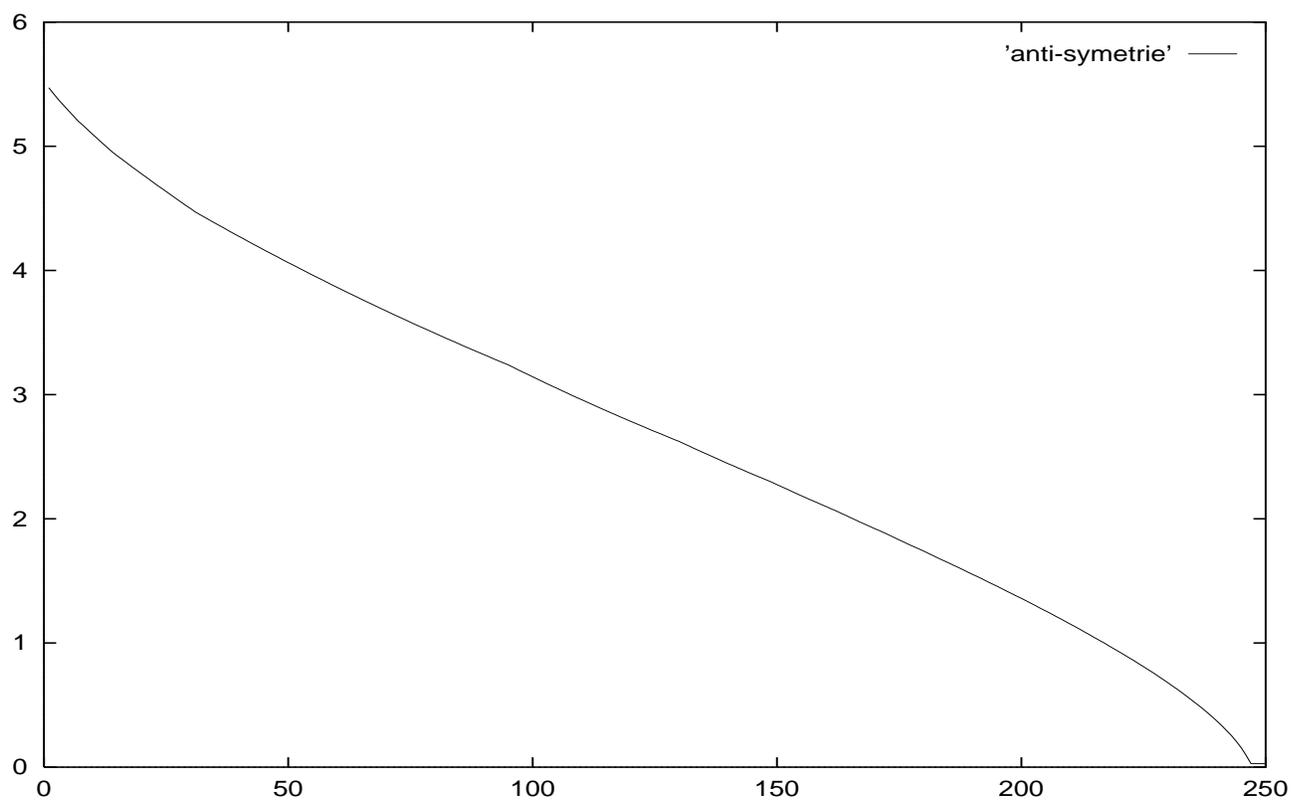


FIG. 16 – Norme de la partie antisymétrique de l'opérateur de linéarisation

### Cas 2 : Poutres en flexion-torsion

Nous considérons maintenant une structure formée de trois poutres, chargée orthogonalement à son plan, le plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a)$ , par une force ponctuelle  $\mathbf{F}$ , agissant à l'extrémité libre de la chaîne et de direction  $\underline{e}_3^a$ .

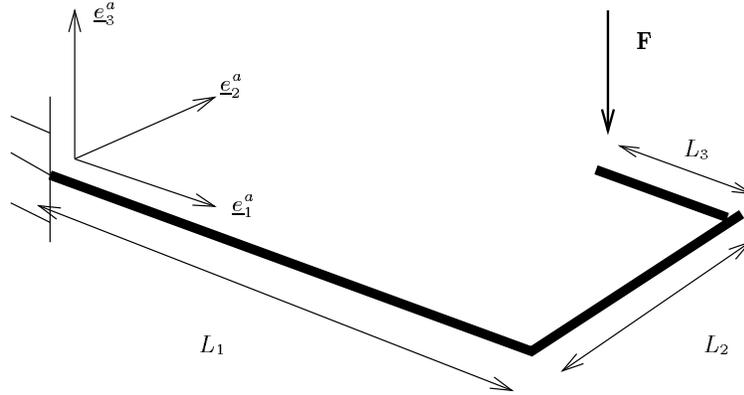


FIG. 17 – Poutres en flexion-torsion

Les trois poutres sont supposées formées du même matériau. Les paramètres mécaniques et géométriques du test sont résumés ci-après :

$$\begin{aligned} \mathbf{EI} &= 90 \text{ N} \times \text{m}^2 \\ \mathbf{GI} &= 100 \text{ N} \times \text{m}^2 \\ L_1 &= 2\sqrt{2} \text{ m}, \quad L_2 = \sqrt{2} \text{ m}, \quad L_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} \end{aligned}$$

L'articulation 1 – 2, d'axe  ${}^1\mathbf{d}_3(L_1) = -{}^2\mathbf{d}_1(0)$  a pour raideur  $\kappa_1 = 50 \text{ N} \times \text{m}$ . L'articulation 2 – 3, d'axe  ${}^2\mathbf{d}_3(L_2) = -{}^3\mathbf{d}_1(0)$  a pour raideur  $\kappa_2 = 10 \text{ N} \times \text{m}$ .

Notre maillage est formé de 10 éléments par poutre. La configuration initiale est caractérisée par les paramètres  $\alpha = 0.1, \beta = 0$ , pour les trois poutres.

Nous avons testé les valeurs  $+1 \text{ N} + 10 \text{ N}$ , de  $\mathbf{F}$ . Nous donnons pour chacune de ces valeurs la projection de la déformée de la structure dans les plans  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_2^a)$  (*plan de dessus*, figure 18),  $(\underline{e}_2^a, \underline{e}_3^a)$  (*plan de face*, figure 19),  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$  (*plan de profil*, figure 20).

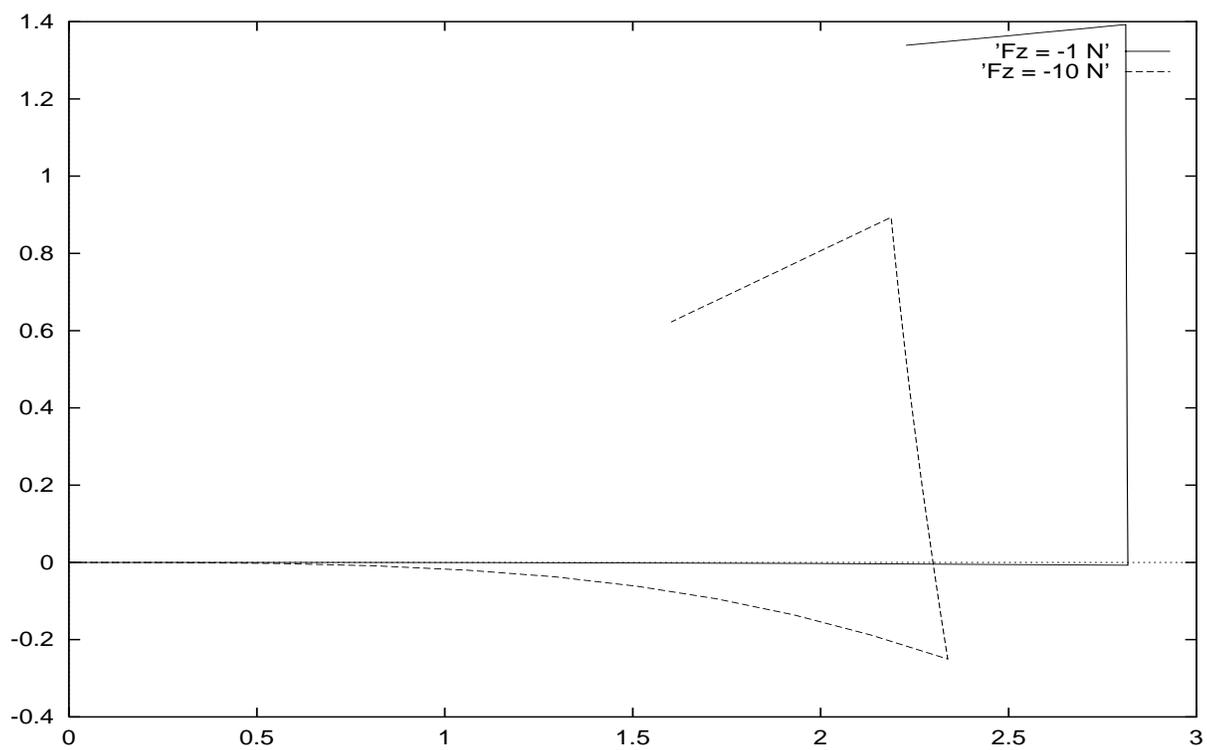


FIG. 18 – Déformées : Plan de dessus

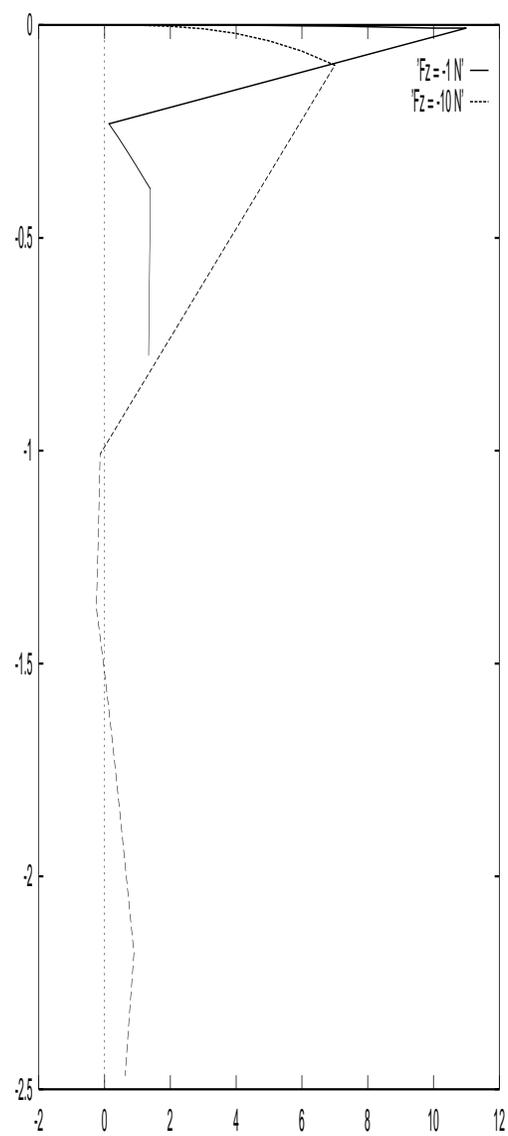


FIG. 19 – Déformées : Plan de face

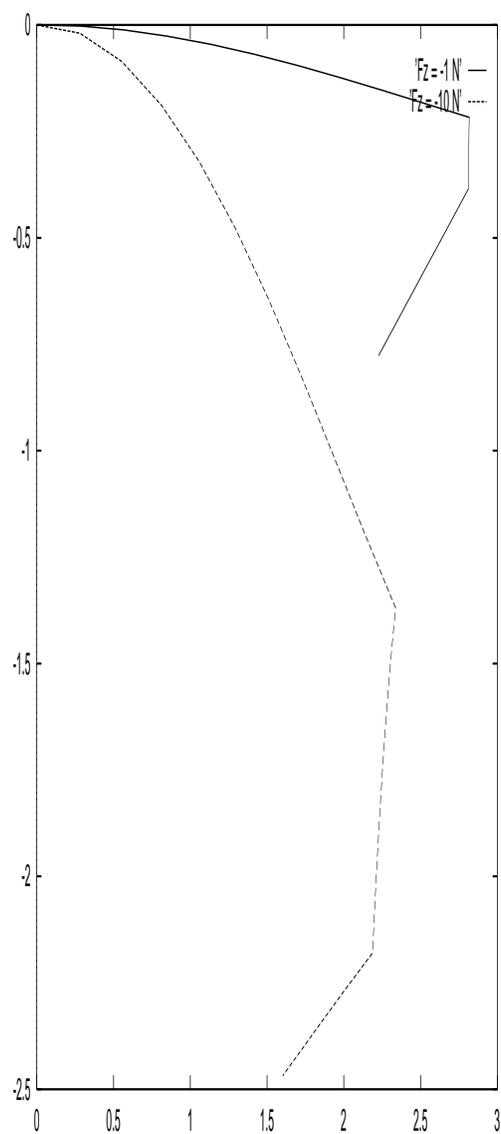


FIG. 20 – Déformées : Plan de profil

## 4 Cas dynamique

### 4.1 Modèle mécanique

Nous désignons par  ${}^i\mu({}^is)$  la masse volumique de la barre  $i$ . Nous devons résoudre les équations du mouvement suivantes, pour  $t \in [0, T]$ ,  $T$  positif donné :

- **Équations du mouvement de la poutre  $i$**

$$\begin{cases} {}^i\mathbf{m}'({}^is, t) + {}^i\mathbf{r}'({}^is, t) \wedge {}^i\mathbf{n}({}^is, t) + {}^i\mathbf{d}_\alpha({}^is, t) \wedge {}^i\mathbf{f}_\alpha({}^is, t) = 0 \\ {}^i\mathbf{n}'({}^is, t) + {}^i\mathbf{f}_3({}^is, t) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

où on a noté :

$$\begin{cases} {}^i\mathbf{f}_\alpha({}^is, t) = -{}^i\mu({}^is) {}^i\mathbf{I}^i \ddot{\mathbf{d}}_\alpha({}^is, t) & \alpha = 1, 2 \\ {}^i\mathbf{f}_3({}^is, t) = {}^i\mathbf{f}({}^is) - {}^i\mu({}^is) {}^i\mathbf{S}^i \ddot{\mathbf{r}}({}^is, t) \end{cases}$$

sur l'espace des **configurations admissibles du système**, que nous allons détailler dans ce qui suit.

### 4.2 Configurations admissibles

#### 4.2.1 Conditions aux limites et contraintes

La première poutre de la chaîne est supposée solidaire d'un support rigide fixe. Dans le cas d'un encastrement, nous avons les conditions :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0; T] \quad {}^1\mathbf{r}(0, t) &= 0, \\ {}^1\mathbf{d}_j(0, t) &= \mathbf{d}_j^0 \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (30)$$

où  $(\mathbf{d}_1^0, \mathbf{d}_2^0, \mathbf{d}_3^0)$  est une base orthonormée fixe.

Dans le cas où il existe une liaison pivot, entre la première poutre de la chaîne et un support rigide fixe, nous supposons que l'un des vecteurs  $\{{}^1\mathbf{d}_j(0, t)\}_{j=1, \dots, 3}$  se confond avec un des vecteurs directeurs normés, noté  $\mathbf{u}_0$ , de l'axe de cette liaison.

Nous écrivons donc :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0; T] \quad {}^1\mathbf{r}(0, t) &= \mathbf{0}, \\ {}^1\mathbf{d}_{j_0}(0, t) &= \mathbf{u}_0, \\ {}^1\mathbf{m}(0, t) \cdot {}^1\mathbf{d}_{j_0}(0, t) &= 0, \quad \text{pour un } j_0 \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Nous avons également des conditions de compatibilité des champs d'efforts et de moments internes avec le chargement extérieur :

$$\begin{cases} \forall t \in [0; T] \quad {}^{nt}\mathbf{n}(l_{nt}, t) = \mathcal{F}(t), \\ {}^{nt}\mathbf{m}(l_{nt}, t) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Nous avons enfin la contrainte :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, nt \quad {}^i\mathbf{d}_j \cdot {}^i\mathbf{d}_k &= \delta_j^k \\ ({}^i\mathbf{d}_1 \wedge {}^i\mathbf{d}_2) \cdot {}^i\mathbf{d}_3 &> 0 \end{aligned} \quad (33)$$

#### 4.2.2 Conditions initiales

La configuration *initiale* s'identifie à la configuration de référence. Nous écrivons donc :

$$\begin{aligned} {}^i\mathbf{r}(^i s, 0) &= {}^i s \underline{e}_3^i \\ {}^i\mathbf{d}_j(^i s, 0) &= \underline{e}_j^i \end{aligned}$$

où  $\{^i e\}$  est la base principale d'inertie de la barre  $i$  en configuration de référence.

Nous nous donnons en outre des champs de vitesses initiales :

$$\begin{aligned} {}^i\dot{\mathbf{r}}(^i s, 0) &= {}^i\mathbf{v}_r(^i s) \\ {}^i\dot{\mathbf{d}}_j(^i s, 0) &= {}^i\mathbf{v}_j(^i s) \end{aligned}$$

### 4.3 Formulation variationnelle

#### 4.3.1 Cadre fonctionnel

Soient les espaces :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_i &= H^1(0, l_i; \mathbb{R}^3) \\ \mathcal{H} &= \prod_{i=1}^{nt} \mathcal{H}_i \\ \mathcal{H}_{3,i} &= H^2(0, T; H^1(0, l_i; \mathbb{R}^{3 \times 3}))\end{aligned}$$

Pour tout  $t \in [0, T]$ , l'espace des **configurations** admissibles du système à l'instant  $t$  s'identifie à :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_t = & \{ \{ \{ {}^i \mathbf{r}, \{ {}^i \mathbf{d}_j \}_{j=1,2,3} \}_{i=1, \dots, nt} = ({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1 \mathbf{r}(0) = \mathbf{0} \text{ et } {}^i \mathbf{r}(l_i) = {}^{i+1} \mathbf{r}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1 \mathbf{d}_j(0) = \mathbf{d}_j^0 \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (30) est imposé ;} \\ & {}^1 \mathbf{d}_{j_0}(0) = \mathbf{u}_0 \text{ si (31) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad {}^i \mathbf{d}_{0_{j_i}}(0) = \varepsilon_i^{i-1} \mathbf{d}_{i-1_{j_{i-1}}}(l_{i-1}) ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\}, \forall (j, k) \in \{1, 2, 3\}^2 \quad {}^i \mathbf{d}_j \cdot {}^i \mathbf{d}_k = \delta_j^k ; \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \quad ({}^i \mathbf{d}_1 \wedge {}^i \mathbf{d}_2) \cdot {}^i \mathbf{d}_3 > 0 \}\end{aligned}$$

et les espaces de variations admissibles  $\delta \mathcal{K}_t({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j)$  à :

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{K}_t({}^i \mathbf{r}, {}^i \mathbf{d}_j) = & \{ \{ \{ {}^i \mathbf{p}, \{ {}^i \mathbf{g}_j \}_{j=1,2,3} \}_{i=1, \dots, nt} = ({}^i \mathbf{p}, {}^i \mathbf{g}_j) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant les conditions :} \\ & {}^1 \mathbf{p}(0) = \mathbf{0} \text{ et } {}^i \mathbf{p}(l_i) = {}^{i+1} \mathbf{p}(0) \text{ si } 1 \leq i \leq nt - 1 ; \\ & {}^1 \mathbf{g}_j(0) = \mathbf{0} \forall j \in \{1, 2, 3\} \text{ si (30) est imposé ;} \\ & {}^1 \mathbf{g}_{j_0}(0) = \mathbf{0} \text{ si (31) est imposé ;} \\ & \forall i \in \{2, \dots, nt\} \quad {}^i \mathbf{g}_{0_{j_i}}(0) = \varepsilon_i^{i-1} \mathbf{g}_{i-1_{j_{i-1}}}(l_{i-1}) \} \\ & \forall i \in \{1, \dots, nt\} \exists \mathcal{U}_i \in \mathcal{H}_i \text{ tel que : } {}^i \mathbf{g}_j = \mathcal{U}_i \wedge {}^i \mathbf{d}_j \forall j \in \{1, 2, 3\} \}\end{aligned}$$

### 4.3.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle des équations du mouvement (29) s'écrit sous la forme du problème variationnel  $[\mathcal{P}]$ :

Pour tout  $t \in [0, T]$ , trouver  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) \in \mathcal{K}_t$  tel que:  $\forall ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) \in \delta\mathcal{K}_t({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)}{\partial ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)} \cdot ({}^i\mathbf{p}, {}^i\mathbf{g}_j) &+ \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} &\{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{d}_{0l_i}(0)\} \\ &\cdot \{\cos({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{i-1k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{g}_{i-1l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &+ \{\cos({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1}\mathbf{d}_{i-1l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &\cdot \{\cos({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i\mathbf{g}_{0l_i}(0)\} \end{aligned} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} [{}^i\mathbf{f}_3(t) \cdot {}^i\mathbf{p} + {}^i\mathbf{f}_\alpha(t) \cdot {}^i\mathbf{g}_\alpha] d^i s + \mathcal{F}(t) \cdot {}^{nt}\mathbf{p}(l_{nt}) \end{aligned}$$

où on a posé:

$$\mathcal{J}({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j) = \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, t, {}^i u_j, {}^i v_k) d^i s$$

### 4.3.3 Discrétisation en temps

Nous remarquons d'abord que l'espace  $\mathcal{K}_t$  est indépendant du temps  $t$ , ainsi que les espaces  $\delta\mathcal{K}_t$ . Nous le noterons dorénavant  $\mathcal{K}$  et les espaces  $\delta\mathcal{K}_t$  seront notés  $\delta\mathcal{K}$ .

Nous procédons maintenant à une discrétisation en temps du problème variationnel  $[\mathcal{P}]$ . On se donne un pas de temps  $\Delta t$  et on écrit ainsi une suite de problèmes variationnels statiques où les dérivées temporelles de  $({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)$  [supposé suffisamment régulier en temps], sont remplacées par des expressions approchées.

On se donne un entier  $N$  et un pas de temps

$$\Delta t = \frac{T}{N}.$$

On note

$$(\mathbf{r}^n, \mathbf{d}_j^n) = ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)(n \Delta t),$$

où  $n$  appartient à  $\{0, \dots, N\}$ . Pour tout  $n$  dans  $\{0, \dots, N\}$ ,  $(\mathbf{r}^n, \mathbf{d}_j^n)$  appartient à  $\mathcal{K}$ . On introduit l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(t, ({}^i\mathbf{r}, {}^i\mathbf{d}_j)) &= \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i w^e({}^i s, t, {}^i u_j, {}^i v_k) d{}^i s - \mathcal{F}(t) \cdot {}^{nt}\mathbf{r}(l_{nt}) - \sum_{i=1}^{nt} \int_0^{l_i} {}^i \mathbf{f}({}^i s, t) \cdot {}^i \mathbf{r}({}^i s) \\ &+ \sum_{i=2}^{nt} \kappa_{i-1} \left\{ \begin{aligned} &\{\cos({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{d}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{d}_{0l_i}(0)\} \\ &\cdot \{\cos({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{g}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &+ \{\cos({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}k_{i-1}}(l_{i-1}) + \sin({}^{i-1}\theta_{i-1}) {}^{i-1} \mathbf{d}_{l_{i-1}l_{i-1}}(l_{i-1})\} \\ &\cdot \{\cos({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{g}_{0k_i}(0) + \sin({}^0\theta_i) {}^i \mathbf{g}_{0l_i}(0)\} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

et on note

$$\mathcal{L}_0^n = \mathcal{L}_0(n \Delta t, \mathbf{r}^n, \mathbf{d}_j^n).$$

Supposons maintenant  $n \geq 3$ . Nous employons la méthode de Houboldt, méthode à trois pas, inconditionnellement stable (**George** [1985]) et nous remplaçons donc les termes du type  ${}^i \ddot{\mathbf{r}}^n$  par l'approximation :

$${}^i \ddot{\mathbf{r}}^n \approx \frac{1}{\Delta t^2} \{2 {}^i \mathbf{r}^n - 5 {}^i \mathbf{r}^{n-1} + 4 {}^i \mathbf{r}^{n-2} - {}^i \mathbf{r}^{n-3}\}$$

ce qui revient à remplacer le problème variationnel  $[\mathcal{P}]$  continu en temps par la suite de problèmes  $[\mathcal{P}_n]$ :

Trouver un point critique, dans  $\mathcal{K}$ , de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n &= \mathcal{L}_0^n + \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^{nt} {}^i \mu^i \mathbf{S} \int_0^{l_i} \|{}^i \mathbf{r}^n\|^2 + [-5 {}^i \mathbf{r}^{n-1} + 4 {}^i \mathbf{r}^{n-2} - {}^i \mathbf{r}^{n-3}] \cdot {}^i \mathbf{r}^n \\ &+ \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^{nt} {}^i \mu^i \mathbf{I} \int_0^{l_i} \|{}^i \mathbf{d}_\alpha^n\|^2 + [-5 {}^i \mathbf{d}_\alpha^{n-1} + 4 {}^i \mathbf{d}_\alpha^{n-2} - {}^i \mathbf{d}_\alpha^{n-3}] \cdot {}^i \mathbf{d}_\alpha^n \end{aligned}$$

**ceci pour  $n$  supérieur ou égal à 3.**

Nous devons élaborer une procédure d'initialisation particulière pour les deux premiers itérés ( $n=1$  et  $2$ ). Nous suivons pour cela de la méthode développée dans

**Glowinski & Le Tallec** [1989]. Son principe est le suivant : on remplace les termes de dérivées secondes en temps par une approximation de Crank-Nicholson (méthode à un pas, d'ordre 2, précision maximale) :

$${}^i\ddot{\mathbf{r}}^n \approx \frac{1}{\Delta t^2} \{ {}^i\mathbf{r}^{n-1} + {}^i\mathbf{r}^{n+1} - 2 {}^i\mathbf{r}^n \} \quad n = 1, 2$$

et on recherche, non plus  ${}^i\mathbf{r}^n$  mais une approximation aux différences centrées de  ${}^i\mathbf{r}^n$ , soit

$${}^i\hat{\mathbf{r}}^n = \frac{{}^i\mathbf{r}^{n+1} + {}^i\mathbf{r}^{n-1} + 2 {}^i\mathbf{r}^n}{4}.$$

On utilise ensuite un développement limité en temps à l'instant  $t = 0$  pour obtenir :

$${}^i\mathbf{r}^2 + {}^i\mathbf{r}^0 - 2 {}^i\mathbf{r}^1 = 4 \{ {}^i\hat{\mathbf{r}}^1 - {}^i\mathbf{r}^0 - 2 \Delta t {}^i\dot{\mathbf{r}}^0 \}$$

ainsi que

$${}^i\mathbf{r}^3 + {}^i\mathbf{r}^1 - 2 {}^i\mathbf{r}^2 = 4 \{ {}^i\hat{\mathbf{r}}^2 - 4 {}^i\hat{\mathbf{r}}^1 + 3 {}^i\mathbf{r}^0 + 2 \Delta t {}^i\dot{\mathbf{r}}^0 \}.$$

L'étape d'initialisation consiste donc en la résolution du problème  $[\mathcal{P}_1]$ :

Trouver un point critique, dans  $\mathcal{K}$ , de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 &= \mathcal{L}_0^1 + \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^{nt} {}^i\mu^i \mathbf{S} \int_0^{l_i} 2 \|\mathbf{r}^1\|^2 - 4 [{}^i\mathbf{r}^0 + \Delta t {}^i\dot{\mathbf{r}}^0] \cdot {}^i\mathbf{r}^1 \\ &+ \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^{nt} {}^i\mu^i \mathbf{I} \int_0^{l_i} 2 \|\mathbf{d}_\alpha^1\|^2 - 4 [{}^i\mathbf{d}_\alpha^0 + \Delta t {}^i\dot{\mathbf{d}}_\alpha^0] \cdot {}^i\mathbf{d}_\alpha^1. \end{aligned}$$

puis du problème  $[\mathcal{P}_2]$ :

Trouver un point critique, dans  $\mathcal{K}$ , de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2 &= \mathcal{L}_0^2 + \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^{nt} {}^i\mu^i \mathbf{S} \int_0^{l_i} 2 \|\mathbf{r}^2\|^2 + 4 [-4 {}^i\mathbf{r}^1 + 3 {}^i\mathbf{r}^0 + 2 \Delta t {}^i\dot{\mathbf{r}}^0] \cdot {}^i\mathbf{r}^2 \\ &+ \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\Delta t^2} \sum_{i=1}^{nt} {}^i\mu^i \mathbf{I} \int_0^{l_i} 2 \|\mathbf{d}_\alpha^2\|^2 + 4 [-4 {}^i\mathbf{d}_\alpha^1 + 3 {}^i\mathbf{d}_\alpha^0 + 2 \Delta t {}^i\dot{\mathbf{d}}_\alpha^0] \cdot {}^i\mathbf{d}_\alpha^2. \end{aligned}$$

#### 4.4 Résolution numérique pour le cas inextensible

Nous avons réduit le problème dynamique de départ à une suite de problèmes statiques. Les procédures de résolution de ces problèmes statiques ont été détaillées précédemment et nous ne les reprenons pas ici. Nous nous contentons de présenter quelques cas tests.

##### 4.4.1 Cas sans raccord : Poutre en rotation

Nous considérons le cas d'une seule poutre, de longueur  $L$ , reliée à un support fixe par une rotule. Le chargement de la structure consiste, en plus du poids propre, en un effort ponctuel appliqué à l'extrémité libre de la poutre. Nous imposons l'angle de rotation de la poutre à la rotule :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1(0, t) &= \underline{e}_2^a \\ \mathbf{d}_2(0, t) &= -\sin(\Phi(t))\underline{e}_1^a + \cos(\Phi(t))\underline{e}_3^a \\ \mathbf{d}_3(0, t) &= \cos(\Phi(t))\underline{e}_1^a + \sin(\Phi(t))\underline{e}_3^a \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \frac{\pi t}{5} \text{ si } t \leq 2.5s \\ &= \frac{\pi}{2} \text{ si } t > 2.5s \end{aligned}$$

Le maillage de la poutre comprend 25 éléments. Nous avons effectué nos tests avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{S} &= 1 \text{ kg/m}, \\ L &= 10 \text{ m}, \\ T &= 10 \text{ s}, \Delta t = 0.5 \text{ s}, \\ \alpha &= 0.1, \beta = 0. \end{aligned}$$

Nous avons testé notre algorithme pour quelques valeurs de la rigidité à la flexion  $\mathbf{EI}$ , ainsi que pour quelques valeurs de l'effort ponctuel  $\mathcal{F}$  (figures 4.4.1 à 4.4.1).

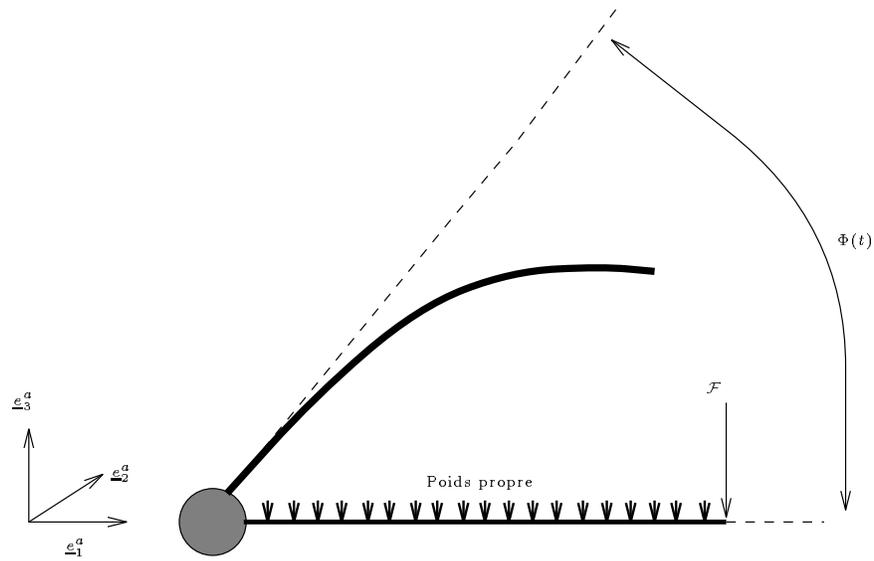


FIG. 21 – Poutre en rotation

#### 4.4.2 Poutres en flexion

- Cas d'une articulation élastique.

Nous considérons maintenant une structure formée de deux poutres, de longueurs égales  $L$ , chargée dans son plan, le plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$ , par son poids propre, dirigé par  $\underline{e}_3^a$  (figures 25 à 27).

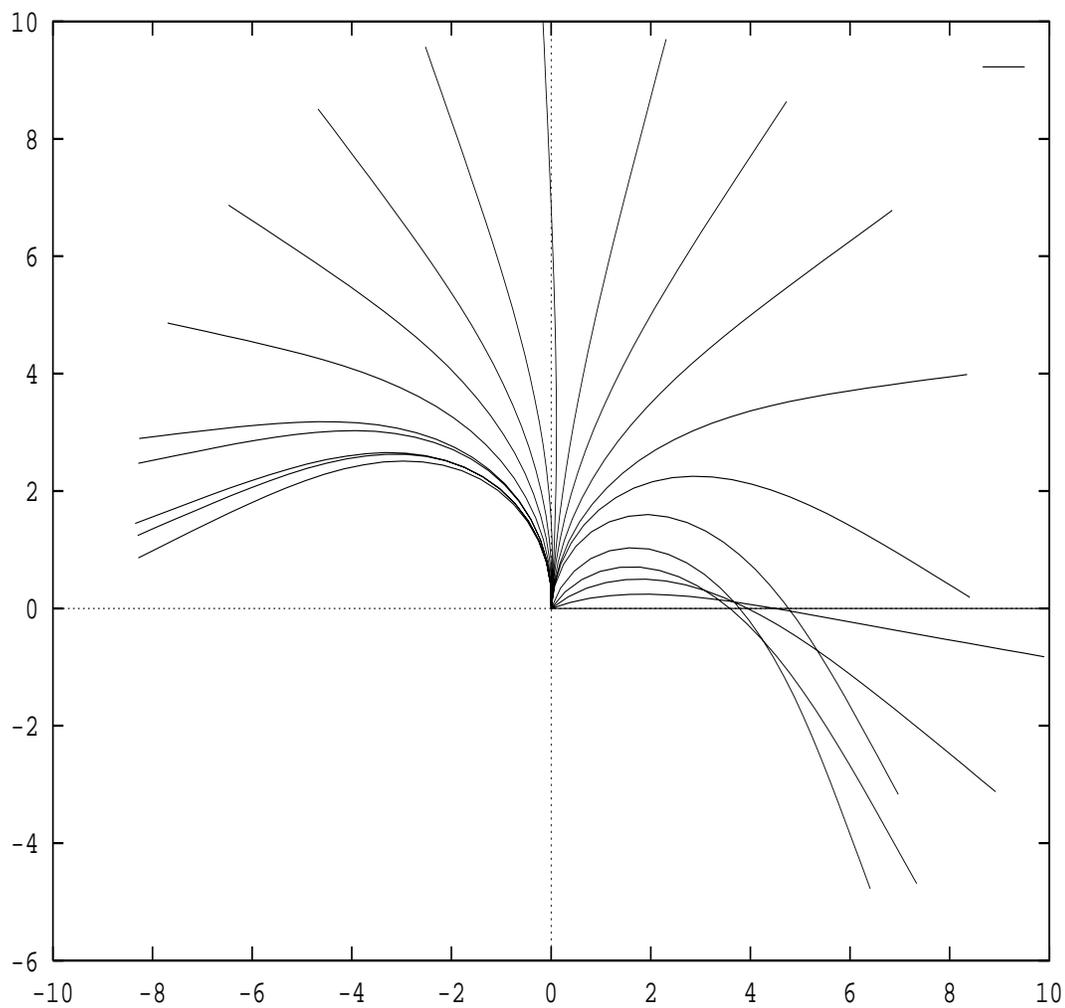
Cette structure est articulée en  $\mathbf{B}$ . L'articulation, d'axe  $\underline{e}_2^a$  a pour raideur  $\kappa_1 = 10N \times m$ . Nous imposons en outre l'angle de rotation de la poutre 1 en  $\mathbf{A}$  :

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{d}_1(0, t) &= \underline{e}_2^a \\ {}^1\mathbf{d}_2(0, t) &= -\sin(\Phi(t))\underline{e}_1^a + \cos(\Phi(t))\underline{e}_3^a \\ {}^1\mathbf{d}_3(0, t) &= \cos(\Phi(t))\underline{e}_1^a + \sin(\Phi(t))\underline{e}_3^a \end{aligned}$$

avec :

$$\Phi(t) = \pi t$$

Enfin l'extrémité  $\mathbf{C}$  de la poutre 2 est laissée libre.

FIG. 22 -  $\mathbf{EI} = 1000 N \times m^2, \mathcal{F} = +1 N$

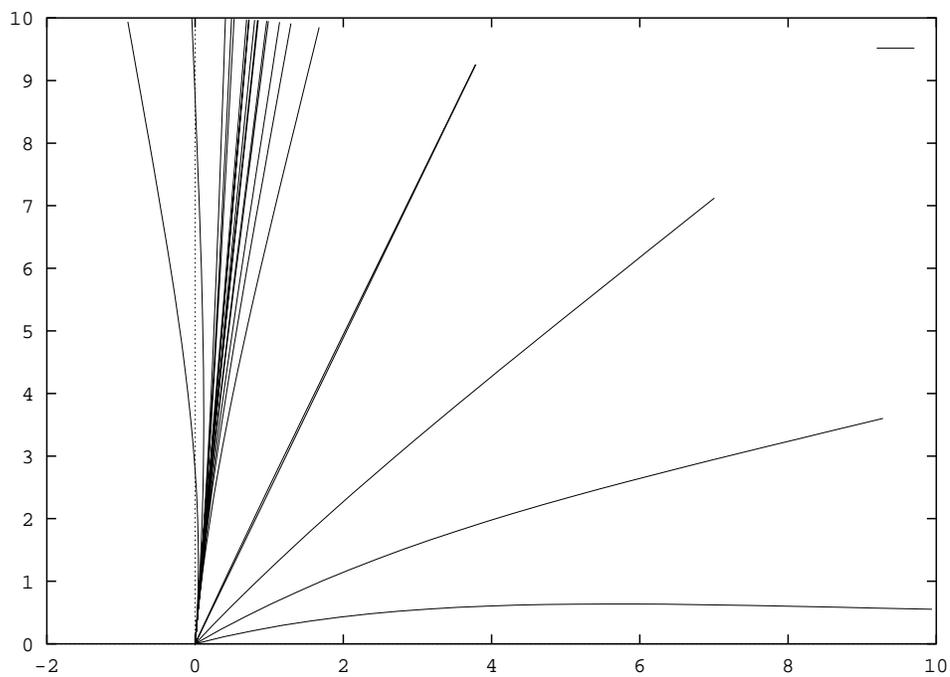


FIG. 23 -  $EI = 10^4 N \times m^2, \mathcal{F} = +1 N$

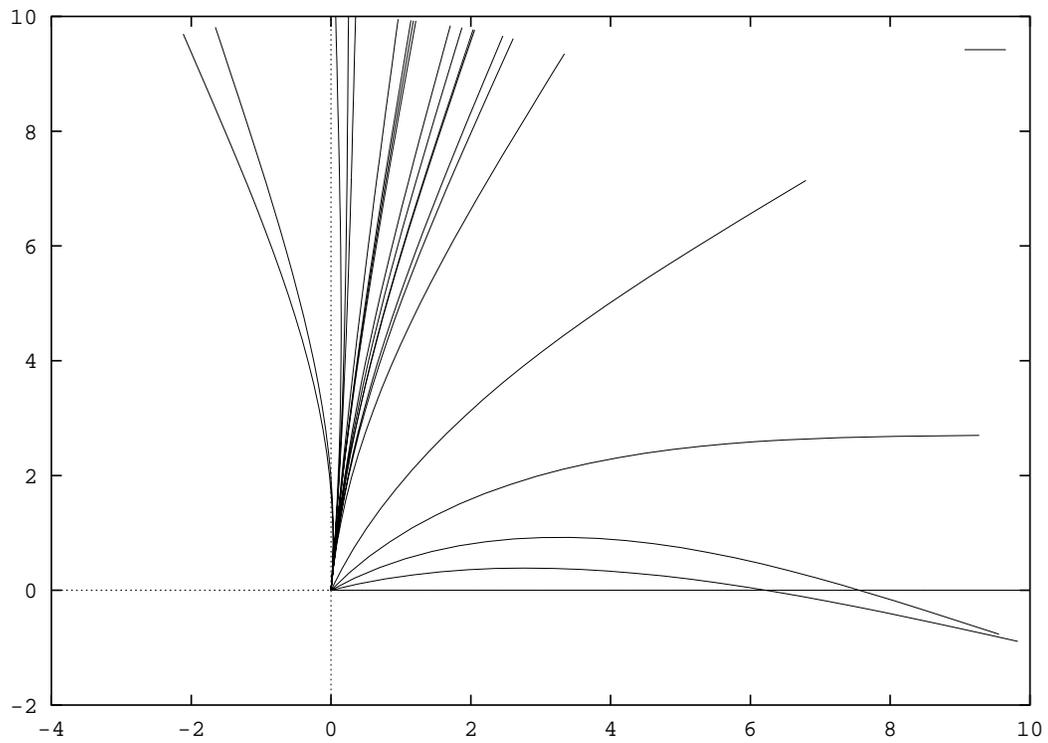
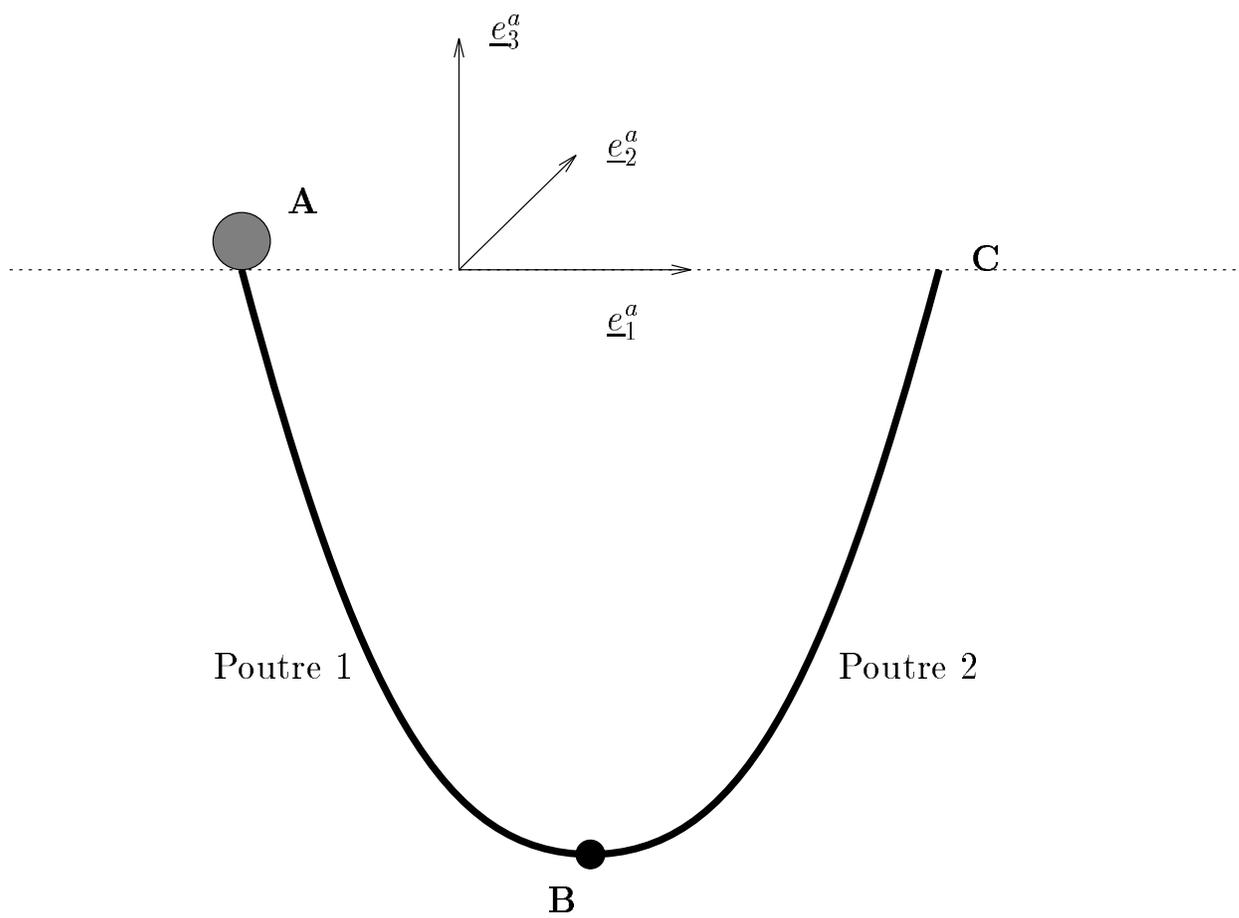


FIG. 24 -  $\mathbf{EI} = 10^4 N \times m^2, \mathcal{F} = +100 N$

FIG. 25 – *Configuration initiale*

Notre maillage est formé de 25 éléments par poutre. Le pas de temps choisi vaut  $\Delta t = 0.05s$ . Nous avons effectué nos tests avec les paramètres suivants, identiques pour les deux poutres :

$$\begin{aligned}EI &= 700 \text{ N} \times \text{m}^2 \\ L &= 16.3 \text{ m}, \mu S = 7.67 \text{ kg/m}\end{aligned}$$

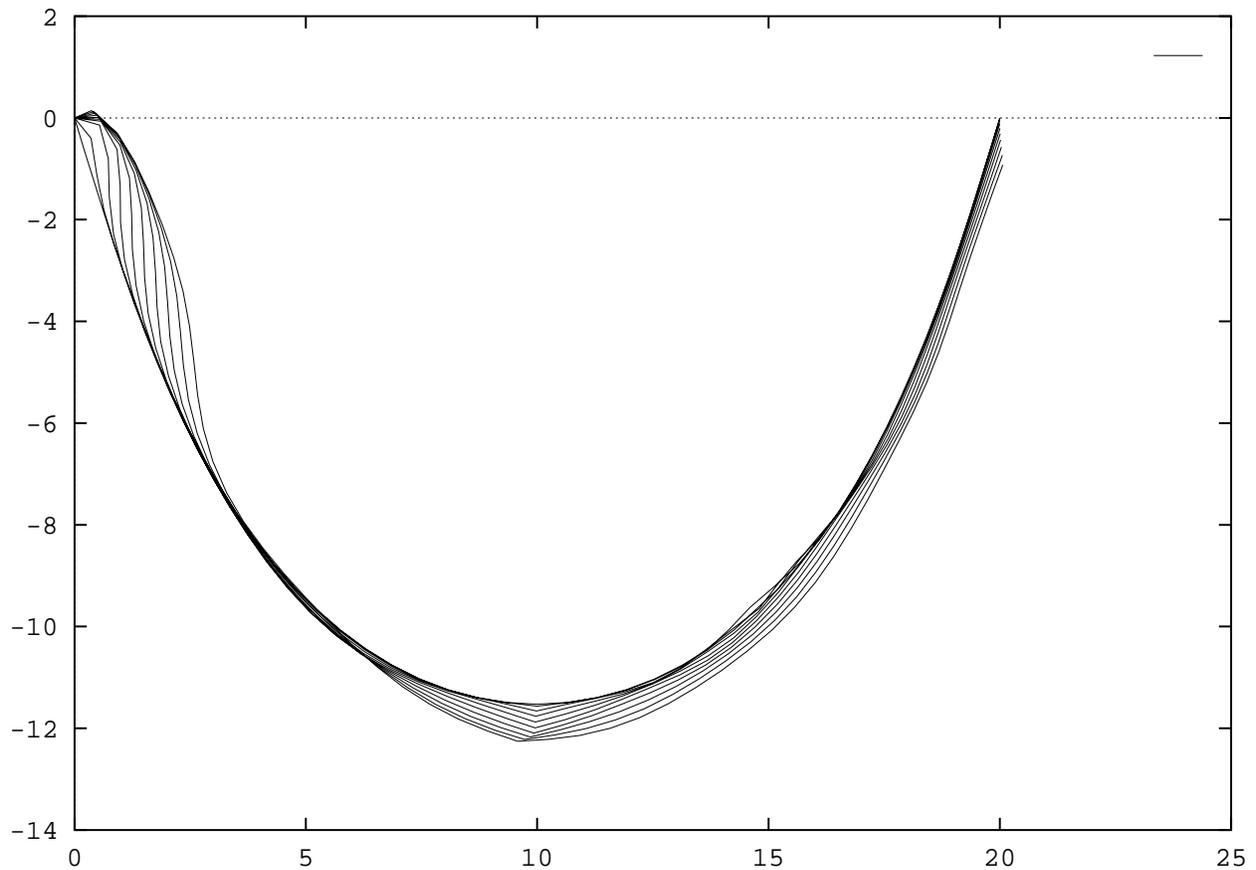


FIG. 26 – Charnière élastique - Temps  $[0; 0.5s]$

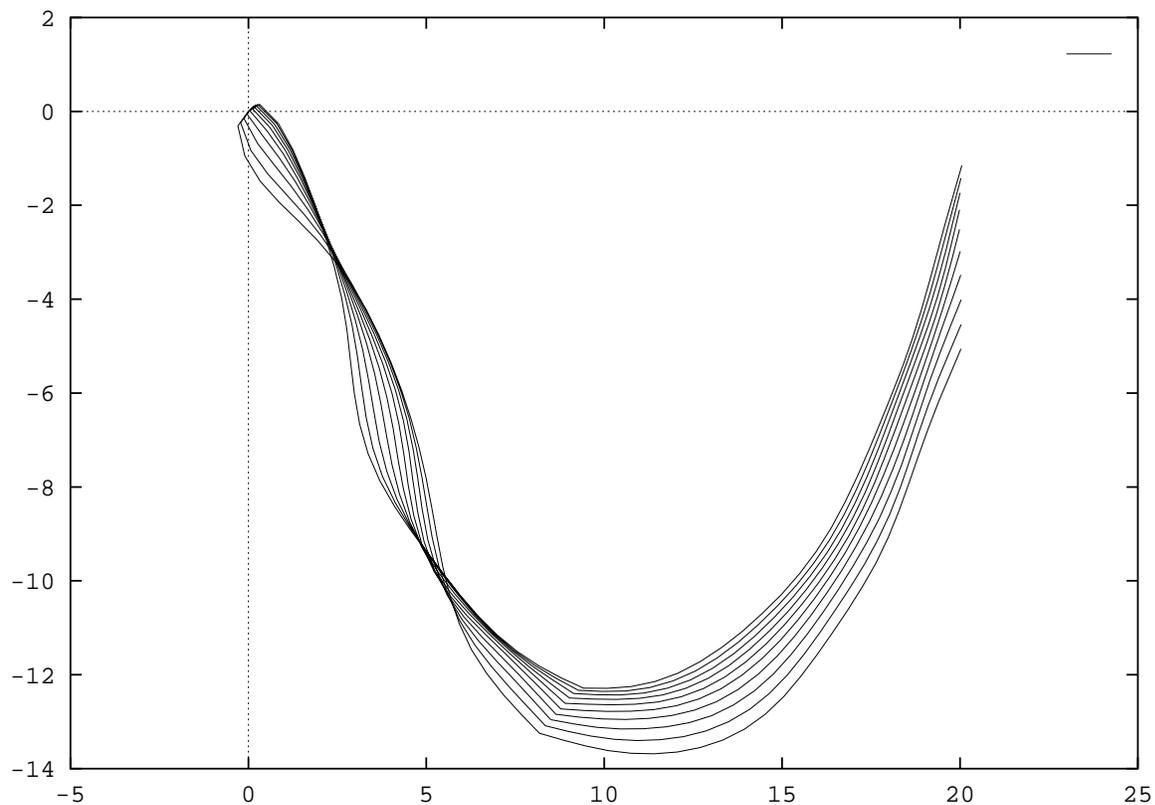


FIG. 27 – Charnière élastique - Temps [0.5 s; 1 s]

• Cas d'une articulation libre.

Nous considérons une structure formée de deux poutres, de longueurs égales  $L$ , chargée dans son plan, le plan  $(\underline{e}_1^a, \underline{e}_3^a)$ , par son poids propre, dirigé par  $\underline{e}_3^a$  (figures 28 à 4.4.2). Cette structure est articulée en **B**. Nous considérons le cas limite où

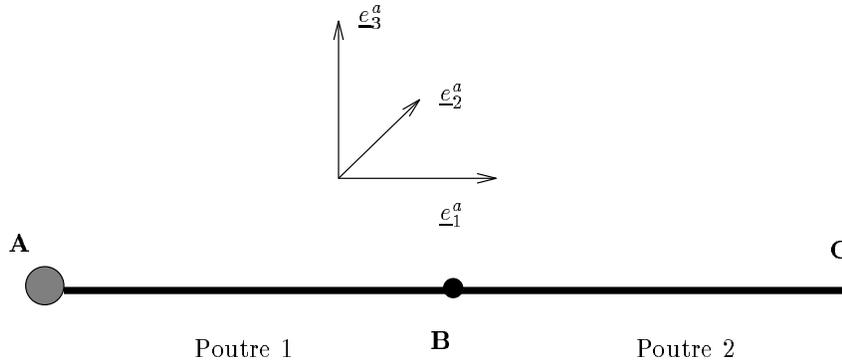


FIG. 28 – *Configuration initiale*

l'articulation, d'axe  $\underline{e}_2^a$ , a pour raideur  $\kappa_1 = 0$ . Nous imposons en outre l'angle de rotation de la poutre 1 en A :

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{d}_1(0, t) &= \underline{e}_2^a \\ {}^1\mathbf{d}_2(0, t) &= -\sin(\Phi(t))\underline{e}_1^a + \cos(\Phi(t))\underline{e}_3^a \\ {}^1\mathbf{d}_3(0, t) &= \cos(\Phi(t))\underline{e}_1^a + \sin(\Phi(t))\underline{e}_3^a \end{aligned}$$

avec :

$$\Phi(t) = \pi t$$

Enfin l'extrémité **C** de la poutre 2 est laissée libre.

Notre maillage est formé de 25 éléments par poutre. Le pas de temps choisi vaut  $\Delta t = 0.05s$ . Nous avons effectué nos tests avec les paramètres suivants, identiques pour les deux poutres :

$$\begin{aligned} \mathbf{EI} &= 2000 \text{ N} \times \text{m}^2 \\ L &= 3 \text{ m}, \mu\mathbf{S} = 7.67 \text{ kg/m} \end{aligned}$$

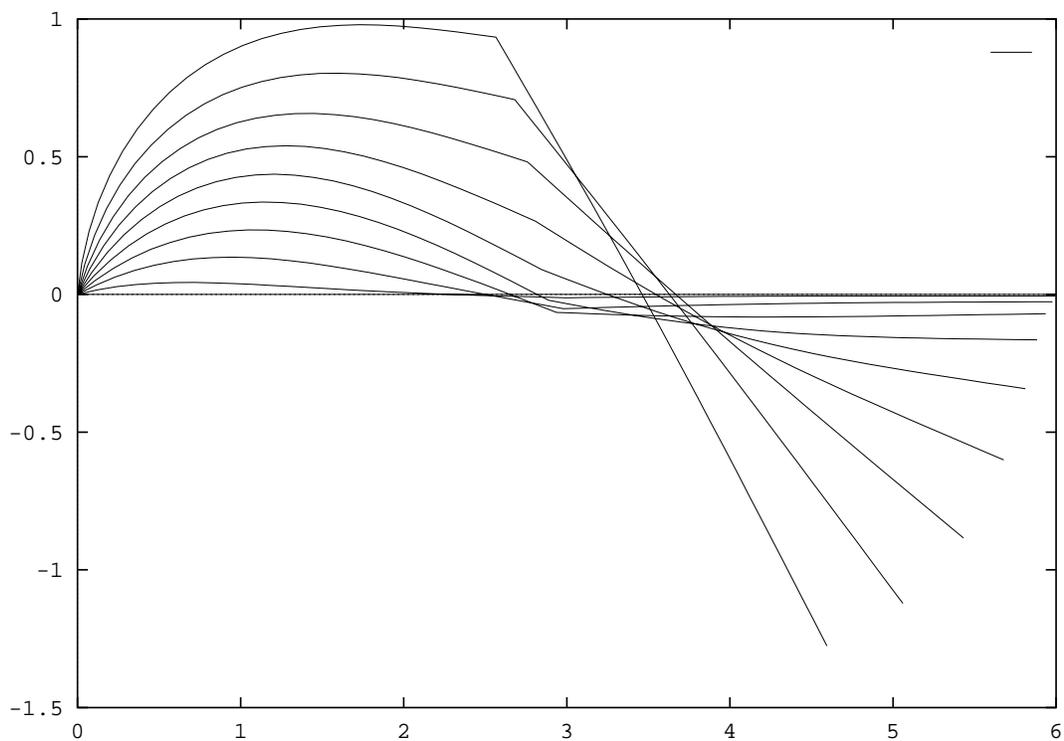


FIG. 29 – Charnière libre - Temps [0; 0.5s]

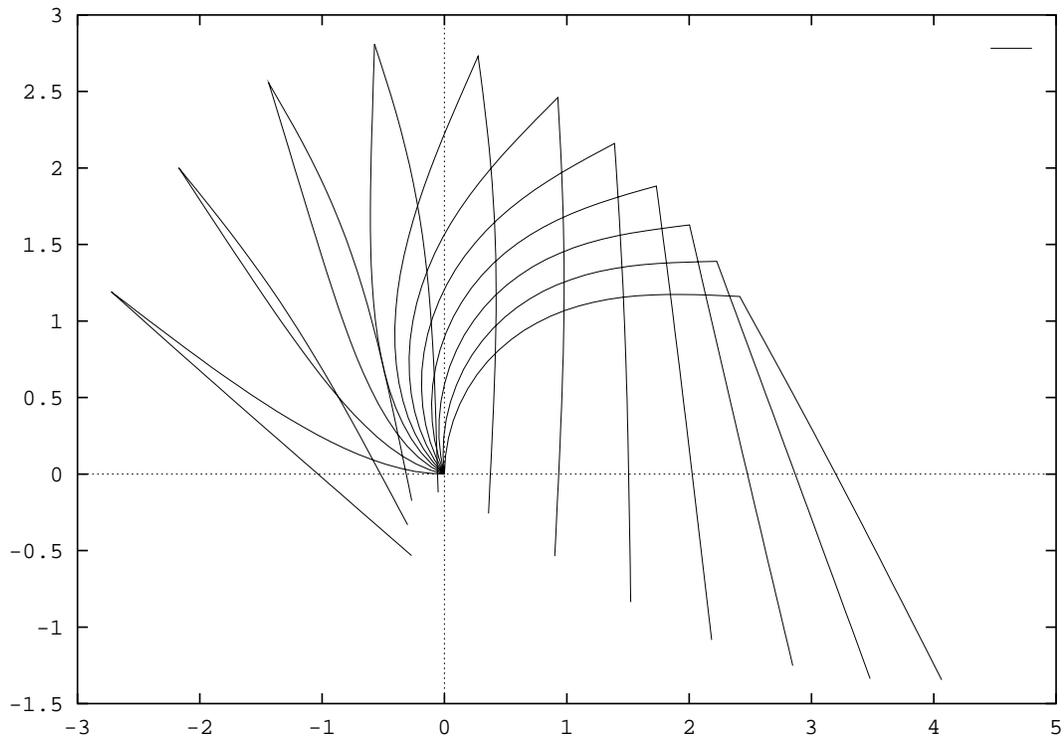


FIG. 30 – Charnière libre - Temps  $[0.5s; 1s]$

## 5 Conclusion

Nous avons montré dans un précédent rapport (**Chajmowicz** [1998.1]), comment adapter le formalisme géométriquement exact au cas de structures polyarticulées formées de poutres droites.

Ce rapport montre une façon de tirer parti de ce formalisme pour forger un outil de simulation qui s'avère facile d'emploi - il ne requiert qu'un très faible nombre de paramètres - et robuste.

Parmi les perspectives de ce travail, citons l'application du formalisme géométriquement exact à des problèmes de contrôle de structures complexes ou une résolution numérique simplifiée de problèmes de jonction plaque-poutre.

## Références

- [1] ARGYRIS J. [1982]: *An Excursion into Large Rotations*, Computer Methods in Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 85-155.
- [2] BECK M. [1955]: *Knickung gerader Stäbe durch Druck und konservative Torsion*; Ingenieur-Archiv, XXIII. Band, Viertes Heft, pp. 231-253.
- [3] BISSHOPP K.E., DRUCKER D.C. [1945]: *Large Deflection of Cantilever Beams*, Quarterly of Applied Math., Vol. 311, n° 3.
- [4] BOURGAT J.F., LE TALLEC P., MANI S. [1988]: *Modélisation et calcul des grands déplacements de tuyaux élastiques en flexion-torsion*, Journal de Mécanique théorique et appliquée, Vol. 7, n° 4, pp. 379-408.
- [5] CHAJMOWICZ H. [1996]: *Modélisation et simulation numérique de structures articulées flexibles*, Thèse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, juin 1996.
- [6] CHAJMOWICZ H. [1998.1]: *Un modèle géométriquement exact de jonction de poutres*, Rapport de recherche INRIA n° 3372.
- [7] GEORGE P.L. [1985]: *Problèmes évolutifs*, Rapport MODULEF n° 63, INRIA, 1985.
- [8] GLOWINSKI R., LE TALLEC P. [1989]: *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics* SIAM Studies in Applied Mathematics.
- [9] HUGHES T.J.R, WINGET J. [1980]: *Finite Rotation Effects in Numerical Integration of Rate Constitutive equations Arising in Large Deformation Analysis*, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 15, pp. 1413-1418.
- [10] LE TALLEC P., MANI S., ROCHINHA F.A. [1992]: *Finite element computation of hyperelastic rods in large displacements*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 26, n° 5, pp. 595-625.

- [11] SIMO J. [1985]: *A Finite Strain Beam Formulation. The three-dimensional Dynamic Problem - Part I*; Comp. Meth. App. Mech. Eng., Vol. 49, pp. 55-70.
- [12] ZIEGLER H. [1952]: *Knickung gerader Stäbe unter Torsion*; ZAMP, Vol. 3, pp. 96-119.



---

Unit ´e de recherche INRIA Lorraine, Technop ˆole de Nancy-Brabois, Campus scientifique,  
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY  
Unit ´e de recherche INRIA Rennes, Irista, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex  
Unit ´e de recherche INRIA Rh ˆone-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN  
Unit ´e de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex  
Unit ´e de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

---

´Editeur  
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)  
ISSN 0249-6399