



HAL
open science

La décomposition orthogonale propre appliquée aux équations de Navier-Stokes compressible instationnaire

Guillaume Vigo

► **To cite this version:**

Guillaume Vigo. La décomposition orthogonale propre appliquée aux équations de Navier-Stokes compressible instationnaire. RR-3385, INRIA. 1998. inria-00073304

HAL Id: inria-00073304

<https://inria.hal.science/inria-00073304>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***La Décomposition Orthogonale Propre
Appliquée aux équations de Navier-Stokes
compressible instationnaire***

Guillaume VIGO

N° 3385

Mars 1998

THÈME 4



***rapport
de recherche***

La Décomposition Orthogonale Propre Appliquée aux équations de Navier-Stokes compressible instationnaire

Guillaume VIGO*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet SINUS et Dassault Aviation

Rapport de recherche n° 3385 — Mars 1998 — 42 pages

Résumé : La méthode de décomposition orthogonale propre (ou **P.O.D.**) introduite par Lumley [1] permet de transformer un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) en un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires (EDO) en utilisant des solutions de l'EDP. Dans ce rapport, nous présentons une extension de l'approche P.O.D., aux équations de Navier-Stokes compressible et une résolution basée sur une discretisation par maillage non structuré. On décrit la méthode numérique utilisée pour développer un système dynamique ainsi que les choix liés à l'implantation informatique. Les problèmes de stabilité numérique sont étudiés. La possibilité d'utiliser des techniques d'assimilation de données est exposée. Les méthodes proposées sont testées dans le cas d'un écoulement instationnaire périodique autour d'un profil NACA0012 à Mach 0.2 et 20° d'incidence.

Mots-clés : POD - Ecoulement compressible - Maillage non structuré - éléments finis - stabilité - assimilation

* E-mail: guillaume.vigo@dassault-aviation.fr

The Proper Orthogonal Decomposition applied to unsteady compressible Navier-Stokes equations

Abstract: The Proper Orthogonal Decomposition method (**P.O.D.**), first described by Lumley [1], allows the transformation of a system of partial differential equations into a system of ordinary differential equations by taking into account a set of typical solutions of the PDE. This report presents an extension of the POD method to compressible Navier-Stokes equations and a solution where space discretisation is based on unstructured meshes. The numerical approach developed is described along with choices related to efficient implementation. The problem of numerical stability is discussed. Use of data assimilation techniques is described. The proposed methods are tested for the unsteady periodic flow over NACA0012 airfoil at Mach 0.2 and an angle of attack of 20° .

Key-words: POD - compressible flow - unstructured mesh - finite elements - stabilization - assimilation

1 INTRODUCTION

La simulation en milieu industriel prend une part prépondérante dans le cycle de conception des produits futurs et modifie profondément le mode de conception. Elle permet une réduction des coûts, une plus grande précision des prédictions et s'intègre naturellement dans une organisation de type ingénierie concourante. Les études de conception en aéronautique nécessitent de mettre en oeuvre différents codes de modélisation. Ces codes résolvent les équations d'Euler ou de Navier-Stokes, de façon générale, et peuvent être utiles dans de nombreuses simulations. Ils fonctionnent en effet pour de nombreux types de maillages et d'écoulements, et proposent des degrés de précision variables. Ces codes sont caractérisés par la grande richesse de la modélisation physique (Navier-Stokes, turbulence, ...), ainsi que la grande adaptabilité à des configurations très diverses. Il existe des codes à physique simplifiée beaucoup moins chers et applicables à des configurations moins diverses. Dans cette étude on considère des méthodes qui permettent de simuler une physique riche mais des calculs plus simples car *spécialisés à une petite famille d'écoulements*.

Ce logiciel utilisera une approche par décomposition orthogonale introduite par Lumley [1] pour transformer le système d'équation aux dérivées partielles que constituent les équations de Navier-Stokes, en un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires. L'intérêt est d'utiliser par la suite ces systèmes d'EDO pour la conception à l'aide de la simulation numérique de contrôle d'écoulement (ou mécanique des fluides active).

Dans un premier temps ce rapport introduira et décrira la méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres (ou **P.O.D.**). Par la suite une deuxième partie exposera la modélisation du système dynamique, tout d'abord dans les cas déjà étudiés dans la littérature d'écoulements incompressibles à faible nombre de Reynolds, puis dans les cas qui nous intéressent d'écoulements compressibles. Les problèmes de stabilisation seront discutés et les stratégies d'implantation seront décrites. L'application de technique d'assimilation sera expliquée. Enfin une dernière partie présentera une application de la P.O.D. et de la modélisation dynamique à l'écoulement autour d'un profil d'aile NACA0012 en incidence.

2 La Décomposition Orthogonale Propre

La P.O.D. ou Décomposition Orthogonale aux valeurs Propres permet de construire des systèmes dynamiques représentatifs de phénomènes pour lesquels on dispose de réalisations instantanées. Cette méthode s'appuie sur une décomposition sur une base propre de modes définis à partir d'une sélection des valeurs propres de la matrice des corrélations temporelles d'un certain nombre de réalisations de l'écoulement. Des approches semblables ont été proposées pour l'analyse de résultats expérimentaux [1, 2] et récemment pour la reconstruction du comportement dynamique d'écoulements incompressibles ([3, 4, 5]) à faible nombre de Reynolds. Ces approches seront étendues au système des équations de Navier-Stokes compressible. Cette extension implique en particulier la définition d'une norme permettant l'évaluation cohérente de la matrice de corrélation. Une discrétisation en éléments finis sera adoptée pour l'évaluation des produits scalaires. On étudiera la robustesse de cette approche pour des écoulements simples (périodiques et caractérisés par une fréquence dominante).

Il existe deux types de Décomposition Orthogonale fonction du type de données étudiées :

- une POD temporelle (voir [6], [5]) dite méthode classique utile lors d'approches expérimentales où en général une excellente représentation temporelle est obtenue au détriment de la résolution spatiale souvent faible (la méthode expérimentale P.I.V. "Particle Image Velocimetry" est une exception),
- une POD spatiale appelée méthode des clichés utilisée au contraire lors d'approches basées sur des simulations numériques, le maillage spatial étant important et la taille temporelle forcément limitée par les coûts de calcul.

Quelle que soit la méthode utilisée ("classique" ou "clichés"), on cherche une base discrète de l'écoulement $u(x, t)$, $x \in \mathcal{D}$ et $t \in \mathbb{R}$ (avec \mathcal{D} le domaine spatial), permettant d'approximer toute réalisation spatio-temporelle $u(x, t)$ sous la forme :

$$u(x, t) \approx \bar{u}(x) + \sum_{j=1}^{MOD} y_j(t) \Psi_j(x),$$

où \bar{u} est le champ moyen, MOD le nombre de modes POD obtenus dans la résolution du problème de la décomposition orthogonale. Le problème de la détermination des modes revient alors à rechercher à partir d'un ensemble fini de N réalisations instantanées (ou clichés) $\{u_i(x), i \in [1, N], x \in \mathcal{D}\}$ de l'écoulement $u(x, t)$, la réalisation $\Psi(x)$ "ressemblant le plus" en moyenne (selon un sens à définir) aux réalisations $\{u_i(x)\}_{i=1, N}$. Cette procédure peut s'assimiler à la recherche, dans l'espace des réalisations, d'une direction privilégiée traductrice de l'organisation principale de l'écoulement. Le reliquat de cette

projection est à son tour décomposé suivant le même principe et ce procédé est poursuivi jusqu'au dernier mode de la décomposition. En fait, la méthode extrait les axes principaux de l'écoulement. C'est une méthode d'analyse des données, la méthode de décomposition en composantes principales. Puisque nous sommes uniquement intéressés par des problèmes de modélisation de systèmes provenant de simulations numériques seule la méthode des clichés est étudiée dans ce document.

Principe de la méthode :

A partir d'un ensemble fini de clichés $\{u_i(x), i \in [1, N], x \in \mathcal{D}\}$ (où N est le nombre de clichés), on calcule la réalisation moyenne \bar{u} qui constitue la nouvelle origine de notre espace des réalisations

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(x). \quad (1)$$

On calcule ensuite la matrice de corrélation temporelle K des réalisations centrées, telle que

$$K_{i,j} = (u_i - \bar{u}, u_j - \bar{u}), \quad i \text{ et } j \in [1, N] \quad (2)$$

où l'opérateur $(., .)$ est un produit scalaire. Dans notre cas nous utiliserons le produit scalaire L^2 classique :

$$(u, v) = \int_{\mathcal{D}} uv \quad (3)$$

K est alors symétrique positive. Cette matrice de corrélation quantifie la façon dont les réalisations sont liées les unes aux autres. Le but étant de créer une base, il est nécessaire de diagonaliser cette matrice, les vecteurs de la nouvelle base (appelés modes) orthogonaux entre eux sont alors les suivants :

$$\Psi_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} u_j \quad (4)$$

où $\alpha_{i,j}$ est la j^{eme} coordonnée du i^{eme} vecteur propre de K (les vecteurs propres ayant été classés par ordre des valeurs propres décroissantes en supprimant la valeur propre nulle).

L'écoulement $u(x, t)$ dans la nouvelle base est alors le suivant :

$$u(x, t) \simeq \bar{u}(x) + \sum_{j=1}^{MOD} y_j(t) \Psi_j(x), \quad (5)$$

où

$$(MOD \leq N - 1),$$

y_j sont les coordonnées de u dans la nouvelle base, qui sont des coefficients purement temporels issus de la décomposition tels que $y_j = (u - \bar{u}, \Psi_j)$ est la projection de u centré sur le j^{eme} mode.

3 Développement du système dynamique

3.1 Cas Général

On considère le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u), \text{ avec } u = u(x, t), x \in \mathcal{D} \text{ et } t \in \mathbb{R} \quad (6)$$

où F est un opérateur différentiel contenant uniquement des dérivées spatiales et où \mathcal{D} est le domaine étudié. Pour que le problème mathématique soit bien posé, il faut notamment ajouter :

- des conditions aux limites,
- des conditions initiales.

Le but est maintenant d'utiliser la POD pour transformer ce système d'équations aux dérivées partielles (EDP) (6) en un ensemble d'équations différentielles ordinaires (EDO).

Pour cela projetons l'équation (6) sur les différents modes Ψ_i :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \Psi_i\right) = (F(u), \Psi_i), \quad (7)$$

en dérivant l'équation (5) on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=1}^{MOD} \frac{dy_j}{dt} \Psi_j. \quad (8)$$

On peut alors remplacer $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans (7) ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \Psi_i\right) &= \left(\sum_{j=1}^{MOD} \frac{dy_j}{dt} \Psi_j, \Psi_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{MOD} \frac{dy_j}{dt} (\Psi_j, \Psi_i). \end{aligned} \quad (9)$$

La base des modes étant une base orthogonale, on a finalement :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \Psi_i\right) = \frac{dy_i}{dt} (\Psi_i, \Psi_i). \quad (10)$$

On a donc remplacé l'équation (6) par le système (EDO) suivant :

$$\frac{dy_i}{dt}(\Psi_i, \Psi_i) = (F(u), \Psi_i), \quad i \in [1, MOD]. \quad (11)$$

Dans les paragraphe suivant on développera ce système de façon à le rendre plus exploitable.

3.2 Ecoulement Incompressible

On présente dans cette section le développement du système dynamique dans le cas d'un écoulement incompressible (pour plus de précision voir [7]). En fait on explicite le second terme du système (11).

L'écoulement est régi par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot \nabla u - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 u \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u \cdot n = 0 \text{ sur la frontière intérieure} \\ p = 0 \text{ sur la frontière extérieure} \end{array} \right. \quad (12)$$

où

- u est la vitesse,
- p la pression,
- ρ la masse volumique,
- ν la viscosité cinématique,
- n la normale à la surface.

Effectuons la projection de Galerkin de l'équation 1 de (12) sur les modes Ψ_i

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + \frac{\nabla p}{\rho} - \nu \nabla^2 u, \Psi_i \right) = 0. \quad (13)$$

Remplaçons u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ en utilisant les équations (5) et (10), et appliquons les conditions aux bords, on obtient alors après un certain nombre de calculs, l'équation suivante :

$$\frac{dy_i}{dt} = a_i + \sum_j b_{ij} y_j + \sum_{j,k} c_{ijk} y_j y_k. \quad (14)$$

Le système EDO qui a été obtenu est un système EDO non linéaire polynomial à coefficients constants. Il suffit maintenant d'avoir des conditions initiales sur les coefficients $\{y_i\}_{1..MOD}$ pour pouvoir prédire (en utilisant une méthode d'intégration numérique) l'évolution du système.

L'algorithme à appliquer pour obtenir le champ de vitesses à un instant donné est très simple :

- on calcule les coefficients $a_i, b_{i,j}, c_{i,j,k}$,
- on définit une condition initiale sur les y_j ,
- on applique l'équation (14) discrétisée,
- on recommence jusqu'au temps voulu.

3.3 Ecoulement Compressible

Dans cette partie on décrit tout d'abord les équations d'Euler et de Navier-Stokes en variables conservatives pour un écoulement compressible, puis on présente les problèmes liés au développement du système dynamique et enfin on expose les méthodes utilisées.

3.3.1 Equation d'Euler et de Navier-Stokes

On appelle \mathbf{U} le vecteur des variables conservatives (2D) :

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \rho \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ e \end{Bmatrix} \quad (15)$$

\mathbf{F} le flux advectif et \mathbf{F}^d le flux diffusif :

$$\mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{1i} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{2i} \\ \rho u_i e + p u_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}^d_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ \tau_{ij} u_j - q_i \end{Bmatrix} \quad (16)$$

et \mathcal{F} la source

$$\mathcal{F} = \rho \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_i u_i + r \end{array} \right\} \quad (17)$$

Les variables de ces équations sont les variables naturelles de l'écoulement, dans le cas d'un problème en deux dimensions :

- ρ est la densité,
- $\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\}$ est le vecteur vitesse,
- e est l'énergie massique, somme de l'énergie interne massique, $\iota = C_v.T$, et de l'énergie cinétique massique, $\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}$,
- T est la température,
- C_v est la capacité calorifique à volume constant,
- p est la pression thermodynamique,
- $\underline{\underline{\tau}} = [\tau_{ij}] = [\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})]$ est le tenseur des efforts visqueux, où λ et μ sont les coefficients de viscosités,
- $\mathbf{q} = -\kappa \nabla.T = \left\{ \begin{array}{l} q_1 \\ q_2 \end{array} \right\}$ est le vecteur flux de chaleur, et κ est le coefficient de conductivité thermique,
- $\mathbf{b} = \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \end{array} \right\}$ est le vecteur d'effort par unité de masse,
- r rend compte des sources de chaleur.

On peut alors vérifier que les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire en fonction de ces nouvelles variables, de façon très synthétique :

$$\mathbf{U}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i} = \mathbf{F}^d_{i,i} + \mathcal{F}. \quad (18)$$

Dans un premier temps et afin de simplifier le problème, seules les équations d'Euler ont été étudiées :

$$\mathbf{U}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i} = 0. \quad (19)$$

L'opérateur différentiel $F(U)$ de l'équation (6) est le suivant

$$F(U) = -\mathbf{F}_{i,i}.$$

3.3.2 Système Dynamique

Pour pouvoir développer le système dynamique, il faut choisir les divers paramètres qui vont être utilisés :

Quelles variables prendre ?

- les variables conservatives,

$$\mathbf{U} = \rho \begin{Bmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ e \end{Bmatrix}$$

- les variables primitives,

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ p \end{Bmatrix}$$

- ou les variables entropiques,

$$\mathbf{W} = \frac{1}{T} \begin{Bmatrix} \mu - \frac{u^2}{2} \\ u_1 \\ u_2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

on note μ le potentiel chimique ($\mu = h - TS$ où h est l'enthalpie et S l'entropie).

Quel produit scalaire définir ?

- Contrairement au cas incompressible le produit scalaire

$$(U, V) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i (U_i, V_i)$$

n'est pas dimensionnellement consistant (sauf dans le cas où les variables entropiques sont utilisées et dans le cadre d'une formulation décrite dans [8]).

- On peut envisager de traiter les variables séparément, utilisant par exemple une base propre pour la densité, une pour la pression et une pour les vitesses.

Dans tous les cas un problème apparaît, le système EDO n'est plus comme dans le cas d'un écoulement incompressible, un système EDO non linéaire polynomial à coefficients constants.

En effet, supposons que l'on utilise les variables conservatives, la POD permet d'obtenir le système suivant :

$$U(x, t) = \bar{U}(x) + \sum_{j=1}^{MOD} Y_j(t) \Psi_j(x), \quad (20)$$

avec

- \bar{U} le champ moyen,

$$\bar{U} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} u_1 \\ \bar{\rho} u_2 \\ \bar{\rho} e \end{array} \right\}$$

- Ψ_j le j^{ieme} mode,

$$\Psi_j = \left\{ \begin{array}{c} \Psi_j^{(\rho)} \\ \Psi_j^{(\rho u_1)} \\ \Psi_j^{(\rho u_2)} \\ \Psi_j^{(\rho e)} \end{array} \right\}$$

- et enfin Y_j le j^{ieme} coefficient qui varie en fonction du produit scalaire choisi :

$$Y_j = \left\{ \begin{array}{c} y_j^{(\rho)} \\ y_j^{(\rho u_1)} \\ y_j^{(\rho u_2)} \\ y_j^{(\rho e)} \end{array} \right\} \text{ si on utilise des variables séparées,}$$

$$Y_j = \{y_j\} \text{ sinon.}$$

Développons la 2^{ième} équation du système (19) :

$$(U_t)_2 + (F_{1,1})_2 + (F_{2,2})_2 = 0,$$

ou

$$\frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t} + \frac{\partial u_1(\rho u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(u_2(\rho u_1))}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (21)$$

qui devient en variables conservatives

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{U_2^2}{U_1})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{U_2 U_3}{U_1})}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (22)$$

Si l'on utilise (20) dans l'équation précédente, des fractions rationnelles apparaissent dans le développement des termes $(\frac{U_2^2}{U_1})$ et $(\frac{U_2 U_3}{U_1})$, ce qui pour le moment, empêche de simplifier le système (19). En écoulement compressible, on n'a pas pu expliciter le système (11), on est donc obligé de procéder différemment, c'est à dire, on doit calculer directement à chaque pas de temps le terme $(F(U), \Psi_j)$.

3.3.3 Méthodes Développées

On va maintenant exposer les méthodes utilisées jusqu'ici pour développer le système dynamique. Tout d'abord, on a opté pour l'usage des variables primitives et du produit scalaire global. Ces choix sont justifiés par un souci de simplicité.

On calcule donc la matrice de corrélation temporelle, dont on extrait les valeurs propres et vecteurs propres en utilisant la bibliothèque de calcul 'Eispack' [9]. A partir de là on calcule les modes et on passe à la résolution du système dynamique.

Méthode classique simple :

L'algorithme le plus simple permettant de calculer le champ U est le suivant :

- on part d'un cliché initial $U^0 = U(t_0)$,
- on calcule les coefficients $y_i^0 = y_i(t_0)$ initiaux en projetant U^0 sur les modes Ψ_i ,
- on a une boucle sur les pas de temps,
 - on calcule $G_j^n = (F(U^n), \Psi_j)$ pour tous les modes,
 - on déduit de l'équation (19) les coefficients y_i^{n+1} ,
 - on calcule U^{n+1} en utilisant l'équation (20),

- on recommence jusqu’au temps désiré.

Cet algorithme, est relativement coûteux en temps de calcul; en effet, il faut calculer $(F(U), \Psi_j)$ à chaque iteration. Ce calcul est effectué en utilisant un formalisme éléments finis: les fonctions sont connues aux noeuds du maillage et on suppose une interpolation P1. Ces fonctions d’interpolation d’ordre peu élevé amènent à rechercher une formulation intégrée par partie pour le terme de diffusion.

On peut calculer $(F(U), \Psi_j)$ soit en utilisant les équations d’Euler soit celles de Navier-Stokes.

Rappelons qu’en variables conservatives le système de Navier-Stokes sans terme source est le suivant :

$$U_{,t} + F_{i,i} = F_{i,i}^d,$$

il peut s’écrire :

$$U_{,t} + A_i U_{,i} = (K_{ij} U_{,j})_{,i},$$

avec

- $A_i = F_{i,U}$ la matrice Jacobienne d’Euler,
- K la matrice de diffusion tel que $K_{ij} U_{,j} = F_i^d$.

D’où en faisant un changement de variables on obtient :

$$A_0 V_{,t} + \tilde{A}_i V_{,i} = (\tilde{K}_{ij} V_{,j})_{,i},$$

avec

- $A_0 = U_{,V}$ matrice Jacobienne,
- $\tilde{A}_i = A_i A_0$,
- $\tilde{K}_{ij} = K_{ij} A_0$,

et donc

$$V_{,t} + \bar{A}_i V_{,i} = (\bar{K}_{ij} V_{,j})_{,i},$$

avec

- $\bar{A}_i = A_0^{-1} A_i A_0$ matrice Jacobienne d’Euler primitive,

- $\bar{K}_{ij} = A_0^{-1} K_{ij} A_0$ en supposant que A_0^{-1} est constante par éléments.

Le système dynamique est donc le suivant :

$$\frac{dy_i}{dt} (\Psi_i, \Psi_i) + (\bar{A}_j V_{j,j}, \Psi_i) = ((\bar{K}_{jk} V_{k,j}), \Psi_i), \quad i \in [1, MOD]. \quad (23)$$

On procède maintenant à une intégration par partie sur le terme diffusif et on obtient :

$$\frac{dy_i}{dt} (\Psi_i, \Psi_i) + (\bar{A}_j V_{j,j}, \Psi_i) + (\bar{K}_{jk} V_{k,j}, (\Psi_i)_{,j}) = 0, \quad i \in [1, MOD], \quad (24)$$

en supposant que les conditions aux bords éliminent le terme $(\bar{K}_{jk} V_{k,j}, \Psi_i)_\Gamma$.

Méthode classique stabilisée :

Le système (24) constitue une équation différentielle ordinaire (EDO). Le problème de la stabilité de cette équation est essentiel. Aubry [6] propose, après le processus de projection de Galerkin, l'ajout d'un terme de stabilisation; cette modification est justifiée par la nécessité de prendre en compte l'effet dissipatif des petites échelles non résolues par la base de clichés selon une démarche semblable à celle adoptée pour la simulation grandes échelles ("Large Eddy Simulation"). Ce terme de stabilisation consiste à accroître la dissipation physique ν par un terme proportionnel à une dissipation turbulente : ainsi ν est remplacé par $\nu + \alpha\nu_T$. Une approche plus numérique du problème est adoptée par A. Iollo dans [10] où on démontre qu'une approche Galerkin appliquée à l'équation d'Euler 1D aboutit à un schéma instable. Une stabilisation par une méthode de Galerkin discontinue est proposée.

Ces différents travaux, ainsi que les résultats des tests numériques décrits dans la section suivante, nous ont conduit à développer une version stabilisée de notre système dynamique en ajoutant un terme supplémentaire à l'équation (23) de la forme :

$$F_S = \beta (\bar{A}_i^T \bar{A}_i V_{i,i}),$$

avec

- $\beta = \alpha \frac{h}{u + c}$,
- h taille d'un élément,
- $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ norme de la vitesse
- γ coefficient polytropique,
- $c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ vitesse du son,

– α paramètre scalaire.

Les équations considérées, après projection sur le i^{ieme} mode et intégration par parties, sont alors :

$$\frac{dy_i}{dt} (\Psi_i, \Psi_i) + (\bar{A}_j V_j, \Psi_i) + (\bar{K}_{jk} V_k, (\Psi_i)_{,j}) + (\beta \bar{A}_j^T \bar{A}_j V_j, (\Psi_i)_{,j}) = 0. \quad (25)$$

La méthode classique et stabilisée présente un coût CPU élevé, c'est pour cela que l'on va maintenant présenter la méthode des coefficients.

Méthodes des coefficients constants :

Cette méthode consiste à remplacer l'EDO non linéaire de la méthode classique ou stabilisée, par une EDO à coefficients constants. On a vu à la section 3.3.2 qu'avec les variables choisies, il apparait dans le système (19) des fractions rationnelles. On ne peut donc pas obtenir une EDO à coefficients constants, on va donc utiliser une astuce, consistant à ajouter une nouvelle variable redondante aux variables précédentes, de manière à éliminer les fractions rationnelles. On introduit l'inverse de la densité, les nouvelles variables sont donc :

$$U = \begin{Bmatrix} (\rho) \\ (u_1) \\ (u_2) \\ (p) \\ (\frac{1}{\rho}) \end{Bmatrix}$$

Le système (19) est alors complété par l'équation suivante :

$$\frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial t} + u_1 \frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial x} + u_2 \frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = 0. \quad (26)$$

On obtient un système complexe dans lequel on peut substituer U par l'équation (20) ce qui donne après de nombreux calcul l'EDO suivante :

$$\frac{dy_i}{dt} = a_i + \sum_j b_{ij} y_j + \sum_{j,k} c_{ijk} y_j y_k. \quad (27)$$

L'algorithme est le même que dans le cas incompressible :

– on calcule les coefficients $a_i, b_{i,j}, c_{i,j,k}$,

- on définit d'un cliché initial $U^0 = U(t_0)$,
- on calcule les coefficients $y_i^0 = y_i(t_0)$ initiaux en projetant U^0 sur les modes Ψ_i ,
- on a une boucle sur les pas de temps,
 - on déduit de l'équation (27) les coefficients y_i^{n+1} ,
- on recommence jusqu'au temps désiré.

Le calcul des coefficients constants $a_i, b_{i,j}, c_{i,j,k}$ est assez cher mais il est effectué uniquement en début de calcul, la résolution en temps est ensuite extrêmement rapide. Le problème de la stabilisation se pose de la même manière que dans la méthode classique. Le terme de stabilisation doit être simplifié pour éviter des termes d'ordre plus élevé dans le développement (27).

Méthodes d'assimilation :

L'assimilation consiste à tirer parti d'une information sur la solution exacte du modèle complet pour recalculer un calculen POD. Cette information est très partielle: par exemple on peut connaître la valeur d'une variable à des intervalles de temps réguliers. L'objectif de l'assimilation est de recalculer au mieux la résolution instationnaire de l'ensemble des variables. Dans le cas de cette étude, on peut envisager de disposer des données fournies par une série de capteurs pour recalculer les coordonnées y_i décrivant l'écoulement dans la base POD. Considérons par exemple un seul capteur de pression en un point x_1 de l'écoulement. On propose d'ajuster le coefficient lié au 1^{er} mode y_1 .

Au point x_1 on connaît la pression réelle (fournie par le capteur) $p^{\text{réel}}(x_1)$, la pression calculée $p^{\text{calculée}}(x_1)$ et la coordonnée calculée sur le premier mode $y_1^{\text{calculée}}$; alors la nouvelle coordonnée y_1 est donnée par la formule suivante :

$$y_1 = \theta y_1^{\text{calculée}} + (1 - \theta)(p^{\text{réel}}(x_1) - p^{\text{calculée}}(x_1)) \frac{1}{\Psi_1(x_1)}$$

où $\theta \in [0, 1]$ est le coefficient d'assimilation.

Si l'on a plusieurs capteurs, on effectue le même type d'opération sur les autres capteurs.

Cette méthode est très simple et n'augmente pratiquement pas le temps de calcul (à peu près 2%).

4 Tests numériques

Cette section présente les résultats de la P.O.D. appliquée à un écoulement de Navier-Stokes compressible laminaire autour d'un profil d'aile NACA 0012 avec un nombre de Mach à l'infini de 0.2, un nombre de Reynolds de 800, et 20° d'incidence. Ce problème test a été considéré par différents auteurs [11]. Le maillage utilisé pour la résolution de l'équation de Navier-Stokes, présenté sur la figure 1, comporte 8008 noeuds et 15794 éléments.

Autour de ce profil, après une phase transitoire de 2000 itérations à pas de temps global (CFL=10), un écoulement périodique s'établit. Chaque période est discrétisée en 210 pas de temps. La figure 2 présente la portance en fonction du temps sur une période. La figure 3, représentant les isovalues de la pression de l'écoulement tout au long de la période, permet de constater que l'écoulement comporte des détachement instationnaire de tourbillons.

Sur cette période, on prend un certain nombre de clichés à des intervalles de temps réguliers (toutes les 5 itérations). L'écoulement moyen, la matrice de corrélation et ses valeurs propres sont calculés à partir de ces clichés. On en déduit finalement les modes. Les figures 4, 5 et 6 représentent respectivement la pression moyenne, les valeurs propres décroissantes en échelle logarithmique et les modes. On peut remarquer l'amplitude importante entre la plus petite valeur propre et la plus grande (de 10^{-2} à 10^7), et qu'elles sont de multiplicité 2 vraisemblablement en raison du caractère périodique de l'écoulement. On remarque sur la figure 6 que l'examen de ces modes ne conduit pas à une interprétation intuitive immédiate.

Influence du nombre de clichés :

Dans un premier temps, on a étudié les effets du nombre de clichés sur la qualité de la nouvelle base.

La figure 7 montre la projection de l'écoulement sur le premier mode en fonction du nombre de clichés: si on note $u^{exact}(t)$ le champ issu du calcul Navier-Stokes instationnaire et Ψ_1 le premier mode, on représente $y_1^{projete}(t) = (u^{exact}(t) - u_{moyen}^{exact}(t), \Psi_1)$, Ψ_1 étant calculé à partir de 8, 12, 22 ou 43 clichés. On constate que la base crée dépend du nombre de clichés.

La figure 8 présente $y_1(t) - y_1^{projete}(t)$ où $y_1(t)$ est l'évolution du coefficient obtenu par résolution des systèmes dynamiques obtenu en déduisant 2 modes de respectivement 8, 12, 22 ou 43 clichés. Un résultat semblable est obtenu en considérant plus de 2 modes. On peut voir que l'erreur sur le premier mode décroît en fonction du nombre de clichés.

Enfin la figure 9 présente l'erreur de reconstruction de ce système dynamique dans les mêmes cas que précédemment.

$$err(u, t) = \frac{(u(t) - u^{exact}(t), u(t) - u^{exact}(t))}{(u_{moyen}^{exact} - u^{exact}(t), u_{moyen}^{exact} - u^{exact}(t))}. \quad (28)$$

On observe que l'erreur de reconstruction décroît elle aussi en fonction du nombre de clichés, mais pas de façon aussi évidente.

Comme il était à prévoir, il est important d'avoir un grand nombre de clichés représentant correctement l'écoulement pour avoir une bonne qualité.

Influence du nombre de modes :

Après avoir fait varier le nombre de clichés, nous avons étudié l'influence du nombre de modes. La figure 10 présente l'évolution des coefficients $y_1(t)$ obtenus par résolution des systèmes dynamiques en utilisant 2, 6 et 10 modes. La figure 11 présente l'erreur de reconstruction. Là encore, il vaut mieux avoir beaucoup de modes. Cependant, il est à noter que le coût du calcul est quadratique en nombre de modes. Il faut donc trouver un compromis entre nombre de modes et temps de calcul.

Influence du schéma d'intégration en temps de l'EDO :

Nous allons maintenant présenter les résultats des diverses méthodes utilisées pour résoudre le système dynamique.

Les méthodes temporelles utilisées sont des méthodes de Runge Kutta d'ordre 1, 2 ou 4. Une période de l'écoulement est intégrée à l'aide de 210 pas de temps.

La figure 12, présente l'évolution des coefficients $y_1(t)$ obtenus par résolution des systèmes dynamiques de Navier-Stokes à l'ordre 1 et 2, en utilisant 10 modes extraits de 22 clichés. La figure 13 présente l'évolution de l'erreur sur les coefficients y_i obtenus dans les mêmes cas que précédemment.

$$err(y, t) = \frac{1}{MOD} \sqrt{\sum_{i=1}^{MOD} (y_i(t) - y_i^{projete}(t))^2}.$$

Enfin la figure 14 présente l'erreur de reconstruction $err(u, t)$ (c. f. 28).

On peut voir sur la figure 12 que l'écart entre le coefficient y_1 et la référence augmente au cours du temps pour toutes les méthodes. La figure 13 montre que ce phénomène apparaissant sur tous les modes se retrouve dans l'erreur sur les coefficients et la figure 14 qu'il entraîne une erreur de reconstruction relativement importante. On vérifie aussi que les méthodes d'ordre

2 sont plus précises. On note que les résultats obtenus avec 420 pas de temps par période sont identiques à ceux obtenus avec 210.

La figure 15 présente l'erreur de reconstruction des systèmes dynamiques d'Euler et de Navier-Stokes. On peut constater que les méthodes de Navier-Stokes sont plus précises que celles d'Euler au sens suivant : l'écoulement étudié ayant été calculé par résolution des équations de Navier-Stokes compressible laminaire, il vaut mieux résoudre le système dynamique de Navier-Stokes plutôt que celui d'Euler.

En conséquence il vaut mieux utiliser une méthode temporelle d'ordre 2 et un système dynamique correspondant à l'écoulement.

Méthodes avec stabilisation :

Les différents tests effectués, à savoir diminution du pas de temps et ajout de modes, n'ont pas apporté d'amélioration satisfaisante : on observe toujours une tendance à l'amplification exponentielle des erreurs. Une interprétation naturelle est la nécessité de stabiliser l'opérateur convectif. Ceci peut être réalisé par décentrage ou addition de termes de diffusion numérique. La figure 16 présente l'évolution des coefficients $y_1(t)$ obtenus par résolution des systèmes dynamiques de Navier-Stokes stabilisés et non stabilisés à l'ordre deux (c. f. 24, 25), en utilisant 10 modes extraits de 22 clichés. On voit immédiatement que les méthodes stabilisées suivent de façon plus précise la référence. La figure 17 montre que l'écoulement est nettement mieux reconstruit par les méthodes stabilisées, l'erreur de ces méthodes étant 10 fois plus petite. Enfin la figure 18 confirme qu'il faut utiliser le modèle correspondant le mieux à l'écoulement, l'erreur de la méthode d'Euler étant deux fois plus importante que celle de Navier-Stokes. La figure 19 présente l'influence de α le coefficient de stabilisation sur l'erreur de reconstruction au pas de temps 100, mais les résultats sont sensiblement les mêmes aux autres pas de temps. On peut constater que l'erreur de reconstruction est de forme parabolique et admet un minimum pour $\alpha = 0.08$.

Méthodes avec coefficients constants :

Les figures suivantes présentent les résultats des méthodes utilisant des coefficients constants (voir le paragraphe 3.3.3.3) pour résoudre le système dynamique, au lieu de calculer le flux à chaque pas de temps.

La figure 20, présente l'évolution des coefficients $y_1(t)$ obtenus par résolution des systèmes dynamiques de Navier-Stokes avec coefficients et sans coefficients. La figure 21 montre l'erreur de reconstruction $err(u, t)$. La figure 22 et 23 représentent les méthodes stabilisées avec coefficients et sans coefficients.

On peut observer sur ces quatre figures que la méthode avec coefficients (stabilisée ou non) est un peu moins précise que la méthode classique, mais elle est aussi plus rapide. En

effet, une fois les coefficients calculés, la résolution du système dynamique est pratiquement immédiate. De plus les coefficients peuvent être stockés et réutilisés facilement.

Méthodes d'assimilation :

Cette dernière partie présente les résultats des méthodes utilisant la technique d'assimilation (voir le paragraphe 3.3.3.4) pour résoudre le système dynamique. Dans notre cas on a placé un unique capteur de pression au bord de fuite, qui vient corriger le coefficient y_1 tout les dix pas de temps (5% de la période).

Les figures 24 et 25, présentent respectivement l'évolution des coefficients sur les modes 1 et 2 ($y_1(t)$ et $y_2(t)$), obtenus par résolution des systèmes dynamiques de Navier-Stokes utilisant la méthode d'assimilation et la méthode classique. La figure 26 montre l'erreur de reconstruction $err(u, t)$.

Ces figures montrent que la méthode d'assimilation proposée est efficace. En effet même si le premier mode n'est pas bien reconstruit (voir figure 24), les modes suivants le sont, et l'erreur de reconstruction est fortement diminuée.

Les figures suivantes (figure 27, 28 et 29) permettent de comparer la méthode d'assimilation à la méthode de stabilisation. On peut voir sur les figures 27, 28 représentant l'évolution des coefficients sur les modes 1 et 2 que ces méthodes sont du même ordre. La figure 29 présentant l'erreur de reconstruction, montre que la méthode de stabilisation est deux fois plus précise que celle d'assimilation. On peut aussi voir sur cette figure qu'une méthode qui combine assimilation et stabilisation réduit encore l'erreur de reconstruction.

On constate de manière générale une bonne efficacité des méthodes d'assimilation dans le cadre de cette approche POD. Il serait intéressant de vérifier d'une part l'influence de la position du point de recalage, d'autre part l'effet d'un recalage moins fréquent (10% au lieu de 5% de la période).

5 Conclusion

Cette étude a permis d'étendre l'utilisation des approches P.O.D. au calcul d'écoulements laminaires compressibles. On a démontré la faisabilité de cette approche. Il est remarquable de constater la capacité à reproduire la dynamique d'un écoulement aussi complexe que l'écoulement autour d'une aile à haute incidence avec un nombre de modes faible (bien que la qualité des résultats semble cependant inférieure à celle obtenue pour la simulation des écoulements incompressibles à bas nombre de Reynolds).

Différentes stratégies d'implantation ont été décrites et testées: le choix d'une implantation efficace n'est pas simple pour des systèmes ayant la complexité des équations de Navier-Stokes compressible. Le problème de la stabilisation a été étudié au travers de tests numériques, qui confirment l'analyse de Iollo [10].

L'efficacité de techniques d'assimilation a été démontrée. La robustesse de l'approche POD reste à confirmer: par exemple il faudrait vérifier la possibilité d'utiliser une base unique pour des conditions à la limite légèrement modifiée (incidence, mouvement des parois). On remarque par ailleurs une erreur de phase présente sur l'ensemble des résultats. Cette erreur n'est pas sensible aux différentes variantes testées.

Les études futures incluent la prise en compte de la turbulence modélisée par une approche ($k - \epsilon$), ceci permettra d'accéder à la simulation d'écoulements aérodynamiques plus réalistes. Les travaux présentés dans ce rapport pourront contribuer au développement de techniques de contrôle des écoulements: la conception d'algorithmes de contrôle peut nécessiter l'utilisation de systèmes dynamiques représentatif du phénomène que l'on cherche à contrôler (en particulier les systèmes dynamiques reproduisent localement le comportement non linéaire du système réel); les systèmes d'EDO issues de l'approche POD peuvent constituer des systèmes dynamiques représentatifs. On peut par ailleurs envisager des applications à l'aéroélasticité ou à la conception optimale de forme.

6 Remerciements

Je tiens à remercier **Dassault-Aviation**, **Bruno Stoufflet** Directeur de la Stratégie Scientifique et **Michel Mallet** chef du service modélisations numériques, pour m'avoir accueilli à Dassault Aviation.

Je remercie **A. Dervieux**, **A. Iollo**, **J. A. Desideri** de l'INRIA, ainsi que **J. Peraire** professeur au MIT pour leurs conseils.

Je voudrais également profiter de cette occasion pour remercier **Gilbert Rogé** et **Michel Ravachol**, qui m'ont conseillés et fournis toutes les informations nécessaires à la bonne marche de mon travail.

Merci aussi à tous les autres stagiaires et thésards, pour leur accueil, et leur amitié.

Références

- [1] **J.L. Lumley**, The structure of inhomogeneous turbulent flows, Atmospheric turbulence and Radio wave propagation, A.M. Yaglom et V.I. Tatarski, pp. 166-78, Moskow:Nauka, 1967.
- [2] **L. Sirovich**, Turbulence and the dynamics of coherent structures, Quarterly of Applied Mathematics, XLV, n° 3, pp. 561-590, 1987.
- [3] **K.Y. Tang, W.R. Graham and J. Peraire**, Active flow control using a reduced order model and optimum control. AIAA paper 96-1946.
- [4] **W.R. Graham, J. Peraire et K.Y. Tang**, Optimal Control of vortex Shedding using Low Order Models, soumis à J. of Fluid Mech..
- [5] **L. Cordier, F. Granier, J. Delville, C. Tenaud, W.Z. Shen et C. Prudhomme**, Modélisation par un système dynamique d'ordre faible du comportement à grande échelle d'une couche de mélange plane turbulente, Actes du Colloque AAAF, Poitiers 1997.
- [6] **N. Aubry, P. Holmes, J.L. Lumley et E. Stone**, The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. J. Fluid Mech., 192, pp. 115-173, 1988.
- [7] **K.Y. Tang, W.R. Graham, J. Peraire**, Active Flow Control Using a Reduced Order Model and Optimum Control, AIAA 96-1946, 1996.
- [8] **T.J.R. Hughes, L.P. Franca, M. Mallet**, A New Finite Element Formulation For Computational Fluid Dynamics: I Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics, *Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng.*, vol. 54, p. 223-234, North-Holland, 1986.
- [9] **Eispack** site internet de l'O.R.N.L.
- [10] **A. Iollo**, Remarks on the Approximation of the Euler equations by a Low Order Model, Rapport de recherche INRIA n° 3329, December 1997.
- [11] **T.H. Pulliam**, Low Reynolds number numerical solutions of chaotic flows, AIAA-89-0123, 1989.
- [12] **P. Perrier**, Some problems and paths to next century unsteady multiscale CFD in aerodynamics, Computational Science for the 21th century, Wiley, pp. 357-368, 1997.

A Equations de Navier-Stokes

Cette annexe présente les équations d'Euler et de Navier-Stokes en variables primitives. En variables conservatives les équations s'écrivent sous la forme très synthétique suivante :

$$\mathbf{U}_{,t} + \mathbf{F}_{i,i} = \mathbf{F}^d_{i,i} + \mathcal{F}$$

On a vu que les équations peuvent s'écrire :

$$U_{,t} + A_i U_{,i} = (K_{ij} U_{,j})_{,i} + \mathcal{F}$$

avec

- $A_i = F_{i,U}$ la matrice Jacobienne d'Euler,
- K la matrice de diffusion tel que $K_{ij} U_{,j} = F_i^d$.

D'ou en faisant un changement de variables on obtient :

$$A_0 V_{,t} + \tilde{A}_i V_{,i} = (\tilde{K}_{ij} V_{,j})_{,i} + \mathcal{F}$$

avec

- $A_0 = U_{,V}$ matrice Jacobienne,
- $\tilde{A}_i = A_i A_0$,
- $\tilde{K}_{ij} = K_{ij} A_0$,

et donc

$$V_{,t} + \bar{A}_i V_{,i} = (\bar{K}_{ij} V_{,j})_{,i} + A_0^{-1} \mathcal{F}$$

avec

- $\bar{A}_i = A_0^{-1} A_i A_0$ matrice Jacobienne d'Euler primitives,
- $\bar{K}_{ij} = A_0^{-1} K_{ij} A_0$ en supposant que A_0^{-1} est constante par éléments.

Cela peut aussi s'écrire :

$$V_{,t} + \bar{A}_i V_{,i} = \bar{F}_{i,i}^d + A_0^{-1} \mathcal{F}$$

avec $\bar{F}_{i,i}^d = A_0^{-1} F_{i,i}^d$

Les variables conservatives étant les suivantes :

$$\mathbf{U} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ e \end{pmatrix}$$

les variables primitives :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ p \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de passage A_0 est :

$$A_0 = U_{,V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & \rho & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \rho & 0 \\ \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} & u_1 \rho & u_2 \rho & \frac{1}{\gamma - 1} \end{pmatrix}$$

la matrice inverse A_0^{-1} :

$$A_0^{-1} = V_{,U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ -\frac{u_2}{\rho} & 0 & \frac{1}{\rho} & 0 \\ (\gamma - 1) \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} & -(\gamma - 1)u_1 & -(\gamma - 1)u_2 & \gamma - 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne

$$\bar{A}_1 = \begin{pmatrix} u_1 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{A}_2 = \begin{pmatrix} u_2 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \gamma p & u_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\bar{F}_{1,1}^d = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\tau_{11}}{\rho} \\ \frac{\tau_{21}}{\rho} \\ (1-\gamma)q_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{F}_{2,2}^d = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\tau_{12}}{\rho} \\ \frac{\tau_{22}}{\rho} \\ (1-\gamma)q_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\lambda+2\mu)}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 \\ -\frac{\kappa p}{R\rho^2} & 0 & 0 & \frac{\kappa}{R\rho} \end{pmatrix} \quad \bar{K}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\rho} & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{K}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\lambda+2\mu)}{\rho} & 0 \\ -\frac{\kappa p}{R\rho^2} & 0 & 0 & \frac{\kappa}{R\rho} \end{pmatrix}.$$

En fait si on développe les équations d'Euler cela donne un système relativement simple.

En variables conservatives :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 \rho u_1 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(u_2 \rho u_1)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 \rho u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(u_2 \rho u_2 + p)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 \rho e + p u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(u_2 \rho e + p u_2)}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

En variables primitives :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u_1 \frac{\partial p}{\partial x} + u_2 \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = 0. \end{array} \right.$$

B Figures

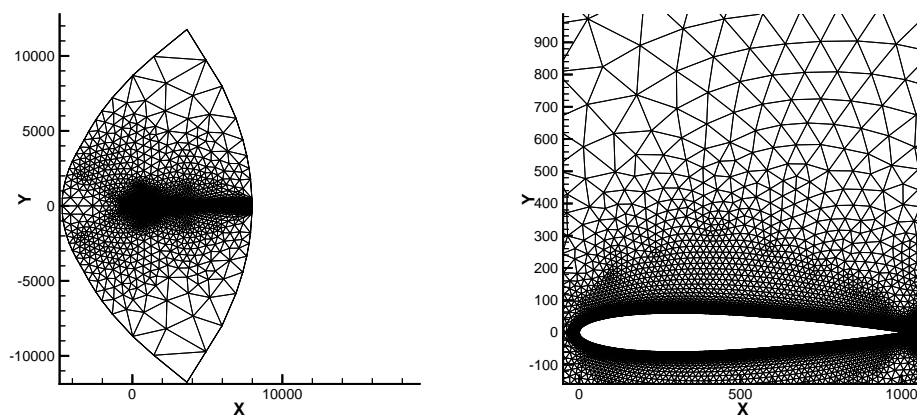


FIG. 1 – *Maillage NACA12*

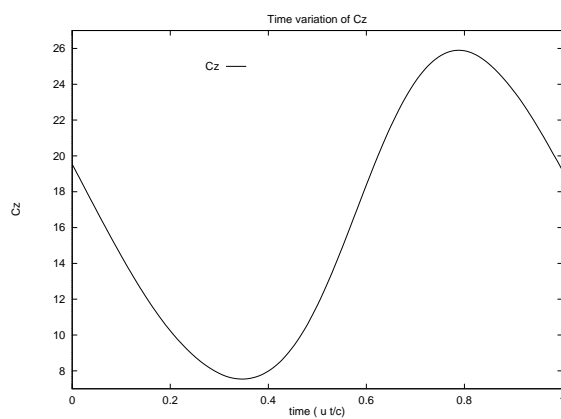


FIG. 2 – *Portance*

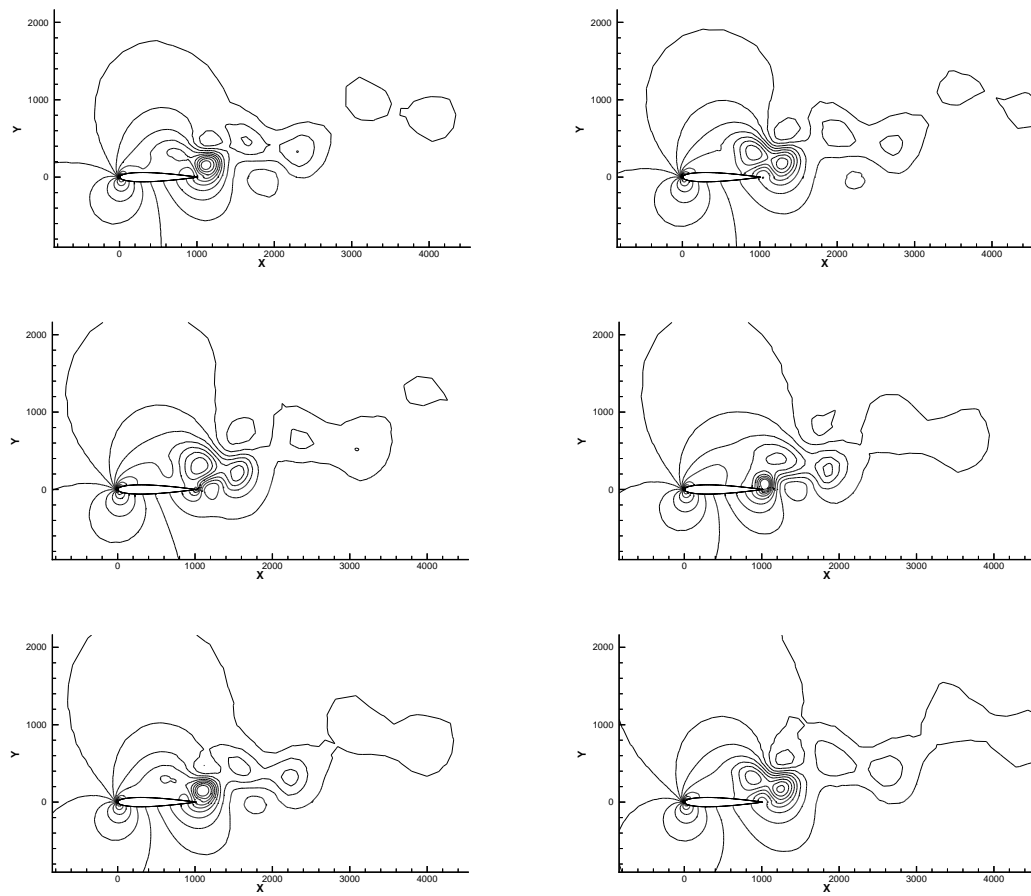
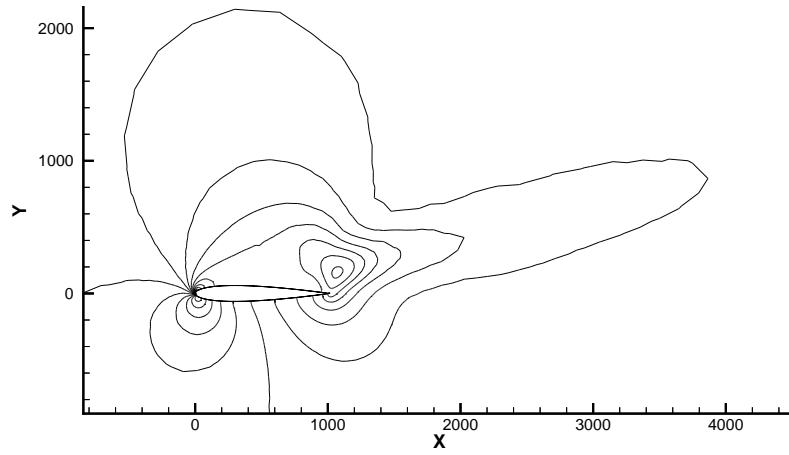
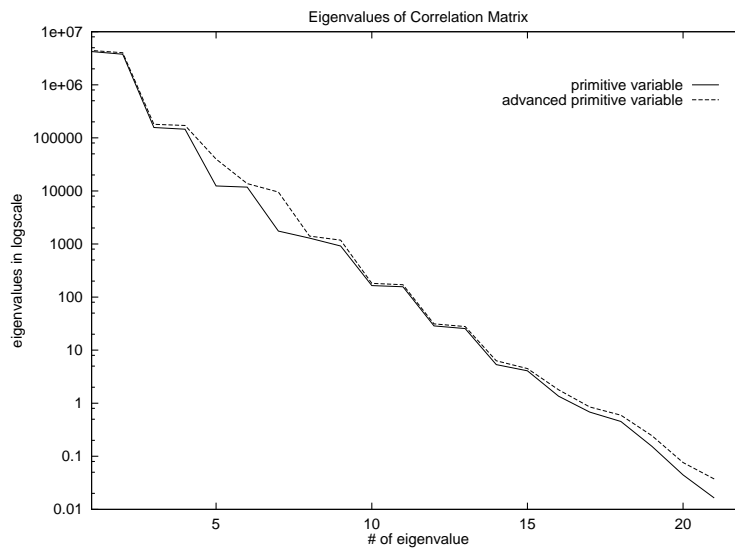


FIG. 3 – *Ecoulement autour d'un profil d'aile NACA 0012 à Mach 0.2, Reynolds 800 et 20° d'incidence. Isovaleurs de pression.*

FIG. 4 – *Champ de pression moyen*FIG. 5 – *Valeurs propres de la matrice de corrélation temporelle*

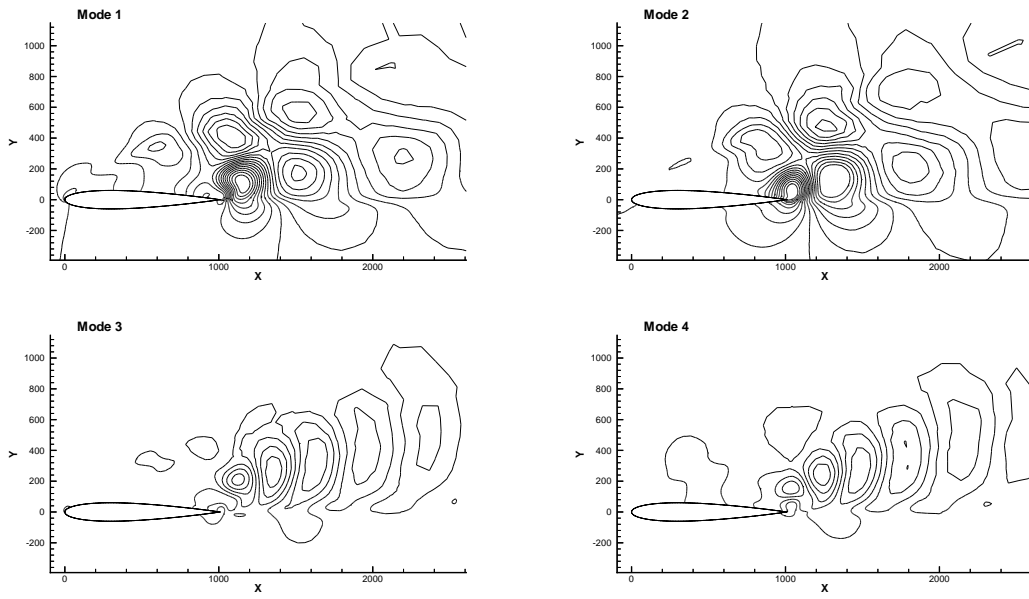


FIG. 6 – Modes de l'écoulement instationnaire

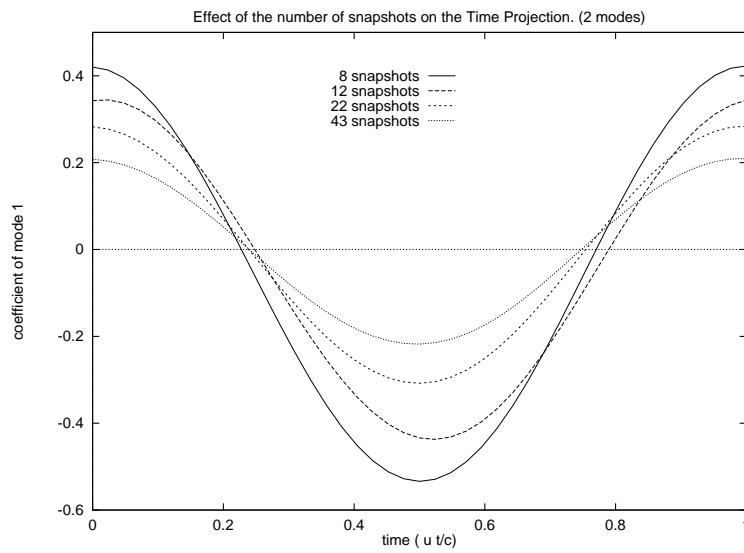


FIG. 7 – Projection sur le premier mode de l'écoulement en fonction du temps pour différents nombres de clichés (2 modes)

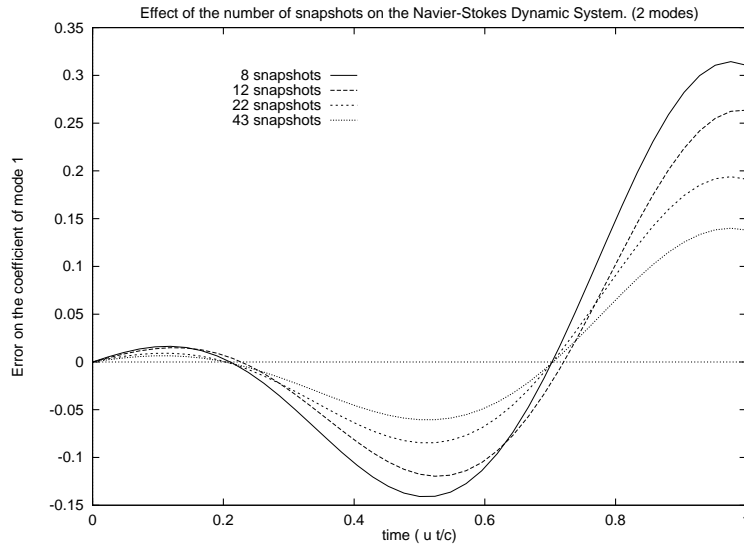


FIG. 8 – Coefficient y_1 du premier mode du système dynamique en fonction du temps pour différents nombres de clichés (2 modes)

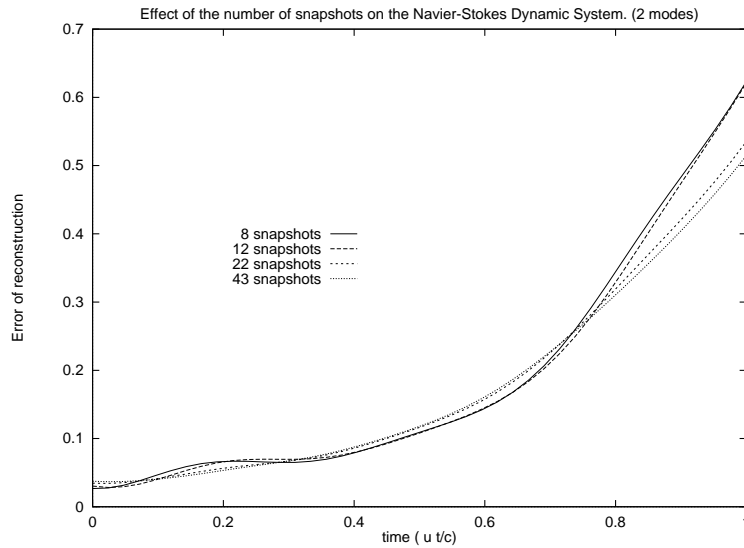


FIG. 9 – Erreur de reconstruction du système dynamique en fonction du temps pour différents nombres de clichés (2 modes)

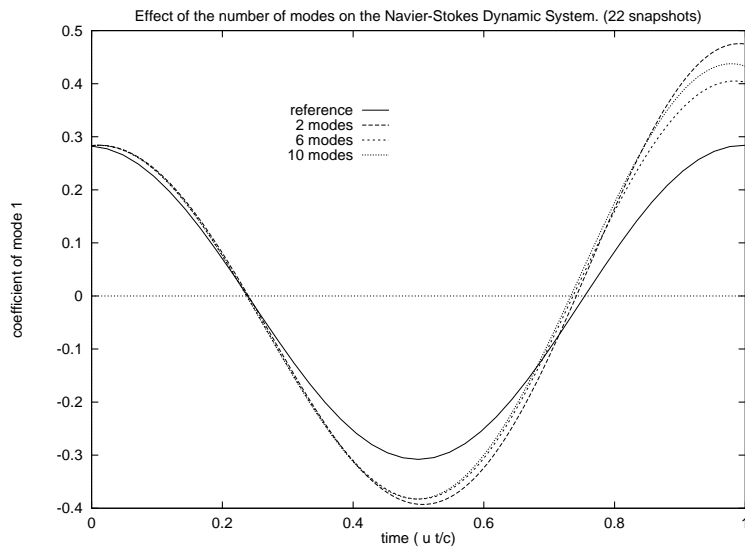


FIG. 10 – Coefficient y_1 du premier mode du système dynamique en fonction du temps pour différents nombres de modes (22 clichés)

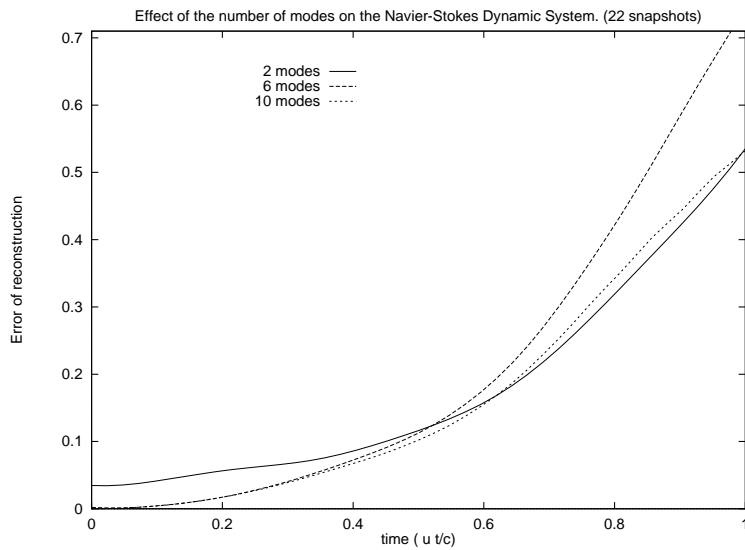


FIG. 11 – Erreur de reconstruction du système dynamique en fonction du temps pour différents nombres de modes (22 clichés)

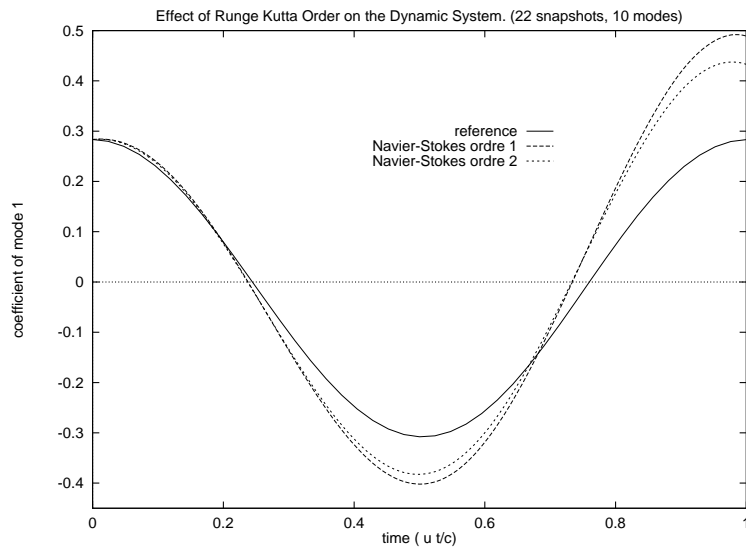


FIG. 12 – Coefficient y_1 du premier mode du système dynamique des diverses méthodes et de l'écoulement (22 clichés, 10 modes)

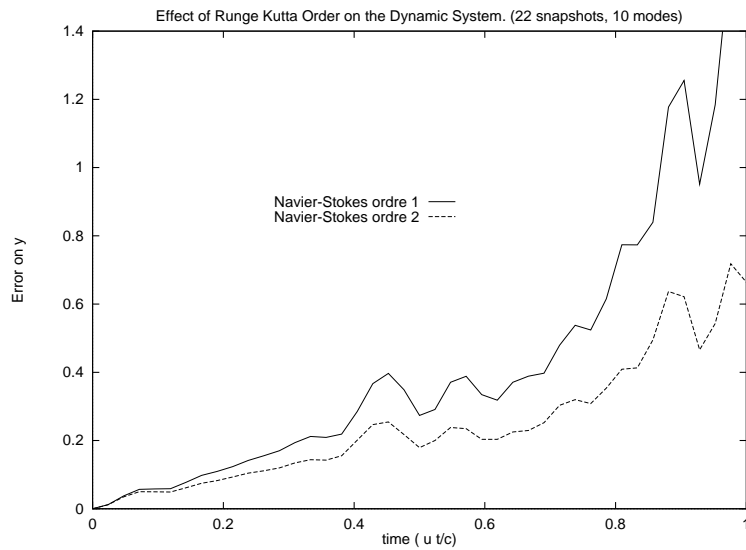


FIG. 13 – Erreur sur les coefficients des diverses méthodes (22 clichés, 10 modes)

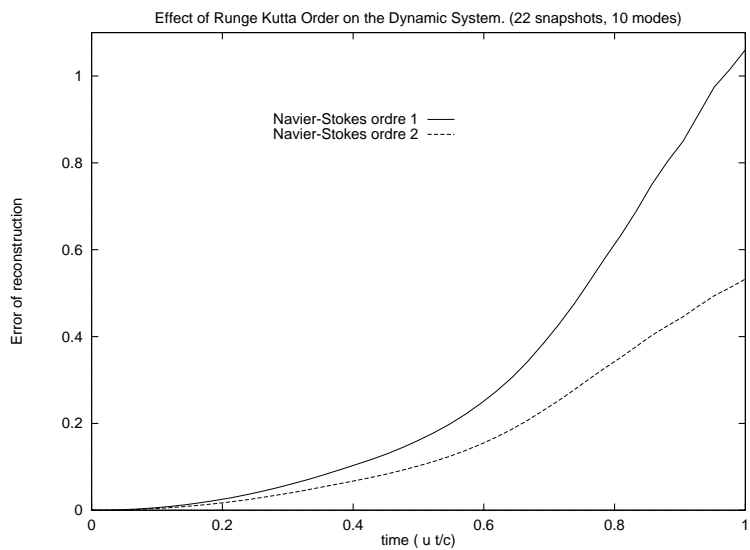


FIG. 14 – Erreur de reconstruction des diverses méthodes (22 clichés, 10 modes)

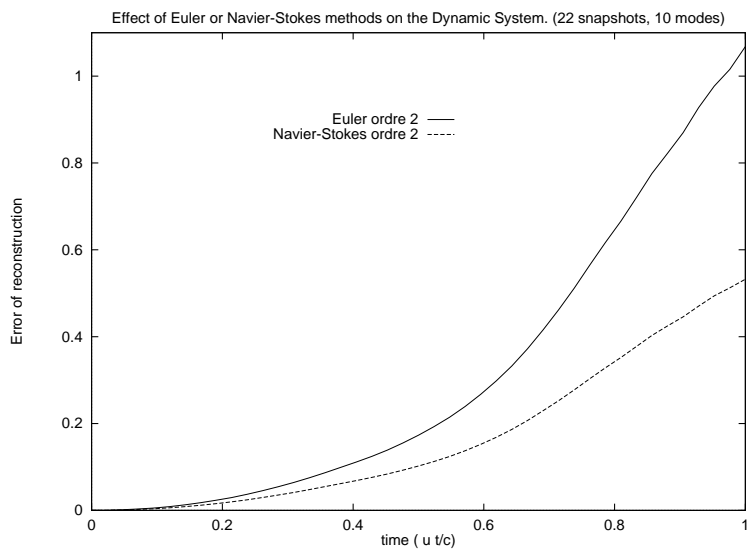


FIG. 15 – Erreur de reconstruction des diverses méthodes (22 clichés, 10 modes)

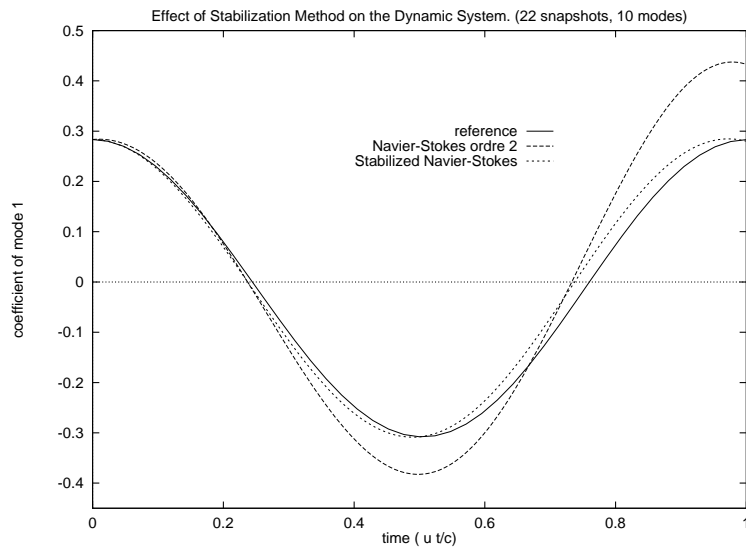


FIG. 16 – Coefficient y_1 du premier mode du système dynamique des méthodes stabilisées (22 clichés, 10 modes)

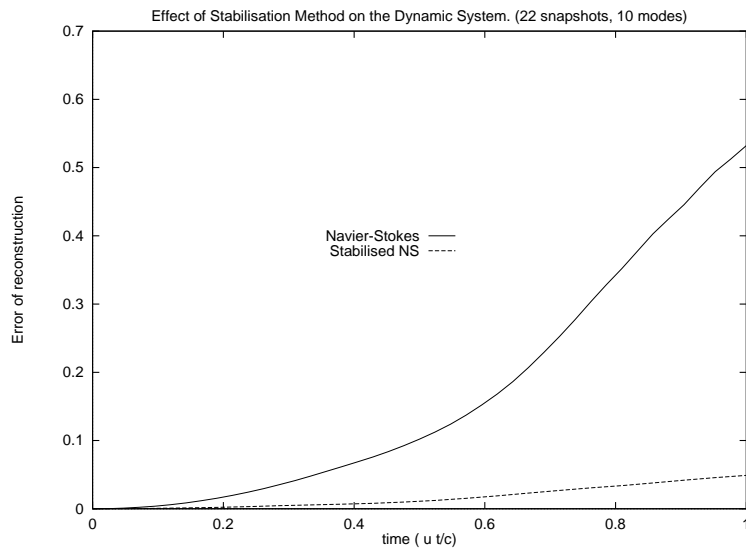


FIG. 17 – Erreur de reconstruction des méthodes stabilisées (22 clichés, 10 modes)

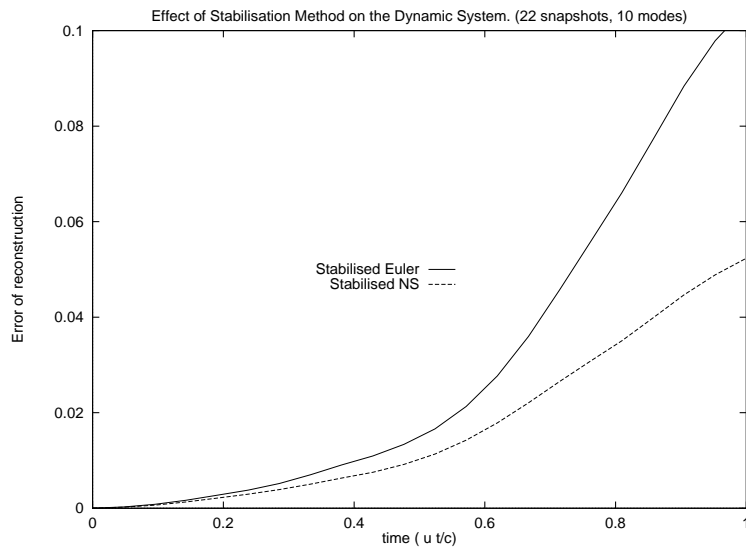


FIG. 18 – Erreur de reconstruction des méthodes stabilisées (22 clichés, 10 modes)

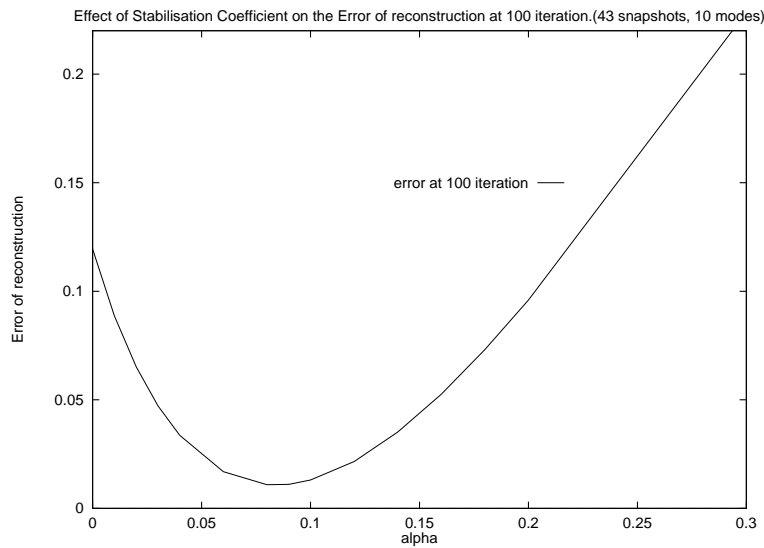


FIG. 19 – Effet du coefficient de stabilisation sur l'Erreur de reconstruction des méthodes stabilisées à la 100^{ième} itérations (43 clichés, 10 modes)

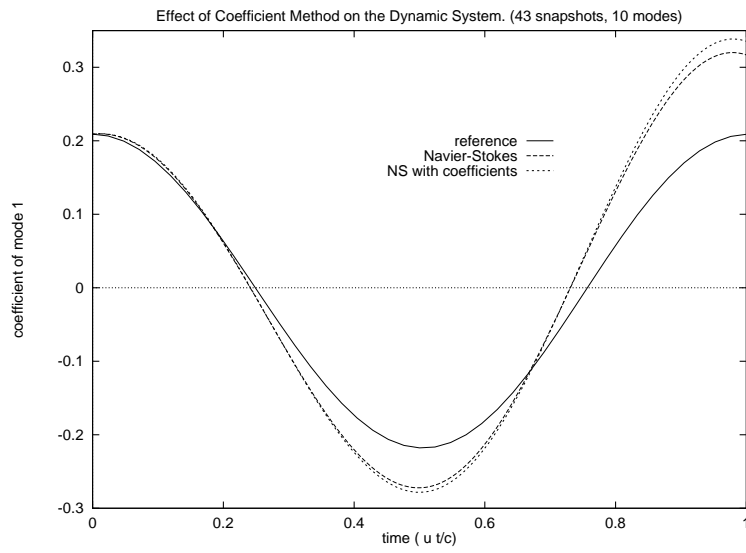


FIG. 20 – Coefficient y_1 du premier mode du système dynamique des méthodes à coefficients (43 clichés, 10 modes)

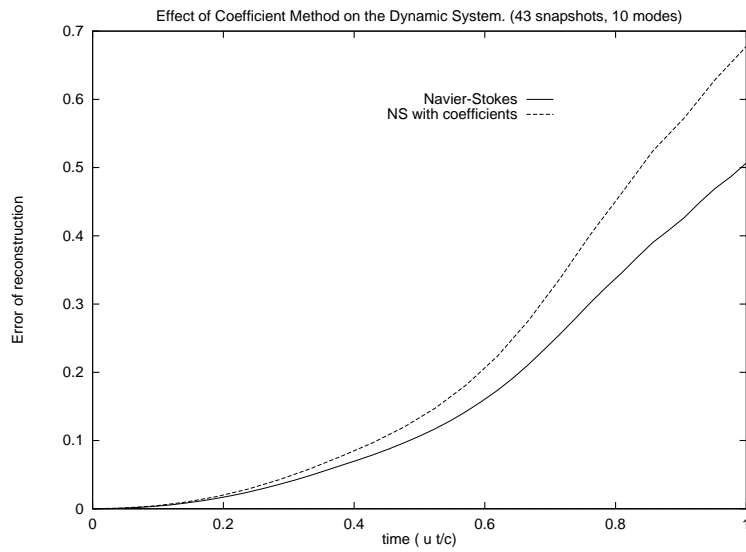


FIG. 21 – Erreur de reconstruction des méthodes à coefficients (43 clichés, 10 modes)

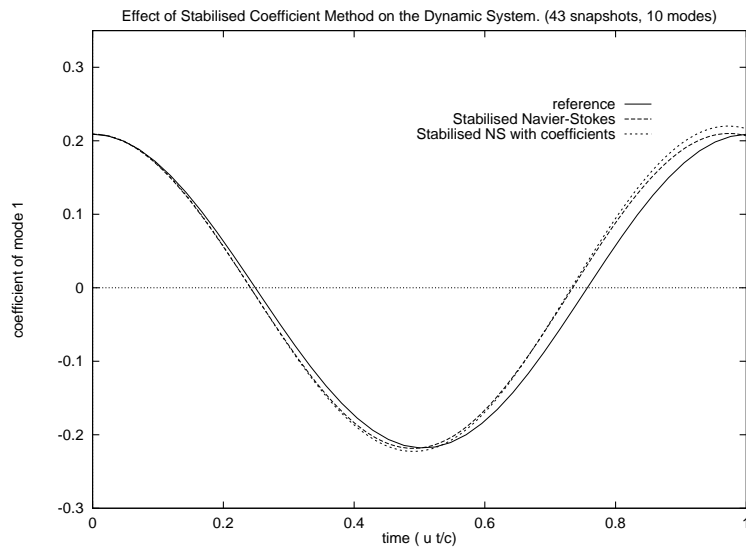


FIG. 22 – Coefficient y_1 du premier mode du système dynamique des méthodes à coefficients stabilisée (43 clichés, 10 modes)

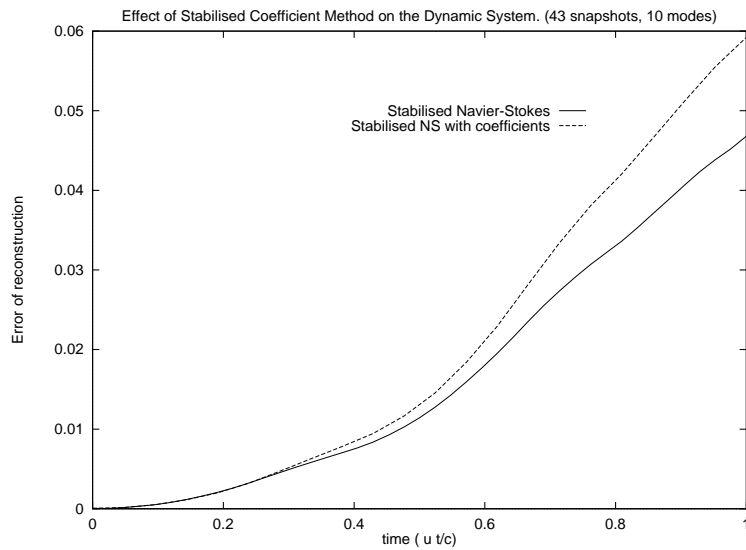


FIG. 23 – Erreur de reconstruction des méthodes à coefficients stabilisée (43 clichés, 10 modes)

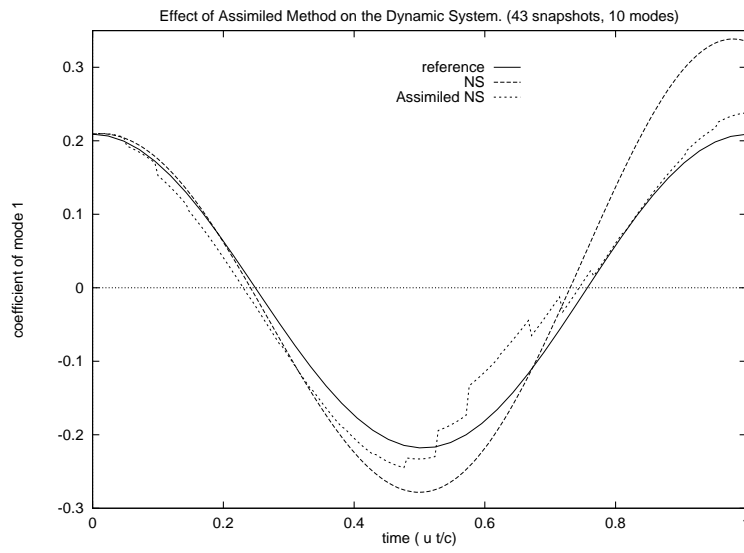


FIG. 24 – Coefficient y_1 du premier mode du système dynamique des méthodes d'assimilation (43 clichés, 10 modes)

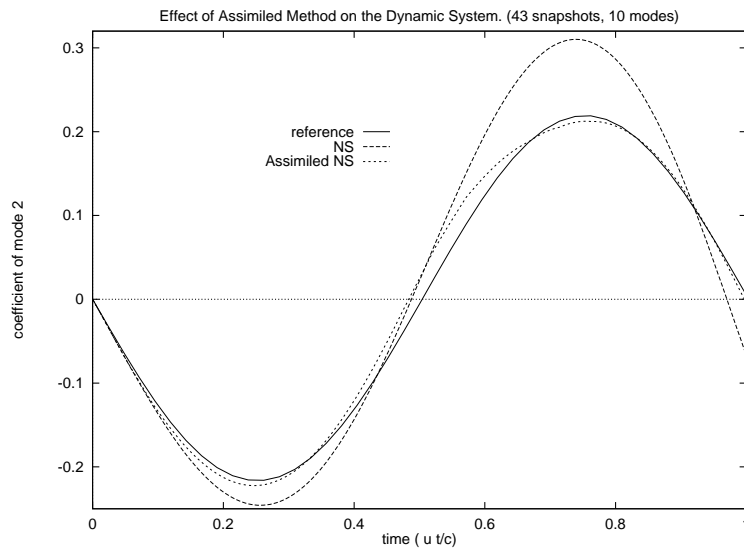


FIG. 25 – Coefficient y_1 du deuxième mode du système dynamique des méthodes d'assimilation (43 clichés, 10 modes)

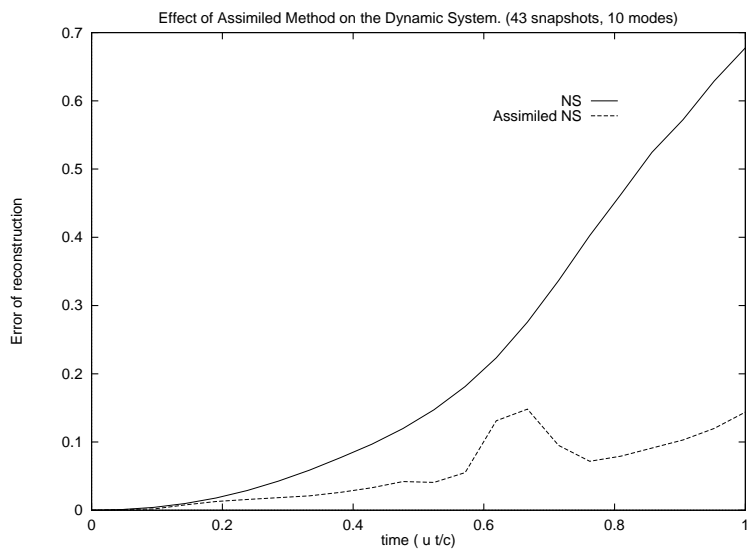


FIG. 26 – Erreur de reconstruction des méthodes d'assimilation (43 clichés, 10 modes)

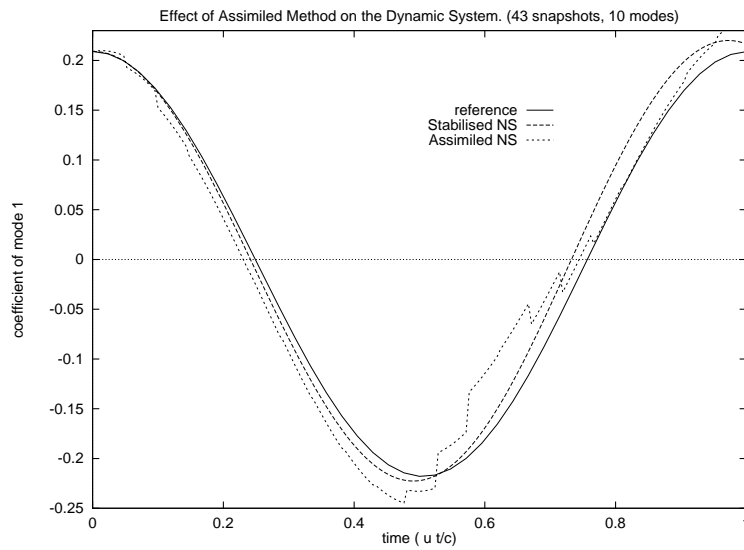


FIG. 27 – Coefficient y_1 du premier mode du système dynamique des méthodes d'assimilation stabilisée (43 clichés, 10 modes)

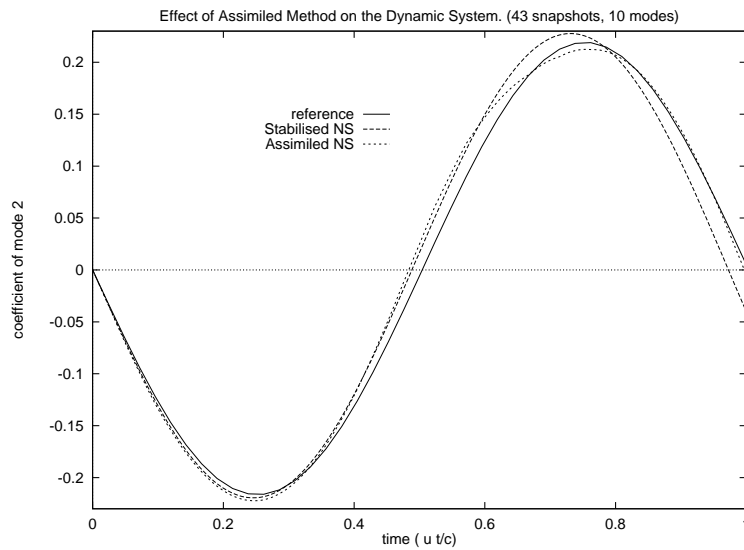


FIG. 28 – Coefficient y_1 du deuxième mode du système dynamique des méthodes d'assimilation stabilisée (43 clichés, 10 modes)

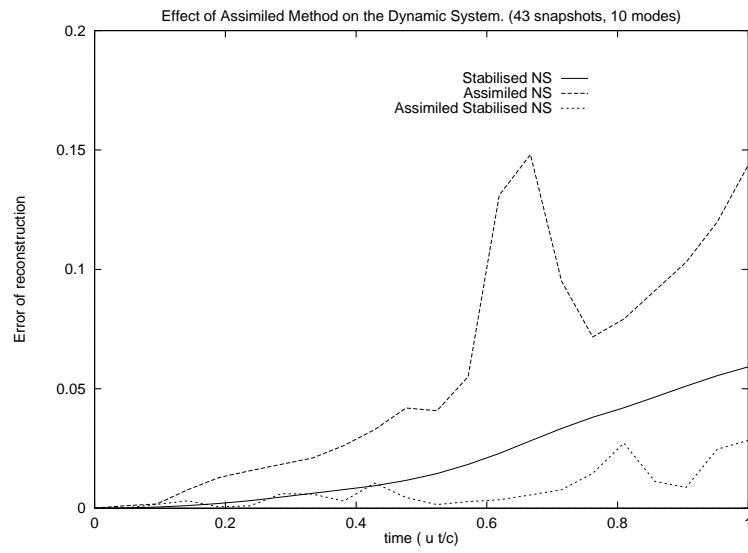


FIG. 29 – *Erreur de reconstruction des méthodes d'assimilation stabilisée (43 clichés, 10 modes)*

Table des matières

1	INTRODUCTION	1
2	La Décomposition Orthogonale Propre	2
3	Développement du système dynamique	4
3.1	Cas Général	4
3.2	Ecoulement Incompressible	5
3.3	Ecoulement Compressible	6
3.3.1	Equation d'Euler et de Navier-Stokes	6
3.3.2	Système Dynamique	8
3.3.3	Méthodes Développées	10
4	Tests numériques	15
5	Conclusion	19
6	Remerciements	20
A	Equations de Navier-Stokes	22
B	Figures	26



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399