



**HAL**  
open science

# Une méthode de Galerkin Discontinu pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène

Malika Remaki, Loula Fatima Fezoui

► **To cite this version:**

Malika Remaki, Loula Fatima Fezoui. Une méthode de Galerkin Discontinu pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène. RR-3501, INRIA. 1998. inria-00073184

**HAL Id: inria-00073184**

**<https://inria.hal.science/inria-00073184>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Une méthode de Galerkin Discontinu pour la  
résolution des équations de Maxwell en milieu  
hétérogène*

Malika Remaki et Loula Fézoui

**N° 3501**

Septembre 1998

THÈME 4



*Rapport  
de recherche*



# Une méthode de Galerkin Discontinu pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène

Malika Remaki et Loula Fézoui

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet CAIMAN

Rapport de recherche n° 3501 — Septembre 1998 — 40 pages

**Résumé :** Ce travail consiste à appliquer une méthode dite Galerkin Discontinu à la résolution du système de Maxwell dans un milieu hétérogène. La méthode est basée sur le choix d'une base locale, et des formules de quadrature pour approcher les différentes intégrales. On obtient ainsi une solution approchée discontinue. Afin de vérifier les conditions de transmission d'un domaine à un autre, nous avons utilisé un schéma de Godunov pour calculer les flux numériques. Nous avons ensuite, comparé les solutions obtenues par cette méthode avec celles obtenues par une méthode de Volumes Finis.

**Mots-clés :** Électromagnétisme - Équations de Maxwell - Schéma de Godunov - Galerkin Discontinu - Éléments finis.

# A Discontinuous Galerkin Finite Element Method for solving Maxwell system in Heterogeneous media

**Abstract:** In this paper, we extend the Galerkin Discontinuous method to solve the Maxwell equations, in heterogeneous media. This method is based on the choice of the local basis functions, and quadrature rules. Note that the functions in the space of discretization are discontinuous. In order to verify the transmission conditions between different media, we used a Godunov scheme to compute the numerical flux. We have compared this method with a Finite Volume one through several tests.

**Key-words:** Electromagnetism - Maxwell equations - Godunov scheme - Discontinuous Galerkin - Finite elements.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Le problème à étudier</b>	<b>7</b>
2.1	Caractéristiques mathématiques des équations de Maxwell . . .	8
<b>3</b>	<b>Approximation numérique</b>	<b>8</b>
3.1	Discrétisation en espace . . . . .	9
3.1.1	Les fonctions de base . . . . .	9
3.1.2	Calcul des intégrales . . . . .	11
3.2	Approximation en temps . . . . .	13
3.3	Stabilité du schéma . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Expériences numériques</b>	<b>15</b>
4.1	Cas homogène . . . . .	15
4.1.1	simulation du mode de résonance(1,1) . . . . .	15
4.1.2	Courant surfacique . . . . .	17
4.1.3	Diffraction d'une onde plane sur un disque . . . . .	20
4.2	Cas hétérogène . . . . .	23
4.2.1	Simulation d'une pulsation . . . . .	23
4.2.2	Diffraction d'une onde plane sur un matériau revêtu . . .	24
<b>5</b>	<b>Comparaison de la méthode Galerkin Discontinu avec une méthode de Volumes Finis</b>	<b>26</b>
5.1	Description de la méthode Volumes Finis . . . . .	26
5.2	Comparaison des deux méthodes . . . . .	28
5.2.1	Simulation d'un mode de résonance . . . . .	28
5.2.2	Évolution d'un pulse dans un milieu hétérogène . . . . .	29
5.2.3	Diffraction d'une onde plane sur un disque revêtu (milieu hétérogène) . . . . .	30
5.3	Le bilan d'énergie . . . . .	32
5.3.1	Bilan d'énergie pour la méthode Volumes Finis . . . . .	32
5.3.2	Bilan d'énergie pour la méthode Galerkin Discontinu . .	33
5.3.3	Comparaison des énergies . . . . .	34
5.3.4	Comparaison sur des temps longs . . . . .	35

<b>6 Conclusion</b>	<b>36</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>38</b>

## 1 Introduction

Il existe plusieurs méthodes numériques pour la résolution des systèmes hyperboliques, en particulier pour le système de Maxwell.

Nous citons ici la méthode des différences finies (schéma de Yee [25]), la méthode des volumes finis ([4], [6], [7], [23], [24], [16]...etc), et les méthodes des éléments finis (continus et discontinus).

Nous présentons dans ce rapport une adaptation de la méthode Galerkin Discontinu au système de Maxwell en milieu hétérogène, elle a été construite pour la résolution des problèmes conservatifs et hyperboliques de la forme :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U} + \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0 \quad \Omega \times [0, T] \quad (1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .

Cette méthode a été introduite par Reed et Hill en 1970 [20] pour la résolution de l'équation de transport de neutrons. Une analyse mathématique a été menée par LeSaint et Raviart [18], Johnson et Pitkaränta [17], Richter [21], et Peterson [19], et ceci dans le cas des équations scalaires hyperboliques et linéaires.

B.Cockburn et S.W.Shu ont développé et étendu cette méthode aux autres formes d'équations et systèmes non linéaires (advection, dynamique des gaz...etc) [[8]- [14]].

L'idée de base est de choisir un espace d'éléments finis discontinu  $V_h^k$  où les solutions approchées sont des polynômes d'ordre  $k$  sur chaque volume  $T_i$  tel que  $\Omega = \sqcup_{i=1}^M T_i$ . La solution approchée est calculée à partir d'une formulation faible du problème à résoudre. Pour se faire, on multiplie l'équation (ou le système) par une fonction test  $v(x) \in V_h^k$ , et on intègre sur chaque volume  $T_i$ . Dans le cas monodimensionnel ( $d = 1$ ), où  $T_i$  est un segment, on choisit comme fonction test, les éléments d'une base locale (sur chaque segment), et afin d'obtenir une matrice de masse diagonale, on peut choisir comme base les polynômes de Legendre. A partir du nombre de degrés de liberté fixé, on choisit une formule de quadrature appropriée pour calculer les intégrales. Le passage au cas multidimensionnel n'est pas trivial, notamment pour le choix des fonctions de base et des formules de quadrature. Si on prend l'exemple du cas bidimensionnel, il est plus aisé de trouver les formules de quadrature sur



des triangles que sur n'importe quel autre polygone. Ainsi, le choix du volume d'intégration n'est pas arbitraire. Quant à l'intégration en temps, on utilise un schéma de Runge-Kutta d'ordre  $(k+1)$ , la méthode est ainsi d'ordre  $(k+1)$  (pour les démonstrations voir [5], [15]).

La méthode présente des propriétés, notamment de parallélisation étudiée par plusieurs auteurs dont Biswas, Devine, et Flaherty [3], qui en ont par ailleurs construit des versions h- et p-adaptatives. La méthode a été étendue aux équations de Navier-Stokes compressibles et aux équations de Convection-Diffusion respectivement par Bassi et Rebay [2], et B.Cockburn et S.W.Shu [13].

Le choix de l'espace de discrétisation repose sur celui des fonctions de base locale. Cette méthode est bien adaptée pour notre problème où le milieu peut être hétérogène, cependant une restriction du CFL due à la méthode utilisée se traduit par un coût en CPU relativement élevé. On verra par la suite une comparaison de cette méthode avec une méthode de volumes finis du point de vue qualitatif et coût.

Ce rapport est organisé comme suit :

La première partie consiste à présenter le problème à résoudre, et ses caractéristiques mathématiques. Nous présentons ensuite dans la deuxième partie les détails de la méthode numérique utilisée comprenant les fonctions de base choisies, les formules de quadrature, et la discrétisation en temps. Dans la troisième partie des résultats numériques seront présentés aussi bien dans le cas homogène que dans le cas hétérogène, Et dans la quatrième et dernière partie, nous ferons une étude comparative de cette méthode avec une méthode de volumes finis.

## 2 Le problème à étudier

Nous étudions la résolution du système de Maxwell dans le cas bidimensionnel. Dans ce cas les équations se décomposent en deux systèmes indépendants associés à une polarisation électrique et une polarisation magnétique.

Nous rappelons tout d'abord la formulation générale des équations de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{H}) = -\mathbf{j} \\ \text{div}(\mathbf{D}) = \rho \\ \text{div}(\mathbf{B}) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{D}$  sont respectivement l'induction magnétique et le déplacement (ou l'induction) électrique, et  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{E}$  sont respectivement le champ magnétique et le champ électrique.

$\rho$  et  $\mathbf{j}$  sont respectivement la densité de charge et le courant électrique.

Nous avons choisi d'étudier le cas bidimensionnel avec une polarisation transverse magnétique où les équations s'écrivent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = -j_z \end{array} \right. \quad (3)$$

Nous nous plaçons dans le cas particulier, où le domaine de propagation des ondes est isotrope et linéaire. Alors les champs et inductions sont liés par les lois constitutives suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \end{aligned} \quad (4)$$

$\varepsilon = \varepsilon(x, y)$  et  $\mu = \mu(x, y)$  sont des paramètres du milieu, qu'on appelle respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique.

## 2.1 Caractéristiques mathématiques des équations de Maxwell

Le système (3) peut se mettre sous la forme conservative suivante :

$$\mathbf{Q}_t + \operatorname{div} \mathbf{IF}(\mathbf{Q}) = \mathbf{J} \quad (5)$$

où  $\mathbf{Q} = {}^t (B_x, B_y, D_z)$ , et  $\mathbf{IF} = (F(\mathbf{Q}), G(\mathbf{Q}))$  donnés par :

$$\begin{cases} F(\mathbf{Q}) = {}^t (0, -D_z/\varepsilon, -B_y/\mu) \\ G(\mathbf{Q}) = {}^t (D_z/\varepsilon, 0, B_x/\mu) \\ \mathbf{J} = {}^t (0, 0, j_z) \end{cases} \quad (6)$$

La matrice jacobienne du système (3) est donnée dans chaque direction  $\eta = {}^t (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  par :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_2/\varepsilon \\ 0 & 0 & -\eta_1/\varepsilon \\ \eta_2/\mu & -\eta_1/\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Cette matrice a trois valeurs propres  $\lambda_1 = c \|\boldsymbol{\eta}\|$ ,  $\lambda_2 = -c \|\boldsymbol{\eta}\|$ ,  $\lambda_3 = 0$ , d'ordre de multiplicité égal aux dimensions des espaces propres engendrés par ces valeurs propres.

Le système (3) est conservatif et hyperbolique dans chaque direction de  $\mathbb{R}^2$ , ce point est crucial dans le choix de la méthode d'approximation numérique.

## 3 Approximation numérique

Nous considérons une discrétisation de type éléments finis du domaine de calcul  $\Omega = \sqcup_{i=1}^M T_i$ , où  $T_i$  est un triangle.

Nous décrivons ci-dessous les approximations spatiales et temporelles, et rappelons les résultats de stabilité.

### 3.1 Discrétisation en espace

Soit  $V = L^2(\Omega \times [0, \infty])$  l'espace des solutions du problème (3), et soit l'espace approché  $V_h^k \subset V$ , défini par

$$V_h^k = \{v \in V / v|_{T_i} \in P^k, i = 1, \dots, M\}$$

où  $P^k$  est l'espace des polynômes de degré  $k$  ( $k = 1, 2$ ). Dans toute la suite on fixera  $k = 1$ . Afin de construire une solution  $\mathbf{Q}_h \in \mathbf{V}_h^1$ , on multiplie le système (3) par une fonction test  $v(X) \in V_h^k$ , et on intègre sur chaque triangle  $T_i$ . Le système obtenu s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} \mathbf{Q}(X, t) v(X) dT_i + \int_{T_i} \mathbf{IF}(\mathbf{Q}(X, t)) v(X) dT_i = 0$$

après intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{T_i} \mathbf{Q}(X, t) v(X) dT_i + \sum_{j \in N(i)} \int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \mathbf{IF}(\mathbf{Q}(X, t)) \cdot n_{ij} v(X) d\sigma \\ - \int_{T_i} \mathbf{IF}(\mathbf{Q}(X, t)) \nabla v(X) dT_i = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$N(i)$  est l'indice des voisins du triangle  $T_i$ ,  $n_{ij}$  est la normale extérieure unitaire dirigée de  $T_i$  vers  $T_j$ .

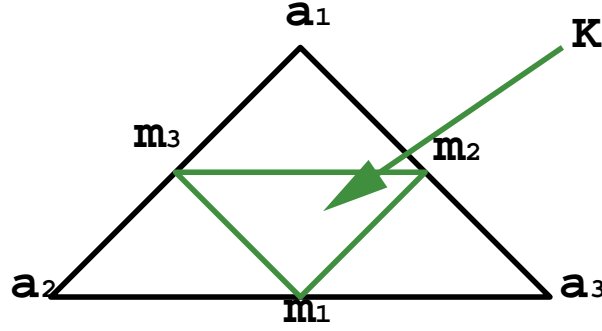
#### 3.1.1 Les fonctions de base

On construit une base  $P^1$  locale sur chaque triangle comme suit : Soit un triangle  $T_i$  de sommets  $a_1, a_2$  et  $a_3$ . On note  $m_1, m_2$ , et  $m_3$  les points milieux des arêtes (figure 1),  $K$  le triangle de sommets  $m_1, m_2$ , et  $m_3$ , et on note :

$$m_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{pmatrix} \quad m_2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{pmatrix} \quad m_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix}$$

soient  $\varphi_i$  ( $i=1, \dots, 3$ ) les fonctions de base (linéaires), telle que  $\varphi_i(m_j) = \delta_{ij}$ . où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

FIG. 1 – les degrés de liberté  $P^1$ .

$(\varphi_i)_i$  sont solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=3} \varphi_i(X) \times m_i = X \\ \sum_{i=1}^{i=3} \varphi_i(X) = 1 \end{cases}$$

alors :

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2|K|} \{(m_{22} - m_{23})x + (m_{13} - m_{12})y + m_{12}m_{23} - m_{22}m_{13}\} \\ \varphi_2 = \frac{1}{2|K|} \{(m_{23} - m_{21})x + (m_{11} - m_{13})y + m_{13}m_{21} - m_{23}m_{11}\} \\ \varphi_3 = \frac{1}{2|K|} \{(m_{21} - m_{22})x + (m_{12} - m_{11})y + m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}\} \end{cases}$$

Une fonction  $\mathbf{Q}_h$  de  $V_h^k$  peut s'écrire pour  $X = (x, y) \in T_i$ , en fonction des éléments de la base locale  $(\varphi_i)_i$  :

$$\mathbf{Q}_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{i=3} \mathbf{Q}_h(m_i, t) \varphi_i(x, y)$$

où  $\mathbf{Q}_h(m_i, t)$  représentent les degrés de liberté de la solution approchée.

*Choix des fonctions tests:*

On choisit dans l'équation (8) comme fonction test  $v(X) = \varphi_l(X)$ ,  $l = 1, \dots, 3$ . On obtient ainsi trois équations à résoudre pour chaque champ  $\mathbf{Q}_h$ , et nous approchons chaque intégrale par des formules de quadrature de Gauss.

### 3.1.2 Calcul des intégrales

Nous avons ici deux types d'intégrales à calculer :

#### Les intégrales sur le triangle

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} \mathbf{Q}(X, t) \varphi_l(X) dT_i, \text{ et}$$

$$\int_{T_i} \mathbf{IF}(\mathbf{Q}(X, t)) \varphi_l(X) dT_i.$$

et

#### L'intégrale sur le bord

$$\int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \mathbf{IF}(\mathbf{Q}(X, t)) \cdot n_{ij} \varphi_l(X) d\sigma$$

Pour approcher

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} \mathbf{Q}(X, t) \varphi_l(X) dT_i$$

on écrit d'abord  $\mathbf{Q}_h$  en fonction des éléments de la base, et on applique la formule de quadrature de Gauss à trois points donnée par :

$$\int_{T_i} F(x, y) dT_i \simeq \frac{|T_i|}{3} \sum_{j=1}^{j=3} F(m_j) \quad (9)$$

qui est exacte pour les polynômes de degré 2. On obtient ainsi :

$$\frac{d}{dt} \int_{T_i} \mathbf{Q}(X, t) \varphi_l(X) dT_i \simeq \frac{d}{dt} A \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(m1, t) \\ \mathbf{Q}(m2, t) \\ \mathbf{Q}(m3, t) \end{pmatrix}$$

où

$$A = \frac{|T_i|}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et pour

$$\int_{T_i} \mathbf{IF}(\mathbf{Q}(X, t)) \varphi_l(X) dT_i$$

on utilise la formule de quadrature (9)

Quant à l'intégrale de bord :

$$\int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \mathbf{IF}(\mathbf{Q}(X, t)) \cdot n_{ij} \varphi_l(X) d\sigma$$

l'approximation se fait en deux étapes; dans un premier temps, on approche  $\mathbf{IF}(\mathbf{Q}(X, t)) \cdot n_{ij}$  par un flux échangé entre  $T_i$  et  $T_j$ . Ce flux peut être calculé de différentes façons. Afin de préserver la continuité de la composante tangentielle du champ électrique donnée par  $n \wedge [\mathbf{E}] = 0$ , et la condition de transmission donnée par  $n \wedge [\mathbf{H}] = \mathbf{J}$ , nous avons choisi d'utiliser un schéma de Godunov. Ce schéma est basé sur la résolution locale d'un problème de Riemann. Le flux est donné par :

$$\Phi_{ij} = \mathcal{A} \mathbf{W}_{ij}$$

où  $\mathbf{W}_{ij}$  est un vecteur constant le long de l'interface  $\partial T_i \cap \partial T_j$ . On a alors :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j, t) \simeq \mathbf{IF}(\mathbf{Q}, t) \cdot n_{ij}$$

où  $\mathbf{Q}_i$  et  $\mathbf{Q}_j$  sont les solutions approchées de part et d'autre de l'interface. Dans le cas où l'interface coïncide avec le bord du domaine,  $\mathbf{Q}_j$  sera donnée par la condition aux limites ( $\mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}_h^b$ ).

Nous distinguons ici deux types de conditions aux limites, métallique et absorbante. La première est donnée par la condition  $n \wedge [\mathbf{E}] = 0$ , et la seconde est une condition qu'on impose sur le bord tronqué numériquement pour traiter les problèmes de diffraction. Dans ce cas le domaine de calcul est infini, et afin d'éviter l'effet des ondes parasites dues à la troncature, nous utilisons une condition absorbante.

Nous avons traité numériquement ces conditions aux limites de la façon suivante :

Pour la condition métallique, nous avons résolu un demi problème de Riemann, avec une condition initiale, et la condition aux limites  $n \wedge [\mathbf{E}] = 0$ . Quant à la condition absorbante, nous avons utilisé la condition de Silver-Müller qui est

d'ordre un, ces procédés ont été implémentés dans d'autres méthodes, dans le cas des méthodes Volmes Finis, (on pourra se référer à [7], et [23]) par exemple. Ensuite, nous appliquons une formule de quadrature de Gauss pour approcher :

$$\int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \Phi_{ij}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j, t) \cdot n_{ij} \varphi_l d\sigma \quad l = 1, \dots, 3$$

On se ramène d'abord à une intégrale sur  $[-1, 1]$  par le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \xi &: [r_a, r_b] \longmapsto [-1, 1] \\ r &\longrightarrow \xi = \frac{2r - r_a - r_b}{r_b - r_a} \end{aligned}$$

où  $[r_a, r_b]$  est un segment quelconque.

la formule de quadrature sur  $[-1, 1]$  est donnée par :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

qui est exacte pour les polynômes de degré trois.

**Remarque**

La base locale étant orthogonale, la matrice de masse est par conséquent diagonale.

Après l'approximation en espace et l'inversion de la matrice de masse, on obtient une E.D.O de la forme :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_h = L_h(\mathbf{Q}_h)$$

où  $L_h$  est l'opérateur approché de  $div \mathbf{F}(\mathbf{Q})$ .

### 3.2 Approximation en temps

Pour approcher l'intégrale en temps à l'ordre 2, on utilise un schéma de Runge-Kutta à deux pas :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_h^0 = \mathbf{Q}^n, \\ \mathbf{Q}_h^l = \sum_{e=0}^{l-1} \alpha_{le} \mathbf{Q}_h^e + \beta_{le} \Delta t L_h(\mathbf{Q}_h^e, \mathbf{Q}_h^b(t + d_e \Delta t)) \quad l = 1, 2, \dots, p, \\ \mathbf{Q}_h^{n+1} = \mathbf{Q}_h^p. \end{cases}$$



où  $\mathbf{Q}_h^b$  est la condition aux limites donnée par le problème à résoudre, (ici  $p = 2$ ).

Les paramètres du schéma sont donnés dans le tableau suivant : Ce schéma a

$\alpha_{10} = 1$	$\alpha_{20} = \frac{1}{2}$	$\alpha_{21} = \frac{1}{2}$
$\beta_{10} = 0$	$\beta_{20} = 0$	$\beta_{21} = \frac{1}{2}$
$d_0 = 0$	$d_1 = 1$	

TAB. 1 – *paramètres du schéma en temps*

été utilisé par Cockburn pour résoudre le système de la dynamique des gaz (voir[14]).

### 3.3 Stabilité du schéma

Après les discrétisation spatiale et temporelle décrites précédemment, on obtient une solution approchée  $\mathbf{Q}_h \in V_h^k$ . Elle approche la solution  $\mathbf{Q}$  du problème (3) à l'ordre deux (pour la preuve, voir [5] et [15]). La stabilité impose un  $\text{cfl} \leq \frac{1}{3}$  (voir [5], [15]). Cette condition est assez restrictive comparée aux autres méthodes, exemple de la méthode des Différences Finis (schéma de Yee) qui est d'ordre deux pour un  $\text{cfl} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , et des Volumes Finis, qui est d'ordre deux pour un  $\text{cfl} \leq 0.75$ . Cette condition de stabilité pour la méthode Galerkin Discontinu se traduit par un surcoût en temps de calcul relativement important.

## 4 Expériences numériques

Nous présentons ici quelques expériences numériques afin de tester la qualité de la méthode Galerkin discontinu pour la résolution d'un système hyperbolique linéaire à coefficients non constants (le système de Maxwell).

### 4.1 Cas homogène

Dans un premier temps, nous allons effectuer quelques cas tests dans un milieu homogène, où les indices du milieu  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont des constantes sur tout le domaine. Nous considérons ici le cas du vide ( $\varepsilon = \varepsilon_0$ , et  $\mu = \mu_0$ ). Nous présentons trois cas tests, le premier consiste à calculer le premier mode de résonance dans une cavité métallique carrée, le deuxième consiste à calculer le champ électromagnétique généré par un courant linéique, et le troisième cas simule la diffraction d'une onde plane sur un disque.

#### 4.1.1 simulation du mode de résonance(1,1)

On dispose d'une cavité métallique carrée de côté  $a = 1m$ , nous avons initialisé le champ électromagnétique par la solution analytique à  $t = 0$ , donnée par l'expression suivante :

$$\begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = 0 \\ E_z = \sin\pi x \times \sin\pi y \end{cases} \quad (10)$$

$\omega = 2\pi f$ , avec  $f = 0.2121\text{GHZ}$ .

La solution exacte est donnée par :

$$\begin{cases} H_x = -\frac{\pi}{\omega} \times \sin\pi x \times \cos\pi y \times \sin\omega t \\ H_y = \frac{\pi}{\omega} \times \cos\pi x \times \sin\pi y \times \sin\omega t \\ E_z = \sin\pi x \times \sin\pi y \times \cos\omega t \end{cases} \quad (11)$$

Nous comparons les solutions obtenues numériquement aux solutions exactes. Les figures (2) et (3) représentent respectivement l'évolution en temps et en espace du champ électrique. Comme ces figures le montrent, la solution approchée est de bonne qualité. Nous avons par ailleurs calculé la diffusion numérique, et nous avons constaté une diffusion de l'ordre de  $10^{-3}$  sur la première

période, et de l'ordre de  $10^{-2}$  après une dizaine de périodes. Le maillage utilisé correspond à 10 points par longueur d'onde.

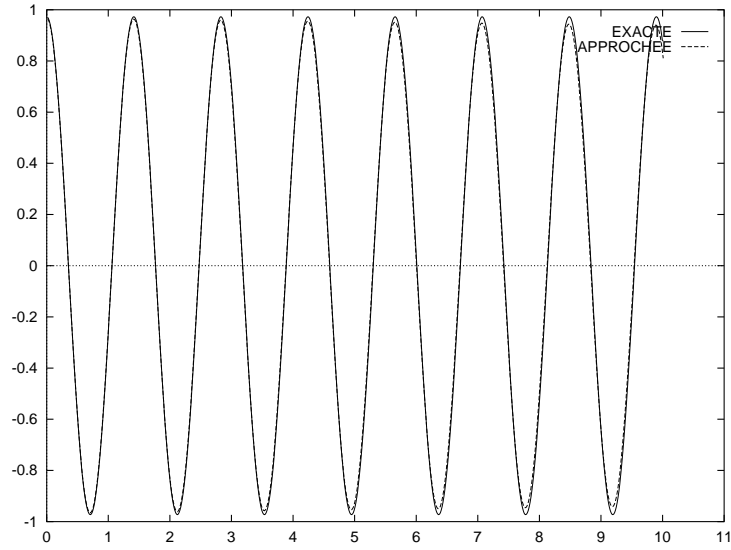


FIG. 2 – évolution en temps du champ électrique

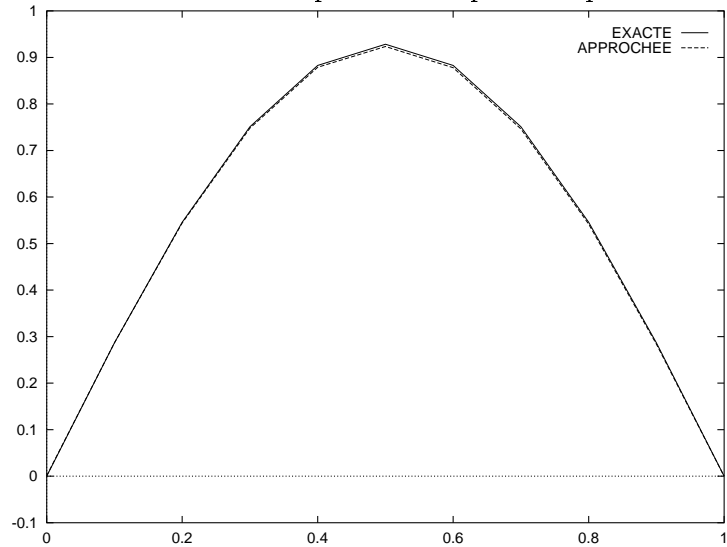


FIG. 3 – coupe en  $y=0.5$  du champ électrique

### 4.1.2 Courant surfacique

Dans ce cas test, on simule le champ électromagnétique généré par un courant linéique  $J_s$  localisé en  $x=0$ .

$$J_s = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi y}{d}\right) \cos(\omega t) \quad (12)$$

Ce courant est placé au milieu d'un guide d'onde, comme le montre la figure (4). Dans le cas test, nous avons pris  $d=1\text{m}$ , et nous avons fixé la fréquence

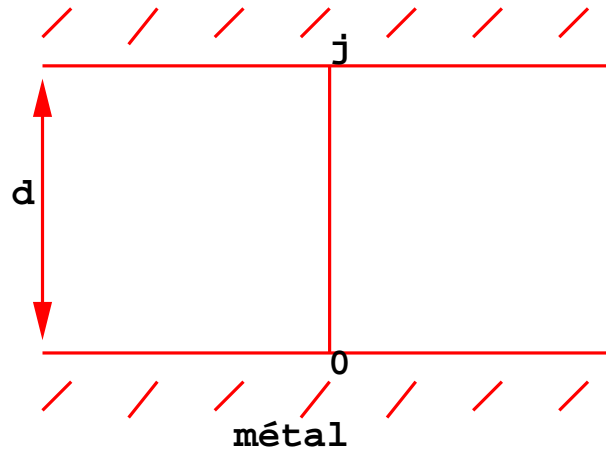
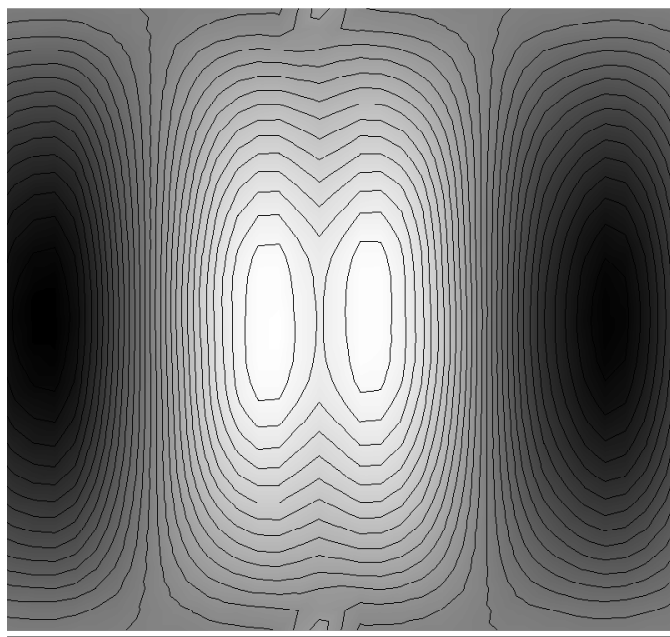
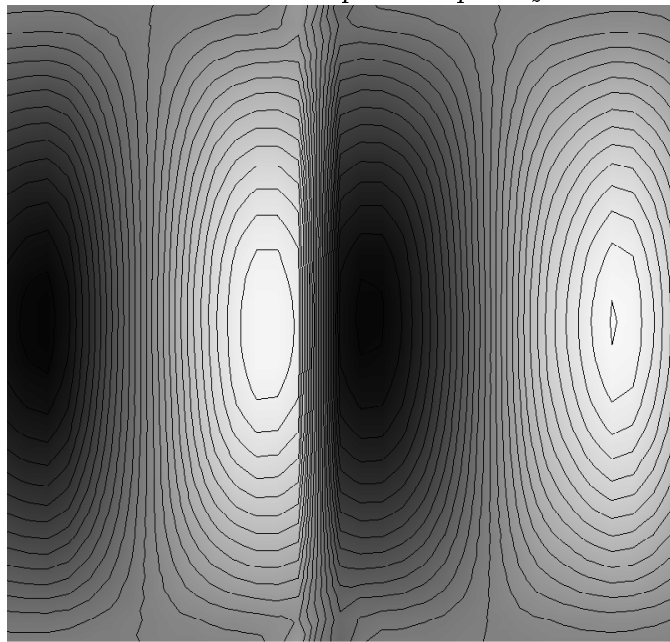


FIG. 4 – Courant surfacique dans un guide d'onde rectangulaire

de propagation à 0.3 GHz. La figure (5) représente les isovaleurs du champ électrique, et la figure (6) celles du champ magnétique. La continuité du champ électrique et la discontinuité du champ magnétique sont bien prises en compte comme le montre la coupe en  $y = \frac{d}{2}$  de la solution approchée (figures 7 et 8). L'évolution en temps est donnée par la figure (9).

(Pour l'expression explicite de la solution exacte voir [1]).

FIG. 5 – *Champ électrique  $E_z$* FIG. 6 – *Champ magnétique  $H_y$*

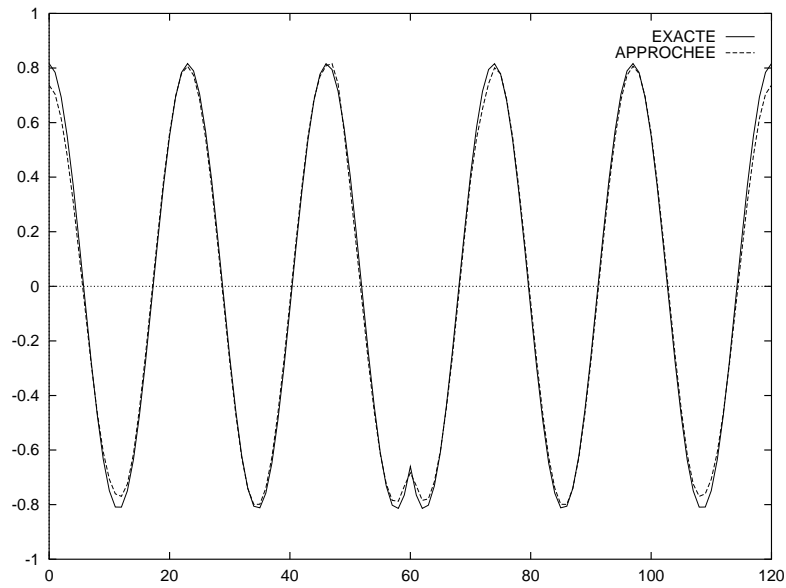


FIG. 7 – Coupe en  $y=\frac{d}{2}$  du champ électrique  $E_z$

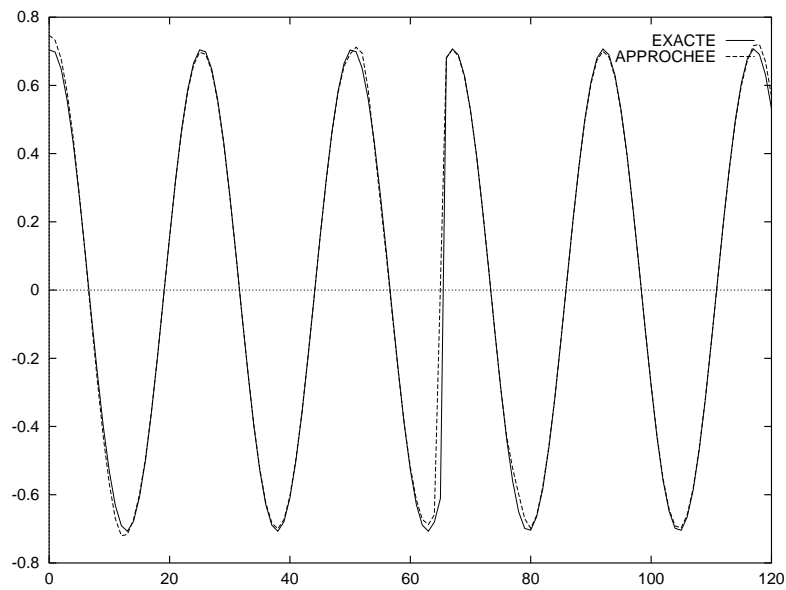


FIG. 8 – Coupe en  $y=\frac{d}{2}$  du champ magnétique  $H_y$

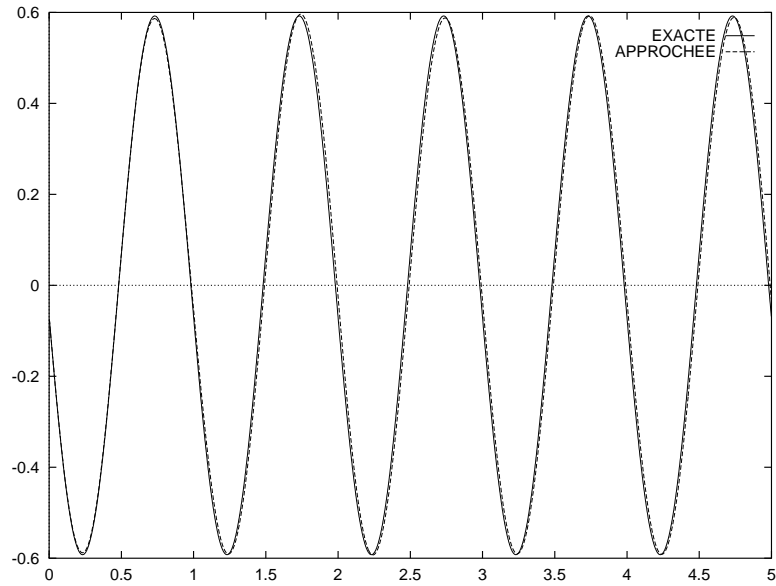


FIG. 9 – Évolution en temps du champ électrique  $E_z$

#### 4.1.3 Diffraction d'une onde plane sur un disque

On dispose d'un disque de rayon  $R = 2.5m$ , sur lequel on envoie une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 3m$ . Le maillage utilisé correspond à environ 14 points par longueur d'onde. Les figures 10, 11, et 12 représentent les champs diffractés. Ensuite, on envoie sur ce disque une onde de support  $[-R, R + R * \lambda]$  (pulse), avec  $\lambda = 3m$ . La figure 13 représente le champ électrique total. Ces figures montrent un bon comportement qualitatif de la méthode.

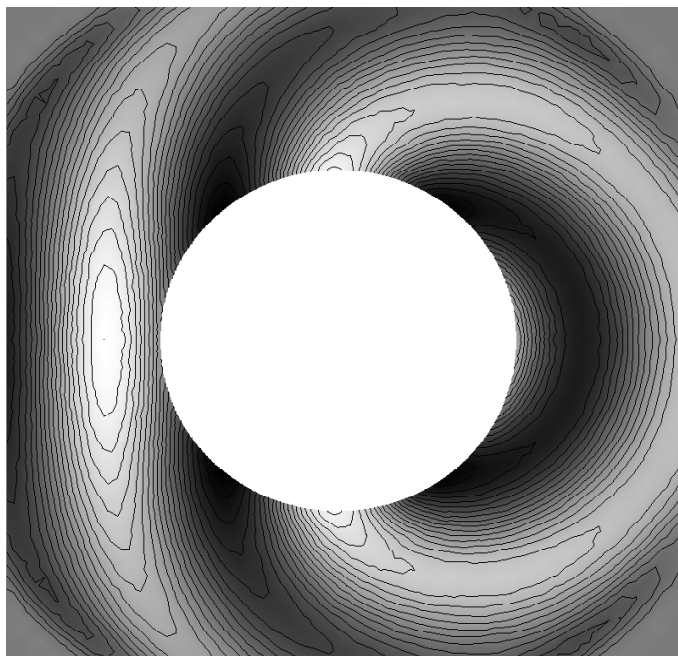


FIG. 10 – *champ électrique diffracté  $E_z$*

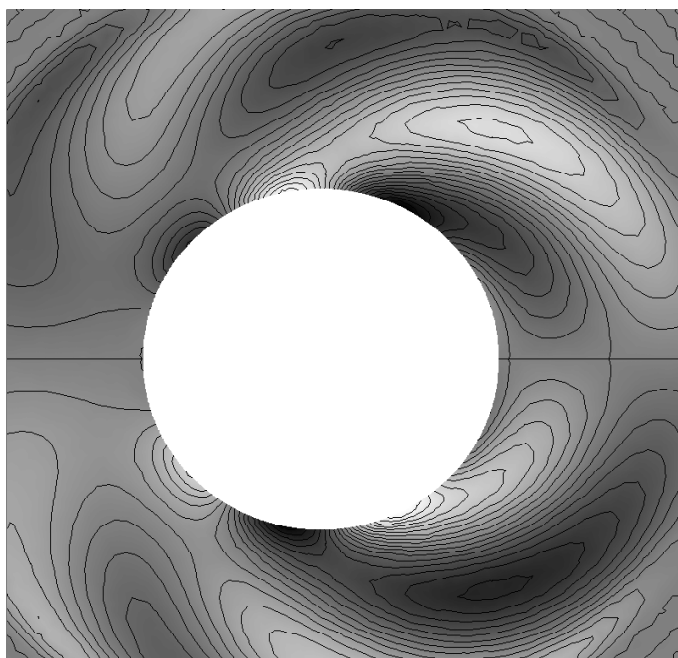
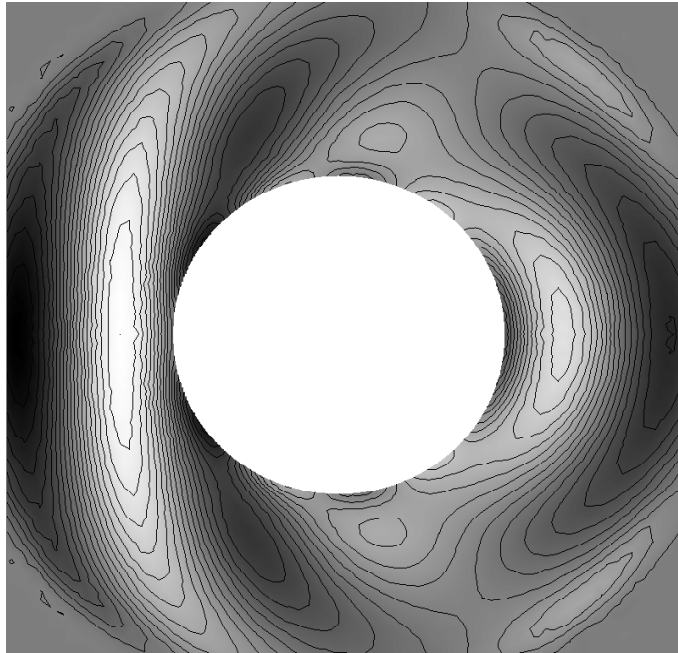
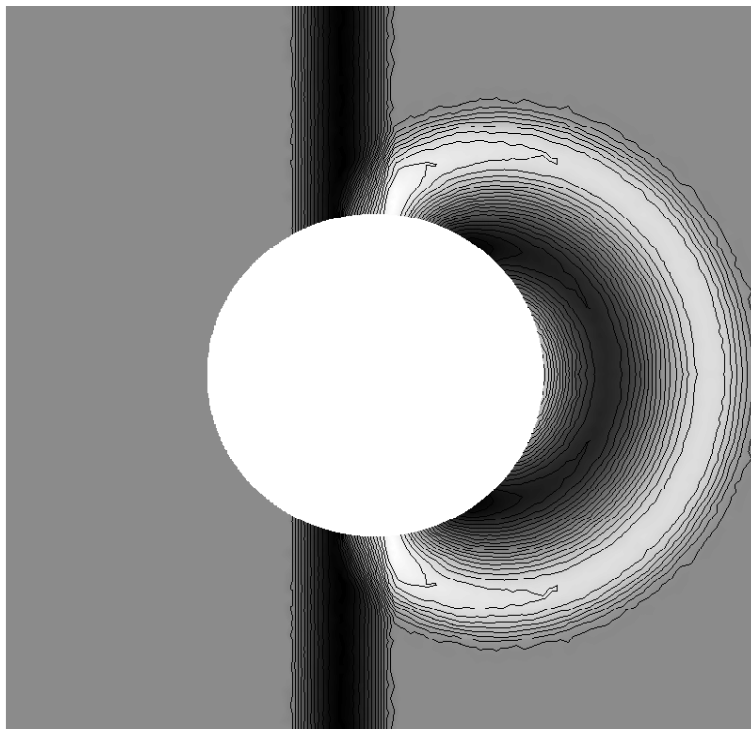


FIG. 11 – *champ magnétique diffracté  $H_x$*



FIG. 12 – *champ magnétique diffracté  $H_y$* FIG. 13 – *champ électrique total  $E_z$*

## Conclusion

Dans le paragraphe (4.1), nous avons vu des cas tests dans le cas homogène, (où parfois les solutions exactes sont connues; paragraphe 4.1.1, et 4.1.2). Les résultats ainsi obtenus montrent la bonne qualité de la méthode numérique. Les solutions sont bien approchées, et nous pouvons remarquer qu'aucune oscillation n'est apparue dans le cas de présence de courant, où le champ magnétique est discontinu, et ceci grâce au solveur de Riemman exact qui vérifie les conditions de sauts aux interfaces des milieux.

## 4.2 Cas hétérogène

Le but de ce travail était de rechercher des solutions du système de Maxwell dans le cas où les matériaux sont hétérogènes. Nous avons effectué quelques cas tests avec des matériaux diélectriques ( $\mu$  constant dans tout le domaine, et  $\varepsilon$  variable):

### 4.2.1 Simulation d'une pulsation

Ce cas test consiste à envoyer une onde à support compact  $C^0$  dans une boîte métallique semi ouverte. Le support de l'onde est égal à  $[-\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{4}]$  avec  $\lambda = 3m$ , nous avons utilisé un maillage qui correspond à environ 10 points par longueur d'onde dans le matériau. Cette boîte est composée du vide et d'un matériau d'indices  $\mu = \mu_0$  et  $\varepsilon = 4 \times \varepsilon_0$ , où  $\mu_0$  et  $\varepsilon_0$  sont les indices du vide. Ce matériau représente une couche de verre. Après un temps de calcul  $T=7$  ns, la solution est comparée à la solution exacte, et on peut remarquer sur la figure (14), que la solution numérique ( ici le champ électrique) approche bien la solution exacte.

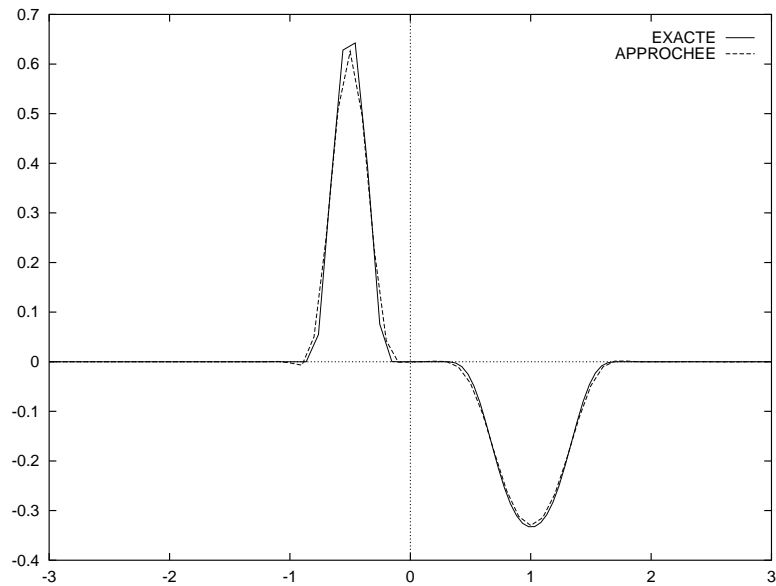


FIG. 14 – Coupe en  $y$  du champ électrique

#### 4.2.2 Diffraction d'une onde plane sur un matériau revêtu

Ici, nous traitons un cas plus complexe, qui est de calculer le champ électrique diffracté sur un matériau couvert d'une couche de diélectrique (une couche de résine), sur lequel on envoie une onde plane monochromatique de longueur  $\lambda = 2m$ . Le matériau représente un disque de rayon  $R = 0.459m$ , où la couche est d'épaisseur  $p = 0.1m$ . Cette couche inclut une répartition périodique de petits disques réfléchissants de rayons  $r = 0.025m$ . L'onde est envoyée horizontalement (avec un angle  $\theta = 0$ ). La figure (18) représente le champ électrique après une période de calcul. La solution est similaire à celle obtenue par la méthode GMRES (Generalized Minimal Residual method) par Anabelle Zébic ([26]), où le maillage utilisé correspond à 20 points par longueur d'onde.

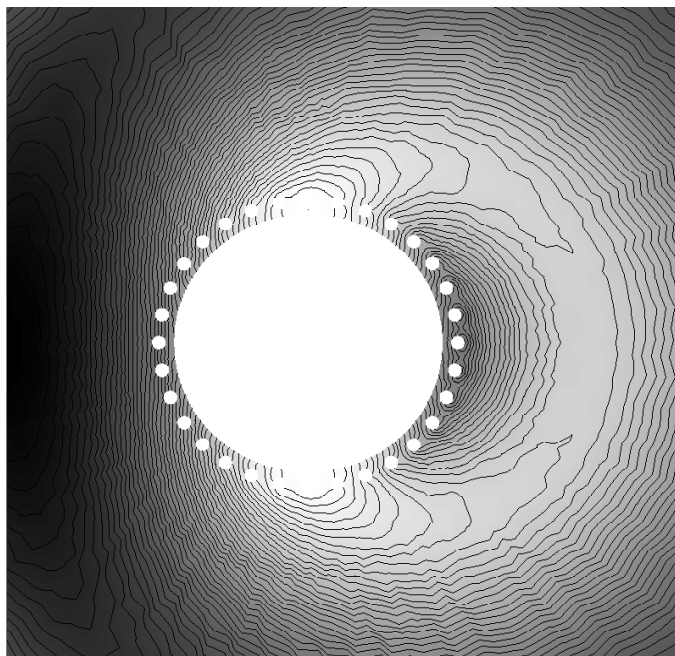


FIG. 15 – *champ électrique diffracté  $E_z$*

**Conclusion:**

Nous pouvons constater que les résultats numériques obtenus avec la méthode Galerkin Discontinu sont de bonne qualité, aussi bien dans le cas des matériaux homogènes, que dans le cas des matériaux hétérogènes. Les conditions de transmissions sont prises en compte grâce à un solveur de Riemann exact. On peut déduire à travers ces expériences numériques, la robustesse et la bonne précision de la méthode.

## 5 Comparaison de la méthode Galerkin Discontinu avec une méthode de Volumes Finis

Ce chapitre est consacré à une comparaison qualitative et quantitative entre la méthode Galerkin Discontinu décrite dans les chapitres précédents et une méthode de Volumes Finis. Nous allons d'abord rappeler brièvement cette dernière méthode (pour plus de détails voir [7], et [23]).

### 5.1 Description de la méthode Volumes Finis

On considère toujours le système de Maxwell (3) du chapitre 2. On construit une solution approchée, en intégrant la formulation conservative (5) sur chaque triangle  $T_i$ . On obtient après intégration par parties la formulation faible suivante :

$$\text{Aire}(T_i)(\mathbf{Q})_i + \sum_{j=1}^3 \Phi_{ij} + \text{termes de bord} = -\mathbf{J}_i, \quad (13)$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j) &\simeq \int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \mathbf{IF}(\mathbf{Q}(x, t)) \cdot n_{ij} d\sigma \\ &= \widetilde{\mathbf{IF}}(\mathbf{Q}(x, t)) \cdot \int_{\partial T_i \cap \partial T_j} n_{ij} d\sigma \end{aligned}$$

Pour calculer  $\Phi_{ij}$ , nous utilisons un schéma de Godunov. On obtient un schéma qui vérifie les conditions de transmission ( $\mathbf{n} \wedge [\mathbf{E}] = 0$ , et  $\mathbf{n} \wedge [\mathbf{H}] = \mathbf{j}$ ), ce schéma est précis à l'ordre un. Afin d'obtenir un schéma d'ordre élevé, nous utilisons la méthode MUSCL, qui consiste à remplacer les valeurs  $\mathbf{Q}_i$  et  $\mathbf{Q}_j$  dans la fonction flux  $\Phi_{ij}(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j)$ , par des valeurs interpolées  $\mathbf{Q}_{ij}$  et  $\mathbf{Q}_{ji}$ . où

$$\mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{Q}_i + (1 - 2\beta) \frac{(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i)}{2} + 2\beta \nabla \mathbf{Q}_{T_i} \cdot \mathbf{L}_{ij}$$

où  $\mathbf{L}_{ij}$  est la distance entre le centre de gravité du triangle  $T_i$  et l'arête  $\partial T_i \cap \partial T_j$ . Pour calculer le gradient  $\nabla \mathbf{Q}_{T_i}$ , nous utilisons un procédé similaire au calcul des flux :

$$\text{Aire}(T_i) \nabla \mathbf{Q}_{T_i} \simeq \int_{\partial T_i} \nabla \mathbf{Q} = \sum_{j=1}^3 \int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \mathbf{Q} \cdot n_{ij} \simeq \sum_{j=1}^3 \mathbf{B}_{ij} \eta_{ij} \quad (14)$$

où  $\mathbf{B}_{ij}$  est une valeur approchée de  $\mathbf{Q}$  à l'interface  $\partial T_i \cap \partial T_j$ . Nous choisissons ici  $\mathbf{B}_{ij} = \frac{\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_j}{2}$ , et on obtient ainsi :

$$\nabla \mathbf{Q}_{T_i} = \frac{1}{2\text{Aire}(T_i)} \sum_{j=1}^3 \mathbf{Q}_j \eta_{ij}$$

Quant aux termes de bord, nous avons utilisé pour la condition métallique la même technique que pour le flux interne, en résolvant un demi problème de Riemann. Se rajoute à la condition initiale une condition aux limites donnée par  $\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = 0$ , qui se traduit par

$E_z = -\frac{1}{\varepsilon(x,y)} E^{inc}$ , où  $E^{inc}$  est le champ incident sur le bord. Pour la condition absorbante, nous avons utilisé comme pour la méthode Galerkin Discontinu, la condition de Silver-Müller.

### Approximation en temps

Après la discrétisation spatiale, on aboutit au système:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{Q} = \mathbf{L}(\mathbf{Q})$$

où  $\mathbf{L}(\mathbf{Q})$  étant la discrétisation en espace, nous avons utilisé un schéma de Runge-Kutta à trois pas donné par le schéma suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}^0 = \mathbf{Q}^n, \\ \mathbf{Q}^l = \mathbf{Q}^0 - \frac{\Delta t}{(m+3-l)} L(\mathbf{Q}^{l-1}) \quad l = 1, 2, \dots, m \\ \mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^m. \end{cases} \quad (15)$$

avec  $m=3$ . Nous avons par ailleurs fixé le paramètre de décentrage  $\beta$  dans la discrétisation en espace à  $\frac{1}{3}$ . Notons que les paramètres de Runge-Kutta que nous avons utilisés dans la méthode Galerkin Discontinu diffèrent des paramètres utilisés ici pour la méthode Volumes Finis, et ceci pour des raisons de stabilité des schémas.

Nous allons présenter dans le paragraphe suivant, une comparaison entre les deux méthodes numériques citées précédemment.

## 5.2 Comparaison des deux méthodes

Nous allons effectuer quelques cas tests, afin d'évaluer et de comparer les résultats numériques obtenus par les deux méthodes, en termes de qualité de la solution et de temps de calcul.

### 5.2.1 Simulation d'un mode de résonance

On reprend ici la même expérience qu'au paragraphe (4.1.1), et nous visualisons l'évolution en temps du champ électrique. Nous avons choisi de comparer les coût CPU à précision fixée. Pour se faire, nous avons choisi un maillage trois fois plus fin pour la méthode Volumes Finis. Ceci est justifié par le fait que dans la méthode de Galerkin Discontinu, nous avons trois degrés de liberté par triangle et par inconnue, alors qu'en Volumes Finis nous avons un degré de liberté par triangle. La figure (16) représente les deux solutions obtenues avec les deux méthodes, comparées à la solution exacte. Nous remarquons que les solutions sont de même qualité.

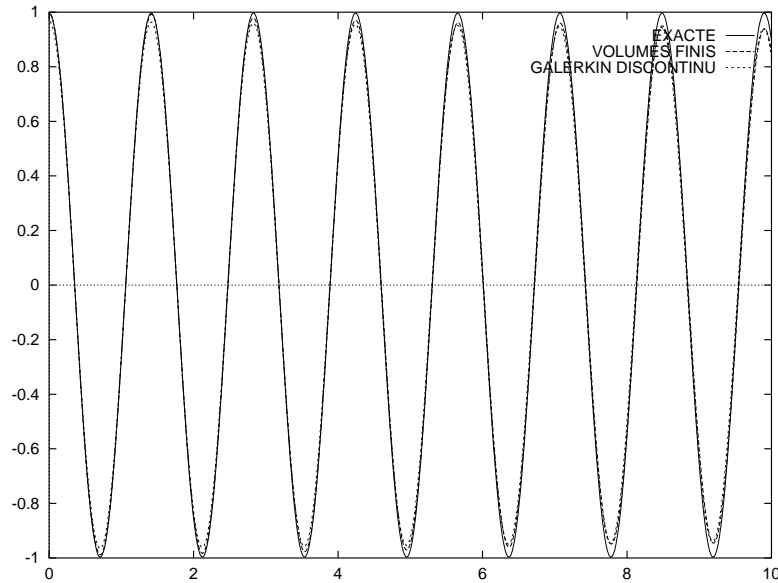


FIG. 16 – *évolution en temps du champ électrique*

Nous représentons dans le tableau 2, les temps CPU pour les deux méthodes (à erreur fixée d'ordre  $10^{-7}$ ). La diffusion numérique est de l'ordre de  $10^{-2}$  pour les deux méthodes après une dizaine de périodes.

méthode	Volumes Finis	Galerkin Discontinu
CFL	0.7	0.2
temps/itération (s)	1	2.98
temps global (s)	70	220
diffusion numérique	$4.1610^{-2}$	$2.910^{-2}$

TAB. 2 – *Coûts en temps CPU.*

On remarque que la méthode Galerkin Discontinu est trois fois plus chère que la méthode Volumes finis, pour une précision donnée. Nous calculons ensuite le temps CPU pour obtenir une erreur en norme  $\| \cdot \|_2$  de l'ordre de ( $10^{-5}$ ), pour les deux méthodes, et nous obtenons les résultats suivants :

méthode	Volumes Finis	Galerkin Discontinu
erreur	$3.910^{-5}$	$4.10^{-5}$
temps global (s)	16	28

TAB. 3 – *Coûts en temps CPU.*

Ici, on remarque que pour obtenir une erreur d'approximation de l'ordre de  $10^{-5}$ , il faut environ deux fois plus de temps pour la méthode Galerkin Discontinu par rapport à la méthode Volumes Finis.

### 5.2.2 Évolution d'un pulse dans un milieu hétérogène

On refait l'expérience du paragraphe (4.2.1) pour comparer les deux méthodes dans un cas hétérogène. Les résultats sont comparés à la solution exacte comme le montre la figure (17). Les solutions sont qualitativement similaires.



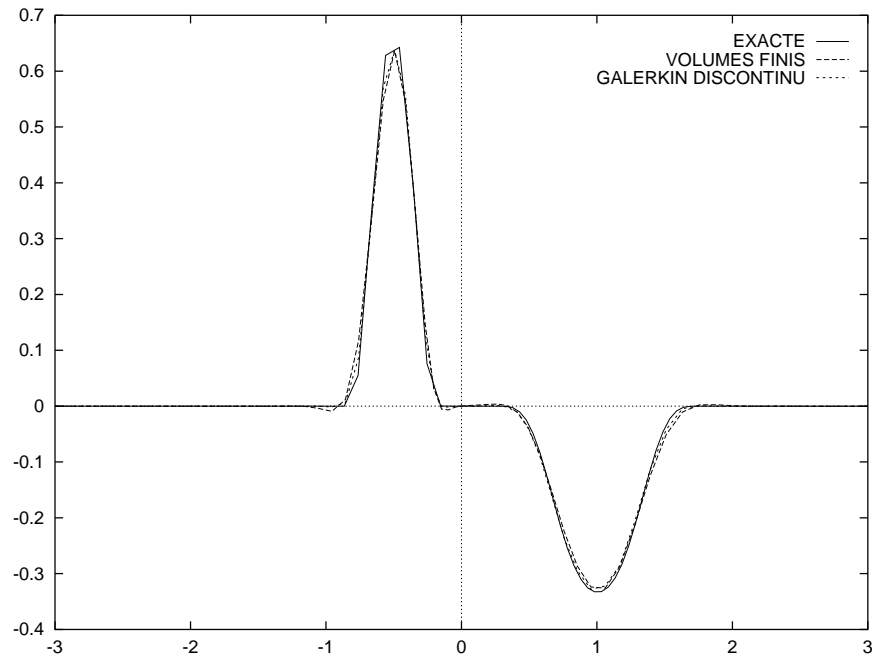


FIG. 17 – Calcul d'une pulsation dans un milieu hétérogène pour les deux méthodes

### 5.2.3 Diffraction d'une onde plane sur un disque revêtu (milieu hétérogène)

On reprend le cas de la diffraction d'une onde plane monochromatique sur un disque revêtu d'une couche de diélectrique (paragraphe 4.2.2), et on calcule la solution numérique avec les deux méthodes d'approximation citées précédemment. Les solutions sont représentées par les figures (18), et (19) obtenues respectivement par les méthodes Galerkin Discontinu et Volumes Finis.

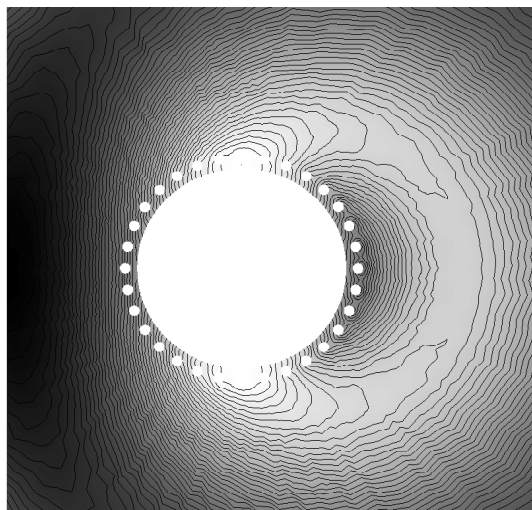


FIG. 18 – *champ électrique diffracté  $E_z$  (méthode Galerkin Discontinu)*

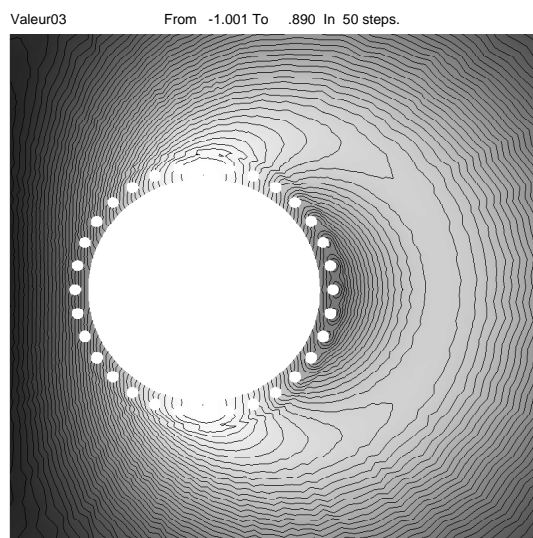


FIG. 19 – *champ électrique diffracté  $E_z$  (méthode Volumes Finis)*

### 5.3 Le bilan d'énergie

On se propose de calculer le bilan d'énergie pour les deux méthodes d'approximation numérique; Galerkin Discontinu et Volumes Finis appliquées au système de Maxwell. Pour simplifier les calculs, on traite le cas monodimensionnel où le système se ramène aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial H_x}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial H_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

#### 5.3.1 Bilan d'énergie pour la méthode Volumes Finis

Le schéma numérique d'ordre un est donné par :

$$\begin{aligned} D_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= D_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} \times [E_{j+1}^n - E_j^n] \\ B_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= B_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} \times [H_{j+1}^n - H_j^n] \end{aligned} \quad (17)$$

Avec :

$$\begin{aligned} E_{j+1}^n &= \frac{E_{j+\frac{3}{2}}^n + E_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} - c \frac{B_{j+\frac{3}{2}}^n - B_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} \\ H_{j+1}^n &= \frac{H_{j+\frac{3}{2}}^n + H_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} - c \frac{D_{j+\frac{3}{2}}^n - D_{j+\frac{1}{2}}^n}{2} \end{aligned}$$

Où  $c = \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon\mu)}}$ .

On pose  $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta y}$ .

Le bilan d'énergie dans le vide pour une onde plane en absence de charge et de courant est donnée par :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \right) = 0$$

On calcule la variation de l'énergie  $\Delta\mathcal{E}$  de la solution numérique entre l'instant  $n\Delta t$  et  $(n+1)\Delta t$ . On considère ici des conditions aux limites de type métallique ( $n \wedge \mathbf{E} = 0$ ).

$$\Delta\mathcal{E} = \sum_{j=0}^{j=N-1} \frac{1}{2} \varepsilon [(E_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^2 - (E_{j+\frac{1}{2}}^n)^2] + \sum_{j=0}^{j=N-1} \frac{1}{2\mu} [(B_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^2 - (B_{j+\frac{1}{2}}^n)^2]$$

On obtient :

$$\Delta \mathcal{E} = \sum_{j=0}^{j=N-1} \frac{\nu c}{2\varepsilon} (\nu c - 1) (D_{j+\frac{1}{2}}^n - D_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 \frac{\nu c}{2\varepsilon} (\nu c - 1) (B_{j+\frac{1}{2}}^n - B_{j-\frac{1}{2}}^n)^2$$

Pour  $\nu c \leq 1$ ,  $\Delta \mathcal{E} \leq 0$ . Ainsi l'énergie de la solution approchée décroît avec le temps.

### 5.3.2 Bilan d'énergie pour la méthode Galerkin Discontinu

On donne ici le schéma d'ordre deux pour le système de Maxwell monodimensionnel :

soient  $(D^0, D^1)$ , et  $(B^0, B^1)$  les composantes du champ électromagnétique  $(D, B)$  dans la base locale :  $\phi_0 = 1$ , et  $\phi_1 = 2 \frac{(y-y_j)}{\Delta y}$  sur un segment  $I_j = [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ , alors on obtient :

$$D_j^{0,n+1} = \begin{cases} D_j^{0,n} - \nu \left[ \frac{H_{j+1}^n - H_{j-1}^n}{2} - \frac{c}{2} (D_{j+1}^n - 2D_j^n + D_{j-1}^n) \right] \\ + \frac{C^2 \nu^2}{4} [D_{j+2}^n - 2D_{j+1}^n + 2D_j^n - 2D_{j-1}^n + D_{j-2}^n] \\ - \frac{c \nu^2}{4} [H_{j+2}^n - 2H_{j+1}^n + 2H_{j-1}^n - H_{j-2}^n] \end{cases}$$

$$B_j^{0,n+1} = \begin{cases} B_j^{0,n} - \nu \left[ \frac{E_{j+1}^n - E_{j-1}^n}{2} - \frac{c}{2} (B_{j+1}^n - 2B_j^n + B_{j-1}^n) \right] \\ + \frac{C^2 \nu^2}{4} [B_{j+2}^n - 2B_{j+1}^n + 2B_j^n - 2B_{j-1}^n + B_{j-2}^n] \\ - \frac{c \nu^2}{4} [E_{j+2}^n - 2E_{j+1}^n + 2E_{j-1}^n - E_{j-2}^n] \end{cases}$$

$$D_j^{1,n+1} = \begin{cases} D_j^{1,n} + 6\nu [H_j^{0,n} - \frac{3\nu}{2} [2H_j^n + H_{j-1}^n - c(D_{j+1}^n - D_{j-1}^n)]] \\ + 3\nu^2 [6c^2 D_j^{0,n} + \frac{3}{2} (H_{j+1}^{0,n} - H_{j-1}^{0,n}) - \frac{3}{2} c^2 (2D_j^{0,n} + D_{j-1}^{0,n} + D_{j+1}^{0,n})] \\ - \frac{3}{4} \nu^2 c^2 [12D_j^{0,n} + 6D_{j-1}^{0,n} + 6D_{j+1}^{0,n} - 6D_j^n - 6D_{j-1}^n - 3D_{j-2}^n - 6D_{j+1}^n - 3D_{j+2}^n] \\ - \frac{3}{4} c \nu^2 [-6H_{j+1}^{0,n} + 6H_{j-1}^{0,n} - 6H_{j-1}^n - 3H_{j-2}^n + 3H_{j+2}^n + 6H_{j+1}^n] \end{cases}$$

$$B_j^{1,n+1} = \begin{cases} B_j^{1,n} + 6\nu [E_j^{0,n} - \frac{3\nu}{2} [2E_j^n + E_{j-1}^n - c(B_{j+1}^n - B_{j-1}^n)]] \\ + 3\nu^2 [6c^2 B_j^{0,n} + \frac{3}{2} (E_{j+1}^{0,n} - E_{j-1}^{0,n}) - \frac{3}{2} c^2 (2B_j^{0,n} + B_{j-1}^{0,n} + B_{j+1}^{0,n})] \\ - \frac{3}{4} \nu^2 c^2 [12B_j^{0,n} + 6B_{j-1}^{0,n} + 6B_{j+1}^{0,n} - 6B_j^n - 6B_{j-1}^n - 3B_{j-2}^n - 6B_{j+1}^n - 3B_{j+2}^n] \\ - \frac{3}{4} c \nu^2 [-6E_{j+1}^{0,n} + 6E_{j-1}^{0,n} - 6E_{j-1}^n - 3E_{j-2}^n + 3E_{j+2}^n + 6E_{j+1}^n] \end{cases}$$

Nous calculons la variation de l'énergie discrète:

$$\Delta \mathcal{E} = \begin{cases} \nu \sum_{j=1}^{j=N} \frac{1}{2} \varepsilon [(E_j^{0,n+1})^2 - (E_j^{0,n})^2] + \frac{1}{2\mu} [(B_j^{0,n+1})^2 - (B_j^{0,n})^2] \\ + \frac{\nu}{3} \sum_{j=1}^{j=N} \frac{1}{2} \varepsilon [(E_j^{1,n+1})^2 - (E_j^{1,n})^2] + \frac{1}{2\mu} [(B_j^{1,n+1})^2 - (B_j^{1,n})^2] \end{cases}$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \nu \sum_{j=1}^{j=N} \frac{\nu^3 c^3}{8\varepsilon} (3\nu c - 1) (D_j^{0,n} - D_{j-1}^{0,n})^2 + \frac{\nu^3 c^3}{8\varepsilon} (3\nu c - 1) (D_j^{0,n} - D_{j-2}^{0,n})^2 \\ &+ \frac{\nu^2 c^2}{\varepsilon} (\nu c - 1) (D_j^{0,n} - D_{j-1}^{0,n})^2 + \frac{\nu^2 c^2}{\varepsilon} (\nu c - 1) (D_j^{0,n} - D_{j-2}^{0,n})^2 + \frac{\nu c}{2\varepsilon} (\nu c - 1) (D_j^{0,n} - D_{j-1}^{0,n})^2 \\ &\frac{\nu^3 c^3}{8\varepsilon} (3\nu c - 1) (B_j^{0,n} - B_{j-1}^{0,n})^2 + \frac{\nu^3 c^3}{8\varepsilon} (3\nu c - 1) (B_j^{0,n} - B_{j-2}^{0,n})^2 + \frac{\nu^2 c^2}{\varepsilon} (\nu c - 1) (B_j^{0,n} - B_{j-1}^{0,n})^2 \\ &+ \frac{\nu^2 c^2}{\varepsilon} (\nu c - 1) (B_j^{0,n} - B_{j-2}^{0,n})^2 + \frac{\nu c}{2\varepsilon} (\nu c - 1) (B_j^{0,n} - B_{j-1}^{0,n})^2 \\ &+ \frac{\nu}{2\varepsilon} (3\nu c - 1) [(D_j^{1,n} + B_{j-1}^{0,n})^2 + (D_j^{1,n} + B_{j+1}^{0,n})^2 + (D_j^{1,n} + B_{j-2}^{0,n})^2 + (D_j^{1,n} + B_{j+2}^{0,n})^2] \\ &+ \frac{\nu}{2\varepsilon} (3\nu c - 1) [(D_j^{0,n} + D_{j-1}^{0,n})^2 + (D_j^{1,n} + D_{j+1}^{0,n})^2 + (D_j^{1,n} + D_{j-2}^{0,n})^2 + (D_j^{1,n} + D_{j+2}^{0,n})^2] \\ &+ \frac{\nu}{2\varepsilon} (3\nu c - 1) [(B_j^{1,n} + D_{j-1}^{0,n})^2 + (B_j^{1,n} + D_{j+1}^{0,n})^2 + (B_j^{1,n} + D_{j-2}^{0,n})^2 + (B_j^{1,n} + D_{j+2}^{0,n})^2] \\ &+ \frac{\nu}{2\varepsilon} (3\nu c - 1) [(B_j^{1,n} + B_{j-1}^{0,n})^2 + (B_j^{1,n} + B_{j+1}^{0,n})^2 + (B_j^{1,n} + B_{j-2}^{0,n})^2 + (B_j^{1,n} + B_{j+2}^{0,n})^2] \end{aligned}$$

Pour  $\nu c \leq \frac{1}{3}$ ,  $\Delta \mathcal{E} \leq 0$ , ainsi l'énergie décroît avec le temps.

### 5.3.3 Comparaison des énergies

On revient au cas bidimensionnel, et on compare numériquement les énergies données par les deux méthodes. On reprend l'expérience du calcul d'un mode de résonance dans une cavité métallique carrée (paragraphe 5.2.1), et on compare l'énergie totale. La figure (20) représente l'énergie électromagnétique en fonction du temps (en terme de nombre de longueurs d'onde). On remarque que l'énergie décroît avec le temps dans les deux cas, néanmoins elle décroît moins vite dans le cas de la méthode Galerkin Discontinu.

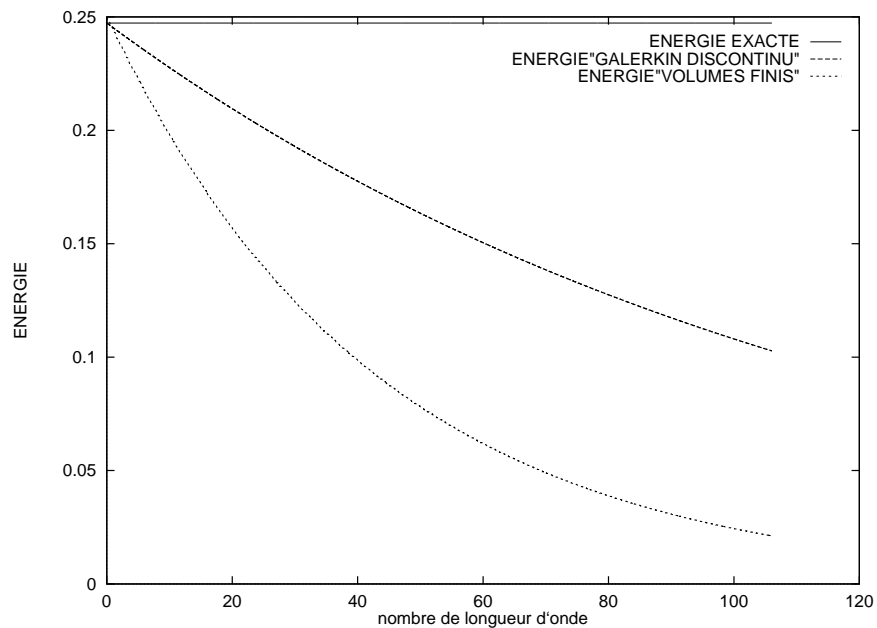
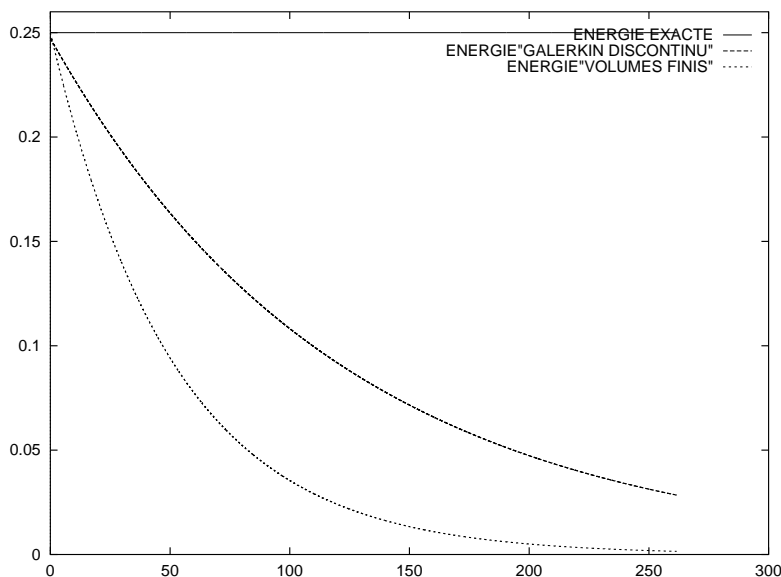


FIG. 20 – Bilan d'énergie pour les deux méthodes

### 5.3.4 Comparaison sur des temps longs

On se propose ici de faire une comparaison des deux méthodes sur un temps long qui correspond à 250 périodes pour la même expérience que dans le paragraphe (5.3.3). L'énergie décroît jusqu'à atteindre zéro pour les deux méthodes (figure 21), seulement, elle décroît moins vite dans le cas de la méthode Galerkin Discontinu.

FIG. 21 – *Bilan d'énergie*

## 6 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons présenté une méthode de Galerkin Discontinu appliquée aux équations de Maxwell. Les solutions obtenues sont  $P^1$  par morceaux, et approchent la solution exacte à l'ordre deux. Nous pouvons noter à travers les différents cas tests, la bonne qualité de la discrétisation. L'utilisation d'un solveur de Riemann exact pour le calcul des flux numériques a permis une bonne prise en compte des discontinuités à travers les interfaces des milieux d'indices différents. Nous remarquons aussi que les courants linéiques sont bien traités, et les solutions ne présentent aucune oscillation. Nous avons traité des problèmes de résonance, où les conditions aux bords sont de type métallique, et des problèmes de diffraction en milieu homogène et hétérogène, où les conditions aux bords sont mixtes, nous avons des conditions de type métallique sur l'objet diffractant, et des conditions de type absorbant sur la frontière artificielle du domaine numérique. Les résultats sont très satisfaisants

du point de vue précision de la méthode. Rappelons que le but de ce travail était de construire un schéma numérique pour résoudre le système de Maxwell dans des milieux hétérogènes, et nous pouvons remarquer que les différentes expériences numériques ont été réalisées avec succès, ainsi nous pouvons en conclure que la méthode est bien adaptée à la résolution des systèmes modélisant les phénomènes électromagnétiques, dans le cas où le milieu est linéaire et isotrope, mais pas nécessairement homogène. Le caractère discontinu de la méthode et l'utilisation des triangles comme volume d'intégration, nous a permis de traiter des problèmes avec des géométries quelconques. Il faut cependant remarquer que cette méthode est relativement chère en comparaison avec une méthode Volumes Finis (chapitre 5) où nous avons constaté que pour une qualité de résultat égale, la méthode Galerkin Discontinu est deux à trois fois plus chère que la méthode Volumes Finis.

Notons aussi, que la mise en oeuvre informatique de la méthode Galerkin Discontinu requiert des techniques beaucoup plus élaborées que la méthode Volumes Finis, ce qui rendrait son extension au cas tridimensionnel relativement compliquée, notamment pour le calcul des points de Gauss.



## Références

- [1] Roger F. Harrington, *Time-Harmonic electromagnetic fields*, (1961).
- [2] F.Bassi, S. Rebay, *A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier – Stokes equations.*, J.Comput.Phys., 131, 267, (1997).
- [3] R.Biswas, K.D.Devine, J.Flaherty, *Parallel, adaptive finite element method for conservation laws.*, Applied Numerical Mathematics, 14, 255, (1994)
- [4] S.Champier, *Convergence de schémas numériques type volumes finis pour la résolution d'équations hyperboliques*, Thèse de l'Université de Saint-Etienne, (1992).
- [5] G.Chavent, B.Cockburn, *The local projection  $P^0P^1$ -discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws*, IMA Preprint Series 341, University of Minnesota, September 1987.
- [6] J.P.Cioni, L.Fézoui, D.Issautier, *High-order upwind schemes for solving time-domain Maxwell equations*, La Recherche Aérospatiale, Vol 5, pp. 319-328, (1994).
- [7] J.P.Cioni, M.Remaki, *Comparaison de deux méthodes de volumes finis en électromagnétisme*, rapport de recherche INRIA no 3166, mai 1997.
- [8] B.Cockburn, C.W.Shu, *The Runge-Kutta local projection discontinuous  $P^1$ -discontinuous Galerkin method for scalar conservation laws*,  $M^2AN$ , 25, 337, (1991).
- [9] B.Cockburn, C.W.Shu, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws II: General framework*, Math.Comp, 52, 411, (1989).
- [10] B.Cockburn, S.Y.Lin, C.W.Shu, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: One dimensional systems.*, J.Comp.Phys, 84, 90, (1989).

- [11] B.Cockburn, S.Hou, C.W.Shu, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: The multidimensional case*, Math.Comp, 54, 545, (1990).
- [12] B.Cockburn, C.W.Shu, *The  $P^1$ -RKDG Method for Two-dimensional Euler Equations of Gas Dynamics*, ICASE Report 91-32, (1991).
- [13] B.Cockburn, C.W.Shu, *The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection diffusion systems*, SIAM.J.Numer.Anal.(to appear).
- [14] B.Cockburn, C.W.Shu, *The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Conservation laws V, Multidimensional systems*. J.Comp.Phys, 141, 199 – 224, (1998).
- [15] B.Cockburn, C.W.Shu, *The Runge-Kutta local projection  $P^1$ -discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws*, IMA Preprint Series 388, University of Minnesota, 1988.
- [16] D.Kröner, M.Rokyta, M.Wierse, *A Lax Wendroff type theorem for upwind finite volume schemes in 2-D*, Mathematische fakultät. University Freiburg, (1996).
- [17] C.Johnson, J.Pitkärantä, *An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation*, Math.Comp, 48, 1, (1986).
- [18] P.LeSaint, P.A.Raviart, *On a finite element method for solving the neutron transport equation, Mathematical aspects of finite element in partial differential equations*, (C.de Boor, Ed.), Academic Press, 89, (1974).
- [19] T.Peterson, *A note on the convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation*, SIAM J, Numer.Anal, 28, 133, (1991).
- [20] W.H.Reed, T.R.Hill, *Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation*, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73 – 479, (1973).

- 
- [21] G.R.Richer, *An optimal-order error estimate for the discontinuous Galerkin method*, Math.Comp, 50, 75, (1988).
  - [22] M.Remaki, L.Fézoui, *Schéma de Godunov pour la résolution des équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène*, 29<sup>ème</sup> Congrès National D'analyse Numérique, CANum'97.
  - [23] M.Remaki, L.Fézoui, F.Poupaud, *Un nouveau schéma de type volumes finis appliqué aux équations de Maxwell en milieu hétérogène*, rapport de recherche INRIA no 3351, janvier 1998.
  - [24] WIERSE M, *Higher order upwind schemes on unstructured grids for the compressible euler equations in timedependent geometries in 3D*, PhD thesis, university Freiburg,1994.
  - [25] K.S.Yee, *Numerical solution of initial boundary value problem in isotropic media*, IEEE Trans.Antenna Propagat, vol.AP-14, no. 3, pp. 302-307, May (1966).
  - [26] ZEBIC A, *Calcul d'ondes diffractées par des obstacles revêtus de couches minces de matériaux absorbants*, Rapport de recherche INRIA n°2091, (1993).



---

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis  
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399