



HAL
open science

Modèle d'évaluation des risques extrêmes, vers une mutualisation des risques en finance

Hugues Aubry, Lotfi Belkacem

► **To cite this version:**

Hugues Aubry, Lotfi Belkacem. Modèle d'évaluation des risques extrêmes, vers une mutualisation des risques en finance. [Rapport de recherche] RR-3615, INRIA. 1999. inria-00073063

HAL Id: inria-00073063

<https://inria.hal.science/inria-00073063>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Modèle d'évaluation des risques
extrêmes, vers une mutualisation
des risques en finance*

Hugues Aubry - Lotfi Belkacem

N° 3615
Janvier 1999

THÈME 4

*R*apport
de recherche



Modèle d'évaluation des Risques Extrêmes, Vers une Mutualisation des risques en finance

Hugues Aubry, Lotfi Belkacem

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet FRACTALES

Rapport de recherche — Janvier 1999 — 14 pages

Résumé : L'objectif de ce travail est de mettre en place, au travers d'une approche dissymétrique du risque de marché, un modèle de couverture des pertes extrêmes. Pour cela, nous sommes amenés à montrer que l'excès de perte au-delà d'un seuil u (ou Excess Function) peut être modélisé par une loi de Weibull. Après avoir testé la stabilité de notre modèle, nous définissons un intervalle de prime de risque qui nous permet de couvrir dynamiquement un portefeuille en fonction des anticipations de hausse ou de baisse du marché, et de l'horizon H de placement de l'investisseur. Enfin, nous détaillons au travers d'un back testing sur 250 jours le processus de couverture, pour aboutir à une proposition de mise en place d'un système de réassurance des pertes extrêmes sur les marchés financiers.

Mots-clé : Excess Function, loi de Weibull, Worst Case Scenario, prime de risque, intervalle de couverture, Mean Excess Function, Quadratic Excess Function, modèle de réassurance, risques extrêmes, dissymétrie du risque du marché, franchise de marché, mutualisation du risque.

(Abstract: pto)

Hedging Model of Extremes values And Mutualisation of Risk in financial markets

Abstract: Our main purpose in this paper is to design through a dissymmetrical approach of the risk of financial market, a hedging model against extreme losses. In order to justify our investigation, we show that the excess of loss beyond a threshold u (or Excess Function) can be modeled with a Weibull distribution. We first test the stability of our model, then we define an interval of risk premium that allows us to hedge dynamically a portfolio, according to up or down financial market anticipation, and the horizon H of investment. Finally, we detail through a 250 days back testing the process of hedging, in order to propose a large claims reinsurance model of financial market.

Key-words: Excess Function, Weibull distribution, Worst Case Scenario, risk premium, range of hedge, Mean Excess Function, Quadratic Excess Function, reinsurance model, large claims, dissymmetrical risk of financial market, mutualisation of risk.

Modèle d'évaluation des risques extrêmes

Couverture sur les marchés émergents :

Vers une mutualisation des risques en Finance

Aubry Hugues

*THEMA. Université Paris X Nanterre

**Département de la Recherche.

ABF Capital Management, Paris XVI

Belkacem Lotfi

*Projet Fractales INRIA.

Domaine de Voluceau, Rocquencourt

**Institut Supérieure de gestion de Sousse

Tunisie

Introduction

En termes d'allocation d'actifs, le contrôle du risque est l'aptitude à anticiper l'incertain associé à un processus d'investissement. De ce point de vue, la modernité des idées soutenues par Bachelier (voir C.Walter [1]) [2] demeure. En effet, il considère que si les cours contiennent tout le prévisible, les fluctuations ultérieures relèvent exclusivement de l'imprévisible, c'est-à-dire du hasard. Le marché ne croît ni à la hausse ni à la baisse du cours vrai¹, mais il suppose plus ou moins probables des mouvements d'une certaine amplitude. Ces propos, étonnamment d'actualité, représentent les fondements de la théorie moderne du portefeuille développée par Sharpe [3], Lintner [4], Mossin [5], Black [6], Fama-McBeth [7], et Blume-Freud [8], dans laquelle le risque correspond à l'écart-type (volatilité en langage financier) des rendements des actifs. La volatilité d'un marché se mesure comme la dispersion de la variable aléatoire X_1, X_2, \dots, X_n des rendements observés aux dates 1, 2, ... n, autour de sa moyenne. Cette domination de la notion de dispersion autour de la moyenne s'explique en partie pour deux raisons : la simplicité des calculs, notamment dans le cas d'une généralisation² à un portefeuille d'actifs, et l'utilisation du théorème central limite qui permet de définir la loi limite d'une somme d'aléas.

Ainsi, malgré les travaux de B.Mandelbrot [9], puis de Fama et Roll [10], concernant le caractère leptokurtique³ de la fonction de densité des rendements de certains actifs financiers, ce n'est qu'en octobre 1987 que l'on observe une réelle remise en cause de la modélisation gaussienne des aléas de marché. Les grandes déviations ne sont plus considérées comme des artefacts, mais trouvent une légitimité dans la notion de hasard sauvage proposé par B.Mandelbrot [11]. Le développement d'outils mathématiques adéquate (voir L.Belkacem, J.Levy-Vehel, C.Walter [12]), et les implications des directives du Comité de Bâle (CAD 96⁴) concernant la surveillance des risques de marché, ont focalisé l'attention sur la partie négative des queues de distribution des rendements, et plus particulièrement sur les variations extrêmes.

Aujourd'hui, le marché reste fidèle aux premières idées de Bachelier, au travers de l'approche probabiliste du risque, mais les indicateurs ont évolué vers des mesures dissymétriques (voir Belkacem et Aubry [13]), plus proche de la réalité. Les modèles⁵ de Value-at-Risk [14], et l'analyse de risques extrêmes vont dans ce sens : anticiper mais aussi quantifier l'incertain associé au processus d'investissement.

¹ Par « cours vrai », Bachelier entend cours sans réinvestissement des dividendes. C'est-à-dire le *price index* et non le *total return index*.

² En effet, la modélisation de la variable X par une loi normale permet de définir le risque global d'un portefeuille comme la somme pondérée du risque de chacun de ses constituants, moins les effets de corrélation induits par l'agrégation.

³ C'est le caractère plus ou moins pointu de la distribution. Il se définit comme le moment d'ordre 4 divisé par la variance.

⁴ Le Comité de Bâle (relayé par la Commission Bancaire en France), au travers de la directive CAD (Capital Adequacy Directive), exige le calcul pour chaque établissement bancaire d'un niveau de fonds propres correspondant à une viabilité de la situation de la banque à un seuil de probabilité de 99%, calculé sur la position de la salle de marché.

⁵ La Value-at-Risk, ou VaR, se mesure comme la somme d'argent que l'on peut perdre sur un horizon de temps donné et à un seuil de confiance fixé. Une VaR journalière à 95% de -2,5% signifie que j'ai 95% (respectivement 5%) de chances de ne pas perdre (respectivement de perdre) plus de 2,5 francs en une journée. Plusieurs modèles ont été développés en tenant compte de certaines hypothèses plus ou moins fortes : JP Morgan Model RiskMetrics, modèles de VaR historique, modèles par simulations de Monte Carlo.

Cet article se présente de la manière suivante : une première partie traitera de la notion de risques extrêmes sur les marchés financiers au travers de la modélisation des pertes excédant un certain seuil u . En deuxième partie on introduira les notions de *Quadratic Mean Excess Function*, de *Mean Excess Function*, et de *Median Excess Function*, pour calculer les primes journalières d'assurance (voir D.Zajdenweber [15]) nécessaires à la couverture de ces risques. Enfin pour conclure, on proposera l'ébauche d'un modèle de réassurance des risques extrêmes sur les marchés financiers.

Modélisation des valeurs extrêmes du taux de rendement des actifs financiers

Soient X_1, X_2, \dots, X_n les taux de rendements journaliers d'un actif financier observé sur la période 1, 2, ..., n jours. Soit Z_H la valeur qui correspond au taux minimum journalier observé sur un horizon H de cotation. On définit alors le vecteur $Z_{\min,H} = (Z_{1,H}, Z_{2,H}, \dots, Z_{N,H})$ comme le « Worst Case Scenario » (WCS) où :

$$Z_{1,H} = \min(X_1, X_2, \dots, X_H)$$

$$Z_{2,H} = \min(X_{H+1}, X_{H+2}, \dots, X_{2H})$$

$$N = n/H$$

En termes financiers, le WCS représente la perte journalière la pire sur un horizon de placement H. La figure 1 est une illustration du modèle de base d'analyse des valeurs extrêmes, le graphique montre les variations négatives extrêmes, dépassant un certain seuil de pertes journalières, sur un horizon de placement H. En effet, on constate que pour l'indice SBF 250 de la bourse de Paris, sur un an de cotations journalières, 1 seule valeur se situe au-delà de -4%, et 16 journées perdent plus de 2%. Pour l'indice KLSE de la bourse malaysienne, sur la même période, 68 valeurs dépassent les -2%, et 12 s'inscrivent au-delà de -4%.

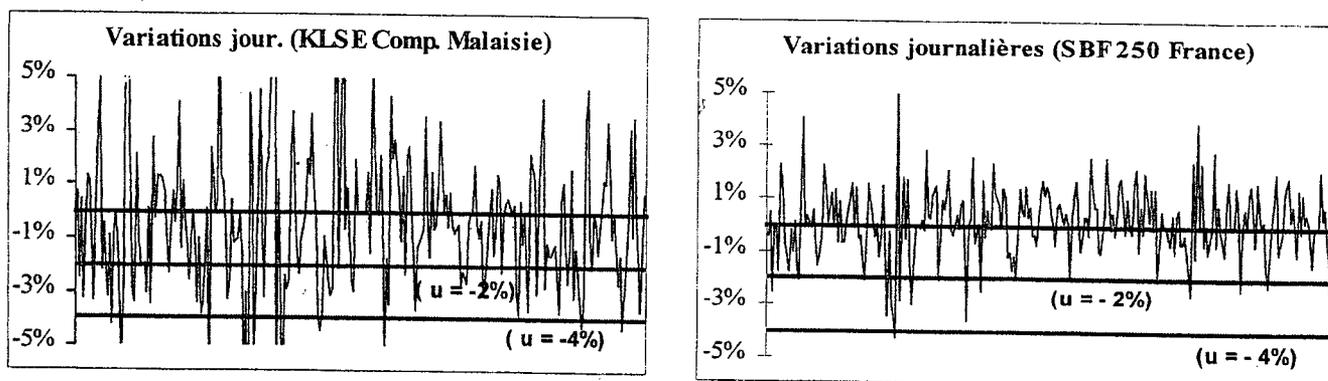


Fig.1 : Variations journalières au-delà de -2% et de -4%, sur les indices SBF 250 (à droite) de la bourse de Paris et KLSE Comp. (à gauche) de la bourse malaysienne.

Ainsi, après avoir déterminé u , qui pourra être différent selon les marchés mais aussi selon l'investisseur, on définit la variable $e_H(u)$ telle que :

$$e_H(u) = |Z_{\min,H}| - u \quad (1)$$

$$\text{avec } |Z_{\min}| > u$$

Elle représente « l'Excess Fonction » (voir J.Beirlant, J.Teugels, P.Vynckier [16]), ou encore l'excès de perte au-delà de la borne u . Sachant que Z_{\min} représente le WCS, $e_H(u)$ peut être interprétée comme la quantité de perte journalière la pire, excédant un seuil u , sur un horizon de temps H, que l'investisseur subit en plaçant ses fonds sur un marché financier.

Afin de généraliser les résultats, mais surtout d'en connaître les propriétés, on cherche à déterminer théoriquement la forme de la fonction de densité de la variable $e_H(u)$.

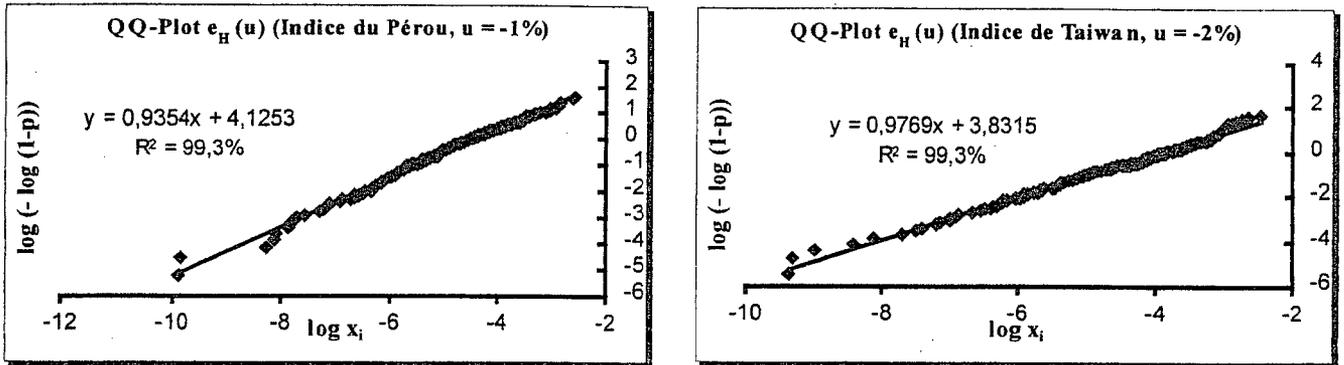


Fig.2 : Représentation QQ-Plot des indice du Pérou SE (à gauche) et du Taiwan SE (à droite).

L'analyse graphique du type « Quantile-Quantile Plot⁶ » (voir P.Embrechts, C.Kluppelberg, et T.Mikosch [17]), nous permet de conclure que la quantité $e_H(u)$ peut être modélisée par une loi de Weibull⁷, dont la fonction de répartition est donnée par :

$$W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \exp\{-\lambda x^\alpha\} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

avec $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$

Pour l'ensemble des indices boursiers constituant notre base de donnée⁸, on trouve un α proche de 1. Sur la fig.2, on constate que pour les deux exemples, l'ensemble des points se situent dans 99% des cas sur une droite, de pente $\alpha = 0,9354$ pour le Pérou et $\alpha = 0,9769$ pour Taiwan. λ est respectivement égal à 61,1 pour le Pérou et 45,6 pour Taiwan.

L'utilisation de cette modélisation est motivée par deux propriétés principales :

- 1) le modèle reste stable en fonction des changements du seuil u . Le tableau 1 montre que la pente de la droite de régression (α) reste stable en fonction des différents seuils de perte u . A noter, que pour certains pays, le nombre de pertes supérieures à 4% étant limité, le calcul du coefficient α peut être fortement influencé par une valeur située en dehors du nuage de points, d'où une modification anormale de la pente de la droite de régression.
- 2) le modèle offre une grille globale aux gestionnaires de fonds, pour traiter les problèmes de couverture concernant les pertes catastrophiques sur les marchés financiers. En effet, il permet de définir quel est le poids moyen des pertes journalières extrêmes, au-delà d'un certain seuil u . D'un point de vue financier, ce poids représente la quantité moyenne d'argent contenue dans la partie négative de la queue de distribution au-delà de $-u$.

Par ailleurs, au niveau statistique, la loi de Weibull offre la propriété remarquable d'avoir tous ses moments définis, et ce quelle que soit la valeur du coefficient α .

⁶ Dans le cas présent, si $e_H(u)$ est correctement modélisé par une distribution de Weibull, la transformation suivante devrait être linéaire, de pente α et d'ordonnée à l'origine $\log \lambda$:

$$\log(-\log(1-p)) = \log \lambda + \alpha \log X_i$$

avec $p = i / (n + 1)$

⁷ La distribution de Weibull fait partie de l'une des trois lois limites qui font l'objet du théorème des valeurs extrêmes de Gnedenko (voir B.V.Gnedenko et A.N.Kolmogorov [23]).

⁸ Les cours de bourse proviennent des bases de données Datastream et Bloomberg, et correspondent en général à l'indice de référence du pays considéré. A noter, que certaines places financières émergentes n'ont pas été étudiées, faute d'historiques suffisamment importants pour réaliser nos tests (pas d'échantillons inférieurs à 1000 journées de cotations).

H = 5	u = -1%	u = -2%	u = -3%
Taiwan	0,9848	0,9769	1,0393
Finlande	0,97	0,91	0,94
Pérou	0,93	0,89	0,92

Tableau 1 : α en fonction du seuil de perte u

Rootzen, et Tajvidi [18] donnent davantage de propriétés sur ce modèle appliqué à l'analyse des risques catastrophes dans les domaines de l'assurance, et de la réassurance.

Evaluation de la prime de risque

Contrairement à un trader, un gérant de portefeuille sera plus sensible au niveau de sa perte potentielle journalière la pire sur un horizon de placement H, plutôt qu'à la probabilité sur une journée de ne pas baisser au-delà d'un certain seuil. De fait, la Value-at-Risk en tant que mesure de quantification du risque présente quelques lacunes, notamment en termes de précision. Elle ne donne aucune information quant à l'étendue des pertes supérieures à un seuil u, or la plupart des marchés étudiés (notamment les places financières émergentes) sont caractérisés par des variations de fortes amplitudes. En effet, depuis les travaux de B.Mandelbrot [9], d'autres auteurs tels que Fama et Roll [10], ou encore Belkacem [19], se sont attachés à démontrer que les queues de distribution empiriques des variations relatives des prix de certains actifs financiers étaient plus épaisses que celle d'une loi normale, modèle de base de la théorie moderne du portefeuille (voir H.Markowitz [20]). On remarque un écart entre la courbe de densité théorique de la loi normale, et la courbe de densité empirique des données. Pour l'ensemble des places financières étudiées, l'Excess⁹ Kurtosis¹⁰ est largement positif, excepté pour l'Australie légèrement au-dessus de 1,48, ce qui signifie que la distribution est plus pointue au centre, et présente des queues plus épaisses. Cette constatation empirique permet de souligner l'importance des valeurs extrêmes (voir D.Zajdenweber [21]), mais surtout le fait que la queue de distribution négative est porteuse d'informations essentielles pour une évaluation précise de la prime de risque.

Par ailleurs, le risque de marché est un risque dissymétrique à la baisse et non à la hausse. Les modèles de couverture du type Black et Scholes¹² traditionnellement utilisés sur les salles de marché, offrent une approche symétrique neutre, inadaptée à la gestion dynamique des risques extrêmes.

Ainsi, dans cette partie nous proposons une nouvelle méthode d'évaluation concernant les primes de couverture des risques extrêmes, au travers de la modélisation de l'Excess Function par une loi de Weibull.

On définit l'Excès de perte Quadratique Moyen ou Quadratic Mean Excess Function (QmEF) par :

$$S(u) = E \left[(| Z_{\min,H} | - u)^2 \mid | Z_{\min,H} | > u \right] \quad (3)$$

Cette quantité joue un rôle important dans l'évaluation de la prime de risque en finance, néanmoins d'autres indicateurs tels que la Mean Excess Function¹¹ (mEF), ou encore la Median Excess Function¹² (MEF) peuvent être utilisés comme nous le verrons dans la partie empirique de cet article (voir J.Beirlant, J.Teugels et P.Vynckier [16], ainsi que P.Embrechts, C.Klüppelberg, et T.Mikosch [17]).

⁹ Différence entre le coefficient de Kurtosis de la distribution et le coefficient de Kurtosis d'une distribution Normale (3).

¹⁰ Le Kurtosis est le moment d'ordre 4, divisé par le moment d'ordre 2.

¹¹ Mean Excess Function se définit comme : $mef(u) = E(X - u \mid X > u)$

¹² Médiane Excess Function se définit comme la valeur qui partage la distribution ordonnée des Excess en deux.

En pratique, $S(u)$ est estimé par :

$$\hat{S}(u) = [1/\text{card } \Delta_n(u)] \sum_{i \in \Delta_n(u)} (|Z_{\min,H}| - u)^2, u > 0 \quad (4)$$

Dans lequel

$$\Delta_n(u) = \{ i : i = 1, 2, \dots, n, (|Z_{\min,H}| > u) \}$$

Dans le cas d'une loi de Weibull, dont la distribution est donnée par (2), la Quadratic mean Excess Function¹³ s'écrit :

$$S(u) \sim (2u^{2(1-\alpha)}) / (\lambda^2 \alpha^2) \quad (5)$$

Pays ¹⁴	Mean Excess Function		Quadratic Mean Excess Function		Mediane Excess Function	
	Théorique	Empirique	Théorique	Empirique	Théorique	Empirique
Pérou/H=5	0,012829	0,012826	0,000329	0,000375	0,008213	0,007597
	(-0,02%)		(13,95%)		(-7,50%)	
Brésil/H=5	0,028961	0,028989	0,001677	0,001465	0,021354	0,022782
	(0,10%)		(-12,64%)		(6,69%)	
Italie/H=5	0,010643	0,010645	0,000226	0,000288	0,006900	0,006470
	(0,02%)		(27,43%)		(-6,23%)	
Pakistan/H=5	0,013192	0,011909	0,000368	0,000348	0,009107	0,007290
	(-9,73%)		(-5,43%)		(-19,95%)	
Sri Lanka/H=20	0,012686	0,011952	0,000322	0,000324	0,007761	0,007055
	(-5,79%)		(0,68%)		(-9,10%)	
Venezuela/H=20	0,038371	0,033473	0,002944	0,001850	0,026376	0,029248
	(-12,77%)		(-37,16%)		(10,89%)	
Singapour/H=120	0,032116	0,030567	0,002062	0,002095	0,022650	0,022314
	(-4,82%)		(1,60%)		(-1,48%)	

Tableau 2 : résultats théoriques et empirique concernant le calcul de la mEF, QmEF et MEF.

On constate sur le Tableau 2, que la modélisation de l'Excess Function $e_H(u)$ par une loi de Weibull coïncide avec les résultats trouvés empiriquement.

Dans ce cadre, la prime de risque s'écrit :

$$\text{Premium} = P(|Z_{\min,H}| > u) * S(u) \quad (6)$$

D'un point de vue purement économique, le premium représente la somme moyenne d'argent nécessaire à mettre de coté, pour couvrir un risque de perte supérieur à un seuil u , sur un horizon de placement H .

Ainsi, le risque se décompose en deux parties :

- d'une part le poids moyen des pertes que représente la partie de la queue de distribution supérieure au seuil u . Selon l'indicateur utilisé (MEF, mEF, QmEF) la notion de dispersion des variations au-delà de u est plus ou moins prise en compte. En effet, contrairement à la moyenne, la médiane n'est pas sujette aux variations extrêmes. Par ailleurs, entre la QmEF et la mEF, il existe un intervalle de prime de risque que l'on utilisera selon les anticipations d'évolution des marchés (développement dans la partie empirique).
- d'autre part la probabilité de se situer au-delà du seuil u permet de prendre en compte la déformation de la distribution entre les valeurs centrales et les valeurs extrêmes.

¹³ Dans le cas d'une loi de Weibull, la mEF et la MEF sont de l'ordre de : $mEF \sim u^{(1-\alpha)} / \lambda \alpha$; $MEF \sim (-\text{Log}(0,5) / \lambda)^{1/\alpha}$

¹⁴ Pour chaque pays, la valeur entre parenthèse représente : $((\text{valeur empirique/valeur théorique}) - 1) * 100$. C'est l'écart relatif exprimé en pourcentage, entre la valeur empirique et la valeur théorique des différentes grandeurs calculées. Cette valeur permet d'estimer la précision de notre modèle.

Le seuil u peut être interprété comme une « franchise de marché » que l'investisseur est prêt à accepter pour garder une gestion dynamique de son portefeuille, tout en se couvrant contre les pertes jugées excessives. Comme nous le constaterons sur les résultats empiriques (voir plus loin), la gestion de la couverture du portefeuille sera d'autant plus dynamique que la franchise est forte, et réciproquement. L'investisseur qui accepte de supporter une partie non négligeable du risque avec son gérant de portefeuille limite le poids de sa couverture, ce qui rend le portefeuille plus réactif notamment lors des phases de rebonds du marché. A noter que H se définit comme l'horizon de placement de l'investisseur, ce qui se traduit par une Quadratic mean Excess Function, qui pour un seuil u fixé, est fonction croissante de H .

Résultats empiriques et back testing du modèle de couverture

L'étude a été réalisée sur un échantillon de 61 places financières. Les données proviennent des bases Datastream et Bloomberg, et correspondent pour la plupart à l'indice de référence des différentes bourses nationales. Certaines places émergentes, notamment concernant les pays d'Europe de l'Est, ou encore du Maghreb n'ont pas pu être analysées faute d'historique suffisamment important.

Pays	Argentine	Bangladesh	Pakistan	Pérou	Pologne	Etats-Unis	uk
EWCS ¹⁵	-5,10%	-3,02%	-2,48%	-2,54%	-4,62%	-1,59%	-1,61%
Seuil u	-2%	-2%	-2%	-2%	-2%	-2%	-2%
Nb de valeurs négatives	138	112	108	99	66	386	386
Taille des Z_{min} ¹⁶	138	112	108	99	66	386	386
Nb de valeurs excédents u	108	49	58	48	55	74	86
Probabilité de dépasser u	0,78	0,44	0,54	0,48	0,84	0,19	0,22
Mean Excess Function	0,041406	0,038846	0,015568	0,018822	0,032416	0,011340	0,010503
Quadratic Excess Function	0,005901	0,004922	0,000647	0,000649	0,001926	0,000761	0,000320
Median Excess Function	0,029893	0,020772	0,009445	0,013971	0,023234	0,006050	0,005819
Premium (mEF)	0,032297	0,017092	0,008407	0,009035	0,027229	0,002155	0,002311
Premium (QMEF)	0,004603	0,002166	0,000349	0,000312	0,001618	0,000145	0,000070
Premium (MEF)	0,023317	0,009140	0,005100	0,006706	0,019517	0,001150	0,001280

Tableau 3 : résultats pour un horizon d'investissement $H=20$ jours, et seuil de pertes $u = -2\%$.

Pays	Argentine	Bangladesh	Pakistan	Pérou	Pologne	Etats-Unis	uk
EWCS	-5,10%	-3,02%	-2,48%	-2,54%	-4,62%	-1,59%	-1,61%
Seuil u	-4%	-4%	-4%	-4%	-4%	-4%	-4%
Nb de valeurs négatives	138	112	108	99	66	386	386
Taille des Z_{min}	138	112	108	99	66	386	386
Nb de valeurs excédents u	68	24	13	17	28	9	12
Probabilité de dépasser u	0,49	0,21	0,12	0,17	0,43	0,02	0,03
Mean Excess Function	0,039658	0,051102	0,022682	0,018587	0,035640	0,032234	0,017717
Quadratic Excess Function	0,007301	0,007517	0,001286	0,000514	0,001858	0,004222	0,000791
Median Excess Function	0,024855	0,032367	0,010951	0,017999	0,039419	0,023183	0,000791
Premium (mEF)	0,030933	0,022485	0,012248	0,008922	0,029938	0,006124	0,003898
Premium (QMEF)	0,005695	0,003307	0,000694	0,000247	0,001561	0,000802	0,000174
Premium (MEF)	0,019387	0,014241	0,005914	0,008640	0,033112	0,004405	0,000174

Tableau 4 : résultats pour un horizon d'investissement $H=20$ jours, et un seuil de pertes $u = -4\%$.

Les résultats ci-dessus montrent que pour un investissement sur 20 jours de 1 000 000, sachant que l'investisseur ne veut pas supporter des pertes journalières de plus de 2% (tableau 2), la somme moyenne à mettre de côté pour couvrir le surplus de perte doit être de ARP¹⁷ 4603 par jours pour l'Argentine, de GBP 70 pour le Royaume-Uni, ou encore de PLZ 1618 pour la Pologne. Le tableau 4 correspond au même calcul, mais pour un seuil de perte de 4%.

¹⁵ L'EWCS est la moyenne des pertes journalières les pires sur un intervalle de temps donné.

¹⁶ A noter que le vecteur Z_{min} n'est pas nécessairement constitué que de valeurs négatives. En effet, dans le cas où $H=1$, le vecteur Z_{min} correspond à la distribution entière.

¹⁷ ARP, GBP, PLZ, correspondent aux abréviations des devises de l'Argentine, du Royaume-Uni et de la Pologne.

Par ailleurs, un back testing réalisé sur 250 jours de bourse sur les indices SBF250 et Kuala Lumpur SE a permis de constater qu'une approche dynamique de couverture était préférable, à une application systématique d'une des trois grandeurs calculées (mEF, MEF et QmEF). La période de test pour les deux marchés s'échelonne du 5 août 1997 au 3 juillet 1998. Elle correspond à une consolidation de 49,8% pour la bourse malaisienne et à une hausse de 41% pour l'indice français.

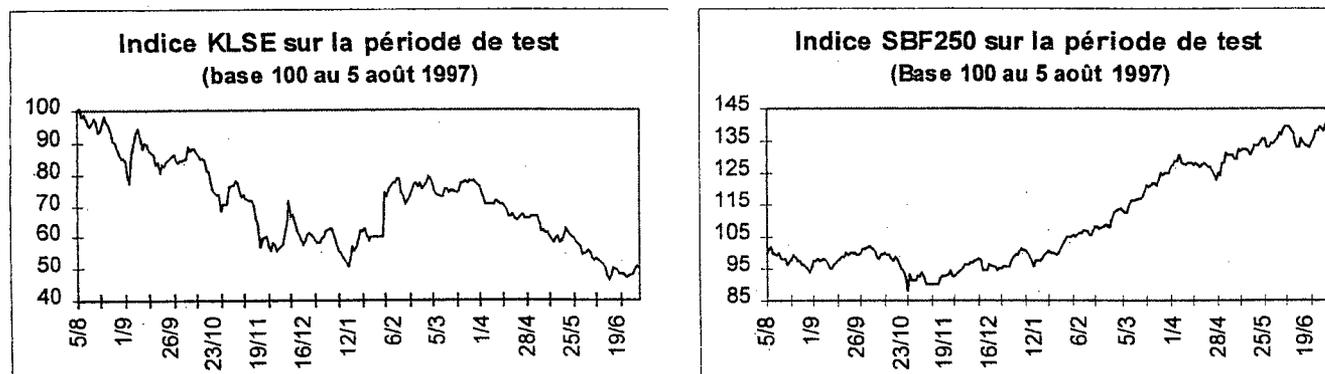


Figure 3 : évolution de l'indice SBF250 (à droite) et de l'indice Kuala Lumpur (à gauche) sur la période de back testing.

Détails concernant l'opération de couverture : en (t), le gérant de portefeuille investit une somme de 1 million sur un marché (dans le cas présent la France ou la Malaisie), et chaque jours il retire de son portefeuille le montant nécessaire à la couverture des pertes qu'il ne veut pas subir. Cette somme d'argent, que l'on considère constante (pour des raisons de commodité), est placée sur un compte annexe qui offre comme rendement le monétaire. La couverture des dépassements du seuil u, fixé par le gérant du portefeuille, se fera grâce à la partie placée en monétaire.

A l'instant (t + H), l'ensemble du fonds placé en monétaire est réintégré dans le portefeuille total afin de déterminer la valeur liquidative de l'ensemble.

Dans les deux tableaux 5 et 6, les calculs ont été réalisés sur des périodes de placement de 20 jours (soit 1 mois). Pour chacune période, on retrouve le portefeuille non couvert, et la valeur liquidative du portefeuille couvert selon les trois indicateurs.

Remarques : les tableaux 5 et 6 fournissent les résultats du back testing et se lisent de la manière suivante.

- la deuxième colonne représente l'évolution sur un pas de temps de 20 jours d'un portefeuille de 1 000 000 investis sur l'indice du pays, ce qui signifie qu'entre le 1^{er} et le 20^{ème} jour le portefeuille investi en Malaisie a perdu $[(851144 / 1\ 000\ 000) - 1] * 100$ soit 14,9%.
- La troisième colonne correspond au même portefeuille de départ mais couvert par une prime de risque moyenne journalière calculée à partir de la QmEF (cf. explications de la couverture journalière dans le paragraphe précédent).
- Les quatrième et cinquième colonnes fournissent les résultats pour le même portefeuille couvert à partir de la mEF et de MEF.
- Enfin, les autres colonnes (6,7,8) représentent les plus ou moins values réalisées entre les différents portefeuilles couverts et celui de référence non couvert.

Malaisie $u=-2\%/H=20$	Portefeuille	QmEF	mEF	MEF	Résultat		
	non couvert	couvert	couvert	couvert	+/- values	+/- values	+/- values
[0;20]	851144	847334	861736	855758	-3810	10592	4614
[20;40]	1005805	1009369	1009347	1009356	3564	3542	3551
[40;60]	857021	854247	871478	864326	-2774	14457	7305
[60;80]	822870	816181	836046	827802	-6689	13176	4932
[80;100]	998703	995522	995878	995730	-3181	-2825	-2973
[100;120]	947598	949237	949674	949493	1639	2076	1895
[120;140]	1269514	1271234	1258291	1263663	1720	-11223	-5851
[140;160]	1033056	1034053	1034875	1034534	997	1819	1478
[160;180]	950547	950637	957152	954448	90	6605	3901
[180;200]	861707	860128	870741	866336	-1579	9034	4629
[200;220]	870700	867811	880353	875147	-2889	9653	4447
[220;240]	938085	940041	937591	938608	1956	-494	523
Total					-10956	56412	28451

Tableau 5 : back testing sur 250 jours de bourse, sur le marché malaysien.

France/SBF250 $u=-2\%/H=20$	Portefeuille	QmEF	mEF	MEF	Résultat		
	non couvert	couvert	couvert	couvert	+/- values	+/- values	+/- values
[0;20]	976321	976310	976250	976279	-11	-71	-42
[20;40]	1032422	1032392	1031567	1031910	-30	-855	-512
[40;60]	901649	902037	904155	903274	388	2506	1625
[60;80]	1030665	1030826	1030154	1030433	161	-511	-232
[80;100]	1017726	1017812	1017947	1017891	86	221	165
[100;120]	1044074	1044084	1043818	1043929	10	-256	-145
[120;140]	1075251	1075206	1074425	1074750	-45	-826	-501
[140;160]	1132213	1132119	1130060	1130917	-94	-2153	-1296
[160;180]	1042909	1042891	1042777	1042824	-18	-132	-85
[180;200]	1043148	1043354	1042368	1042778	206	-780	-370
[200;220]	1035846	1035822	1035346	1035544	-24	-500	-302
[220;240]	1029927	1029895	1028942	1029339	-32	-985	-588
Total					597	-4342	-2283

Tableau 6 : back testing sur 250 jours de bourse, sur le marché parisien.

En comparant deux configurations de marché opposées (phase de hausse pour la France +41% et phase de correction pour la Malaisie -50%), on constate qu'il est préférable dans le cas de la France de se situer dans la partie basse de l'intervalle de couverture (calcul du premium à partir de la QMEF), afin de profiter de la hausse du marché tout en se couvrant contre les pertes supérieures à 2%. En effet, dans une période de croissance du marché, la probabilité d'avoir une baisse supérieure à 2% diminue, ce qui laisse au coussin de couverture le temps

de se reconstituer après chaque correction. Parallèlement, la somme allouée à la couverture journalière étant moins importante, la partie investie sur le marché reste suffisamment conséquente pour profiter des rebonds. La stratégie de couverture s'avère positive sur la période. A noter qu'en utilisant la mEF ou la MEF, l'investisseur est couvert contre les baisses supérieures à 2%, mais le coût excessif de sa couverture moyenne journalière limite la sensibilité du fond au rebond du marché, d'où une performance finale sur la période de test inférieure au portefeuille non couvert.

Concernant la Malaisie, au contraire, l'utilisation de mEF (partie haute de l'intervalle de couverture) est mieux adaptée. Elle permet non seulement de couvrir en moyenne les pertes au-delà de 2%, mais aussi de désensibiliser plus rapidement le fonds aux aléas du marché. Dans ces phases de consolidation du marché, la probabilité d'occurrence d'une baisse supérieure à 2% étant plus importante, le coussin de garantie est sollicité davantage, d'où la nécessité de constituer une couverture moyenne journalière plus importante. Sur la période de test, la stratégie de couverture s'avère gagnante, comparée au portefeuille non couvert.

A noter qu'il est important de raisonner en termes de couverture moyenne. En effet, dans la mesure où les calculs de couverture sont réalisés sur l'historique total des indices, il semble logique que sur certaines périodes de placement H, le portefeuille ne soit pas parfaitement couvert. Il peut exister des séquences de journées de cotation, pour lesquels les excès de pertes sont majoritairement supérieurs à la couverture moyenne choisie sur l'horizon de placement H. Cependant, sur un échantillon de 250 jours de bourse, on constate que la stratégie de couverture s'avère positive, et ce dans les deux configurations de marchés citées plus haut et sur les deux pays.

Cette méthode offre selon les anticipations du gestionnaire, la possibilité de gérer dynamiquement un coussin de couverture moyen journalier. Néanmoins, pour les raisons invoquées dans le paragraphe précédent, il semble opportun d'introduire un processus de mutualisation des risques, notamment sur les marchés émergents. En effet, la somme moyenne au-delà de u sera d'autant moins représentative que la dispersion des variations est importante, d'où la nécessité de minimiser ce risque en le répartissant sur l'ensemble des intervenants.

Proposition d'un modèle de réassurance des risques extrêmes

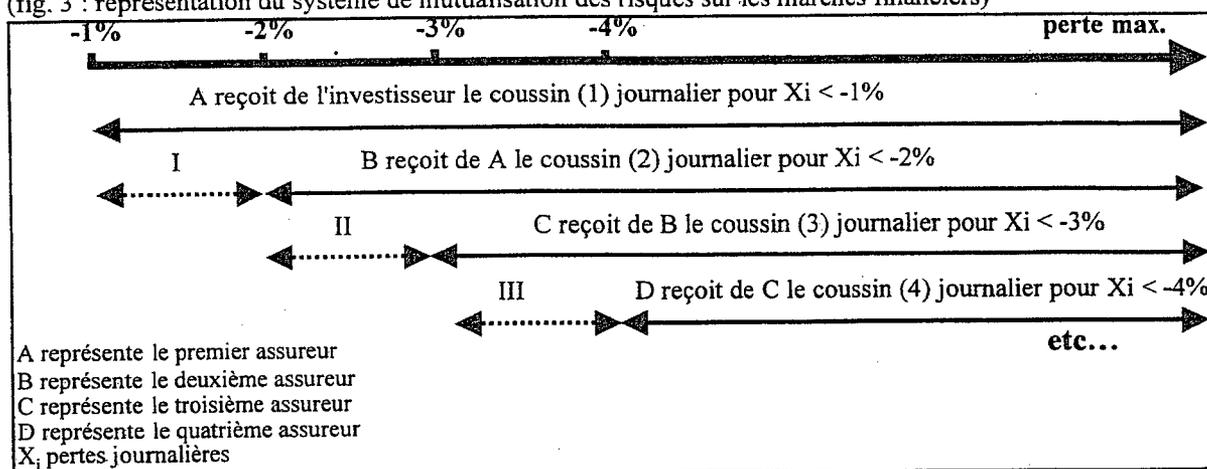
En considérant un gérant de portefeuille qui souhaite profiter du potentiel de croissance des marchés émergents, tout en limitant ses pertes journalières, il est possible, au travers du système de couverture exposé précédemment, de lui proposer un système de réassurance.

Le gérant évalue le coussin moyen qu'il doit mettre de côté pour couvrir l'ensemble des pertes qui excèdent 1%. Cette somme, qui peut être matérialisée sous forme de titre, est reçue par un tiers qui accepte de couvrir les pertes de 1% à 2%. Il évalue donc le coussin moyen pour couvrir les pertes au-delà de 2%, et émet un titre qui est souscrit par un autre intervenant, qui lui-même émet un titre pour les pertes de la troisième tranche de couverture. Le gérant est vendeur d'une option de couverture qui sera ou non exercée suivant l'évolution du marché. L'intérêt de l'acheteur d'option est de toucher chaque jour la différence entre les deux coussins, sans avoir nécessairement à payer immédiatement de couverture. Chaque intervenant achète une partie du risque, moyennant une rémunération, et l'engagement de couvrir les pertes concernant sa tranche.

Le différence des primes de couverture (premium) sera d'autant moins important que le risque qu'il couvre est moins probable, donc que l'on se situe dans la partie extrême de la queue de distribution. En contrepartie, l'occurrence de sa tranche de pertes étant plus faible, le tiers sera moins sollicité pour venir couvrir d'éventuelles pertes.

Par ailleurs, sachant que chacun des intervenants se couvre contre les pertes supérieures à sa tranche, ils connaissent à l'avance leur perte maximale, qui correspond au différentiel des bornes de leur intervalle de couverture, plus ou moins une quantité Δ due à la dérive naturelle du fonds.

(fig. 3 : représentation du système de mutualisation des risques sur les marchés financiers)



Dans le cas de la Malaisie, pour couvrir l'ensemble des pertes supérieures à 1% sur un horizon d'investissement $H=20$, d'un portefeuille dont le capital est de MYR 1 000 000, le premier assureur touchera la somme de MYR 6386 (cf. tableau 7), le deuxième MYR 3295, etc...

Malaisie/H=20	Probabilité	Premium (mEF)	différentiel de prime
-1%	0,85	0,014365	-
-2%	0,45	0,007980	0,006386
-3%	0,23	0,004685	0,003295
-4%	0,11	0,003205	0,001480

Tableau 7 : évaluation du différentiel de prime de risque, sur le marché malaysien.

La question se pose alors de savoir quel doit être le dernière tranche a réassurer. Si l'on considère l'indice S&P500 américain, sur les 31 dernières années, il a dépassé 1 fois les 20% de pertes (le 19 octobre 1987) et 6 fois -6% (dont la dernière date du 1^{er} septembre 1998) en une journée. On peut donc imaginer qu'en ce qui concerne les Etats-Unis, le dernier intervenant prendra à sa charge la couverture des pertes de 10% à l'infini.

Conclusion :

L'analyse des marchés d'actions dans le monde a permis de mettre en évidence des différences de comportements statistiques entre les marchés financiers développés et ceux dits émergents. En effet, on constate non seulement que le nombre de pertes y est plus important que sur les bourses développées, mais aussi que l'étendue de ces pertes est plus grande. Ainsi, l'analyse en termes de risques extrêmes semble plus pertinent que l'utilisation de modèles du type Espérance/Variance ou encore Value-at-Risk. L'application du modèle de couverture des risques extrêmes, au travers de la modélisation de l'*Excess Function* par une loi de Weibull, offre de nouvelles perspectives, notamment en termes de gestion dynamique de la prime de couverture. Par ailleurs, contrairement aux approches liées à une modélisation des rendements par une loi normale, ce modèle tient compte davantage des caractéristiques propres des marchés financiers : dissymétrie du risque et épaisseur des queues de distribution. Enfin, au regard de l'instabilité des places financières émergentes, notamment dans les phases de correction, l'introduction d'un système de mutualisation du risque devrait permettre de limiter les pertes de chacun des intervenants tout en couvrant plus efficacement la perte totale. La création d'un marché de couverture des risques extrêmes pourrait accroître la liquidité sur les places financières émergentes, et ainsi favoriser leur développement tout en limitant leur risque intrinsèque.

Remerciements : nous tenons à remercier le Professeur Daniel Zajdenweber, laboratoire du THEMA (Nanterre Paris X) pour les idées et les remarques dont il a su nous faire part, ainsi que le Professeur Jacques Levy-Vehel, responsable du projet Fractales de l'INRIA (Rocquencourt) pour le temps qu'il a accepté de nous consacrer.

[1] Walter.C, Une histoire du concept d'efficience sur les marché financiers. *Annales : Histoire, Sciences Sociales*, 4, PP 873-905.

[2] L.Bachelier. Théorie de la spéculation. *Thèse de doctorat en mathématique, Université de Paris*, 29 mars 1900, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, Ser.3, XVII (1900), 21-86.

[3] W.F.Sharpe. A Simplified Model Portfolio analysis. *Management Science*, 10 : 277-293, january 1963.

W.F.Sharpe. Capital asset prices : A theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *Journal of Finance*, 19 : 425-442 September 1964.

[4] J.Lintner. The Valuation of Risk Asset and the selection of Risky investments in stock portfolio and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47 : 13-27, February 1965.

[5] J.Mossin. Equilibrium in Capital Asset Market. *Econometrica* 34 : 337-350, October 1966.

[6] F.Black. Capital Market Equilibrium with restricted borrowing. *Journal of Business*. Pages 444-455, july 1972.

[7] E.F.Fama and J.McBeth. Risk, return and equilibrium : empirical test. *Journal of Political Economy*, mai-juin 1973.

-
- [8] M.Blume and I.Freind. A new look at the Capital Asset pricing Model. *Journal of Finance*. Pages 283-299, Mai 1973.
- [9] B.Mandelbrot, The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, 36, pp.394-419, 1963.
- [10] E.F.Fama et R.Roll, Parameter estimates for symmetric stable distribution, *JASA*, 66 (334), 1971.
- [11] B. Mandelbrot, FRACTALES, Hasard et Finance. *Collection Champs, Edition Flammarion*, 1997, Deuxième partie, pp.69-73.
- [12] L.Belkacem, J. Levy-Vehel, and C.Walter. Generalized Market Equilibrium : « Stable » CAPM. In *Proceeding of the AFFI-International Conference of Finance, 1994. June 29-30 and 1^{er} July, Bordeaux, France*.
- [13] H.Aubry et L.Belkacem, Au-delà de la VaR, une nouvelle mesure du risque en gestion de portefeuille, *Analyse Financière*, Hors série Juin 98.
- [14] H.Aubry, L.Belkacem, L.Mayet, et A.Paturle. Modèle de BétaVaR, ou la contribution marginal du risque au travers de la Value-at-Risk. *Document interne de recherche, Banque du Louvre*, décembre 97.
- [15] D.Zajdenweber. Business Interruption Insurance, a risky business. A study on some Paretian risk phenomena. *Fractals*, Vol. 3, No. 3 (1995) 601-608.
- [16] J.Beirlant, J. Teugels, P. Vynckier. Practical Analysis of Extreme Values. *Leuven University Press*, 1996
- [17] P. Embrechts, C. Klüppelberg, et T. Mikosch. Modelling Extremal Events. *Springer*, 1997.
- [18] Rootzén, H. and Tajvidi, N. Extreme value statistics and wind storm losses : a case study. *Scand. Actuarial Journal*, 1997, 1 :70-94.
- [19] L.Belkacem. Processus Stables et Applications en Finance. *PhD, Université de Paris IX Dauphine*, Novembre 1996.
- [20] H.Markowitz. Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments. *John Wiley & Sons, New York*, 1959.
- [21] D.Zajdenweber, Hasard et prévisions. *Economica, Paris* 1976.
- [22] F.Black et M.Scholes. The Pricing of Options and Corporate. *Journal of Political Economy* 81, May-June, pp. 637-659.
- [23] B.V.Gnedenko et A.N.Kolmogorov. Limit distributions for sums of independent random variables. *Addison-Wesley, MA*, 1954.



Unité de recherche INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399

