HAL open science

Le schéma Beta/Gamma en axisymétrique

Romuald Carpentier

▶ To cite this version:

Romuald Carpentier. Le schéma Beta/Gamma en axisymétrique. RR-3676, INRIA. 1999. inria-00072996

HAL Id: inria-00072996
https://inria.hal.science/inria-00072996

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Le schéma $\beta\gamma$ en axisymétrique.

Romuald CARPENTIER

N° 3676

avril 1999

THÈME 4

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399

Le schéma $\beta\gamma$ en axisymétrique.

Romuald CARPENTIER*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projets SINUS

Rapport de recherche n° 3676 — avril 1999 — 103 pages

Résumé : On étudie le couplage entre des instabilités tourbillonnaires et acoustiques dans un propulseur à poudre. On compare une expérience sur maquette (C1x) avec le cas test C3 de l'ONERA. Pour celà, on développe le schéma $\beta\gamma$ pour le calcul axisymétrique et on essaye de perturber la simulation du cas test C3.

Mots-clés : SAPPHO, axisymétrique, cas test C3.

*Email: Romuald.Carpentier@sophia.inria.fr

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, B.P. 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : 04 92 38 77 77 - International : +33 4 92 38 77 77 — Fax : 04 92 38 77 65 - International : +33 4 92 38 77 65

The $\beta\gamma$ scheme for axisymetric calculus.

Abstract: We study the aero-acoustic coupling in a booster. We compare the results between a real experimentation (C1x) and the C3 test case of ONERA. For that, we developpe the $\beta\gamma$ scheme for the axisymetric calculus and we try to disturb the simulation of the C3 test case.

Key-words: Sappho, axisymetric, test case C3.

Table des matières

1 INTRODUCTION **2**

2 VERS L'AXISYMETRIQUE **3**
2.1 La géométrie . . . 3
2.2 Le maillage . . . 4
2.3 Les équations de Navier Stokes 3D. . . . 5
2.4 Intégration en volumes finis . . . 6
2.5 Particularités axisymétriques . . . 7
2.6 Approximations numériques d'ordre 1 . . . 7
2.7 Le $\beta\gamma$ schéma . . . 12
2.8 Validation dans le cas des équations d'Euler . . . 18
2.9 Convergence dans le cas d'advection pure . . . 19

3 LE CAS TEST C3 **33**
3.1 Conditions de calculs . . . 33
3.2 Résultats . . . 35
3.2.1 Sur le maillage C3A (5 566 points) . . . 36
3.2.2 Sur le maillage C3C (11 132 points) . . . 46
3.2.3 Sur le maillage C3B (14 726 points) . . . 56
3.2.4 Sur le maillage C3D (22 264 points) . . . 66
3.2.5 Sur le maillage C3E (29 452 points) . . . 71
3.3 Exploitation . . . 76
3.3.1 Selon la configuration du $\beta\gamma$ schéma . . . 76
3.3.2 Selon le maillage . . . 81
3.3.3 Synthèse . . . 87
3.4 Conclusion et perspective . . . 88

4 ANNEXE **89**
4.1 Calcul d'aire . . . 89
4.1.1 Aire d'un triangle . . . 89
4.1.2 Aire d'un quadrangle . . . 89
4.2 Calcul de barycentre inertiel . . . 90
4.2.1 Barycentre d'un triangle . . . 90
4.2.2 Barycentre d'un quadrangle . . . 91
4.3 Volume par rotation $\pm\epsilon$ autour de l'axe $O\vec{i}$ . . . 91
4.3.1 Volume issu d'un segment . . . 91
4.3.2 Volume issu d'un quadrangle . . . 93
4.4 Calcul des normales . . . 93
4.4.1 Normale à un segment . . . 93
4.4.2 Normale à un quadrangle . . . 96
4.5 Calcul des dérivées . . . 96

4.5.1 Fonction scalaire 96
4.5.2 Le vecteur vitesse 97
4.5.3 Tenseur des contraintes visqueuses 100
4.5.4 Les composantes r_5, s_5 et t_5 100
4.6 Passage à la limite 100
4.6.1 Les normales 101
4.6.2 Dérivée d'une fonction scalaire 101
4.6.3 Le vecteur vitesse 101
4.6.4 Tenseur des contraintes visqueuses 102
4.6.5 Les composantes r_5, s_5 et t_5 102

1 INTRODUCTION

Dans le cadre de l'étude des écoulements compressibles à l'intérieur des propulseurs à poudre d'Ariane 5, le schéma $\beta\gamma$ a montré [1] que la solution pouvait varier selon les erreurs dispersives et dissipatives du schéma numérique utilisé (cas test C1 de l'ONERA).
Aujourd'hui, nous sommes convaincus par le fait que le cas test C1 présentait une configuration où plusieurs modes instables pouvaient se développer et une autre configuration a été mis au point: le cas test C3 [2].

Le cas test C3 est axisymétrique et demande donc une évolution du code SAPPHO (Schéma d'Approche Paramétrée pour Problème Hyperbolique Ordinaire) intégrant le schéma $\beta\gamma$ vers le calcul axisymétrique. Nous traitons donc en première partie le passage du système des équations de Navier Stokes tridimensionnelles à celui axisymétrique.

Sur le cas test C3 où une seule instabilité doit apparaître, 5 maillages ont été réalisés de manière à pouvoir cerner le raffinement nécessaire à la capture du phénomène de tourbillons détachés. Dans une deuxième partie, nous traitons donc le cas test C3 par le schéma $\beta\gamma$ pour l'ensemble des maillages. Nous déstabilisons les calculs pour les maillages les plus grossiers grâce au paramétrage des erreurs d'approximations qu'offre ce schéma.

Pour mieux comprendre le phénomène, des séquences d'animations de la vorticité de l'écoulement ont été mises sur le CDROM joint à ce rapport au format WD, GIF ou MPEG.

Je remercie personnellement le CNES pour avoir financé cette étude ainsi que l'IDRIS pour m'avoir alloué 200 heures CPU sur leur calculateur FUJITSU VPP300.

2 VERS L'AXISYMETRIQUE

2.1 La géométrie

Le domaine tridimensionnel $\mathcal{D}$ (Fig.2-A) est une géométrie cylindrique dont l'axe de révolution est porté par l'axe $O\vec{i}$ d'un repère cartésien de l'espace $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

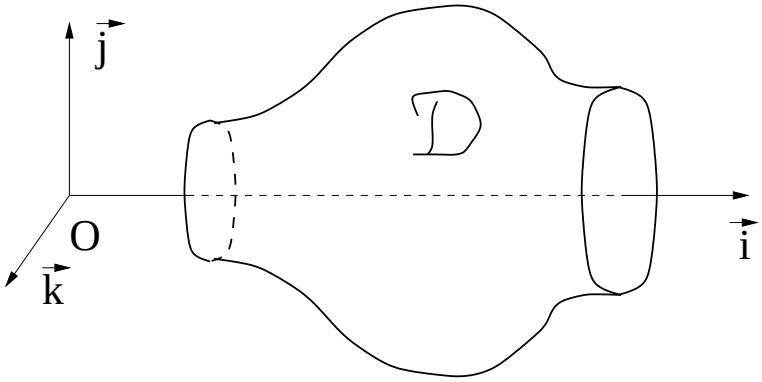


Figure 2-A: $\mathcal{D}$ est le domaine axisymétrique selon l'axe $O\vec{i}$.

Le domaine $\mathcal{D}$ peut donc être défini à partir d'une surface plane $\mathcal{P} \subset (O\vec{i},O\vec{j}^{+})$ auquel on fait subir toutes les rotations d'angle $\theta \in]-\pi,\pi]$ autour de l'axe $O\vec{i}$.
Ainsi tout point M' de $\mathcal{D}$ de coordonnées cartésiennes $(x',y' = r\cos\theta,z' = r\sin\theta)$ est l'unique image du point M de coordonnées cartésiennes $(x,y = r,0)$ du demi plan vertical $\mathcal{P}$ par la rotation d'angle θ et d'axe $O\vec{i}$ (Fig.2-B).

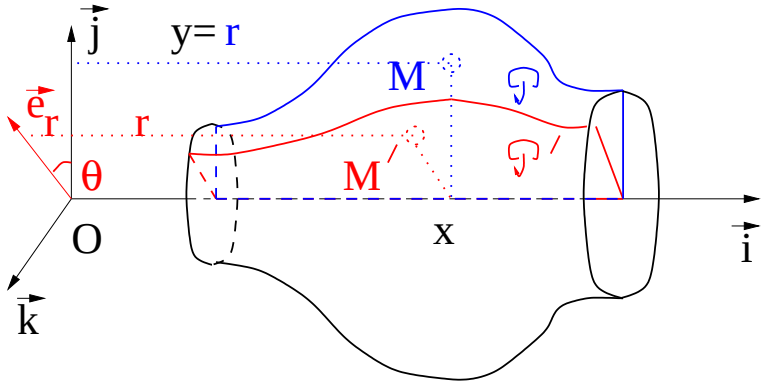


Figure 2-B: Tout point $M' \in \mathcal{D}$ est l'unique image du point $M \in \mathcal{P}$ par rotation d'angle $\theta \in]-\pi,\pi]$.

Toute fonction réelle f axisymétrique de $\mathcal{D}$ dans $I\!R$ peut s'écrire uniquement en fonction de l'abscisse x et de la distance r par rapport à l'axe de révolution. En d'autres termes cette fonction f est invariante par n'importe quelle rotation d'angle θ par rapport à l'axe $O\vec{i}$.

$$\begin{array}{rccl} & \mathcal{D} & \rightarrow & I\!R \\ f: & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) \quad = \tilde{f}(x,r) \end{array} \tag{1}$$

Sous cette hypothèse, la valeur d'une fonction en M' est identique à sa valeur au point M. En conséquence, une résolution dans $\mathcal{D}$ peut être traitée à partir de $\mathcal{P}$. Cette approche est intéressante par l'économie du nombre de points de calculs mais gardons à l'esprit que cette hypothèse supprime un degré de liberté (pas d'écoulements hélicoïdaux)...

2.2 Le maillage

Nous maillons la surface bidimensionnelle $\mathcal{P}$ en quadrangles. Soit Q l'un de ces quadrangle défini par 4 points (A_1,A_2,A_3,A_4) parcouru dans le sens trigonométrique. $\mathcal{A}$ est son aire et G son barycentre inertiel de coordonnées (x_G,y_G). Les points I_i (i allant de 1 à 4) de coordonnées (x_{I_i},y_{I_i}) sont les milieux des segments [A_i,A_{i+1}] ($i+1$ modulo 4). Nous noterons $\vec{N}_{2D_i}$ les normales extérieures au quadrangle de ces segments dans le plan (O,$\vec{i}$,$\vec{j}^+$).
Pour retrouver l'aspect tridimensionnel et axisymétrique de $\mathcal{D}$, nous considérons une tranche infinitésimale par rotation de la surface $\mathcal{P}$ d'angle $\theta = \pm\epsilon$ ($\epsilon << 1$) autour de l'axe $O\vec{i}$. Cette opération nous donne le domaine de calcul $\mathcal{D}_\epsilon$ où chaque quadrangle Q de $\mathcal{P}$ défini une cellule C de volume $\mathcal{V}$. Chaque cellule C est délimité part 6 surfaces constituant sont enveloppe ∂C. Nous avons 4 surfaces (S_1 à S_4) dont les vecteurs normaux ($\vec{N}_1$ à $\vec{N}_4$) sont coplanaires au quadrangle Q et 2 surfaces (S_-, S_+) dont les vecteurs normaux ($\vec{N}_-$ et $\vec{N}_+$) sont coplanaires au plan (O,$\vec{j}$,$\vec{k}$) (Fig.2-C).

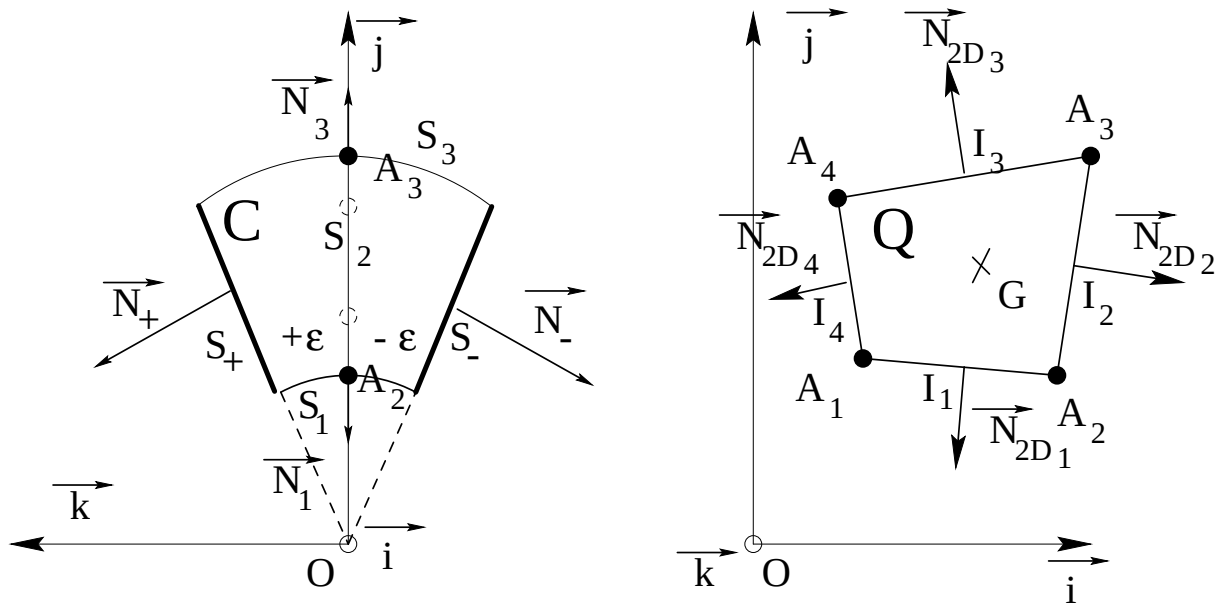


Figure 2-C: Le maillage vu de profil et vu de face.

2.3 Les équations de Navier Stokes 3D.

Les équations de Navier Stokes régissant les écoulements tridimensionnels d'un fluide compressible s'écrivent dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} + \frac{\partial H(W)}{\partial z} = \frac{1}{Rey}\left\{\frac{\partial R(W)}{\partial x} + \frac{\partial S(W)}{\partial y} + \frac{\partial T(W)}{\partial z}\right\} \tag{2}$$

avec:

- W, le vecteur des variables conservatives

$$\begin{array}{lccc} W: & \rho, & \rho u, \ \rho v, \ \rho w, & E \\ & \text{masse volumique} & \text{qtés de mvt} & \text{énergie} \end{array} \tag{3}$$

- F, G, H, les flux convectifs

$$\begin{array}{lccccc} F(W): & \rho u, & \rho u^2 + P, & \rho uv, & \rho uw, & (E+P)u \\ G(W): & \rho v, & \rho uv, & \rho v^2 + P, & \rho vw, & (E+P)v \\ H(W): & \rho w, & \rho uw, & \rho vw, & \rho w^2 + P, & (E+P)w \end{array} \tag{4}$$

- R, S, T, les flux visqueux

$$\begin{array}{lccccc} R(W): & 0, & \sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \sigma_{13}, & r_5 = u\sigma_{11} + v\sigma_{12} + w\sigma_{13} + \frac{\Gamma}{Pr}\frac{\partial \xi}{\partial x} \\ S(W): & 0, & \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \sigma_{23}, & s_5 = u\sigma_{21} + v\sigma_{22} + w\sigma_{23} + \frac{\Gamma}{Pr}\frac{\partial \xi}{\partial y} \\ T(W): & 0, & \sigma_{31}, & \sigma_{32}, & \sigma_{33}, & t_5 = u\sigma_{31} + v\sigma_{32} + w\sigma_{33} + \frac{\Gamma}{Pr}\frac{\partial \xi}{\partial z} \end{array} \tag{5}$$

où:

tenseur des contraintes visqueuses

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{11} = \frac{1}{3}(4\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial y} - 2\frac{\partial w}{\partial z}) & \sigma_{22} = \frac{1}{3}(-2\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial y} - 2\frac{\partial w}{\partial z}) & \sigma_{33} = \frac{1}{3}(-2\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial y} + 4\frac{\partial w}{\partial z}) \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \sigma_{13} = \sigma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \sigma_{23} = \sigma_{32} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{array} \tag{6}$$

équation d'état des gaz parfaits

$$\xi = \frac{E}{\rho} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{\Gamma - 1}\frac{P}{\rho} \tag{7}$$

grandeurs sans dimension

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k}, \ Rey = \frac{\rho_{ref} v_{ref} l_{ref}}{\mu}, \ \Gamma = \frac{C_p}{C_v} \tag{8}$$

μ : viscosité laminaire, k : conductivité thermique,

C_p,C_v : coefficients de chaleur spécifique à pression et volume constant

2.4 Intégration en volumes finis

Introduisons les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de divergences respectives:

$$div\ \vec{A} = \frac{\partial F(W)}{\partial x} + \frac{\partial G(W)}{\partial y} + \frac{\partial H(W)}{\partial z} \tag{9}$$

$$div\ \vec{B} = \frac{\partial R(W)}{\partial x} + \frac{\partial S(W)}{\partial y} + \frac{\partial T(W)}{\partial z} \tag{10}$$

Intégrons en volume ($d\tau = dx\ dy\ dz$) le système des équations de Navier Stokes (2) sur chaque cellule C du domaine $\mathcal{D}_\epsilon$ en utilisant (9) et (10):

$$\int_C \frac{\partial W}{\partial t} d\tau + \int_C div\ \vec{A}\ d\tau = \frac{1}{Rey} \int_C\ div\ \vec{B}\ d\tau \tag{11}$$

Soit ∂C l'enveloppe de la cellule C avec $\vec{n}$ la normale locale unitaire à ∂C. En utilisant la formule de Green, (11) s'écrit:

$$\int_C \frac{\partial W}{\partial t} d\tau + \int_{\partial C} \vec{A}\ .\ \vec{n}\ ds = \frac{1}{Rey} \int_{\partial C} \vec{B}\ .\ \vec{n}\ ds \tag{12}$$

En posant (n_x,n_y,n_z) les coordonnées du vecteur $\vec{n}$, nous pouvons définir deux nouveaux flux, l'un convectif $\mathcal{F}(W,\vec{n})$ et l'autre visqueux $\mathcal{G}(W,\vec{n})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(W,\vec{n}) &= \vec{A}\ .\ \vec{n} \\ &= n_x F(W) + n_y G(W) + n_z H(W) \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(W,\vec{n}) &= \vec{B}\ .\ \vec{n} \\ &= n_x R(W) + n_y S(W) + n_z T(W) \end{aligned} \tag{14}$$

Ainsi, (12) s'écrit de manière générale comme:

$$\int_C \frac{\partial W}{\partial t} d\tau + \int_{\partial C} \mathcal{F}(W,\vec{n})\ ds = \frac{1}{Rey} \int_{\partial C} \mathcal{G}(W,\vec{n})\ ds \tag{15}$$

et de manière plus explicite en faisant intervenir toutes les surfaces constituant l'enveloppe de ∂C, il vient de (15):

$$\begin{aligned} &\int_C \frac{\partial W}{\partial t} d\tau + \sum_{i=1}^{4} \int_{S_i} \mathcal{F}(W,\vec{n})\ ds + \int_{S_\pm} \mathcal{F}(W,\vec{n})\ ds = \\ &\frac{1}{Rey} \left\{ \sum_{i=1}^{4} \int_{S_i} \mathcal{G}(W,\vec{n})\ ds + \int_{S_\pm} \mathcal{G}(W,\vec{n})\ ds \right\} \end{aligned} \tag{16}$$

2.5 Particularités axisymétriques

La vecteur des variables W est constitué de fonctions f dépendantes des coordonnées cartésiennes (x,y,z) du point de calcul. Ces fonctions f peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées cylindriques (x,r,θ) du point de calcul. Nous les noterons alors $\bar{f}$. Dans le cadre axisymétrique, nous prenons pour hypothèse que ces fonctions $\bar{f}$ sont indépendantes de θ et peuvent donc s'écrire comme une fonction $\tilde{f}$ uniquement dépendante de x et de r.

$$f(x,y,z) = \bar{f}(x,r,\theta) = \tilde{f}(x,r) \tag{17}$$

Ce point est vrai pour toute fonction scalaire mais pas pour un vecteur. Le vecteur vitesse de coordonnées cartésiennes (u,v,w) s'écrit $(\tilde{u},\tilde{v}\cos\theta,\tilde{v}\sin\theta)$ dans ce même repère cartésien et où seulement $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ s'expriment uniquement en fonction de x et de r (76).
Dans le domaine de calcul $\mathcal{D}_\epsilon$ considéré, ϵ est aussi petit que l'on souhaite. En conséquence, l'angle θ compris entre $]-\epsilon,\ +\epsilon[$ est très petit et permet un développement limité au second ordre en θ.
De fait le vecteur W des variables conservatives (3) peut s'écrire:

$$W = \bar{W} = (\tilde{\rho},\tilde{\rho}\tilde{u},\tilde{\rho}\tilde{v},\theta\tilde{\rho}\tilde{v},\tilde{E}) \tag{18}$$

Dans ce contexte, écrivons explicitement les flux $\mathcal{F}(\bar{W},\vec{n})$ et $\mathcal{G}(\bar{W},\vec{n})$:

$$\mathcal{F}(\bar{W},\vec{n}) = \left| \begin{array}{c} \tilde{\rho}\tilde{u}n_x + \tilde{\rho}\tilde{v}(n_y + \theta n_z) \\ \tilde{\rho}\tilde{u}^2 n_x + \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}(n_y + \theta n_z) + \tilde{P}n_x \\ \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}n_x + \tilde{\rho}\tilde{v}^2(n_y + \theta n_z) + \tilde{P}n_y \\ \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}\theta n_x + \tilde{\rho}\tilde{v}^2\theta(n_y + \theta n_z) + \tilde{P}n_z \\ [\tilde{u}n_x + \tilde{v}(n_y + \theta n_z)]\,(\tilde{E} + \tilde{P}) \end{array} \right. \tag{19}$$

$$\mathcal{G}(\bar{W},\vec{n}) = \left| \begin{array}{c} 0 \\ \tilde{\sigma}_{11}n_x + \tilde{\sigma}_{12}(n_y + \theta n_z) \\ \tilde{\sigma}_{12}n_x + \tilde{\sigma}_{22}n_y + 2\theta\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r}\right)n_z \\ \theta\tilde{\sigma}_{12}n_x + 2\theta\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r}\right)n_y + \tilde{\sigma}_{33}n_z \\ \tilde{r}_5 n_x + \tilde{s}_5\,(n_y + \theta n_z) \end{array} \right. \tag{20}$$

avec, d'après les calculs (85) et (86) réalisés en Annexe:

$$\tilde{\sigma}_{11} = \frac{1}{3}\left(4\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} - 2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - \frac{2}{r}\tilde{v}\right),\ \tilde{\sigma}_{22} = \frac{1}{3}\left(-2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + 4\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - \frac{2}{r}\tilde{v}\right),\ \tilde{\sigma}_{33} = \frac{1}{3}\left(-2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} - 2\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} + \frac{4}{r}\tilde{v}\right),\ \tilde{\sigma}_{12} = \left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right)$$
$$\tilde{r_5} = \tilde{u}\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{v}\tilde{\sigma}_{12} + \frac{\Gamma}{Pr}\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial x},\ \tilde{s_5} = \tilde{u}\tilde{\sigma}_{12} + \tilde{v}\tilde{\sigma}_{22} + \frac{\Gamma}{Pr}\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial r}$$

2.6 Approximations numériques d'ordre 1

Reprenons chaque terme de l'expression (16). Ce ne sont que des intégrations spatiales de valeurs scalaires. Si l'on utilise le repère cylindrique pour effectuer ces intégrations, il

convient de remplacer dans (16): W par son équivalent $\bar{W}$ (18) en coordonnées cylindriques et d'utiliser (19) et (20) pour l'expression des flux à intégrer.
Prenons une cellule C_0 donnée où la valeur de la variable $\bar{W}$ sera considérée comme constante sur toute la cellule C_0. Cette valeur sera notée $\bar{W}_0$ et sera placée au point de calcul G_0 de coordonnées ($x = x_{G_0}$,$r = y = y_{G_0}$,$\theta = z = 0$).
Dès lors, sous cette écriture discrète ramenée sur le plan $\mathcal{P}$, il n'y aura plus lieu de faire de distinction d'écriture entre W et $\bar{W}$ car les repères cylindrique et cartésien seront alors confondus.

- **Intégration temporelle**
  Par application d'une formule de moyenne, nous écrivons:

$$\int_{C_0} \frac{\partial W}{\partial t}\, dx\, dy\, dz \;=\; \int_{C_0} \frac{\partial \bar{W}}{\partial t}\, r\, d\theta\, dr\, dx \;\simeq\; \mathcal{V}_0\, \frac{\partial \bar{W}}{\partial t}$$

  En utilisant le résultat (67) de l'annexe, donnant le volume $\mathcal{V}_0$ en fonction de l'aire $\mathcal{A}_0$, écrivons une intégration temporelle d'ordre 1 en temps discrétisé par l'indice n ($t = n\Delta t$):

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0\, \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} &\simeq 2\,\epsilon\,\mathcal{A}_0\, y_{G_0}\, \frac{\bar{W}_0^{n+1} - \bar{W}_0^n}{dt} \\ &\simeq 2\,\epsilon\,\mathcal{A}_0\, y_{G_0}\, \frac{W_0^{n+1} - W_0^n}{dt} \end{aligned} \tag{21}$$

  Par la suite, pour alléger l'écriture des différents flux, nous oublierons volontairement l'indice temporel n ou $n+1$ selon que la méthode de résolution est explicite ou implicite.

- **Intégration du flux convectif sur** S_i ($i = 1,2,3,4$)
  La cellule C_0 donnée est en contact sur la surface S_i avec la cellule voisine C_i. Nous noterons $\bar{W}_i$ la valeur constante du vecteur des variables sur la cellule C_i.
  Pour évaluer le flux entre la cellule C_0 et la cellule C_i, nous utilisons le solveur de Roe [3] qui propose:

$$\begin{aligned} \int_{S_i} \mathcal{F}(\bar{W},\vec{n})\, ds &\simeq \frac{1}{2}\left\{ \mathcal{F}(\bar{W}_0,\vec{N}_i) + \mathcal{F}(\bar{W}_i,\vec{N}_i) + \left| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{W}}(\bar{W}_{Roe},\vec{N}_i) \right| (\bar{W}_0 - \bar{W}_i) \right\} \\ &\simeq \Phi_E(\bar{W}_0,\bar{W}_i,\vec{N}_i) \end{aligned}$$

  Or d'après (80), $\vec{N}_i$ est proportionnel au vecteur $\vec{N}_{2D_i}$. Sa composante n_z est donc nulle. Si l'on considère $\theta = 0$ et qu'on utilise les correspondances (83), l'expression du flux (19) devient celle du calcul bidimensionnel du flux sur le quadrangle Q à l'interface $[A_iA_{i+1}]$ moyennant le facteur $2\ \epsilon\ y_{I_i}$. En effet, $\mathcal{F}$ et sa matrice jacobienne étant homogènes de degré 1 en fonction des composantes de la normale $\vec{N}_i$, nous pouvons extraire ce facteur.

$$\begin{aligned} \Phi_E(\bar{W}_0,\bar{W}_i,\vec{N}_i) &= 2\,\epsilon\, y_{I_i}\, \Phi_E(\bar{W}_0,\bar{W}_i,\vec{N}_{2D_i}) \\ &= 2\,\epsilon\, y_{I_i}\, \Phi_E(W_0,W_i,\vec{N}_{2D_i}) \end{aligned} \tag{22}$$

Si S_i représente un bord S_b, les conditions de bords W_b sont injectées dans le flux bidimensionnel $2\epsilon\ y_{I_i}\mathcal{F}(W_b,\vec{N}_{2D_i})$. Les variables non déterminées par les conditions de bords W_b sont issues de W_0 pris comme constant sur le bord.
Si S_i correspond à l'axe de symétrie alors $y_{I_i} = 0$. De fait nous ne considérons aucun échange de flux.

- **Intégration du flux convectif sur $S_\pm$**
  Nous nous intéressons à l'apport de flux par les faces latérales S_+ et S_- de C_0 lorsque θ vaut respectivement $+\epsilon$ et $-\epsilon$. Nous approchons l'intégrale du flux sur chaque surface par la valeur de $\mathcal{F}$ calculé en W_0 avec les normales intégrées $\vec{N}_+$ et $\vec{N}_-$ (81):

$$\int_{S_\pm} \mathcal{F}(\bar{W},\vec{n})\ ds \ \simeq\ \mathcal{F}(\bar{W}_0,\vec{N}_-) + \mathcal{F}(\bar{W}_0,\vec{N}_+)$$

  Les normales $\vec{N}_\pm$ ont un $n_x = 0$, un $n_y = -\epsilon$ et un $n_z = \pm 1$ si bien que de (19), leur somme donne:

$$\int_{S_\pm} \mathcal{F}(\bar{W},\vec{n})\ ds \ \simeq\ -2\ \epsilon\ \mathcal{A}_0 \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \tilde{P}_0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \ =\ -2\ \epsilon\ \mathcal{A}_0 \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ P_0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \ =\ -2\ \epsilon\ \mathcal{A}_0\ \varphi_E(W_0) \qquad (23)$$

  Ce terme sur la troisième ligne est un terme source propre au calcul axisymétrique et est évalué avec la pression $\tilde{P}_0 = P_0$ (17) de la cellule C_0. Nous le noterons $-2\epsilon\mathcal{A}_0\varphi_E(W_0)$.

- **Intégration du flux visqueux sur S_i**
  Le flux $\mathcal{G}$ est une fonctionnelle non linéaire en W. A cet ordre, deux approximations différentes peuvent être imaginées:
  - comme pour le flux convectif, l'intégrale du flux visqueux peut être estimée par la moyenne des flux visqueux établis aux barycentres des cellules C_0 et C_i au moyen de la normale intégrée $\vec{N}_i$.

$$\int_{S_i} \mathcal{G}(\bar{W},\vec{n})\ ds \ \simeq\ \frac{1}{2}\left\{\mathcal{G}(\bar{W}_0,\vec{N}_i) + \mathcal{G}(\bar{W}_i,\vec{N}_i)\right\} \qquad (24)$$

  - l'intégrale du flux visqueux peut être estimée par le flux visqueux établie au point I_i par moyenne des valeurs W_0 et W_i et en utilisant toujours la normale intégrée $\vec{N}_i$.

$$\int_{S_i} \mathcal{G}(\bar{W},\vec{n})\ ds \ \simeq\ \mathcal{G}(\frac{\bar{W}_0 + \bar{W}_i}{2},\vec{N}_i) \qquad (25)$$

  D'après (20), $\mathcal{G}$ est homogène de degré 1 en fonction des composantes de la normale $\vec{N}_i$, si bien qu'en utilisant (80), nous pouvons écrire:

$$\mathcal{G}(\bar{W},\vec{N}_i) \ =\ 2\ \epsilon\ y_{I_i}\ \mathcal{G}(\bar{W},\vec{N}_{2D_i})$$

Le vecteur $\vec{N}_{2D_i}$ $(N_x,N_y,0)$ est la normale intégrée extérieure au quadrangle Q_0 sur le segment $[A_iA_{i+1}]$ dans le plan $\mathcal{P}$. Considérons alors $\theta = 0$ et nous tirons de (20):

$$\mathcal{G}(\bar{W},\vec{N}_{2D_i}) \;=\; \left|\begin{array}{l} 0 \\ \tilde{\sigma}_{11}N_x + \tilde{\sigma}_{12}N_y \\ \tilde{\sigma}_{12}N_x + \tilde{\sigma}_{22}N_y \\ 0 \\ \tilde{r}_5N_x + \tilde{s}_5N_y \end{array}\right.$$

En utilisant les relations (76) et (85) données en annexe, $\mathcal{G}(\bar{W},\vec{N}_{2D_i})$ peut s'écrire comme $\mathcal{G}(W,\vec{N}_{2D_i})$ et être décomposé en 2 termes: l'un issu du tenseur des contraintes bidimensionnel $\mathcal{G}_{2D_i}(W)$, l'autre provenant du calcul axisymétrique $\mathcal{G}_{AX_i}(W)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\bar{W},\vec{N}_{2D_i}) = \mathcal{G}(W,\vec{N}_{2D_i}) \;&=\; \mathcal{G}_{2D_i}(W) \;-\; \mathcal{G}_{AX_i}(W) \\ &=\; \left|\begin{array}{l} 0 \\ \sigma_{xx}N_x + \sigma_{xy}N_y \\ \sigma_{xy}N_x + \sigma_{yy}N_y \\ 0 \\ rN_x + sN_y \end{array}\right. - \frac{2v}{3y}\left|\begin{array}{l} 0 \\ N_x \\ N_y \\ 0 \\ uN_x + vN_y \end{array}\right. \end{aligned} \tag{26}$$

avec:

$$r = u\sigma_{xx} + v\sigma_{xy} + \frac{\Gamma}{Pr}\frac{\partial\xi}{\partial x},\;\; s = u\sigma_{xy} + v\sigma_{yy} + \frac{\Gamma}{Pr}\frac{\partial\xi}{\partial y}$$

Dans (26), les gradients sont obtenus par circulation autour du quadrangle. Si nous faisons une moyenne des flux (24), la connaissance de ces gradients nous suffit mais dans (26), il faut prendre $y = y_{G_0}$ et $y = y_{G_i}$. Si nous calculons un flux sur la valeur moyenne (25), alors il est nécessaire d'estimer des gradients moyens et de se placer en $y = y_{I_i}$ dans (26). Nous obtiendrons alors respectivement:

$$\int_{S_i} \mathcal{G}(\bar{W},\vec{n})\; ds \;\simeq\; 2\,\epsilon\, y_{I_i}\left(\frac{\mathcal{G}_{2D_i}(W_0) + \mathcal{G}_{2D_i}(W_i)}{2} \;-\; \frac{\mathcal{G}_{AX_i}(W_0) + \mathcal{G}_{AX_i}(W_i)}{2}\right) \tag{27}$$

ou

$$\int_{S_i} \mathcal{G}(\bar{W},\vec{n})\; ds \;\simeq\; 2\,\epsilon\, y_{I_i}\left(\mathcal{G}_{2D_i}(\frac{W_0 + W_i}{2}) \;-\; \mathcal{G}_{AX_i}(\frac{W_0 + W_i}{2})\right) \tag{28}$$

que nous écrirons de manière générale comme:

$$\simeq\; 2\,\epsilon\, y_{I_i}\left(\Phi_V(W_0,W_i,\vec{N}_{2D_i}) \;-\; \phi_V(W_0,W_i,\vec{N}_{2D_i})\right) \tag{29}$$

Si la surface S_i est un bord S_b, pour l'estimation de (26), nous plaçons directement au point I milieu du segment du bord où, comme pour le flux convectif, nous introduisons les conditions W_b du bord S_b. Pour les variables qui resteraient inconnues, nous utilisons

celle de W_0.
Si la surface S_i correspond à l'axe de symétrie, y_I étant nul, nous voyons apparaître dans le calcul de ϕ_V une indétermination qui est immédiatement levée en considérant que sur l'axe, la vitesse de l'écoulement est purement longitudinale ($v = 0$). De fait sur l'axe de symétrie nous n'avons pas d'échange de flux visqueux.

– **Intégration du flux visqueux sur $S_\pm$**
En considérant $\theta = \pm\epsilon$ selon la face $S_\pm$, nous approchons l'intégrale du flux visqueux comme la valeur du flux $\mathcal{G}$ avec la normale $\vec{N}_\pm$ correspondante:

$$\int_{S_\pm} \mathcal{G}(\bar{W},\vec{n})\, ds \;\simeq\; \mathcal{G}(\bar{W}_0,\vec{N}_+) + \mathcal{G}(\bar{W}_0,\vec{N}_-) \tag{30}$$

De (20) et (81), il vient:

$$\mathcal{G}(\bar{W}_0,\vec{N}_+) = \mathcal{A}_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\epsilon\tilde{\sigma}_{22} + 2\epsilon\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r}\right) \\ \tilde{\sigma}_{33} \\ 0 \end{array} \right. \qquad \mathcal{G}(\bar{W}_0,\vec{N}_-) = \mathcal{A}_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\epsilon\tilde{\sigma}_{22} + 2\epsilon\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r}\right) \\ -\tilde{\sigma}_{33} \\ 0 \end{array} \right.$$

A la sommation, seule la troisième composante est non nulle et s'écrit en utilisant les relations (85):

$$\int_{S_\pm} \mathcal{G}(\bar{W},\vec{N}_\pm) = 2\,\epsilon\,\mathcal{A}_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -\tilde{\sigma}_{22} + 2\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r}\right) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. = -2\,\epsilon\,\mathcal{A}_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \tilde{\sigma}_{33} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Ramené au quadrangle Q_0, $\tilde{\sigma}_{33}$ peut s'écrire comme σ_{33} sur les variables de W_0:

$$\tilde{\sigma}_{33} = \sigma_{33} = \frac{1}{3}\left(-2\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{4v}{y_{G_0}}\right)$$

Ainsi, nous poserons:

$$\int_{S_\pm} \mathcal{G}(\bar{W},\vec{N}_\pm) = -2\,\epsilon\,\mathcal{A}_0 \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ \sigma_{33} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. = -2\,\epsilon\,\mathcal{A}_0\,\varphi_V(W_0) \tag{31}$$

– **Remarques et conclusion**

  – De tous les flux calculés, la quatrième composante correspondant à la quantité de mouvement selon $(O,\vec{k})$ est toujours nulle. Nous réduisons donc le système de 5 équations à 4.

- Nous pouvons toujours mettre en facteur: 2ϵ si bien qu'en divisant l'ensemble de ce système par 2ϵ, nous faisons disparaître la variable ϵ qui est une valeur petite mais non spécifiée. Le fait que ϵ tende vers 0 donne le comportement asymptotique du système.

- En ayant choisi le nœud de calcul au barycentre de la cellule C, nous confèrons à y_G d'être toujours non nul et donc de pouvoir diviser.

- Par ailleurs, comme nous souhaitons un code numérique capable de traiter plusieurs types de calcul, nous introduisons les variables booléennes ins et iax prenant pour valeurs:
  - Euler 2D: $ins = 0$, $iax = 0 \Rightarrow y_G = y_{I_i} = 1$
  - Euler axisymétrique: $ins = 0$, $iax = 1$
  - Navier Stokes 2D: $ins = 1$, $iax = 0 \Rightarrow y_G = y_{I_i} = 1$
  - Navier Stokes axisymétrique: $ins = 1$, $iax = 1$
- Ainsi, l'expression (16) permet d'écrire de manière générale un schéma explicite d'ordre 1 en espace et en temps au moyen de (22), (23), (29) et (31):

$$\boxed{\begin{gathered} W_0^{n+1} = W_0^n + \Delta t \Psi(W_0^n) \\ \text{où} \\ \Psi(W_0^n) = \frac{1}{y_{G_0}\mathcal{A}_0}\left[\sum_{i=1}^{4} y_{I_i}\left\{-\Phi_E(W_0^n,W_i^n,\vec{N}_{2D_i}) + \right.\right. \\ \left.\left.\frac{ins}{Rey}\left[\Phi_V(W_0^n,W_i^n,\vec{N}_{2D_i}) - iax\ \phi_V(W_0^n,W_i^n,\vec{N}_{2D_i})\right]\right\} \\ \left. + iax\ \mathcal{A}_0\left(\varphi_E(W_0^n) - \frac{ins}{Rey}\varphi_V(W_0^n)\right)\right] \end{gathered}} \tag{32}$$

2.7 Le $\beta\gamma$ schéma

L'objectif de ce paragraphe est d'étendre le schéma $\beta\gamma$ sur un maillage centré cellule.

- **le flux convectif**
  Le $\beta\gamma$ schéma a été conçu pour améliorer la précision du flux convectif bidimensionnel

Φ_E sur un maillage centré sommet [4] en utilisant la méthode MUSCL [5] et en pondérant la matrice de stabilisation de Roe par un paramètre γ.

En centré sommet (Fig.2-D), nous prenons les points A_I des quadrangles pour nœuds de calcul. Nous construisons le maillage dual joignant successivement les barycentres G des quadrangles où A_I est sommet avec les milieux I des segments $[A_I A_J]$. Nous formons ainsi la cellule C_I autour de A_I.

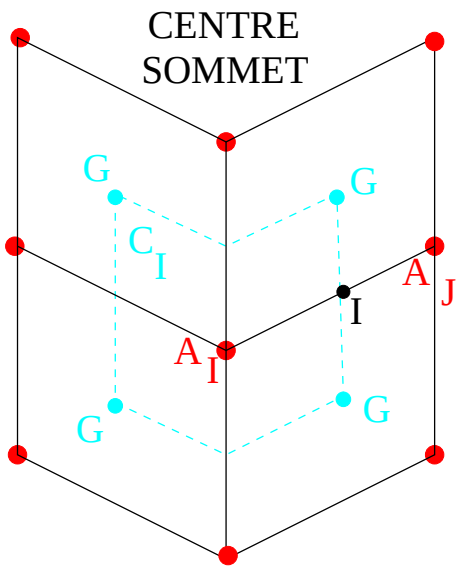


Figure 2-D: maillage centré sommet

Le $\beta\gamma$ schéma s'écrit alors:

$$\begin{aligned}\Phi_E(W_{IJ},W_{JI},\vec{N}_{2Di}) &= \frac{\mathcal{F}(W_{IJ},\vec{N}_{2Di})+\mathcal{F}(W_{JI},\vec{N}_{2Di})}{2} \\ &+ \frac{\gamma}{2}\left|\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial W}(W_{Roe},\vec{N}_{2Di}\right|(W_{IJ}-W_{JI}) \qquad (33)\end{aligned}$$

où W_{IJ} et W_{JI} sont des interpolations des valeurs de W de part et d'autre de l'interface c'est-à-dire au point I que nous écrivons comme:

$$W_{IJ} = W_I + \frac{1}{2}\left\{(1-2\beta)(W_J - W_I) + 2\beta(\vec{\nabla}C_I.\vec{A_I A_J})\right\} \qquad (34)$$

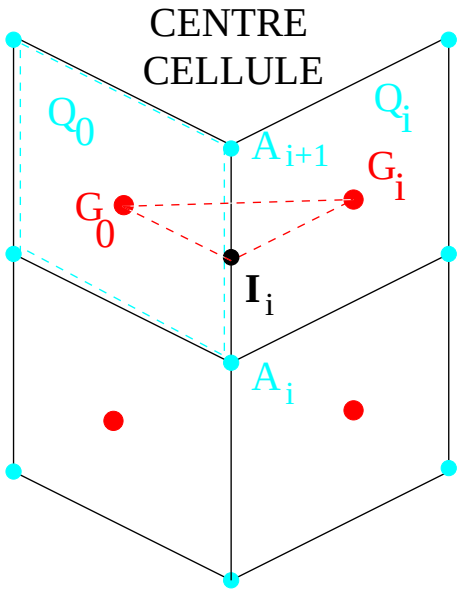
$$W_{JI} = W_J - \frac{1}{2}\left\{(1-2\beta)(W_J - W_I) + 2\beta(\vec{\nabla}C_J.\vec{A_I A_J})\right\} \qquad (35)$$

où les gradients $\vec{\nabla}_{C_I}$ et $\vec{\nabla}_{C_J}$ sont obtenus par circulation autour des cellules C_I et C_J en prenant pour valeur sur chaque interface la moyenne des valeurs de part et d'autre de l'interface.

En fait, les écritures (34) et (35) renferment beaucoup de simplifications... Elles sont construites sur la base d'une pondération (variable en β) entre un gradient "linéïque" et un gradient "surfacique" qui sont projetés sur le point I. Le fait que le point I soit le milieu du segment $[A_I A_J]$ explique les simplifications (34) et (35) des expressions générales (36) et (37) suivantes:

$$W_{IJ} = W_I + (1-2\beta)\frac{(W_J - W_I)}{\|A_I A_J\|}\frac{\vec{A_I A_J}}{\|A_I A_J\|}.\vec{A_I I} + 2\beta(\vec{\nabla} C_I.\vec{A_I I}) \tag{36}$$

$$W_{JI} = W_J - (1-2\beta)\frac{(W_J - W_I)}{\|A_I A_J\|}\frac{\vec{A_I A_J}}{\|A_I A_J\|}.\vec{I A_J} - 2\beta(\vec{\nabla} C_J.\vec{I A_J}) \tag{37}$$



Figuge 2-E: maillage centré cellule

En centré cellule (Fig.2-E), ce sont les quadrangles qui servent de cellules d'intégration et les barycentres inertiels qui servent de points de calcul. Les milieux I_i des segments des quadrangles n'ont alors plus aucune raison de se trouver sur la droite $(G_0 G_i)$ et encore moins de se trouver à la moitié du segment $[G_0 G_i]$!
Si nous écrivons (33) avec les notations prises, il vient:

$$\begin{aligned}\Phi_E(W_{0i},W_{i0},\vec{N}_{2Di}) &= \frac{\mathcal{F}(W_{0i},\vec{N}_{2Di}) + \mathcal{F}(W_{i0},\vec{N}_{2Di})}{2} \\ &+ \frac{\gamma}{2}\left|\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial W}(W_{Roe},\vec{N}_{2Di}\right|(W_{0i} - W_{i0})\end{aligned} \tag{38}$$

Il faut alors définir le plus correctement possible, les valeurs W_{0i} et W_{i0} de part et d'autre du segment $[A_i A_{i+1}]$. Pour celà, nous utilisons les expressions générales (36) et

(37) qui s'écrivent:

$$W_{0i} = W_0 + (1-2\beta)\frac{(W_i - W_0)}{\|G_0G_i\|}\frac{\vec{G_0G_i}}{\|G_0G_i\|}.\vec{G_0I_i} + 2\beta(\vec{\nabla}Q_0.\vec{G_0I_i}) \tag{39}$$

$$W_{i0} = W_i - (1-2\beta)\frac{(W_i - W_0)}{\|G_0G_i\|}\frac{\vec{G_0G_i}}{\|G_0G_i\|}.\vec{I_iG_i} - 2\beta(\vec{\nabla}Q_i.\vec{I_iG_i}) \tag{40}$$

Les gradients sur les quadrangles $\vec{\nabla}Q_0$ et $\vec{\nabla}Q_i$ sont obtenus par circulation autour de chaque quadrangle où la valeur W est considérée comme constante par segment $[A_iA_{i+1}]$ valant la moyenne entre les valeurs W_{0i} et W_{i0} estimées par (39) et (40) avec $\beta = 0$.

Les expressions (39) et (40) montrent combien le calcul devient lourd. En effet, en dehors de sa complexité, il est nécessaire de stocker les coordonnées des points I_i (dans un cadre axisymétrique comme dans un cadre bidimensionnel). Il faut calculer 3 vecteurs: $\vec{G_0G_i}$, $\vec{G_0I_i}$, $\vec{I_iG_i}$ alors que les expressions (34) et (35) nécessitaient seulement un seul calcul de vecteur: $\vec{A_IA_J}$.
Pour simplifier les expressions (39) et (40), prenons pour hypothèse que le maillage est orthogonal (Fig.2-F). En d'autres termes, que les points G_0, I_i et G_i sont alignés.

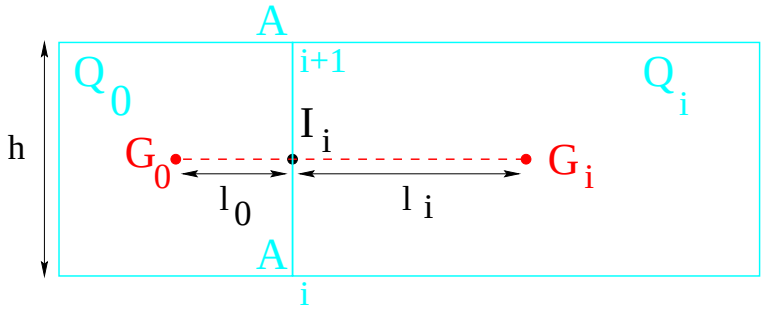


Figure 2-F: maillage orthogonal mais non régulier.

Dès lors, nous pouvons écrire les vecteurs $\vec{G_0I_i}$ et $\vec{I_iG_i}$ en fonction du vecteur $\vec{G_0G_i}$ en introduisant les aires $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_i$ des quadrangles qui présentent l'avantage d'être connues.

$$\vec{G_0I_i} = \frac{l_0}{l_0 + l_i}\,\vec{G_0G_i} = \frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_i}\,\vec{G_0G_i} = \alpha_0\,\vec{G_0G_i} \tag{41}$$

$$\vec{I_iG_i} = \frac{l_i}{l_0 + l_i}\,\vec{G_0G_i} = \frac{\mathcal{A}_i}{\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_i}\,\vec{G_0G_i} = \alpha_i\,\vec{G_0G_i} \tag{42}$$

En utilisant (41) et (42) dans les expressions (39) et (40), il vient:

$$\boxed{\begin{array}{l} W_{0i} = W_0 + \alpha_0 \left\{(1-2\beta)(W_i - W_0) + 2\beta(\vec{\nabla} Q_0 \,.\, \vec{G_0 G_i})\right\} \\ W_{i0} = W_i - \alpha_i \left\{(1-2\beta)(W_i - W_0) + 2\beta(\vec{\nabla} Q_i \,.\, \vec{G_0 G_i})\right\} \end{array}} \tag{43}$$

Les gradients $\vec{\nabla} Q_0$ et $\vec{\nabla} Q_i$ des quadrangles sont obtenus par circulation en estimant sur le segment $[A_i A_{i+1}]$ la valeur moyenne entre les valeurs W_{0i} et W_{i0} calculées pour $\beta = 0$ dans (43)

$$\boxed{W_{[A_i A_{i+1}]} = \frac{W_{0i} + W_{i0}}{2} = \alpha_0\, W_i + \alpha_i\, W_0 = W_{0i} = W_{i0}} \tag{44}$$

Les expressions contenues dans (43) pour un maillage centré cellulle sont comparables aux expressions (34) et (35) pour un maillage centré sommet. En conséquence, nous utiliserons la formulation (43) dans (38). Nous donnerons alors une meilleure approximation de W à l'interface par rapport à une application directe des formules (34) et (35) pour le calcul de $\Phi_E(W_{0i}, W_{i0}, \vec{N}_{2D_i})$.

- **Le flux visqueux**
  L'interpolation $W_{[A_i A_{i+1}]}$ sur l'interface S_i ayant été faite en (44), nous sommes tentés de calculer Φ_V et ϕ_V (29) avec cette interpolation en $y = y_{I_i}$. Les expressions (27) et (28) deviennent alors idendiques et s'écrivent:

$$\int_{S_i} \mathcal{G}(\bar{W}, \vec{n})\, ds \;\simeq\; 2\,\epsilon\, y_{I_i}\; (\mathcal{G}_{2D_i}(\alpha_i W_0 + \alpha_0 W_i) \;-\; \mathcal{G}_{AX_i}(\alpha_i W_0 + \alpha_0 W_i)) \tag{45}$$

  Quant aux gradients nécessaires au calcul du flux visqueux, nous les estimerons de façon semblable à l'approche de la valeur $W_{[A_i A_{i+1}]}$ en posant:

$$\boxed{\vec{\nabla}_{[A_i A_{i+1}]} = \alpha_0\, \vec{\nabla} Q_i + \alpha_i\, \vec{\nabla} Q_0} \tag{46}$$

- **Les flux latéraux**
  Nous ne modifions en rien les expressions (23) et (31) donnant respectivement les flux φ_E et φ_V des contributions convectives et visqueuses des surfaces $S_\pm$.
- **Avancée en temps**
  Nous utilisons une méthode explicite de Runge Kutta d'ordre 4.

En conclusion, Le calcul axisymétrique est réalisé à partir d'un maillage plan où $(O, \vec{i})$ est l'axe de symétrie. Nous proposons comme évolution du schéma $\beta\gamma$ bidimensionnel et connu

dans le cadre de calcul centré sommet, la version axisymétrique et centré cellule suivante:

$$\boxed{W_0^{n+1} = W_0^n + \frac{\Delta t}{6}\left\{K_1(W_0^n) + 2K_2(W_0^n) + 2K_3(W_0^n) + K_4(W_0^n)\right\}}$$

avec

$$\boxed{\begin{array}{rcl} K_4(W_0^n) & = & \Psi(W_0^n + \Delta t K_3(W_0^n)) \\ K_3(W_0^n) & = & \Psi(W_0^n + \frac{\Delta t}{2} K_2(W_0^n)) \\ K_2(W_0^n) & = & \Psi(W_0^n + \frac{\Delta t}{2} K_1(W_0^n)) \\ K_1(W_0^n) & = & \Psi(W_0^n) \end{array}}$$

où

$$\boxed{\begin{array}{c} \Psi(W_0^n) = \\ -\dfrac{1}{y_{G_0}\mathcal{A}_0} \displaystyle\sum_{i=1}^{4} y_{I_i}\ \Phi_E(W_{0i}^n, W_{i0}^n, \vec{N}_{2D_i}) \\ +\dfrac{1}{y_{G_0}\mathcal{A}_0}\ \dfrac{ins}{Rey} \displaystyle\sum_{i=1}^{4} y_{I_i}\ \Phi_V(W_{[A_iA_{i+1}]}^n, \vec{N}_{2D_i}) \\ -\dfrac{iax}{y_{G_0}\mathcal{A}_0}\ \dfrac{ins}{Rey} \displaystyle\sum_{i=1}^{4} y_{I_i}\ \phi_V(W_{[A_iA_{i+1}]}^n, \vec{N}_{2D_i}) \\ +\dfrac{iax}{y_{G_0}\mathcal{A}_0}\ \mathcal{A}_0 \left(\varphi_E(W_0^n) - \dfrac{ins}{Rey}\varphi_V(W_0^n)\right) \end{array}} \tag{47}$$

2.8 Validation dans le cas des équations d'Euler

"En Euler", nous souhaitons valider un tel schéma sur un cas test académique qui est celui d'une rampe pour un nombre de Mach à l'infini égale à 2 avec une inclinaison à 20°. La solution exacte est connue [6] et donne pour angle d'inclinaison du choc oblique par rapport à l'horizontal une mesure de 50°.
L'angle obtenu par les lignes iso-mach (Fig.2-G) correspond à cette mesure de 50° et ce pour 2 maillages différents: 40×40 points et 200×50 points.

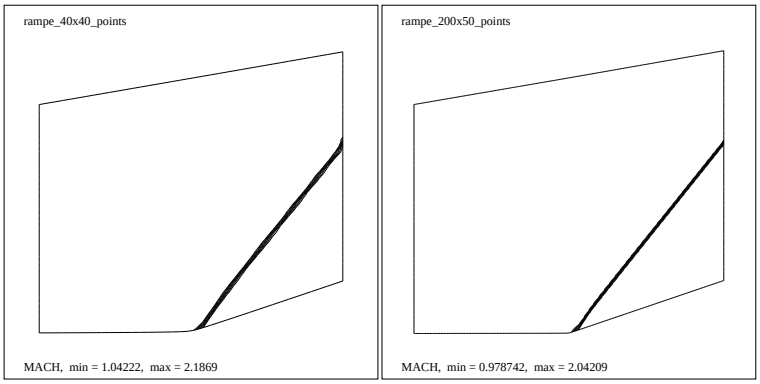


Figure 2-G: iso-mach - capture d'un choc oblique - 2D.

Sur ce calcul, on peut constater que le code SAPPHO est capable de capturer un choc oblique sans limiteur ce qui donne des "oscillations" de part et d'autre de ce choc. Néanmoins, les solutions obtenues sur les 2 maillages sont qualitativement correctes.

Pour valider la version axisymétrique du code SAPPHO, nous procédons au calcul des rampes précédentes qui se transforment alors en cônes. Les iso-mach (Fig.2-H) sont bien plus inclinées, avec un bon accord avec ceux obtenus dans [7]; ce qui valide les termes d'ordre un de notre modèle numérique.

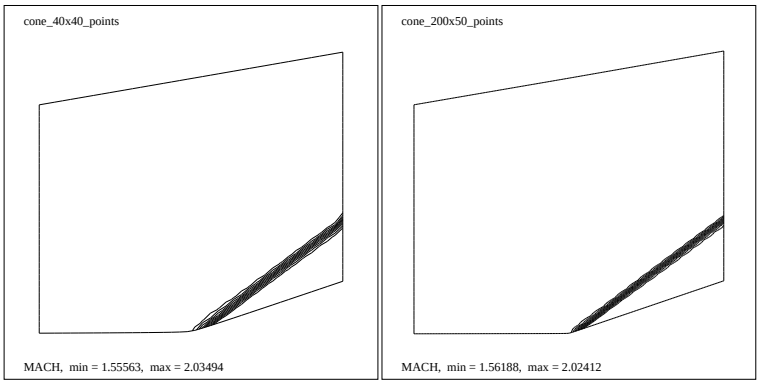


Figure 2-H: iso-mach - capture d'un choc oblique - 2D axisymétrique.

2.9 Convergence dans le cas d'advection pure

Le passage du schéma $\beta\gamma$ en centré sommet vers le schéma $\beta\gamma$ en centré cellule a nécessité quelques corrections dans l'interpolation MUSCL. Nous souhaitons montrer que les corrections (43) sont justifiées par rapport à une estimation sans correction, c'est à dire comme en centré sommet, soit dans (43) avec $\alpha_0 = \alpha_i = \frac{1}{2}$. Pour celà, nous faisons des calculs bidimensionnels sur l'équation d'advection s'écrivant:

$$U_t + c\cos\theta\, U_x + c\sin\theta\, U_y = 0 \tag{48}$$

où $c = 1$ est le module de la vitesse d'advection et $\theta = \frac{\pi}{4}$ la direction de l'advection.

$$U_e = \cos 2\pi \left\{nx + my - ct(m\cos\theta + n\sin\theta)\right\} \tag{49}$$

sont des solutions de (48) pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Nous considérons un domaine carré de longueur de coté $L = 1$ orienté selon l'axe des x et des y dans le repère choisi. Les discrétisations en x et en y de ce carré sont faites à partir de $2N+1$ points soit $2N$ intervalles. Nous choisissons un espacement régulier selon l'axe des y donnant pour longueur d'intervalle Δy la valeur:

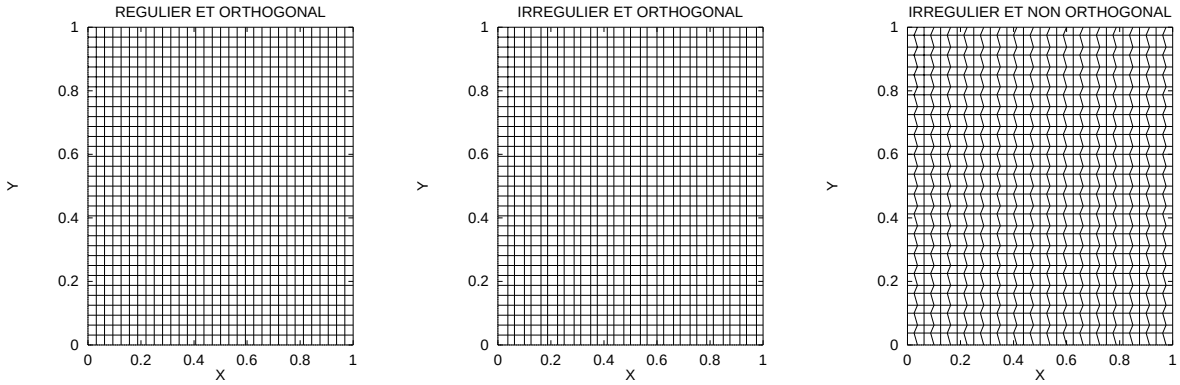
$$\Delta y = \frac{L}{2N}$$

Selon l'axe des x, nous choisissons en N quantité 2 types d'intervalles: Δx et $\eta\Delta x$ avec $\eta \geq 1$.

$$\Delta x = \frac{L}{N(1+\eta)} \leq \Delta y \leq \frac{\eta L}{N(1+\eta)} \qquad \forall\eta \tag{50}$$

A N donné, nous pouvons construire:

- un maillage régulier et orthogonal pour $\eta = 1$
- un maillage non régulier et orthogonal pour $\eta \neq 1$
- un maillage non régulier et non orthogonal pour $\eta \neq 1$ par alternance en damier des intervalles différents.



$N = 16$, $\eta = 1$ $\qquad$ $N = 16$, $\eta = 1.5$ $\qquad$ $N = 16$, $\eta = 1.5$

La résolution explicite de ce modèle par le schéma $\beta\gamma$ fournit une condition ν de stabilité s'écrivant:

$$\nu \geq \frac{c\Delta t}{\Delta} \qquad \forall \Delta \ \in \{\Delta x, \Delta y, \eta \Delta x\} \tag{51}$$

L'objectif visé est de pouvoir faire varier les paramètres β et γ tout en restant stable aussi prendrons nous par la suite $\nu = \frac{1}{2}$ [4]. De (51), nous déduisons le pas de temps maximal en utilisant (50):

$$\Delta t = \frac{L}{2cN(1+\eta)} \tag{52}$$

Chaque calcul sera mené jusqu'à un même temps T en un nombre entier I d'itérations:

$$I = \frac{T}{\Delta t} = \frac{2cNT(1+\eta)}{L} \tag{53}$$

Nous initialisons chaque calcul avec la solution $U_e(m = 1, n = 1, t = 0)$ et recueillons la solution calculée U_c au temps T. Nous procédons alors au calcul de l'erreur quadratique en chaque point $i = 1$ à $4N^2$ du maillage et en prenons la moyenne Er définie par:

$$Er = \sqrt{\frac{1}{4N^2} \sum_{i=1}^{4N^2} \{U_c(i) - U_e(i)\}^2} \tag{54}$$

En utilisant les équations équivalentes [4] de cette équation modèle, pour un maillage régulier ($\eta = 1$), le schéma $\beta\gamma$ est au moins d'ordre 2 d'où:

$$U_c(i) - U_e(i) = A(i)N^{-2} + B(i)N^{-3} + C(i)N^{-4} + D(i)N^{-5} + O(N^{-6}) \tag{55}$$

De fait en posant $\bar{X} = \frac{1}{4N^2} \sum_{i=1}^{4N^2} X(i)$, (54) s'écrit:

$$Er = \sqrt{\bar{A}^2 N^{-4} + 2\bar{A}\bar{B}N^{-5} + (\bar{B}^2 + 2\bar{A}\bar{C})N^{-6} + 2(\bar{A}\bar{D} + \bar{B}\bar{C})N^{-7} + (\bar{C}^2 + 2\bar{B}\bar{D})N^{-8} + O(N^{-9})} \tag{56}$$

Dans le cadre d'un maillage régulier, nous avons les $A(i)$ nuls pour $\beta = \frac{1}{3}$, et les $B(i)$ nuls pour $\gamma = 0$. Ainsi, si nous choisissons:

- $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 1$ (schéma de Roe classique)

$$Er = \bar{A}N^{-2}\sqrt{1 + O(N^{-1})} \ \Rightarrow \ \log(Er) = -2\log(N) + \log(\bar{A}) + O(N^{-1}) \tag{57}$$

- $\beta = \frac{1}{3}$ et $\gamma = 1$ (schéma d'ordre 3)

$$Er = \bar{B}N^{-3}\sqrt{1 + O(N^{-1})} \ \Rightarrow \ \log(Er) = -3\log(N) + \log(\bar{B}) + O(N^{-1}) \tag{58}$$

- $\beta = \frac{1}{3}$ et $\gamma = 0$ (schéma d'ordre 4)

$$Er = \bar{C}N^{-4}\sqrt{1 + O(N^{-1})} \ \Rightarrow \ \log(Er) = -4\log(N) + \log(\bar{C}) + O(N^{-1}) \tag{59}$$

Par les relations $(57-58-59)$, les représentations de $\log(Er)$ en fonction de $\log(N)$, doivent se mettre sous la forme de droites dont la pente mesure l'ordre de la configuration du $\beta\gamma$ schéma choisi. Les relations $(57-58-59)$ sont vraies pour $N >> 1$ et l'on propose de faire des mesures sur une décade, c'est à dire de N_0 à N_0^2. Nous souhaitons espacer régulièrement les J mesures logarithmiques faites entre N_0 et N_0^2. En conséquence, nous poserons pour tout $j = 0$ à J:

$$N_j = N_0(N_0^{\frac{1}{J}})^j \quad \Leftrightarrow \quad \log(N_j) = \log(N_0) + \frac{j}{J}\log(N_0)$$

De fait pour avoir pour tout j (0 à J), une valeur N_j entière, nous devons avoir $\sqrt[J]{N_0}$ entier. A partir de là nous nous orientons sur les puissances de 2 qui est le plus petit valeur entier dont les puissances sont différentes:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Pour la validité des expressions $(57-58-59)$, nous devons avoir $N >> 1$ donc $N_0 >> 1$. L'expérience montre qu'il faut N_0 proche de 20 pour une discrétisation d'une période d'un mode de Fourier ($m = 1$, $n = 1$). De plus, il est nécessaire que le maillage le plus fin ($4N_0^4$ points) reste réalisable. En conséquence, nous prenons $N_0 = 16$ et $J = 4$ soit 5 points de mesure par représentation ($j = 0$ à 4).

N_0	N_1	N_2	N_3	$N_4 = N_0^2$
16	32	64	128	256

Nous posons: $c = 1$, $L = 1$, $T = \frac{1}{N_0}$. De fait, il vient de (52), (53):

$$\Delta t_j = \frac{1}{2N_j(1+\eta)} \text{ et } I_j = (2)^j\, 2(1+\eta)$$

η	Δt_0	Δt_1	Δt_2	Δt_3	Δt_4
1	0.015625	0.0078125	0.00390625	0.001953125	0.0009765625
1.5	0.0125	0.00625	0.003125	0.0015625	0.00078125

η	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4
1	4	8	16	32	64
1.5	5	10	20	40	80

Afin d'être le plus clair possible, ce cas test a trois paramètres d'entrés et chacun des paramètres à le choix de trois valeurs:

- Le type de maillage
  - M1: maillage régulier et orthogonal
  - M2: maillage non régulier et orthogonal
  - M3: maillage non régulier et non orthogonal
- L'ordre espéré:
  - O2: $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$
  - O3: $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = 1$
  - O4: $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = 0$
- Le paramètre "schéma"
  - SCH1: schéma centré sommet
  - SCH2: schéma centré cellule sans correction
  - SCH3: schéma centré cellule avec correction

Pour ces 27 combinaisons, nous écrivons l'erreur Er comme pouvant s'écrire comme une puissance P de N multipliée par un coefficient Λ:

$$Er = \Lambda\ N^P \quad \Leftrightarrow \quad \log(Er) = P\ \log(N) + \log(\Lambda) \tag{60}$$

Dans le tableau (61) figurent la pente P, le coefficient Λ et le coefficient de corrélation α pour les 27 possibilités. Ces valeurs sont obtenues en représentant le logarithme de l'erreur quadratique moyenne en fonction du logarithme de N suivi par un ajustement par les moindres carrés sur les 5 mesures (Fig. $2-I$ à $2-O$).

ANALYSE

- Sur un maillage **régulier et orthogonal**, quels que soient les schémas, nous vérifions les résultats analytiques obtenus par la recherche de l'équation équivalente sur ce modèle d'advection bidimensionnel [4]. A savoir que nous obtenons l'ordre 2 pour $\beta = \frac{1}{2}$ ($\gamma = 1$), l'ordre 3 pour $\beta = \frac{1}{3}$ ($\gamma = 1$) et l'ordre 4 pour $\beta = \frac{1}{3}$ avec $\gamma = 0$.
- Sur un maillage **irrégulier et orthogonal**, quel que soit l'ordre espéré, le schéma centré cellule avec correction a une meilleure précision que le schéma centré sommet qui est lui même très supérieur au schéma centré cellule sans correction.
  - Pour un ordre 2 espéré, seules les schémas centrés cellule avec correction et centrés sommet atteignent cette précision. Le schéma centré cellule sans correction n'est que d'ordre 1.
  - Pour un ordre 3 espéré, les schémas centrés cellule avec correction et centrés sommet restent à l'ordre 2. Par rapport à la configuration d'ordre précédente, le schéma centré cellule avec correction s'améliore en précision par le coefficient Λ

alors que le schéma centré sommet en perd. Quant au schéma centré cellule sans correction, il reste seulement à l'ordre 1.

  - Pour un ordre 4 espéré, le schéma centré cellule avec correction est toujours d'ordre 2 tout en étant toujours plus précis. Le schéma centré sommet n'est plus que d'ordre 1 et a donc une précision qui se dégrade considérablement par rapport aux configurations précédentes. Quant au schéma centré cellule sans correction, il devient d'ordre 0 et le coefficient de corrélation α indique que les points de mesures se prêtent mal à un alignement...

- Sur un maillage **irrégulier et non orthogonal**, quel que soit l'ordre espéré, le schéma centré cellule sans correction a une meilleure précision que le schéma centré sommet qui a lui même une meilleure précision que le schéma centré cellule avec correction.
  - Pour un ordre 2 espéré, seuls les schémas centré cellule sans correction et centré sommet atteignent cette précision. Le schéma centré cellule avec correction n'est que d'ordre 1.
  - Pour un ordre 3 espéré, les schémas centré cellule sans correction et centré sommet restent à l'ordre 2 mais le schéma centré sommet perd de la précision par rapport à la configuration précédente. Le schéma centré cellule avec correction est toujours d'ordre 1.
  - Pour un ordre 4 espéré, tous les schémas considérés ne sont plus que d'ordre 1 avec une dégradation importante de la précision.

CONCLUSION

Le $\beta\gamma$ schéma ne peut être très précis (ordre 3, ordre 4) que dans le cadre d'un maillage régulier et orthogonal. Le schéma centré sommet est le seul schéma qui préserve un ordre 2 pour tous les types de maillages hormis la configuration $\gamma = 0$ sur maillage irrégulier et non orthogonal. Pour les autres schémas, le schéma centré cellule avec correction a une meilleure précision que le schéma centré cellule sans correction sur maillage irrégulier mais orthogonal. La surprise vient du fait que la correction effectuée sur le maillage centré cellule donne de mauvais résultats sur un maillage irrégulier et non orthogonal. Cette correction à coût informatique modique n'est donc pas suffisante pour obtenir une haute précision...
Cependant et en dehors du fait que cela nous pousse à rechercher une meilleure approximation du flux advectif aux interfaces (ENO), nous observons figure $2-P$ que les notions d'avance et de retard dûes aux variations du paramètre β sont préservées même sur un maillage irrégulier et non orthogonal et même pour le schéma centré cellule avec correction.

TABLEAU DES 27 CONFIGURATIONS

$MAILLAGE$	$ORDRE$	$SCHEMA$	P	Λ	α	$FIGURE$
$M1$	$O2$	$SCH1$	-2.00	0.33	0.99999	$2-I$
$M1$	$O2$	$SCH2$	-2.00	0.33	0.99999	$2-I$
$M1$	$O2$	$SCH3$	-2.00	0.33	0.99999	$2-I$
$M1$	$O3$	$SCH1$	-3.00	1.01	0.99999	$2-I$
$M1$	$O3$	$SCH2$	-3.00	1.01	0.99999	$2-I$
$M1$	$O3$	$SCH3$	-3.00	1.01	0.99999	$2-I$
$M1$	$O4$	$SCH1$	-4.00	1.34	0.99999	$2-I$
$M1$	$O4$	$SCH2$	-4.00	1.34	0.99999	$2-I$
$M1$	$O4$	$SCH3$	-4.00	1.34	0.99999	$2-I$
$M2$	$O2$	$SCH1$	-1.98	0.69	0.99994	$2-J$
$M2$	$O2$	$SCH2$	-0.98	0.43	0.99978	$2-J$
$M2$	$O2$	$SCH3$	-1.98	0.44	0.99997	$2-J$
$M2$	$O3$	$SCH1$	-1.95	0.80	0.99956	$2-K$
$M2$	$O3$	$SCH2$	-0.95	0.45	0.99833	$2-K$
$M2$	$O3$	$SCH3$	-1.94	0.27	0.99959	$2-K$
$M2$	$O4$	$SCH1$	-1.00	0.12	0.99999	$2-L$
$M2$	$O4$	$SCH2$	-0.00	0.07	0.69489	$2-L$
$M2$	$O4$	$SCH3$	-1.99	0.13	0.99999	$2-L$
$M3$	$O2$	$SCH1$	-1.99	0.72	0.99999	$2-M$
$M3$	$O2$	$SCH2$	-2.00	0.39	0.99999	$2-M$
$M3$	$O2$	$SCH3$	-0.98	0.40	0.99983	$2-M$
$M3$	$O3$	$SCH1$	-1.98	0.95	0.99996	$2-N$
$M3$	$O3$	$SCH2$	-1.98	0.32	0.99998	$2-N$
$M3$	$O3$	$SCH3$	-0.97	0.44	0.99909	$2-N$
$M3$	$O4$	$SCH1$	-1.00	0.22	0.99999	$2-O$
$M3$	$O4$	$SCH2$	-1.00	7.46	0.99999	$2-O$
$M3$	$O4$	$SCH3$	-1.03	1.55	0.90843	$2-O$

(61)

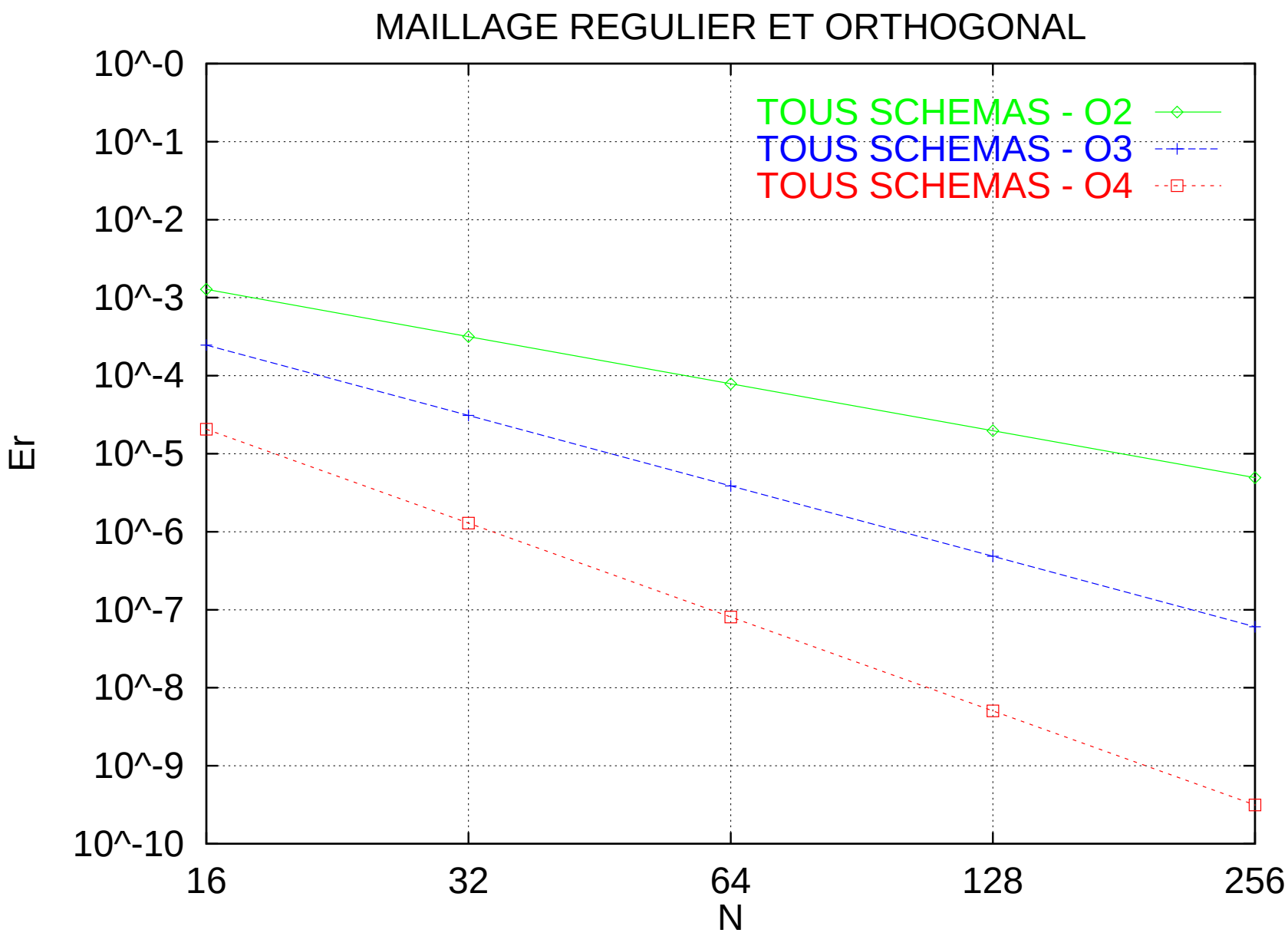


Figure 2-1: Maillage régulier et orthogonal. Tout ordre. Tout schéma. Théorie confirmée.

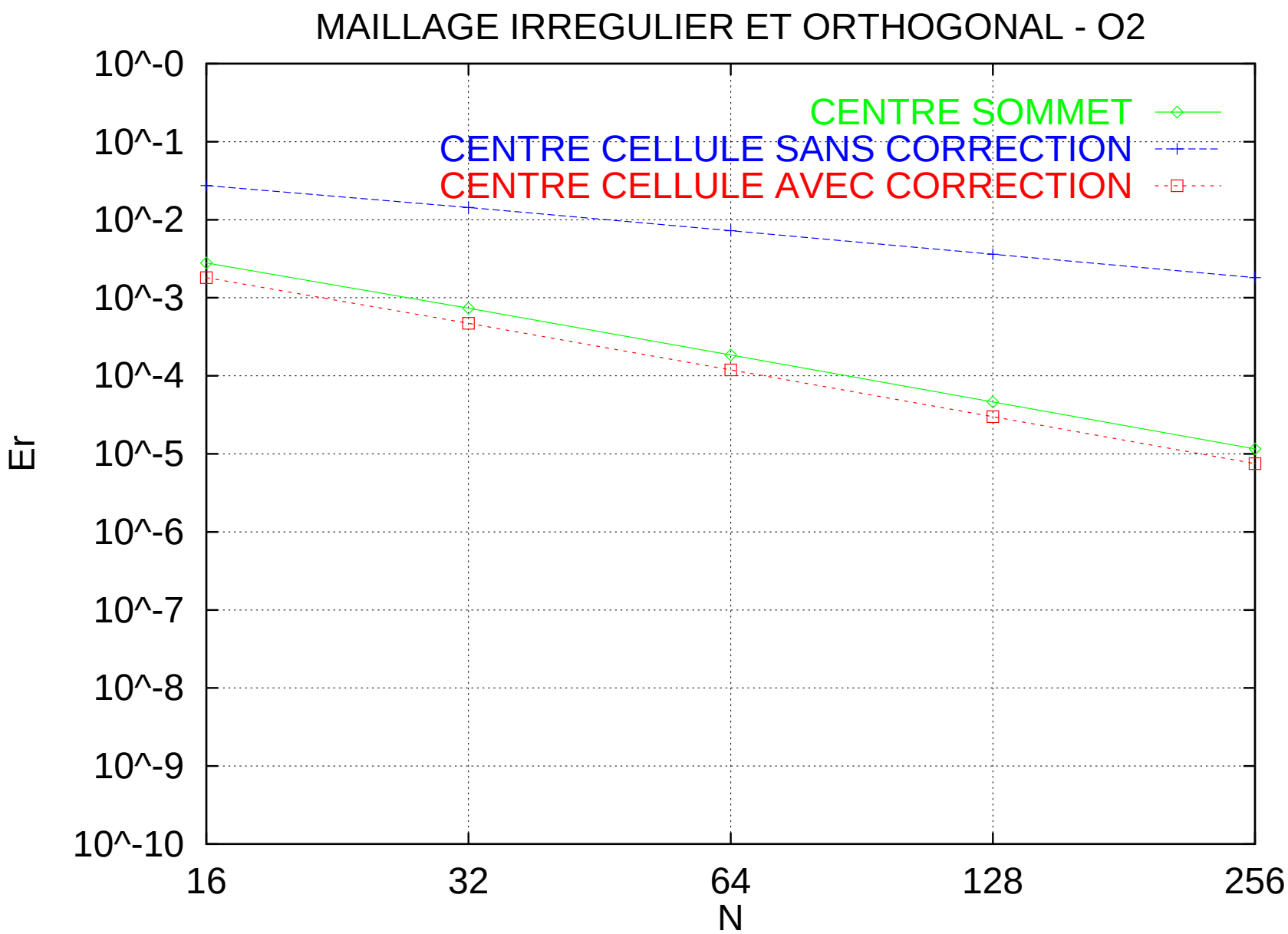


Figure 2-J: Maillage irrégulier et orthogonal. Ordre 2. SCH3>SCH1»SCH2.

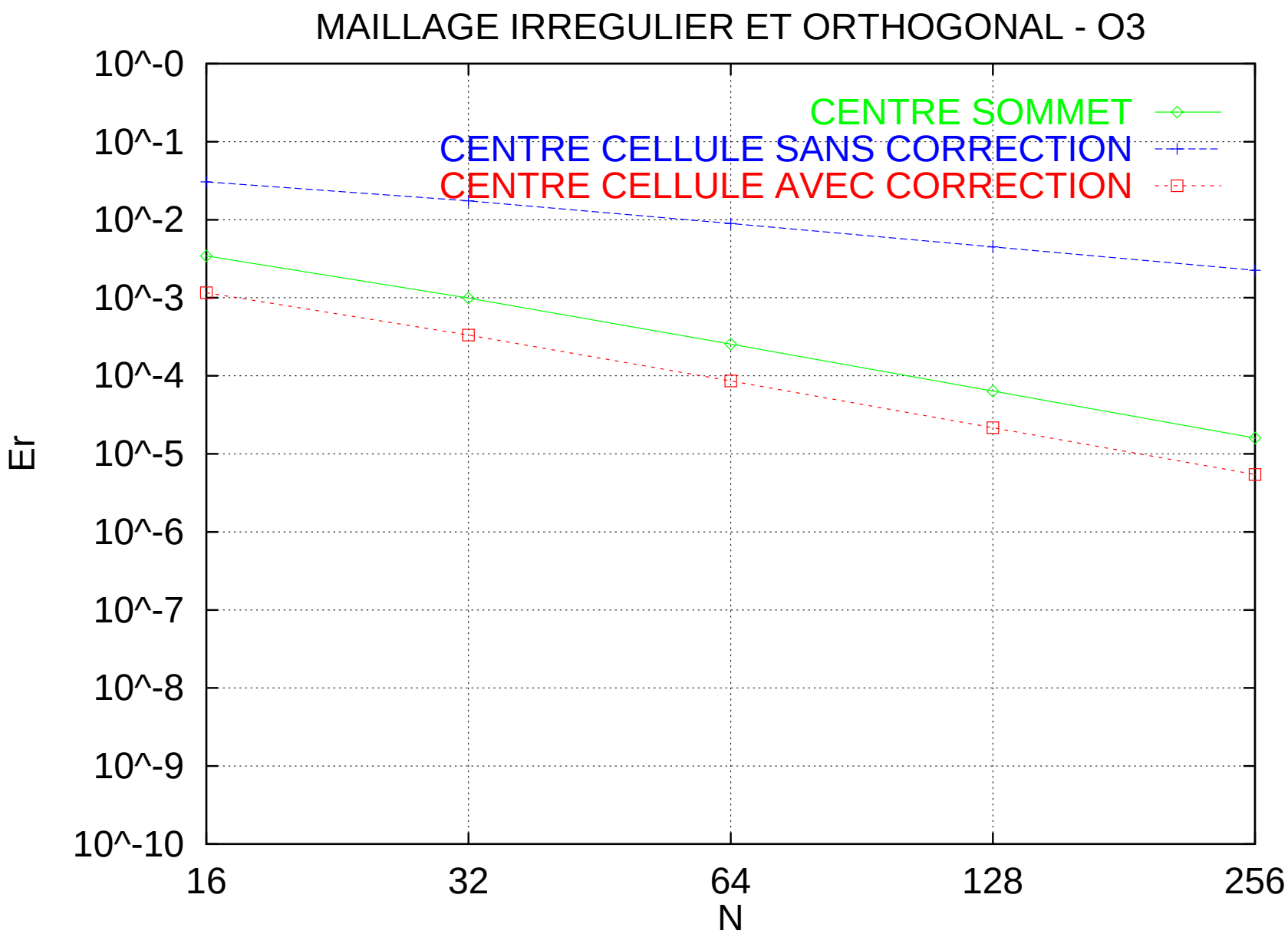


Figure 2-K: Maillage irrégulier et orthogonal. Ordre 3. SCH3>SCH1»SCH3.

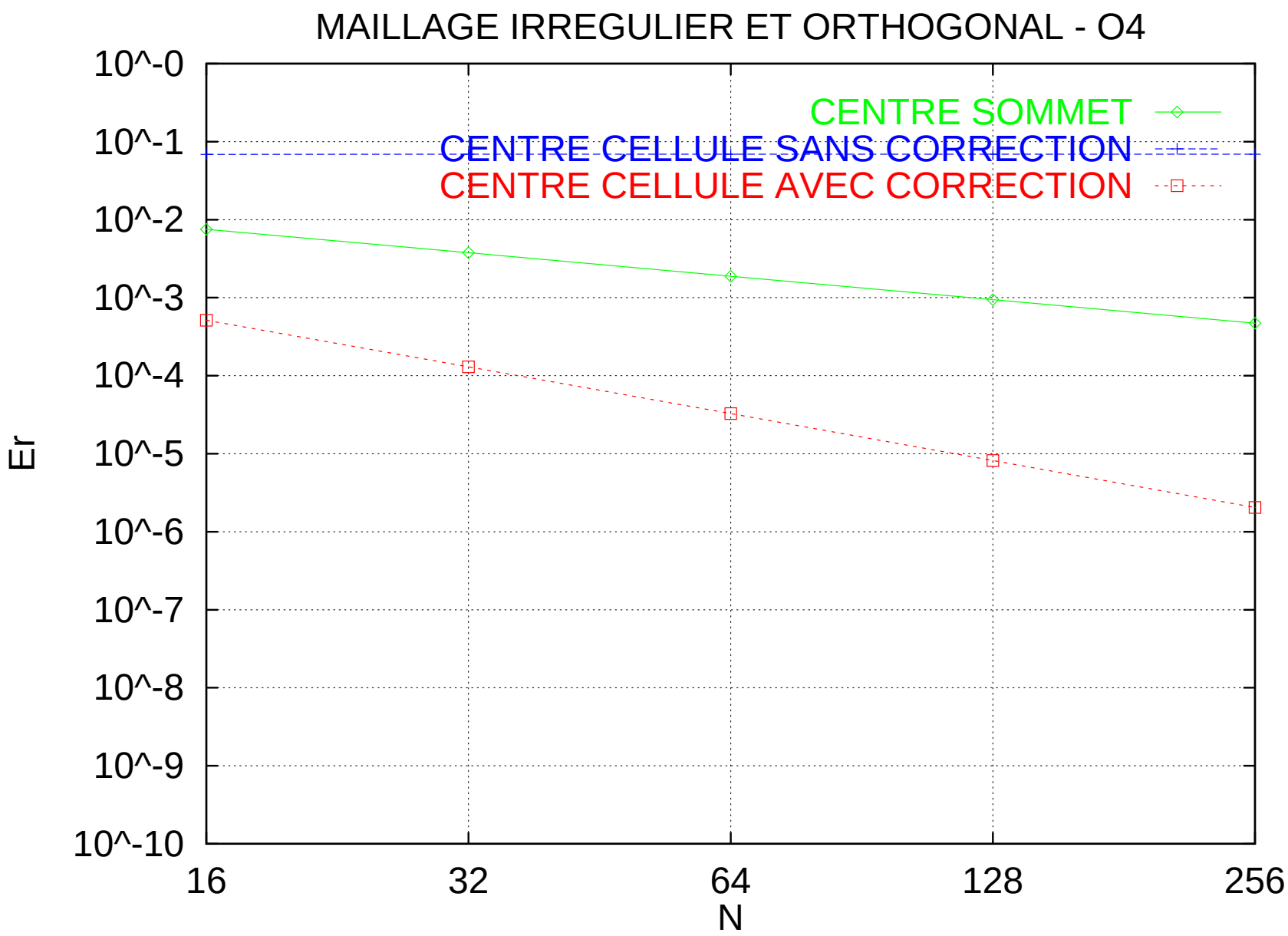


Figure 2-L: Maillage irrégulier et orthogonal. Ordre 4. SCH3»SCH1»SCH2.

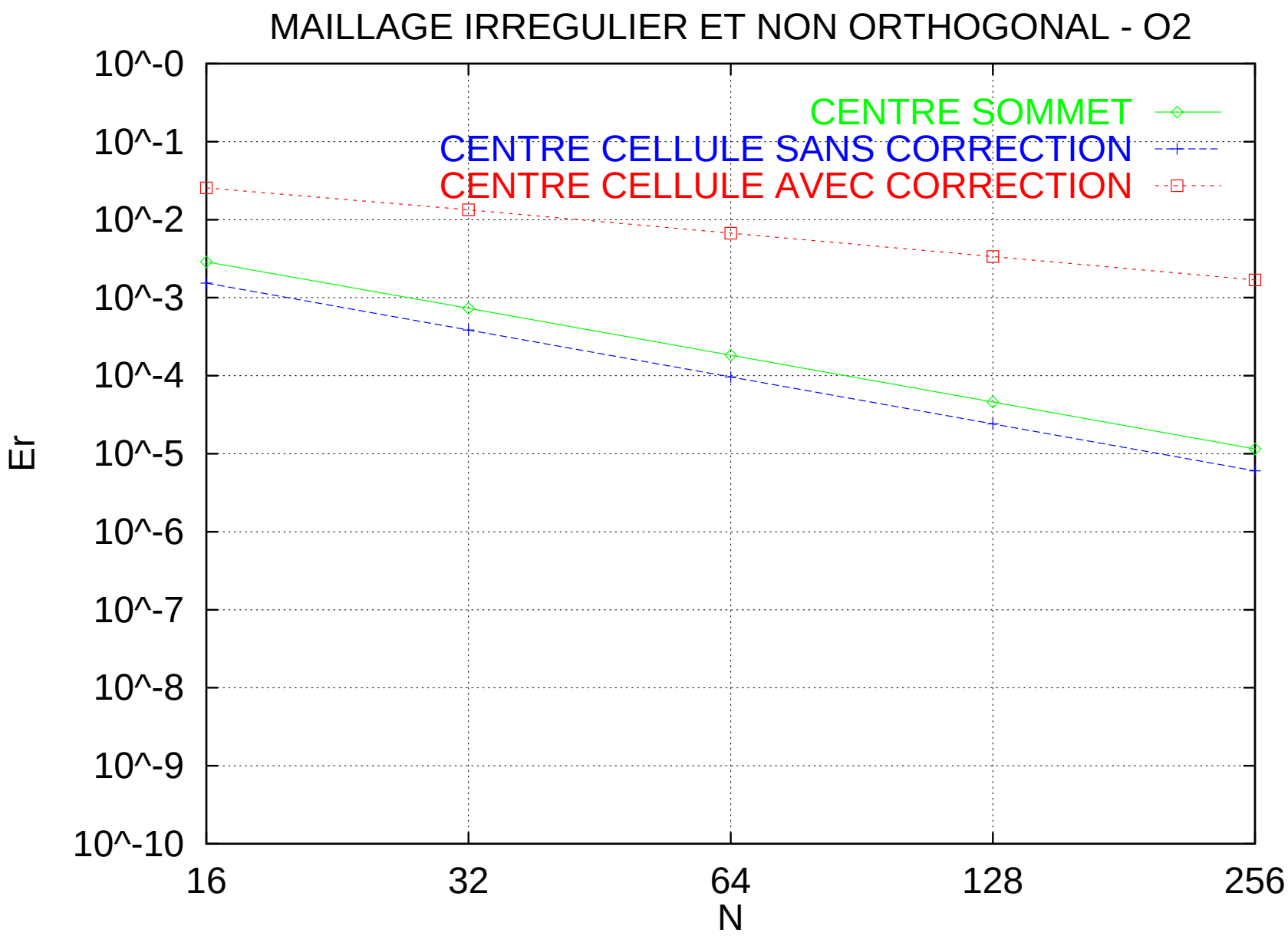


Figure 2-M: Maillage irrégulier et non orthogonal. Ordre 2. SCH2>SCH1»SCH3.

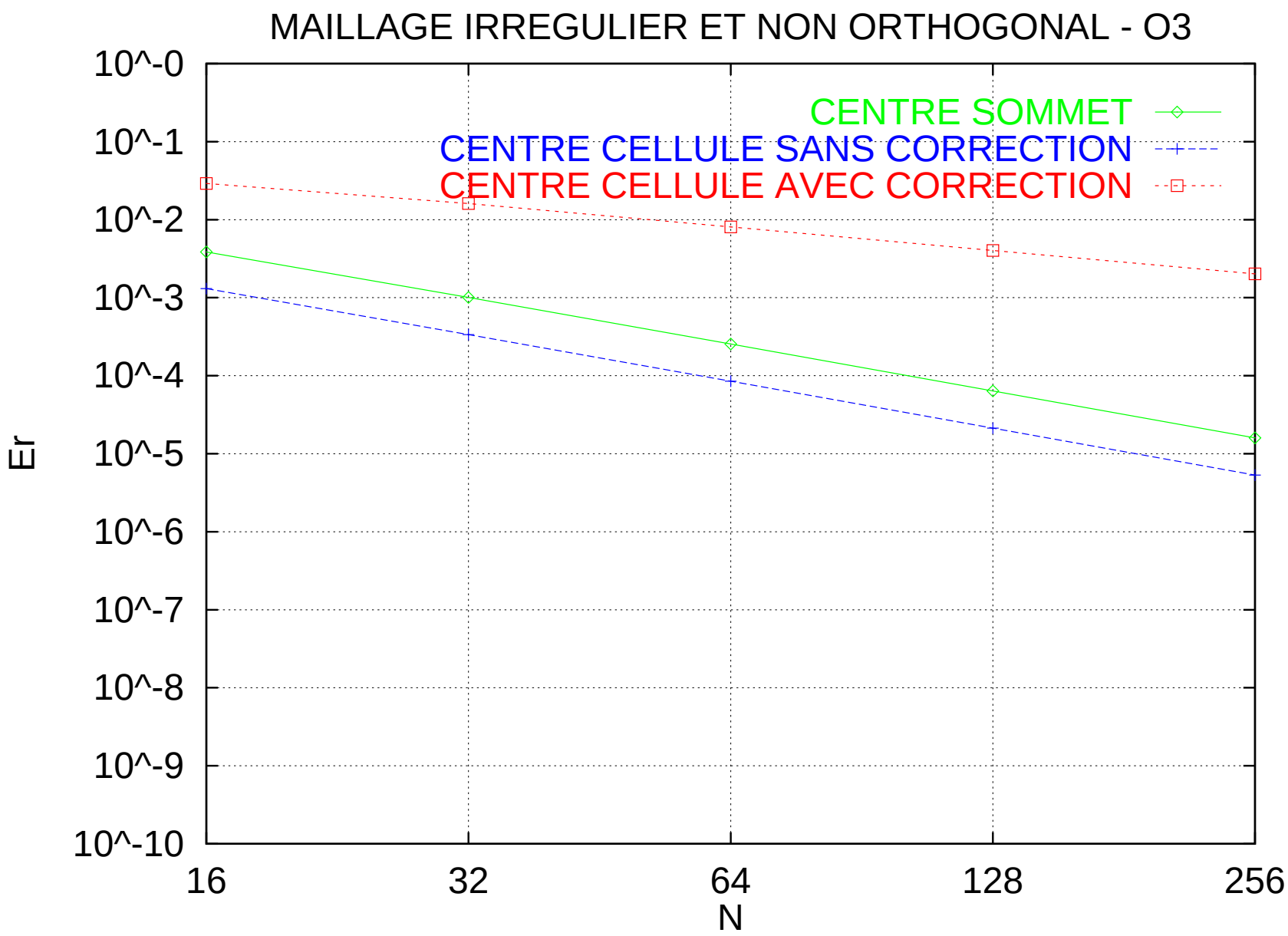


Figure 2-N: Maillage irrégulier et non orthogonal. Ordre 3. SCH2>SCH1»SCH3.

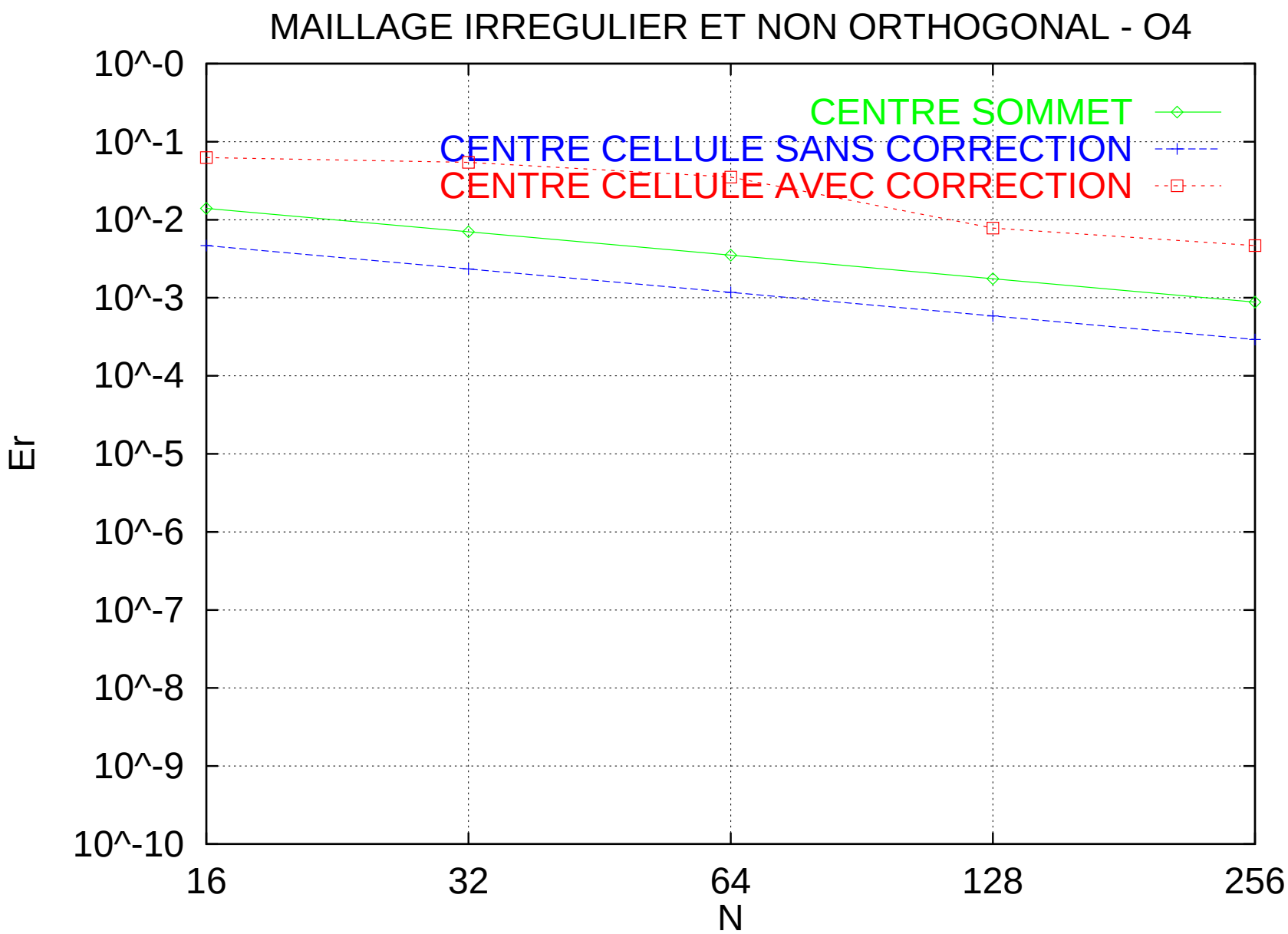


Figure 2-O: Maillage irrégulier et non orthogonal. Ordre 4. SCH2>SCH1>SCH3.

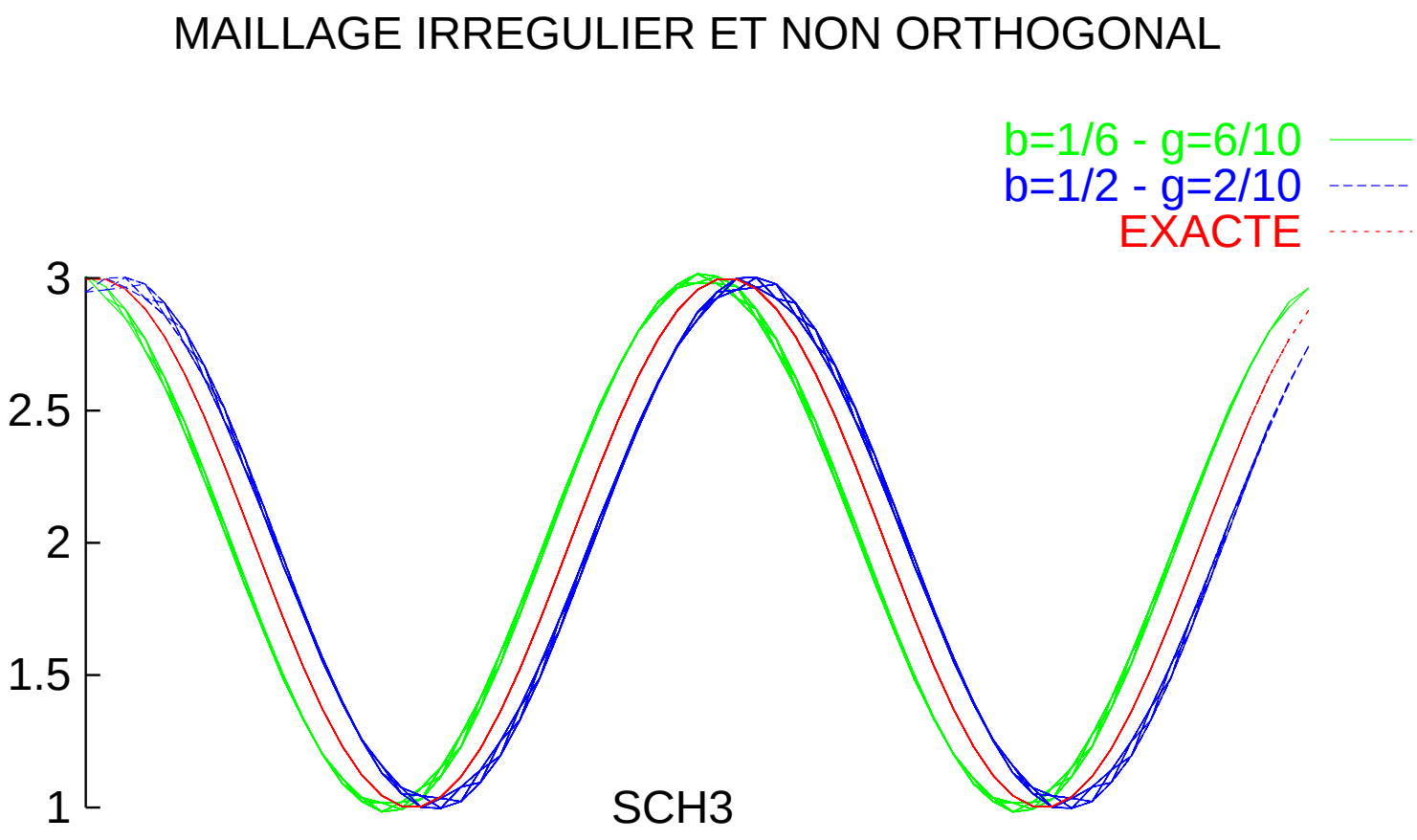


Figure 2-P: Phénomène d'avance et de retard préservé même sur maillage irrégulier et non orthogonal.

3 LE CAS TEST C3

Dans le cadre du couplage entre instabilités hydrodynamique et acoustique au sein des propulseurs à poudre, le cas test C3 de l'ONERA est une avancée conséquente par rapport au cas test C1 et ce pour de multiples raisons:

- C3 est axisymétrique alors que C1 est purement bidimensionnel. Celà permet un rapprochement plus étroit avec le phénomène réel et autorise des comparaisons avec des expériences sur maquettes (C1xb) [8],[9].
- C3 est une configuration géométrique où les plus forts niveaux instationnaires ont été enregistrés autour d'un seul mode acoustique: le mode 1 longitudinal de la chambre de combustion. Il ne devrait donc plus y avoir comme sur C1, d'ambiguïté quant à la fréquence de l'onde acoustique perçue numériquement.
- C3 est discrétisé par plusieurs maillages de finesses différentes ($Fig.$ 3, $3-A$, $3-B$, $3-C$, $3-D$, $3-E$). Ces maillages permettent de lancer une campagne de calculs numériques pour estimer la discrétisation minimale nécessaire à une capture correcte du phénomène.

3.1 Conditions de calculs

Les calculs numériques sont réalisés avec le système des équations de Navier Stokes pour un gaz parfait compressible et monoespèce. Ce gaz est de la butalamine à 5% donnant les données et valeurs de références suivantes:

- masse volumique: 1 649 $kg.m^{-3}$ (ρ_{ref}=0.114125)
- rapport des chaleurs spécifiques: $\Gamma = 1.232$
- température du gaz injecté: 2 324 K (T_{ref})
- vitesse du son: 1 039 $m.s^{-1}$ (v_{ref})
- constante du gaz parfait: $r = 377\ J.kg^{-1}.K^{-1}$
- viscosité laminaire: $\mu = 7.22\ 10^{-5}\ \ kg.m^{-1}.s^{-1}$
- nombre de Prandtl: $Pr = 0.507$
- longueur du propulseur: 0.785 m (l_{ref})
- débit injecté: 7.63487 $kg.m^{-2}.s^{-1}$
- nombre de Reynolds: $Rey = \frac{\rho_{ref} v_{ref} l_{ref}}{\mu_{ref}} = 1\ 289\ 225$

Nous utilisons le $\beta\gamma$ schéma tel qu'il a été présenté dans le paragraphe 2.7 de ce document.

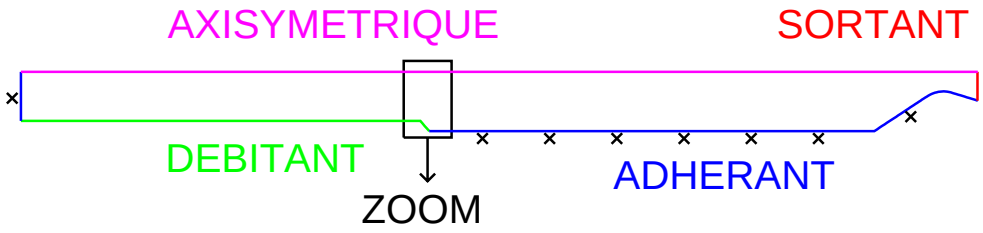


Figure 3: Demi propulseur du cas test C3. Conditions de bords. Capteurs (X).

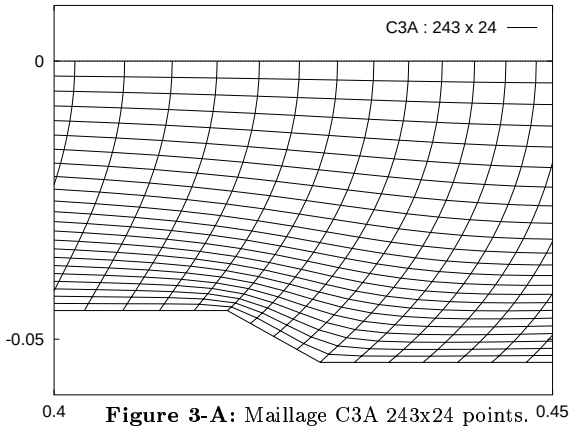


Figure 3-A: Maillage C3A 243x24 points.

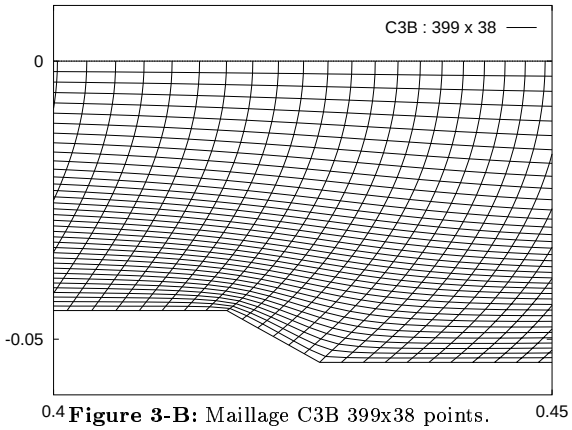


Figure 3-B: Maillage C3B 399x38 points.

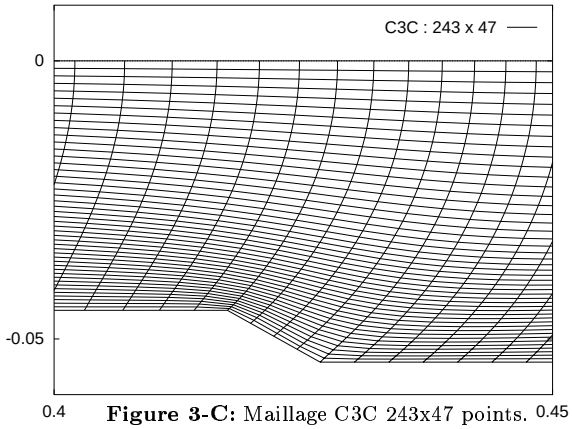


Figure 3-C: Maillage C3C 243x47 points.

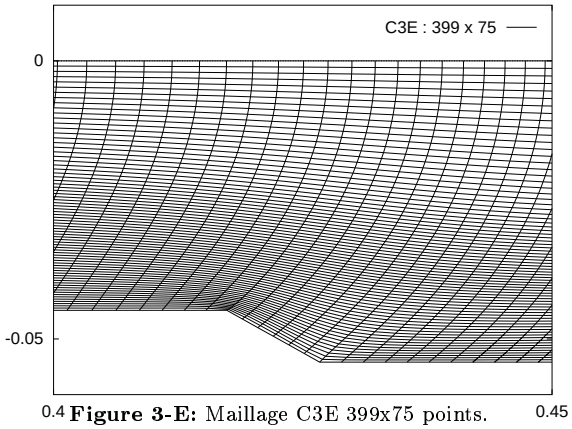


Figure 3-E: Maillage C3E 399x75 points.

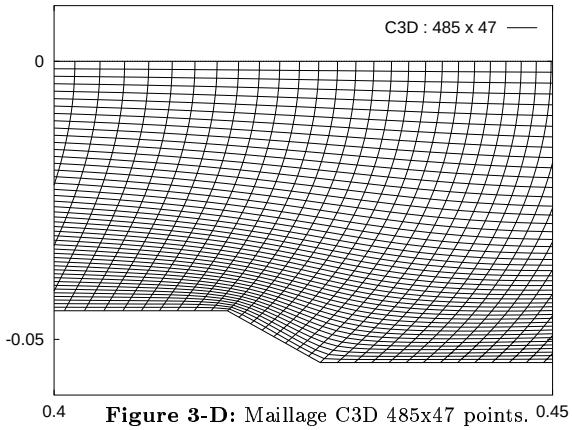
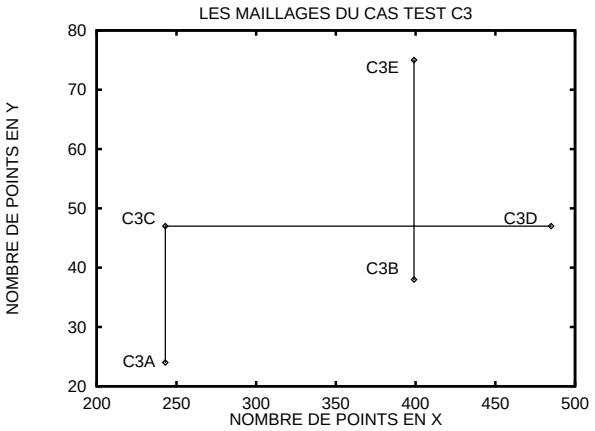


Figure 3-D: Maillage C3D 485x47 points.



Le propulseur est bardé sur son flanc extérieur de 8 capteurs de pression (CAP1 à CAP8) (Fig. 3) de coordonnées longitudinales suivante:

CAPTEUR	CAP1	CAP2	CAP3	CAP4	CAP5	CAP6	CAP7	CAP8
COOR. (mm)	0	400	450	500	550	600	650	720.5

Pour chaque calcul, nous faisons une analyse spectrale des signaux de pression de ces 8 capteurs afin de déterminer la fréquence de l'onde acoustique ainsi que les niveaux (pression moyenne et amplitude). Pour mener à bien une telle étude, il est nécessaire de travailler à pas de temps constant pour un maillage donné. Par ailleurs, pour pouvoir comparer les différents maillages, il convient de mener les calculs jusqu'à un même temps $Tmax$. Ce temps détermine la précision de l'analyse spectrale (14Hz).

MAILLAGE	C3A	C3C	C3B	C3D	C3E
$\Delta t \times 10^{-4}$	4.	2.5	2.222	2.	1.333
Itérations (10^5)	5	8	9	10	15

Enfin, nous débutons tous les calculs par un même état initial: une solution convergée c'est-à-dire sans détachement tourbillonnaire obtenue sur le maillage le plus grossier (C3A) avec le schéma de Roe classique ($\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 1$). Cette solution a été projetée sur l'ensemble des maillages.

3.2 Résultats

Comme pour le cas test C1, nous considérons trois configuration du $\beta\gamma$ schéma. Par ce procédé, nous modifions essentiellement l'erreur dispersive (en $3\beta - 1$) tout en laissant l'erreur dissipative (en $\beta\gamma$) constante.

EXPERIENCE	β	γ	EFFET
NUM1	1/6	6/10	retard
NUM2	1/3	3/10	"O(3)"
NUM3	1/2	2/10	avance

Nous réalisons ces trois simulations numériques (NUM1 à NUM3) sur les 3 maillages les plus grossiers: C3A, C3C, C3B et nous nous cantonnons à la configurations NUM2 (ordre 3 linéaire) pour les autres maillages C3D, C3E. Ce choix se justifie parce que si nous observons de fortes variations de mesure sur les capteurs de pression selon la configuration du $\beta\gamma$ schéma pour C3A, ces variations s'amenuisent pour C3C et C3B au point de devenir d'un coût informatique prohibitif pour les maillages plus fins.
Pour analyser les écarts entre les différentes simulations pour un même maillage, nous introduisons: la valeur moyenne (MOY.), la variation maximale pour un même capteur (Δ) et l'erreur relative (E.R.= Δ/MOY) exprimée en "pour mille ($^0/_{00}$)" ou "pour cent ($^0/_0$)" selon le cas.

3.2.1 Sur le maillage C3A (5 566 points)

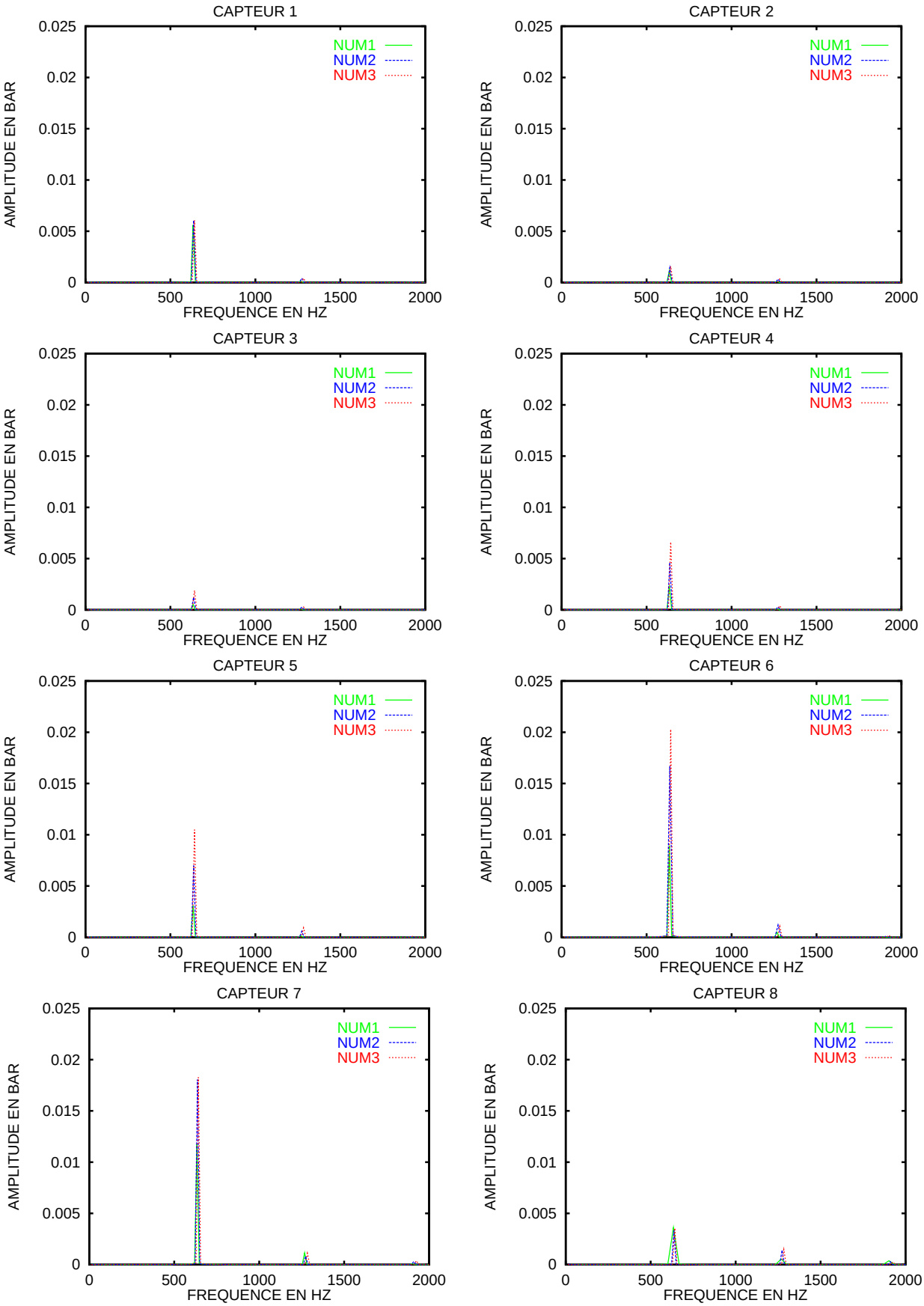
Le maillage C3A est le maillage le plus grossier du cas test C3 et sert de base au maillage C3C et C3D.

Maillage C3A - Pression moyenne (bar)						
CAPTEURS	NUM1	NUM2	NUM3	MOY.	Δ	E.R. ($^0/_{00}$)
CAP1	13.40	13.39	13.39	13.39	0.01	0.7
CAP2	13.23	13.22	13.22	13.22	0.01	0.7
CAP3	13.23	13.22	13.22	13.22	0.01	0.7
CAP4	13.23	13.22	13.22	13.22	0.01	0.7
CAP5	13.23	13.22	13.22	13.22	0.01	0.7
CAP6	13.23	13.22	13.22	13.22	0.01	0.7
CAP7	13.23	13.22	13.22	13.22	0.01	0.7
CAP8	13.20	13.20	13.20	13.20	0.00	0.0

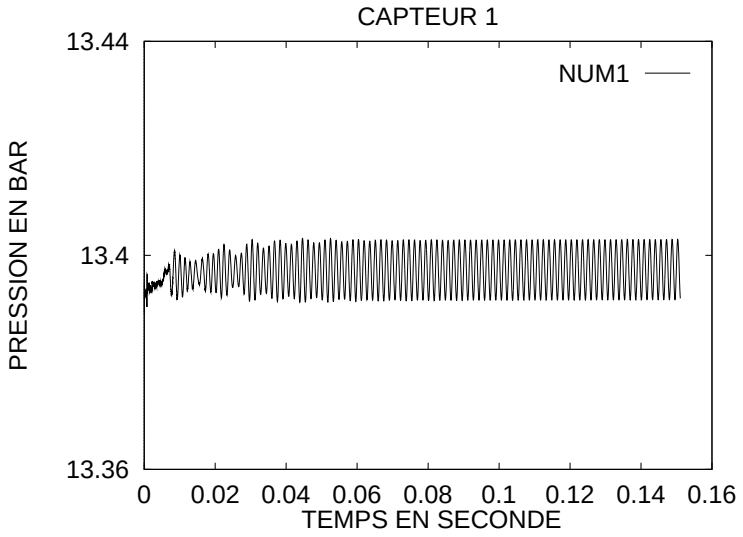
Maillage C3A - Amplitude de la pression (mbar)						
CAPTEURS	NUM1	NUM2	NUM3	MOY.	Δ	E.R. ($^0/_0$)
CAP1	5.6	6.1	6.1	5.9	0.5	8.5
CAP2	1.1	1.4	1.6	1.4	0.5	35.7
CAP3	0.5	1.2	1.9	1.0	1.4	140.0
CAP4	2.4	4.6	6.6	4.5	4.2	93.3
CAP5	3.1	7.0	10.5	6.9	7.4	107.2
CAP6	9.0	16.7	20.3	15.3	11.3	73.9
CAP7	11.8	18.0	18.3	16.0	6.5	40.6
CAP8	3.6	3.3	3.6	3.5	0.3	8.6

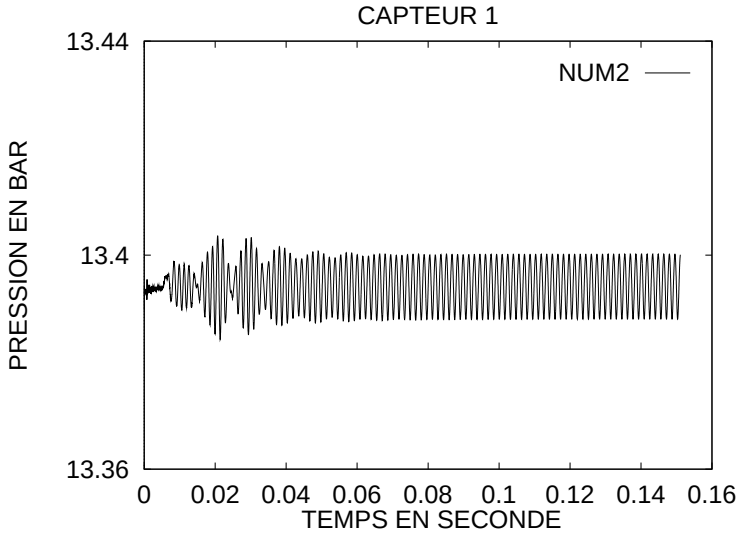
Maillage C3A - fréquence $\pm$ 14 Hz						
CAPTEURS	NUM1	NUM2	NUM3	MOY.	Δ	E.R. ($^0/_0$)
CAP1	634	637	642	637	8	1.3
CAP2	633	637	642	637	9	1.4
CAP3	633	637	642	637	9	1.4
CAP4	634	637	642	637	8	1.3
CAP5	634	637	642	637	8	1.3
CAP6	634	637	642	637	8	1.4
CAP7	634	637	642	637	8	1.4
CAP8	634	637	642	637	8	1.4

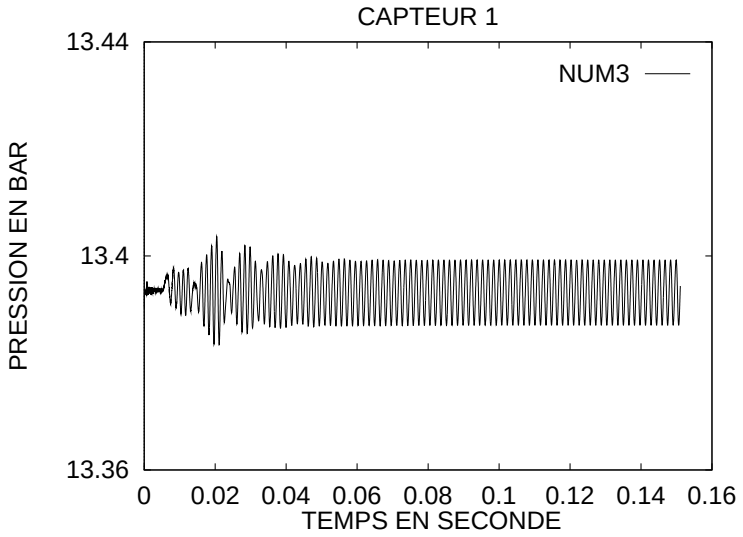
ANALYSE SPECTRALE DES CAPTEURS DE PRESSION - C3A



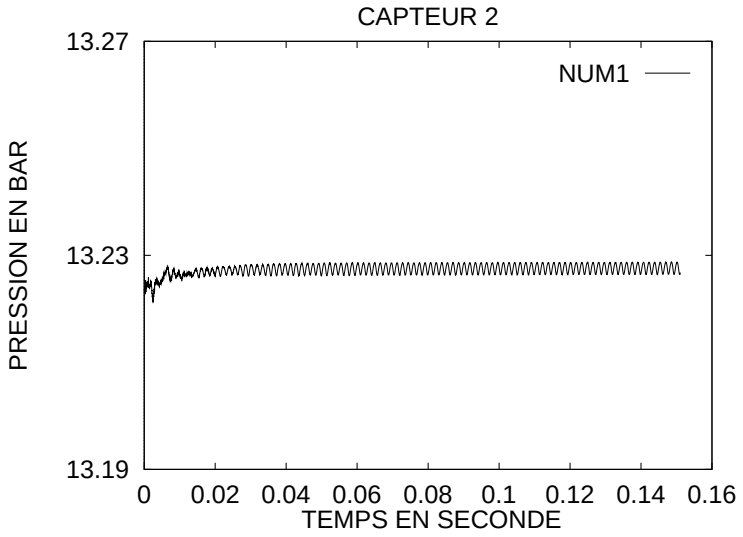
SIGNAL DU CAPTEUR 1 - C3A

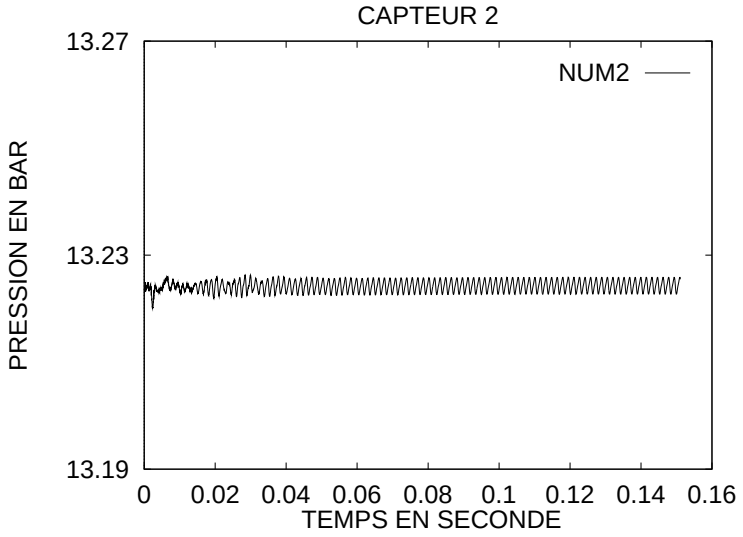


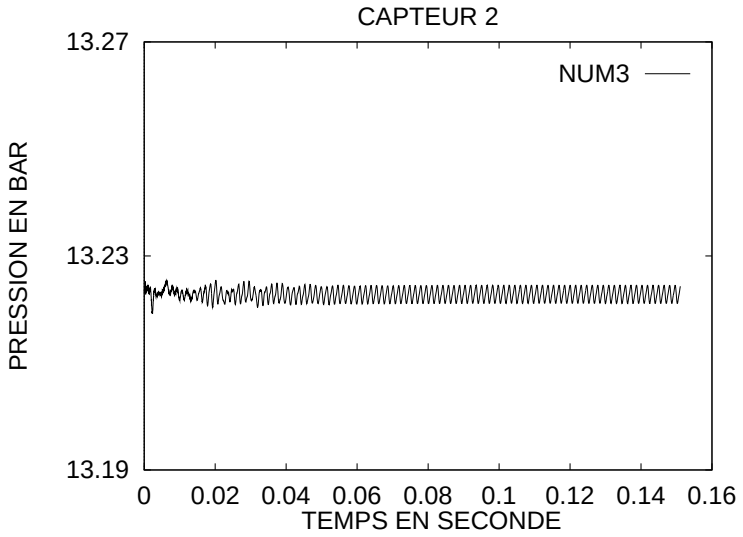




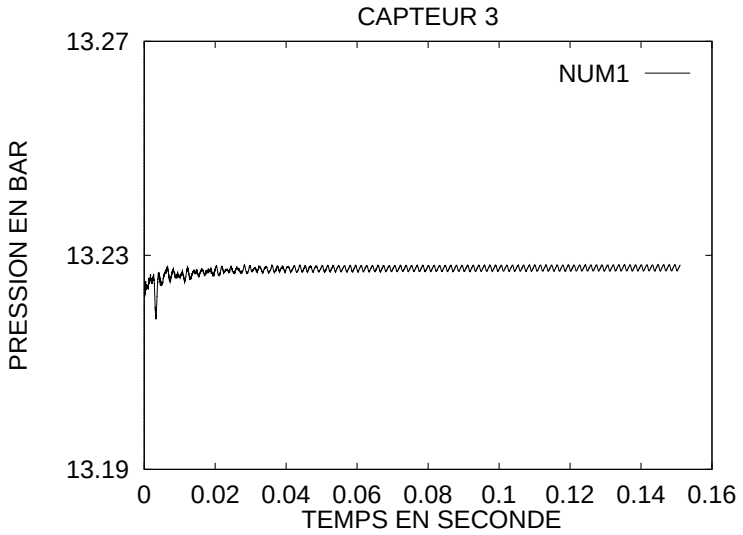
SIGNAL DU CAPTEUR 2 - C3A

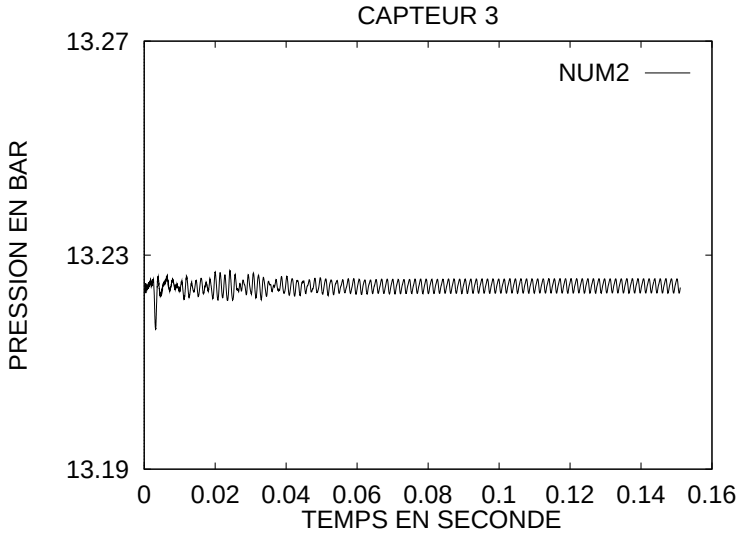


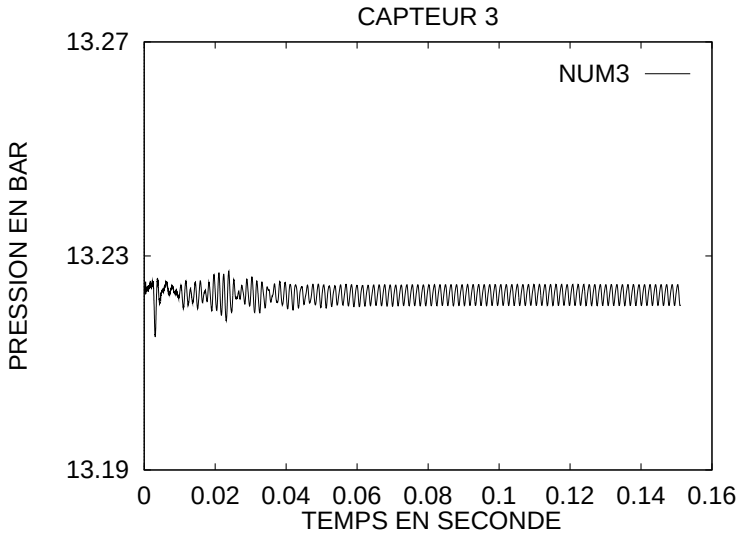




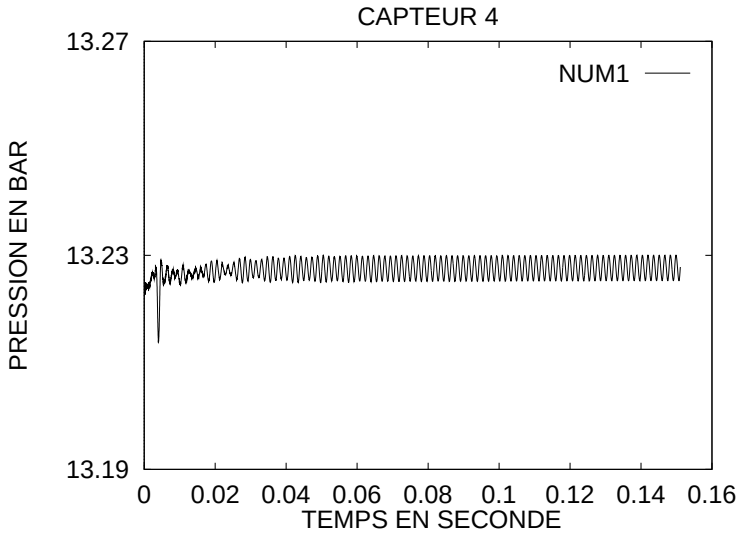
SIGNAL DU CAPTEUR 3 - C3A

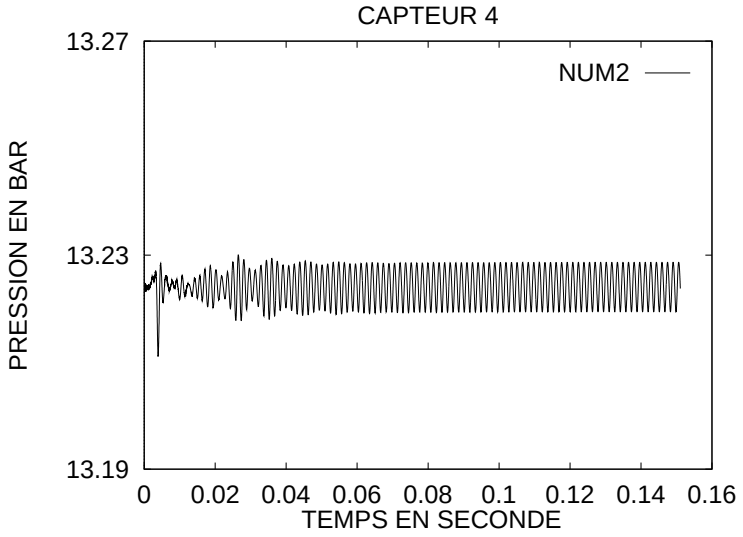


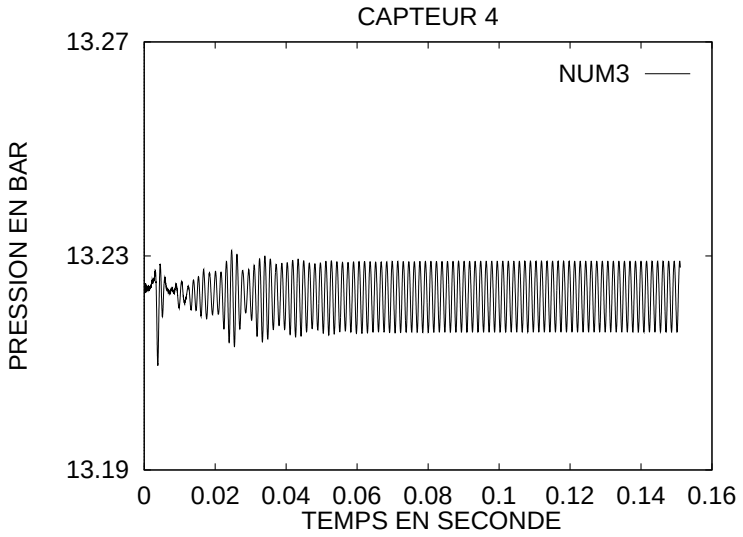




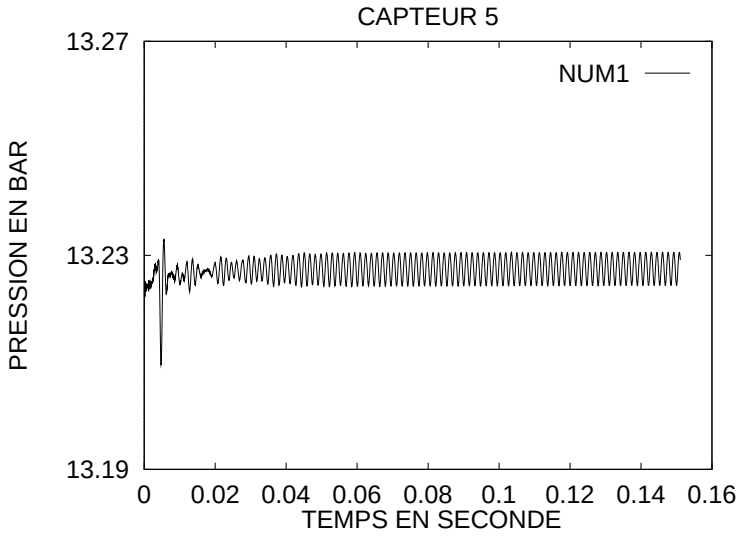
SIGNAL DU CAPTEUR 4 - C3A

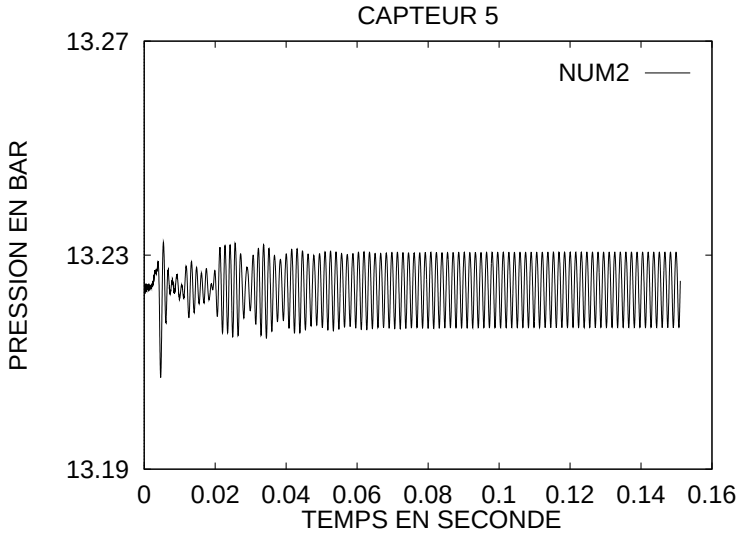


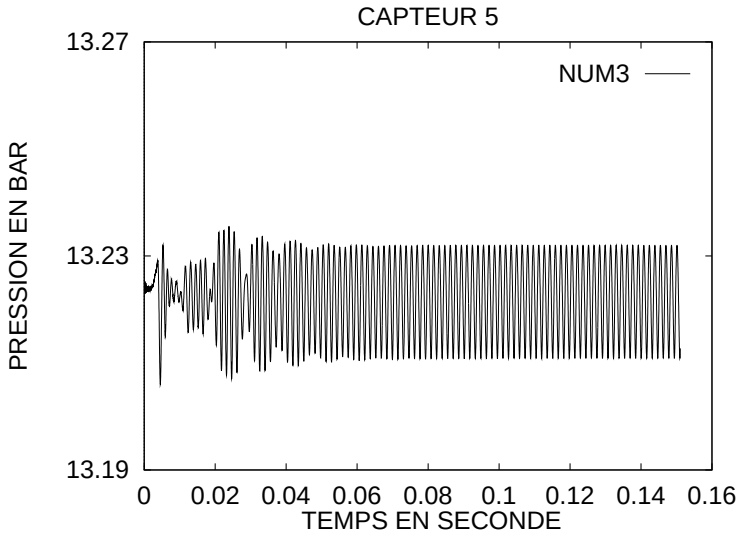




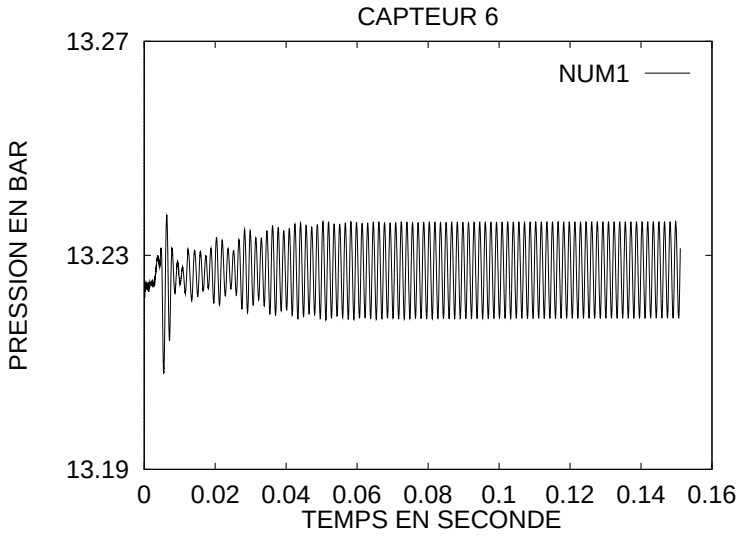
SIGNAL DU CAPTEUR 5 - C3A

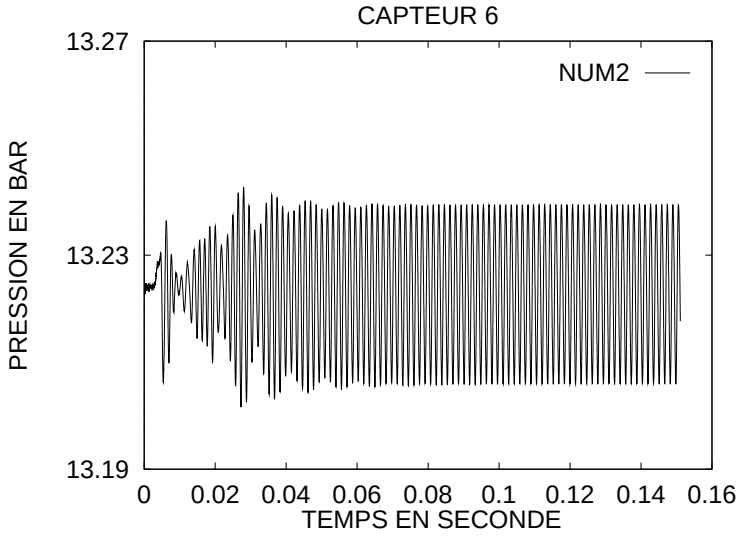


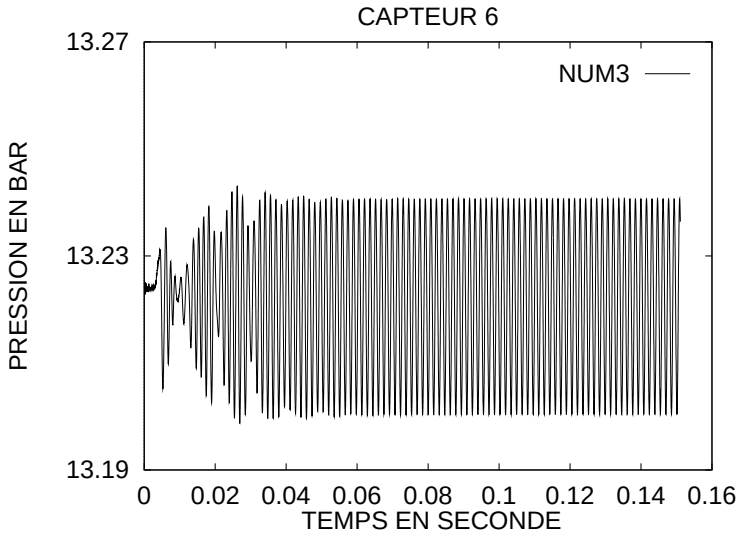




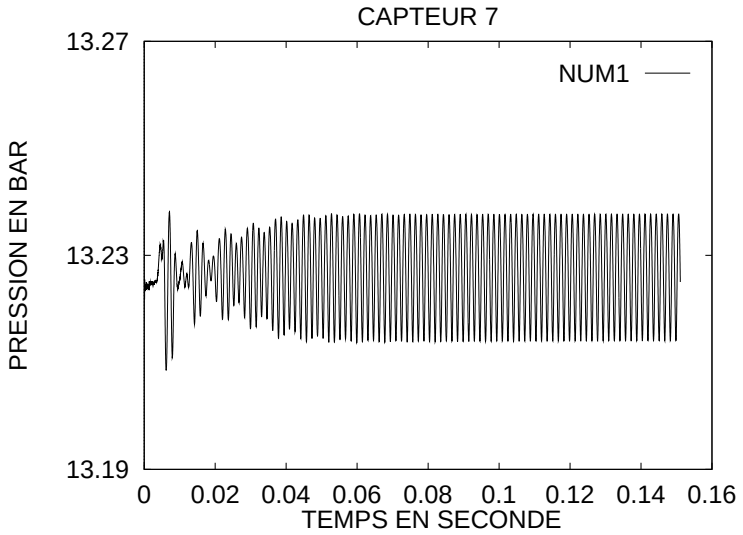
SIGNAL DU CAPTEUR 6 - C3A

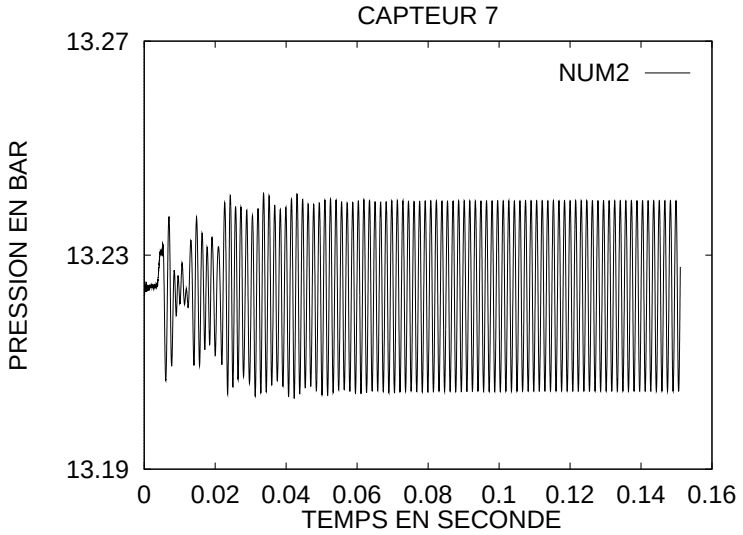


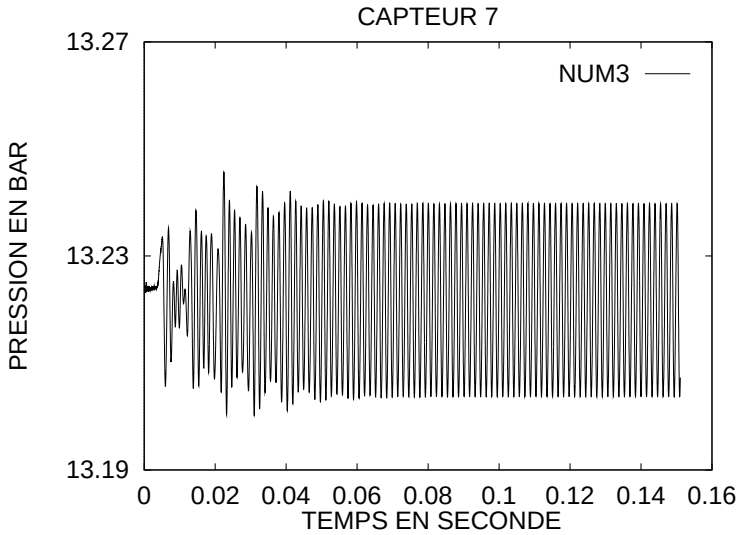




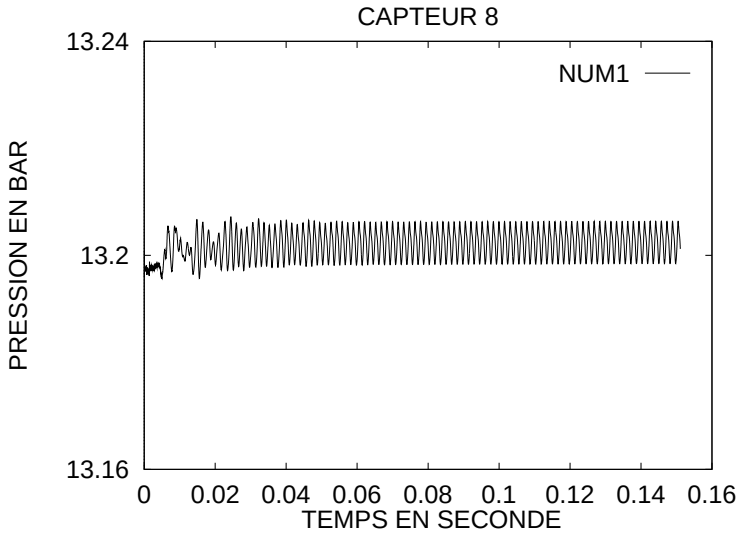
SIGNAL DU CAPTEUR 7 - C3A

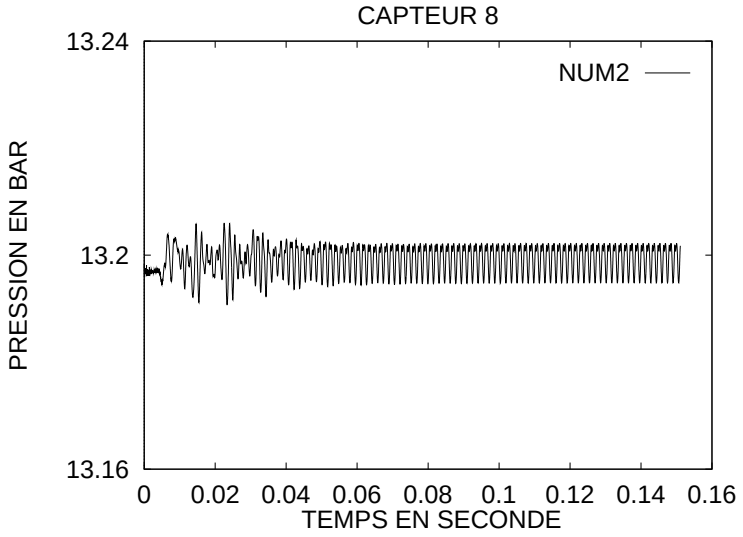


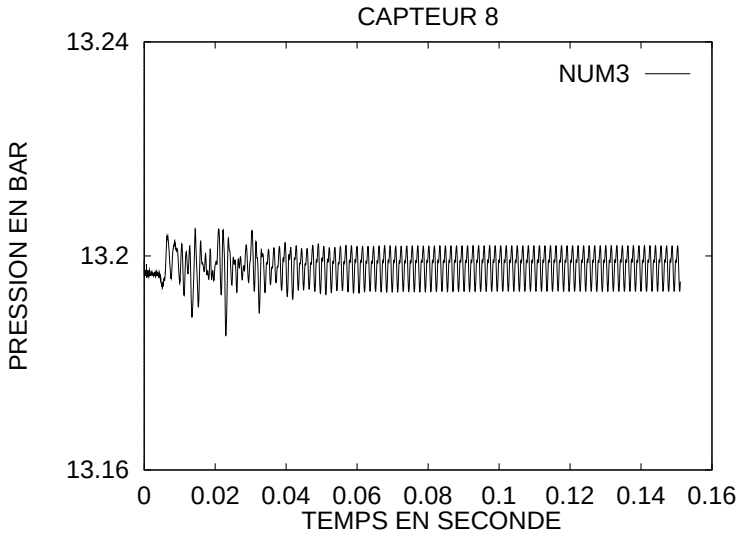




SIGNAL DU CAPTEUR 8 - C3A







3.2.2 Sur le maillage C3C (11 132 points)

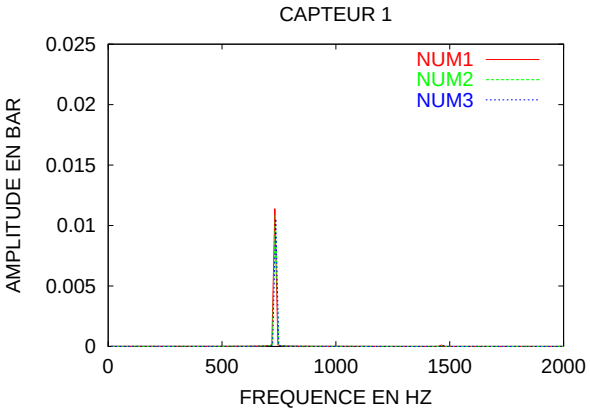
Le maillage C3C se déduit du maillage C3A par un doublement du nombre de points selon l'axe transversal (y).

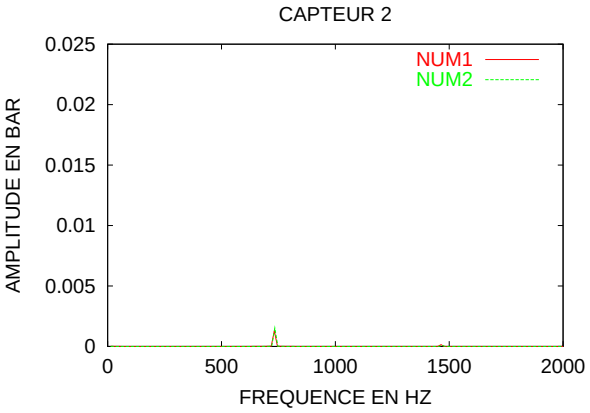
Maillage C3C - Pression moyenne (bar)						
CAPTEURS	NUM1	NUM2	NUM3	MOY.	Δ	E.R. ($^0/_{00}$)
CAP1	13.40	13.39	13.39	13.39	0.01	0.7
CAP2	13.23	13.22	-	13.22	0.01	0.7
CAP3	13.23	13.22	13.22	13.22	0.01	0.7
CAP4	13.23	13.22	13.22	13.22	0.01	0.7
CAP5	13.23	13.22	13.22	13.22	0.01	0.7
CAP6	13.23	13.22	13.22	13.22	0.01	0.7
CAP7	13.23	13.22	13.22	13.22	0.01	0.7
CAP8	13.20	13.20	13.20	13.20	0.00	0.0

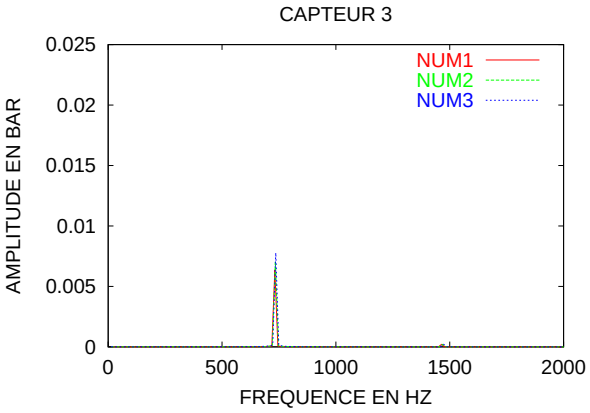
Maillage C3C - Amplitude de la pression (mbar)						
CAPTEURS	NUM1	NUM2	NUM3	MOY.	Δ	E.R. ($^0/_0$)
CAP1	11.4	10.9	10.6	11.0	0.8	7.3
CAP2	1.3	1.5	-	1.4	0.2	14.3
CAP3	6.4	7.1	7.8	7.1	1.4	19.7
CAP4	5.7	6.6	7.9	6.7	2.2	32.8
CAP5	17.8	19.2	19.9	19.0	2.1	11.1
CAP6	20.7	19.6	18.7	19.7	2.0	10.2
CAP7	12.3	12.7	12.9	12.6	0.6	4.8
CAP8	5.4	5.6	5.8	5.6	0.4	7.1

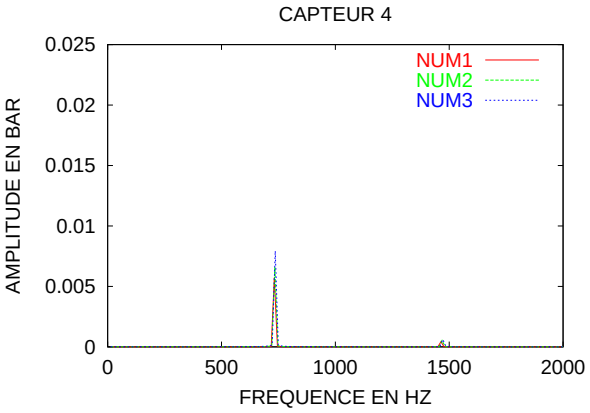
Maillage C3C - fréquence $\pm$ 14 Hz						
CAPTEURS	NUM1	NUM2	NUM3	MOY.	Δ	E.R. ($^0/_0$)
CAP1	732	734	736	734	4	0.5
CAP2	732	734	-	734	4	0.5
CAP3	732	734	736	734	4	0.5
CAP4	732	734	736	734	4	0.5
CAP5	732	734	736	734	4	0.5
CAP6	732	734	736	734	4	0.5
CAP7	732	734	736	734	4	0.5
CAP8	732	734	736	734	4	0.5

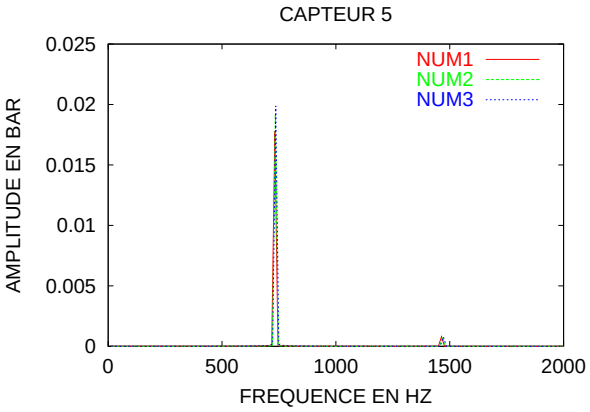
ANALYSE SPECTRALE DES CAPTEURS DE PRESSION - C3C

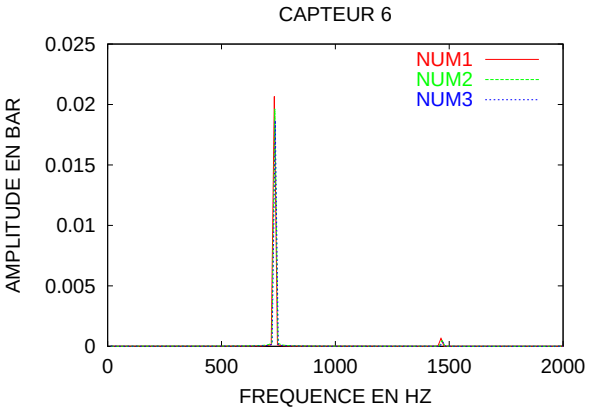


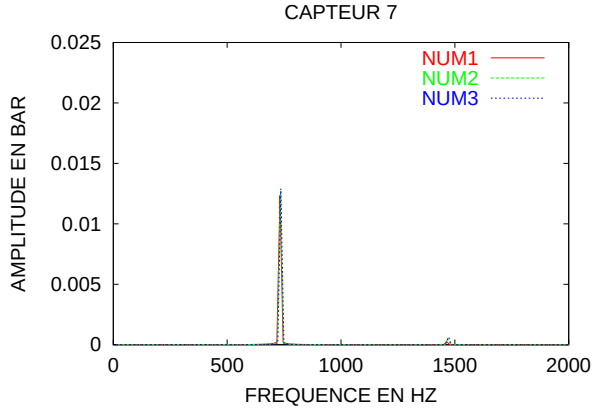


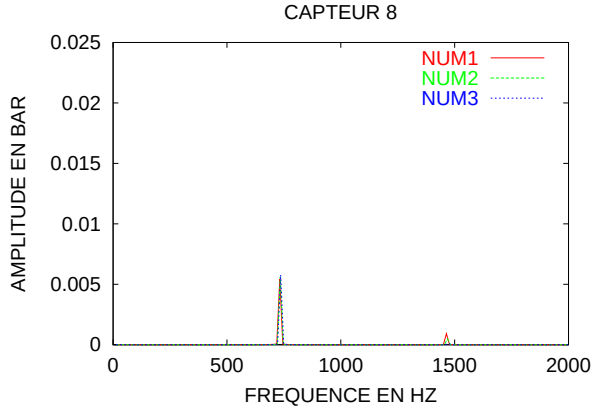




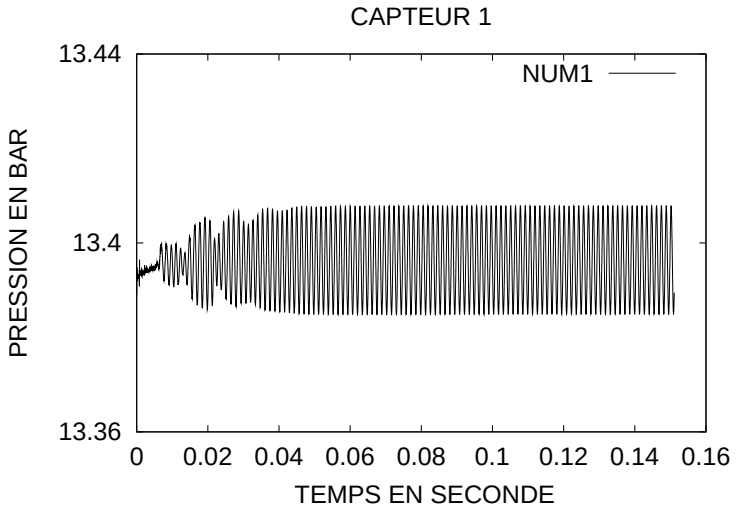


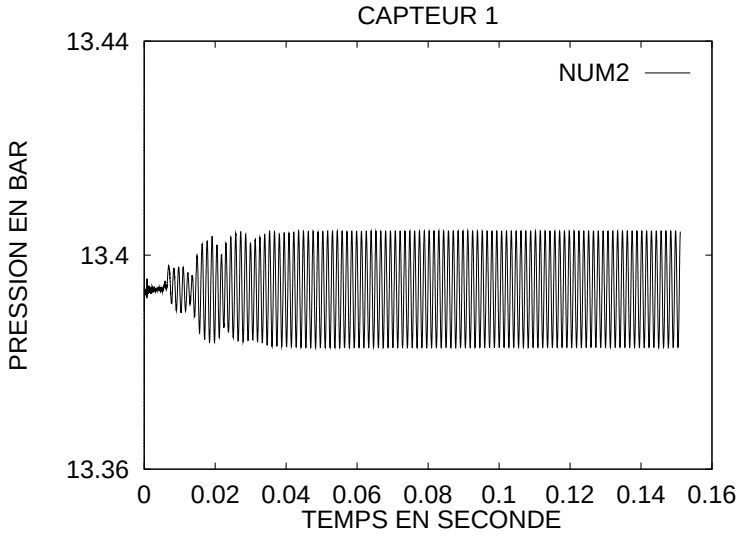


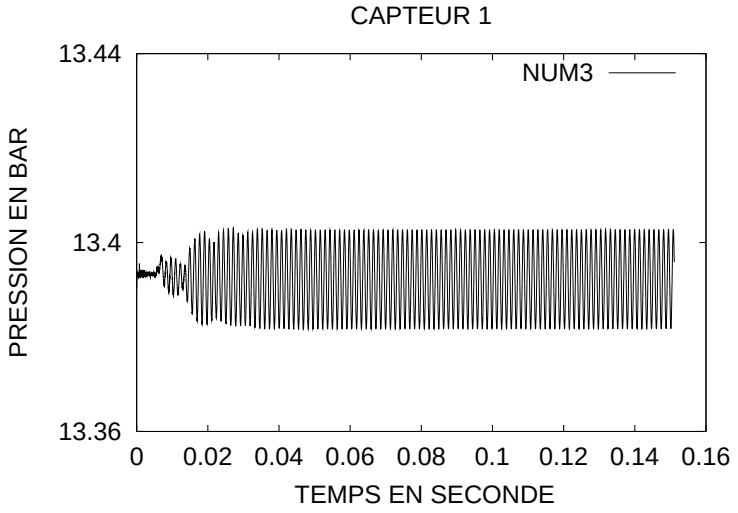




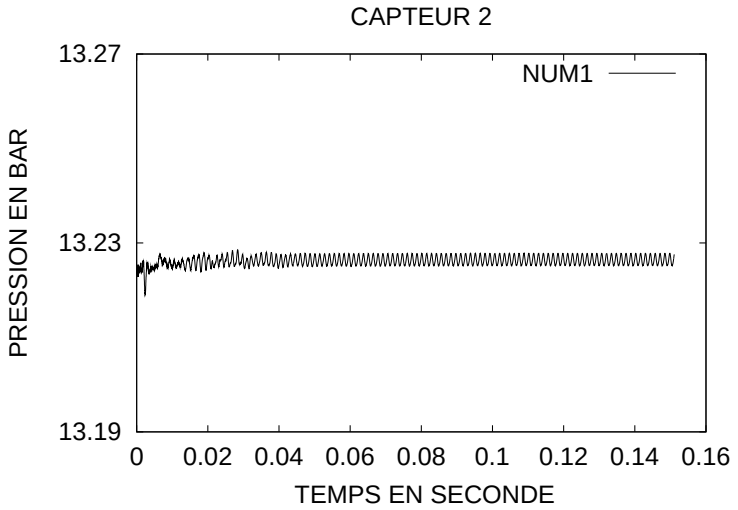
SIGNAL DU CAPTEUR 1 - C3C

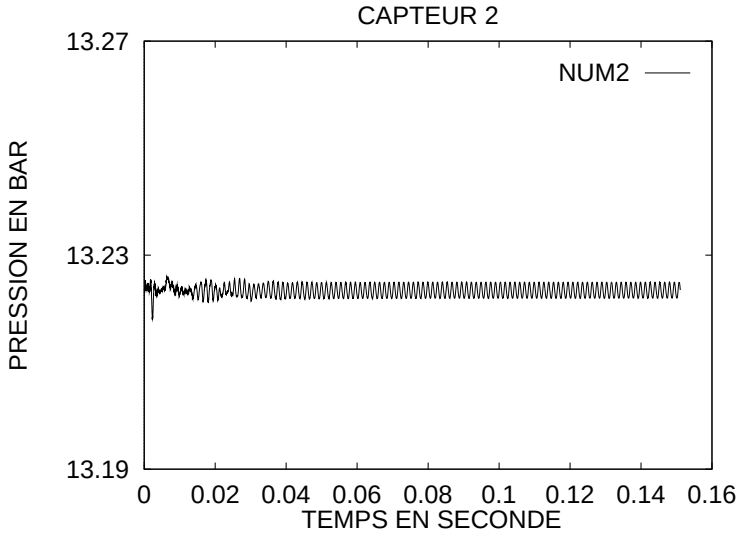






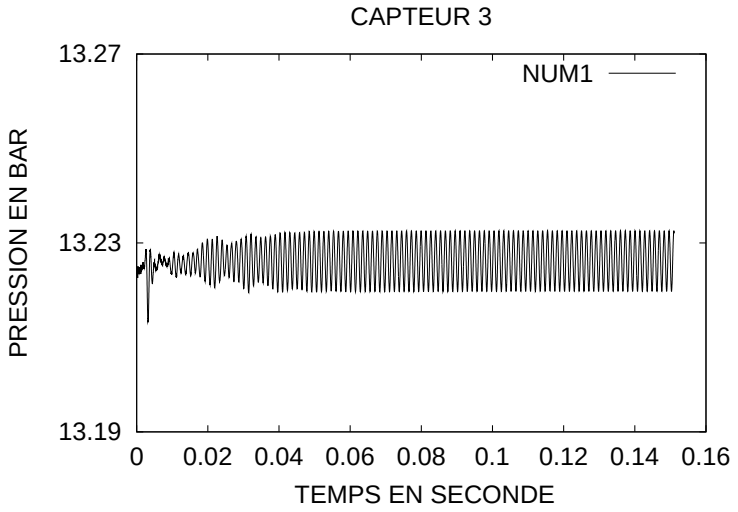
SIGNAL DU CAPTEUR 2 - C3C

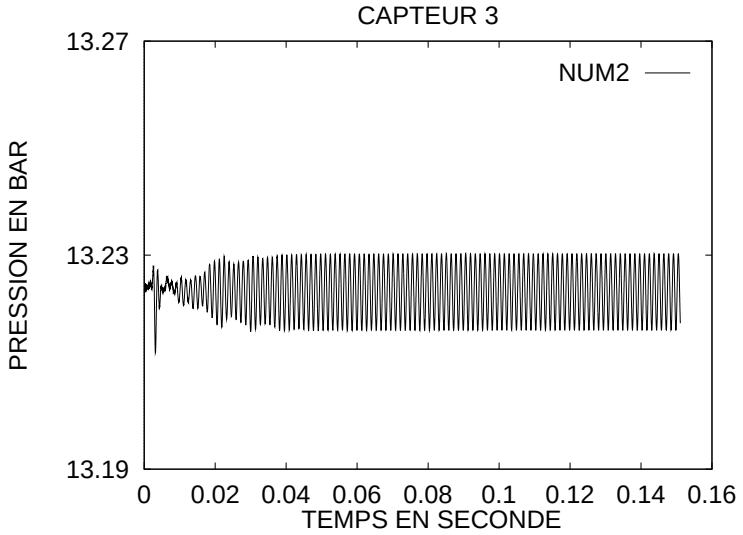


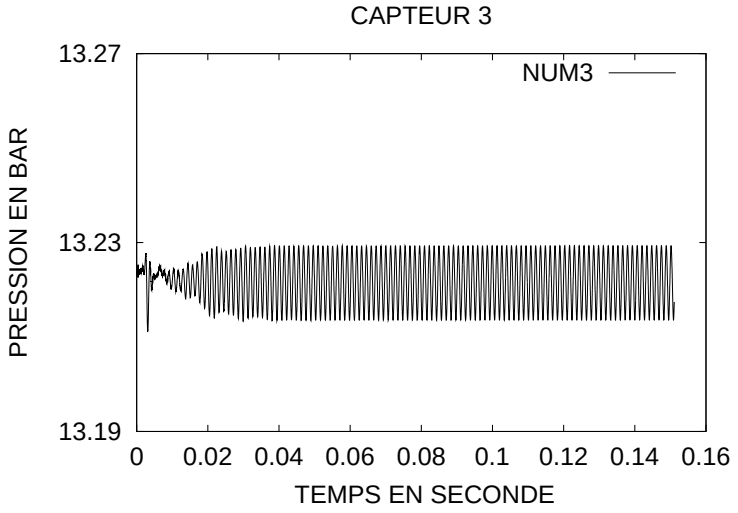


Données du capteur 2 / NUM3
non communiquées lors de la sortie
du calcul sur FUJITSU VPP 300

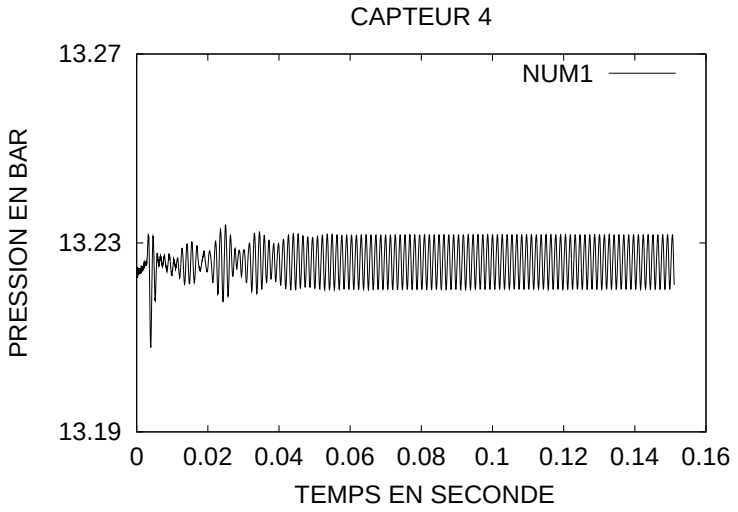
SIGNAL DU CAPTEUR 3 - C3C

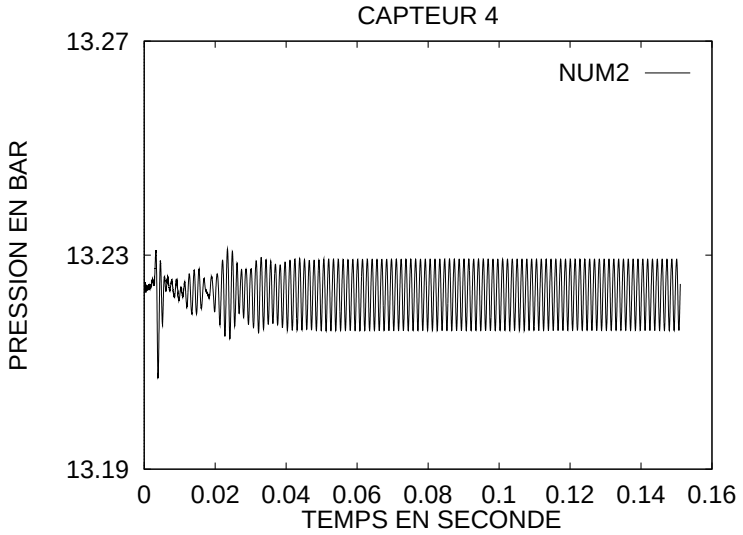


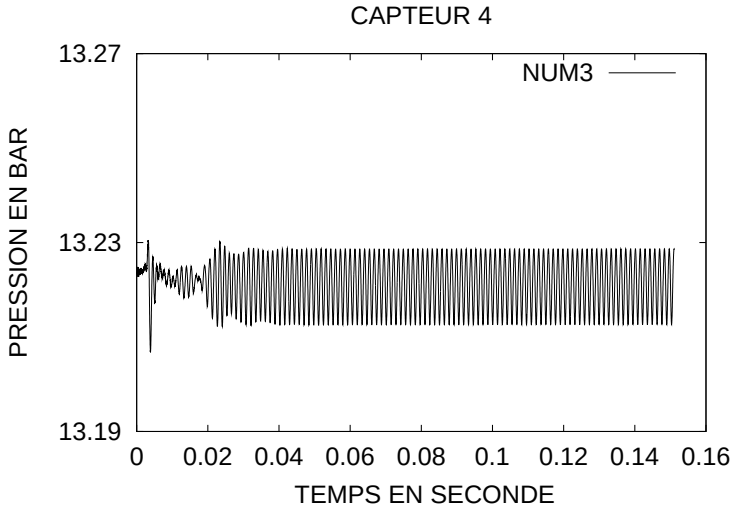




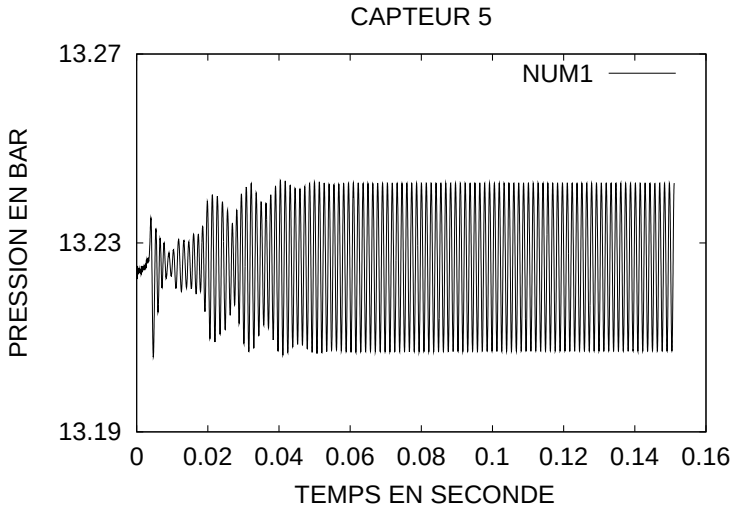
SIGNAL DU CAPTEUR 4 - C3C

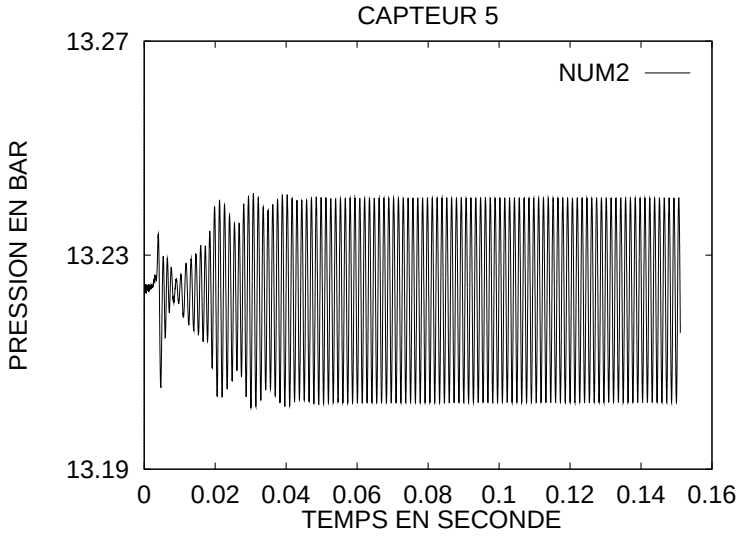


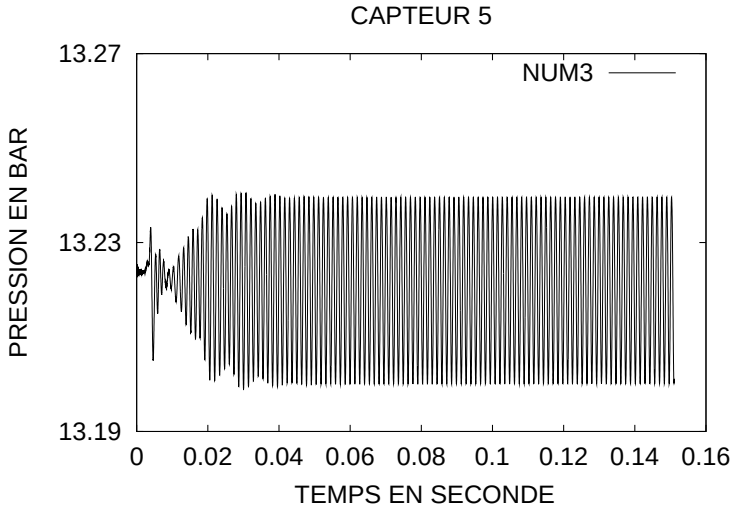




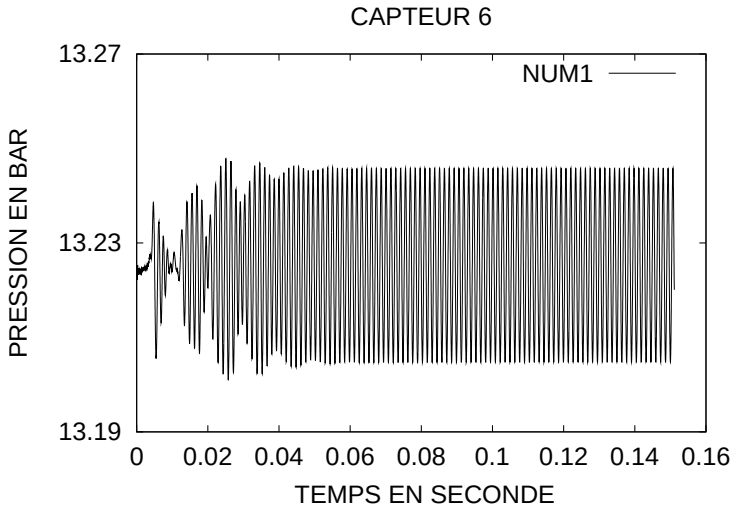
SIGNAL DU CAPTEUR 5 - C3C

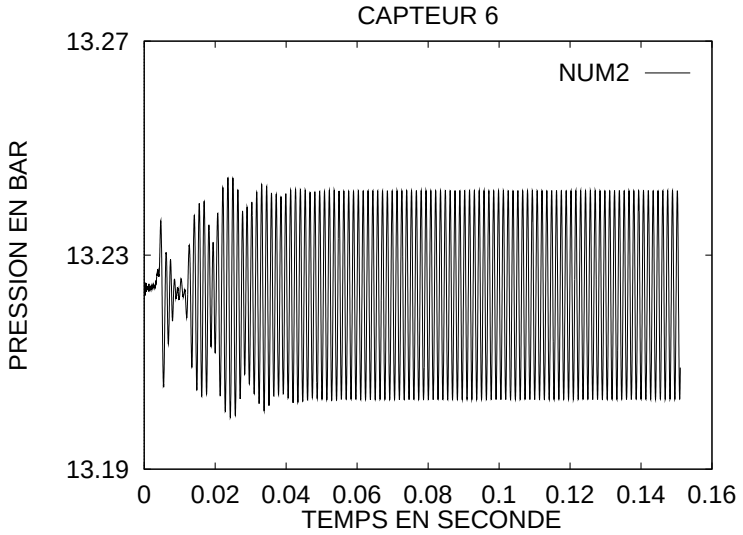


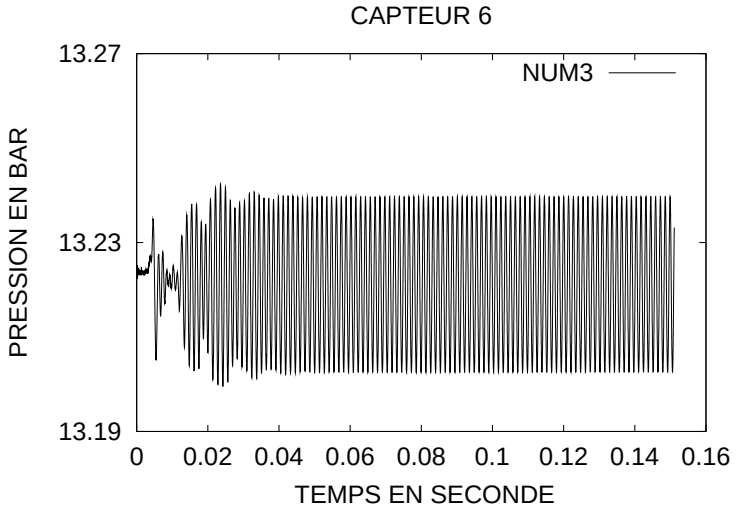




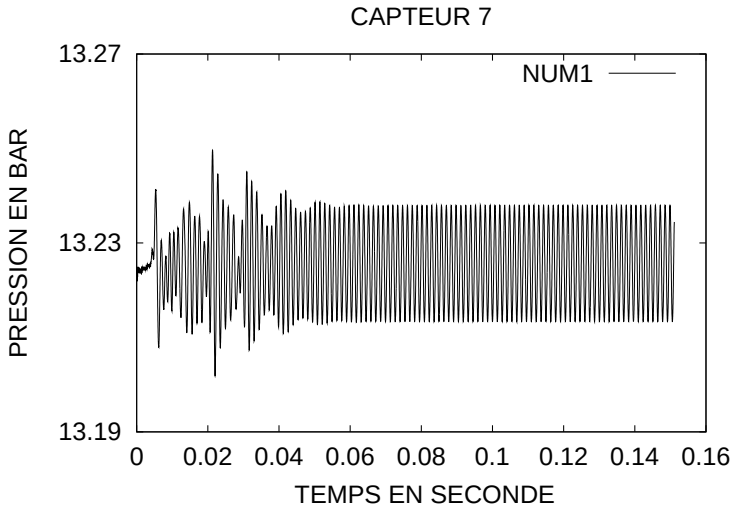
SIGNAL DU CAPTEUR 6 - C3C

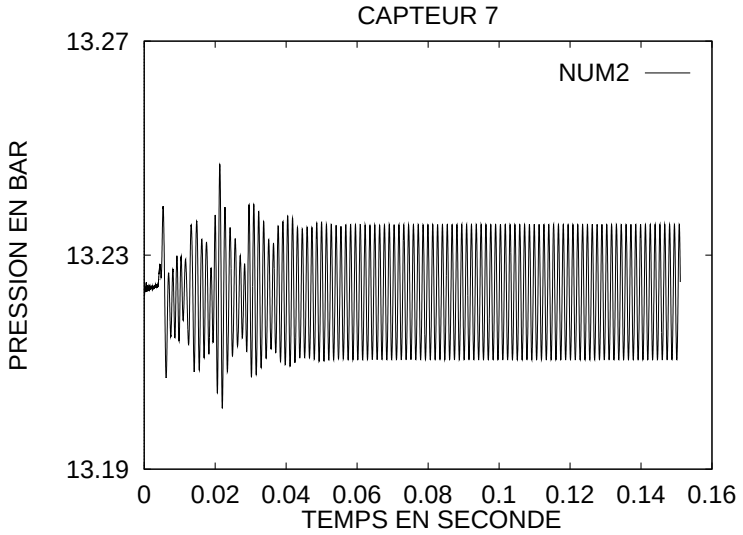


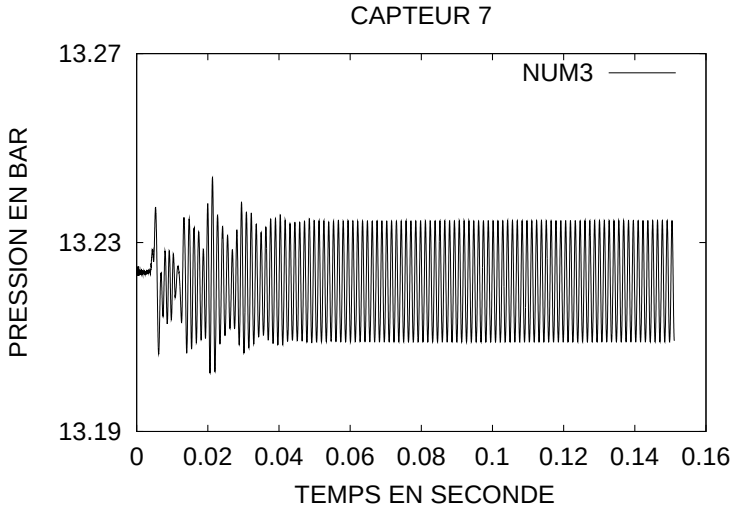




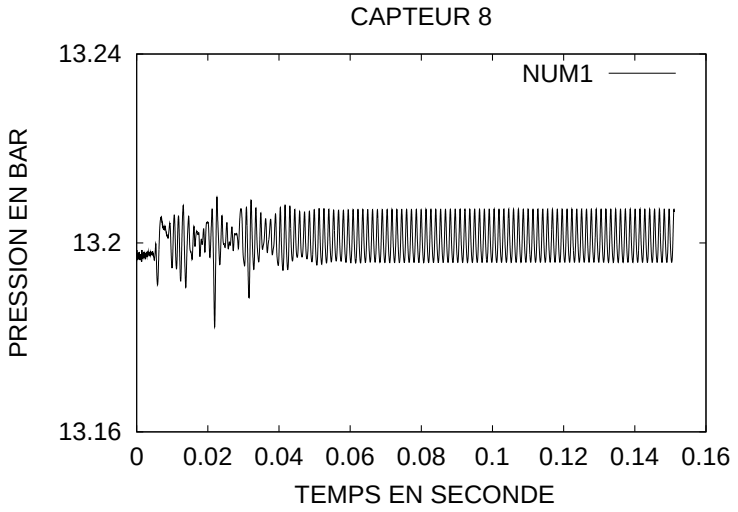
SIGNAL DU CAPTEUR 7 - C3C

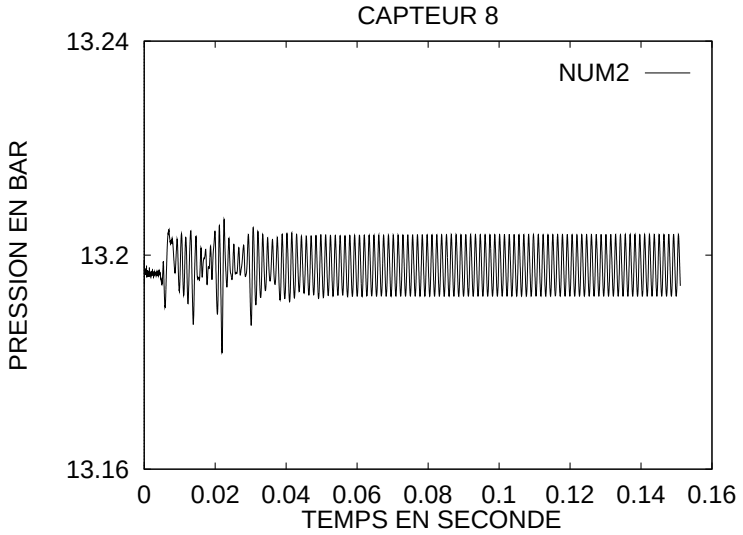


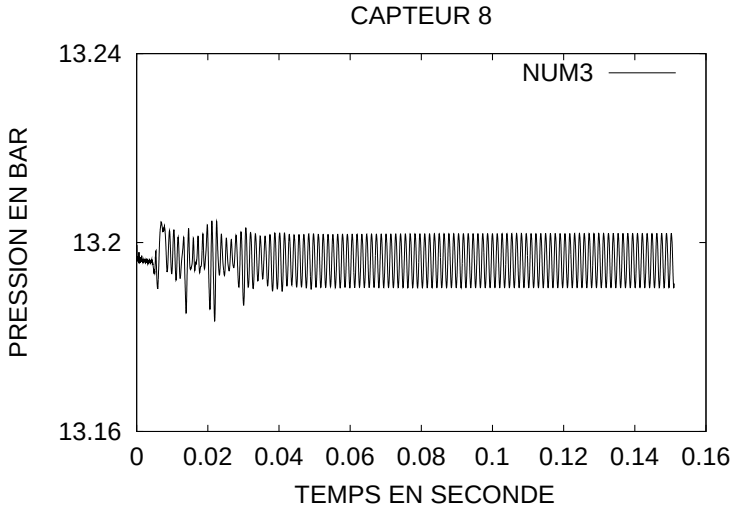




SIGNAL DU CAPTEUR 8 - C3C







3.2.3 Sur le maillage C3B (14 726 points)

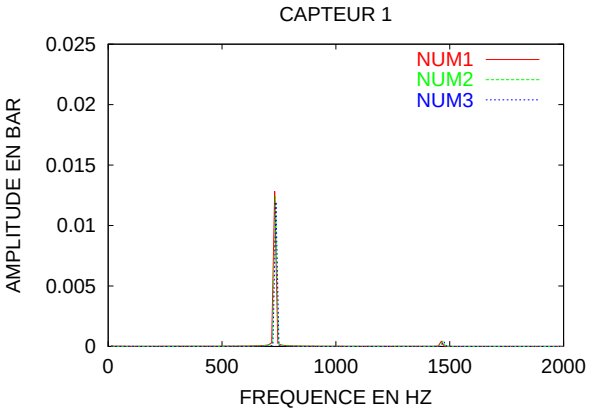
Le maillage C3B est un maillage intermédiaire entre les maillages C3C et C3D. Il sert également de base au maillage C3E.

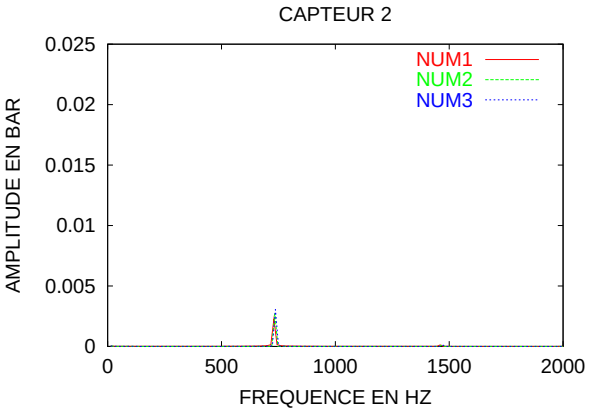
Maillage C3B - Pression moyenne (bar)						
CAPTEURS	NUM1	NUM2	NUM3	MOY.	Δ	E.R. ($^0/_{00}$)
CAP1	13.40	13.40	13.40	13.40	0.00	0.0
CAP2	13.23	13.23	13.23	13.23	0.00	0.0
CAP3	13.23	13.23	13.23	13.23	0.00	0.0
CAP4	13.23	13.23	13.23	13.23	0.00	0.0
CAP5	13.23	13.23	13.23	13.23	0.00	0.0
CAP6	13.23	13.23	13.23	13.23	0.00	0.0
CAP7	13.23	13.23	13.23	13.23	0.00	0.0
CAP8	13.20	13.20	13.20	13.20	0.00	0.0

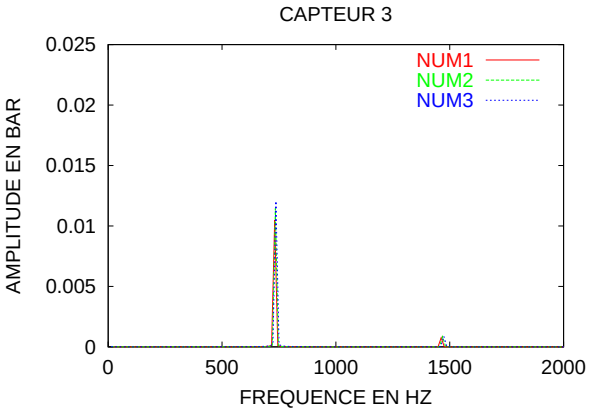
Maillage C3B - Amplitude de la pression (mbar)						
CAPTEURS	NUM1	NUM2	NUM3	MOY.	Δ	E.R. ($^0/_0$)
CAP1	12.8	12.4	12.0	12.4	0.8	6.5
CAP2	2.2	2.7	3.1	2.7	0.4	14.8
CAP3	10.5	11.4	12.0	11.3	1.3	11.6
CAP4	12.4	13.0	13.2	12.9	0.8	6.2
CAP5	19.8	20.6	21.1	20.5	1.3	6.3
CAP6	20.1	19.0	18.0	19.0	2.1	11.0
CAP7	12.4	13.3	14.0	13.2	1.6	12.1
CAP8	7.0	7.2	7.3	7.2	0.3	4.2

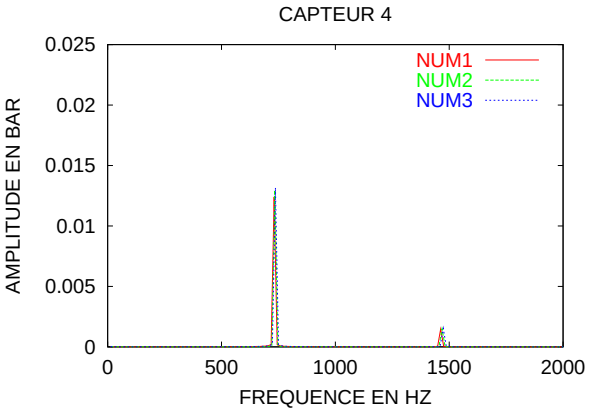
Maillage C3B - fréquence $\pm$ 14 Hz						
CAPTEURS	NUM1	NUM2	NUM3	MOY.	Δ	E.R. ($^0/_0$)
CAP1	731	734	737	734	6	0.8
CAP2	730	734	737	734	7	1.0
CAP3	731	734	737	734	6	0.8
CAP4	731	734	737	734	6	0.8
CAP5	731	734	737	734	6	0.8
CAP6	731	734	737	734	6	0.8
CAP7	731	734	737	734	6	0.8
CAP8	731	734	737	734	6	0.8

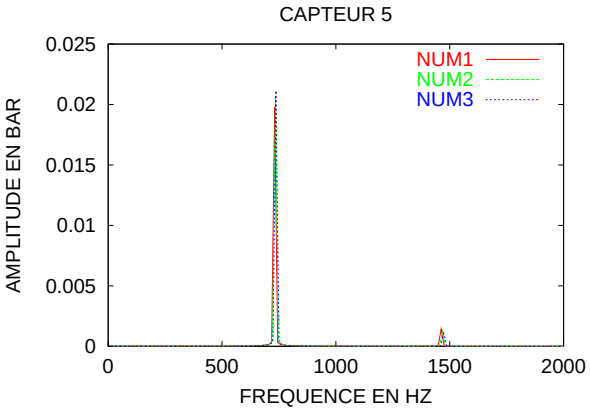
ANALYSE SPECTRALE DES CAPTEURS DE PRESSION - C3B

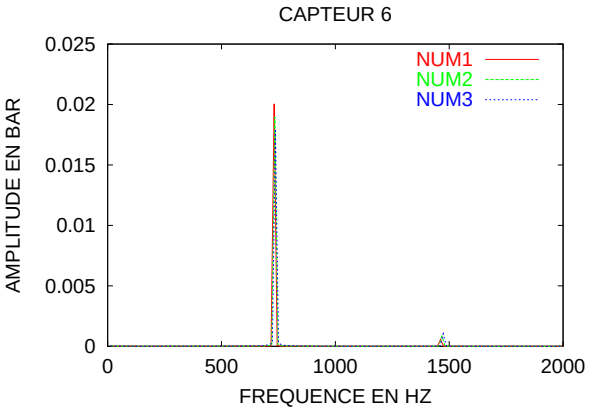


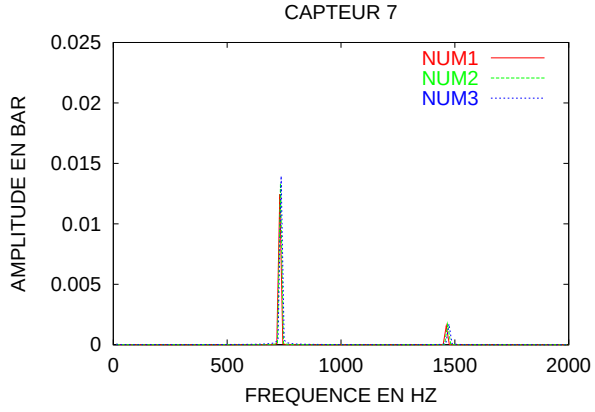


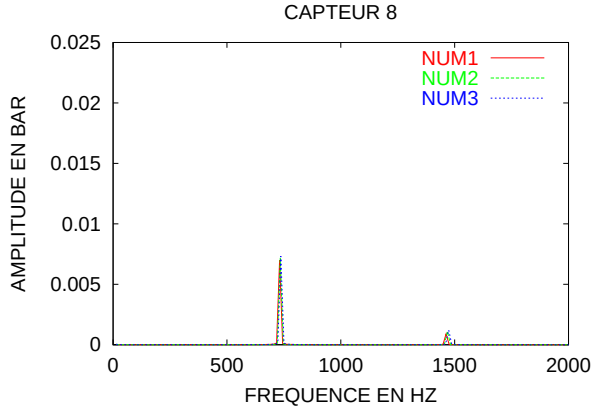




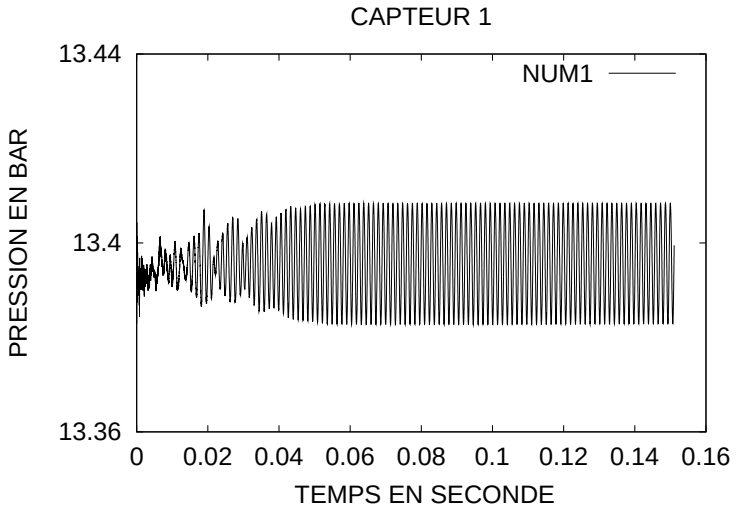


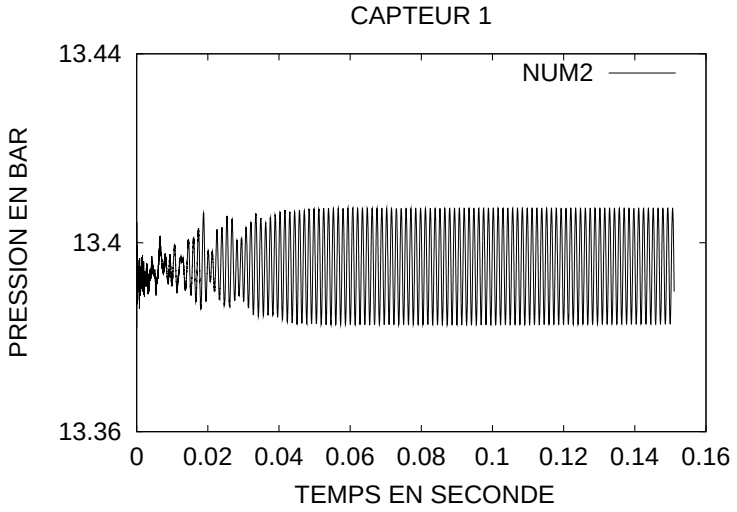


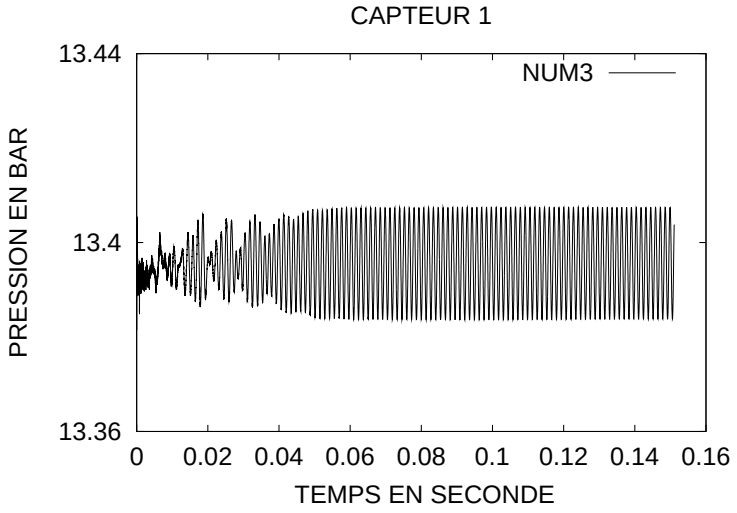




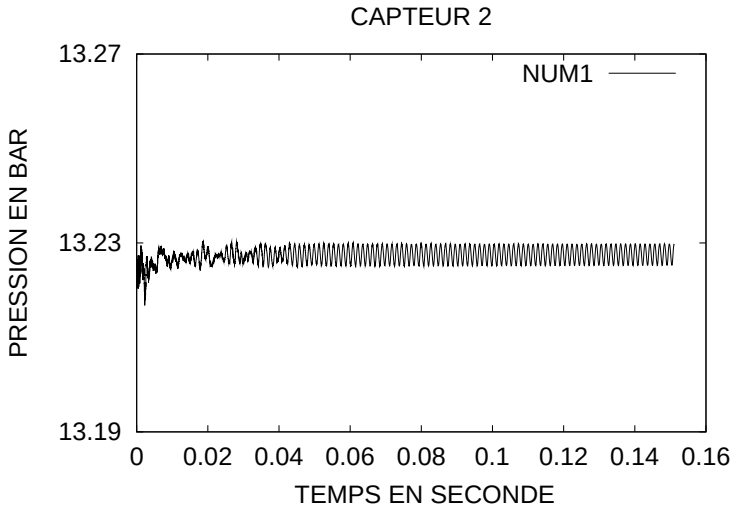
SIGNAL DU CAPTEUR 1 - C3B

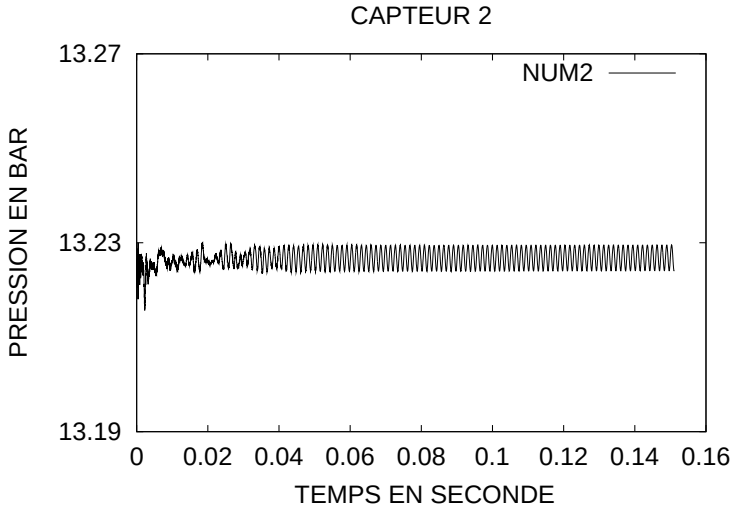


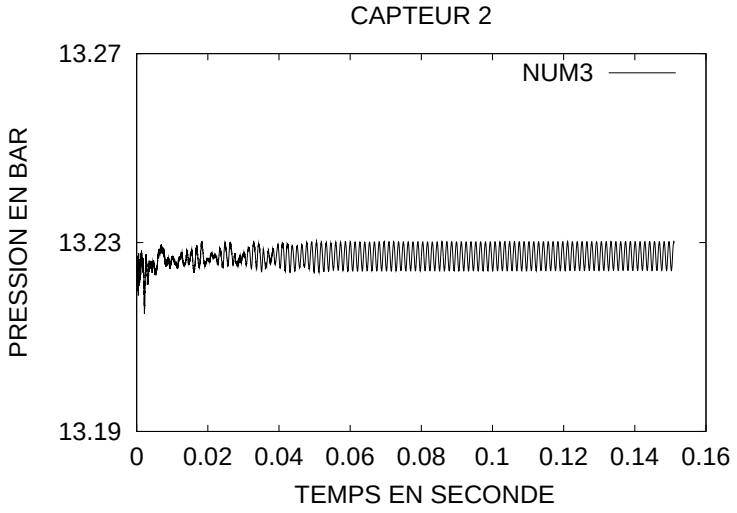




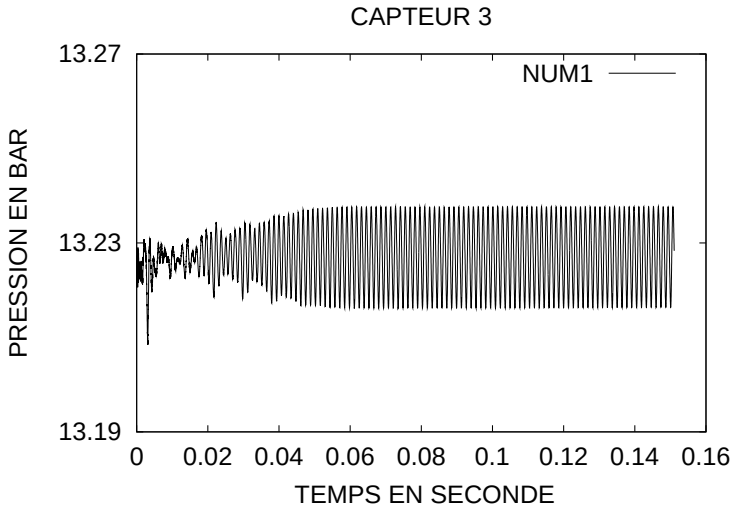
SIGNAL DU CAPTEUR 2 - C3B

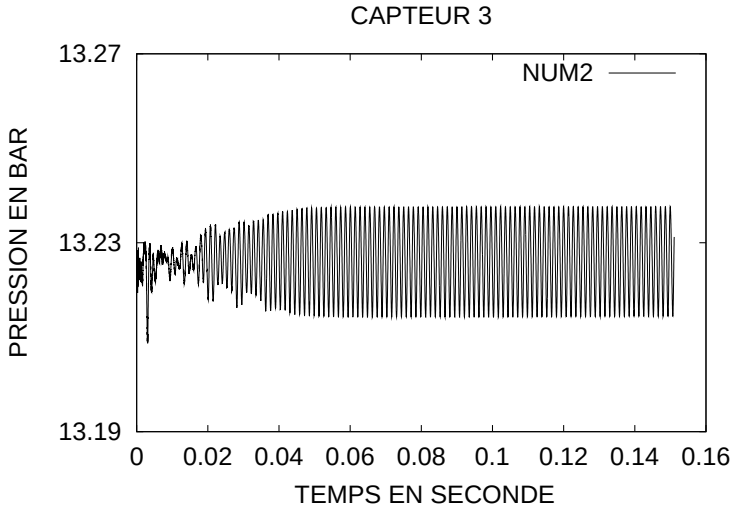


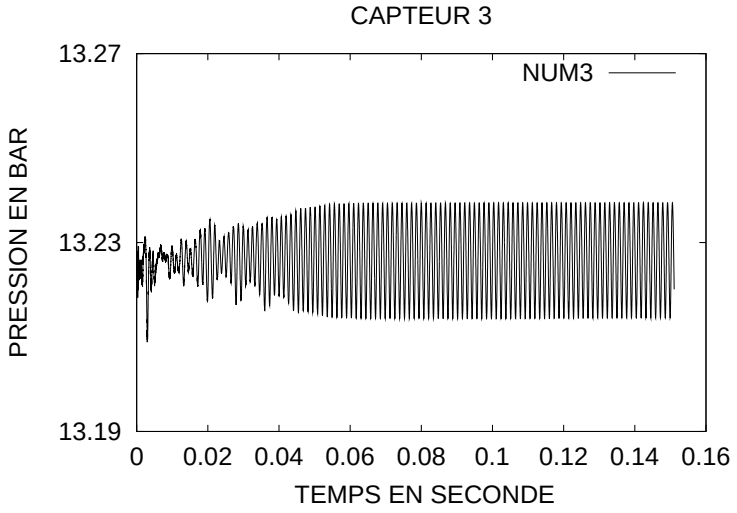




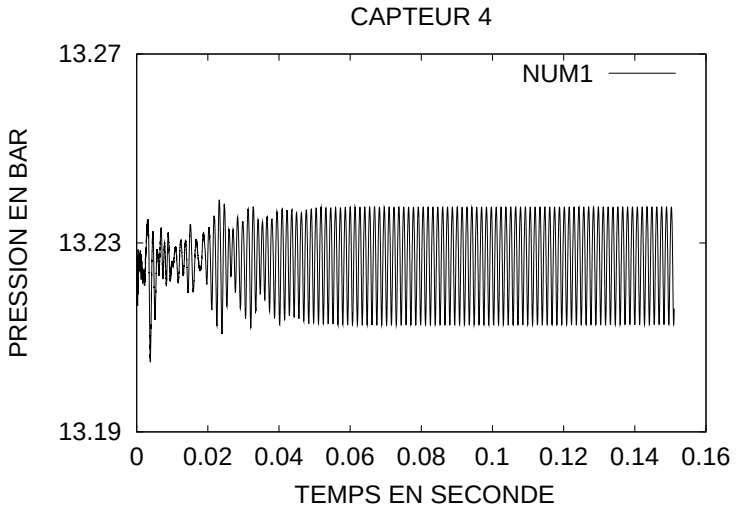
SIGNAL DU CAPTEUR 3 - C3B

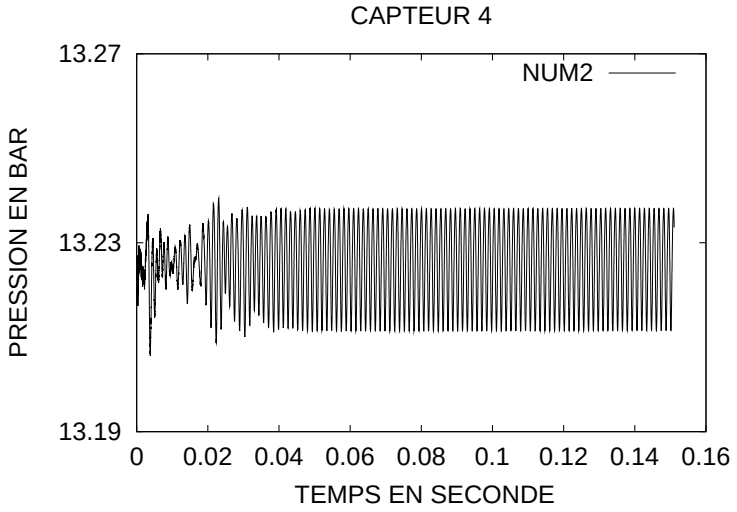


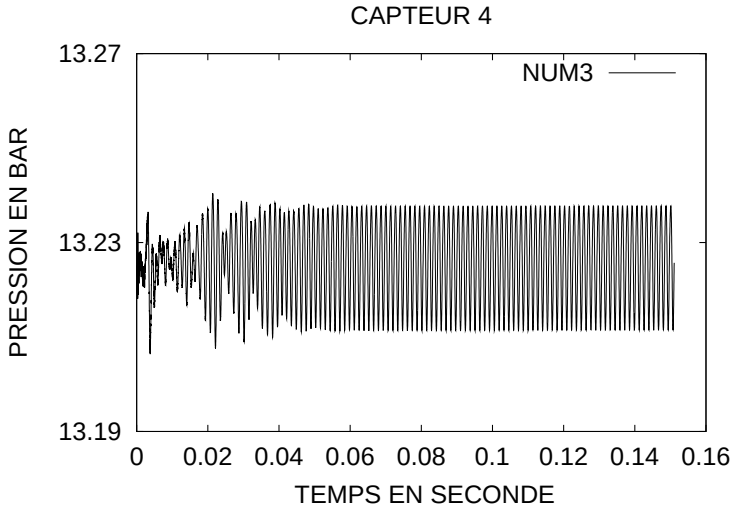




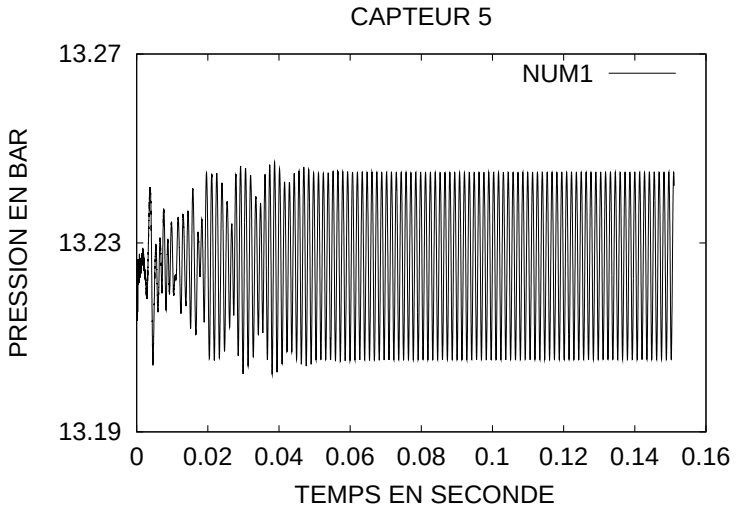
SIGNAL DU CAPTEUR 4 - C3B

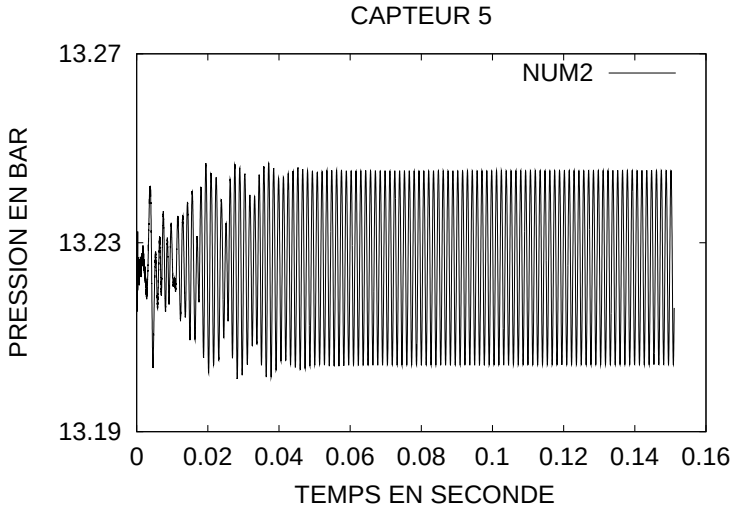


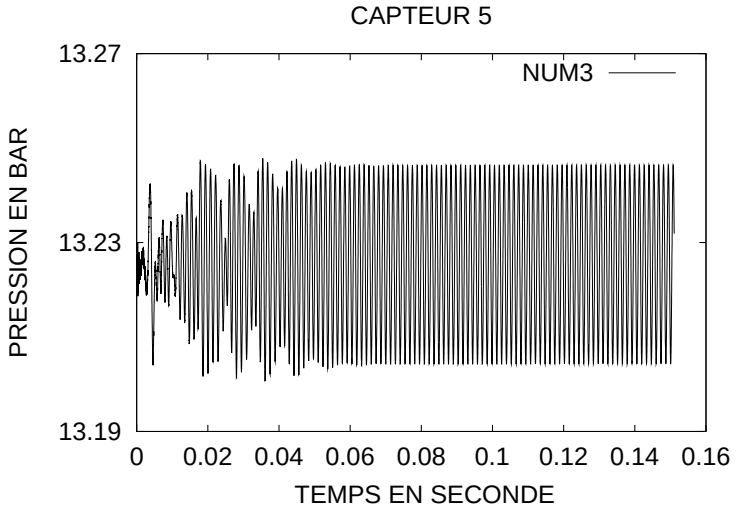




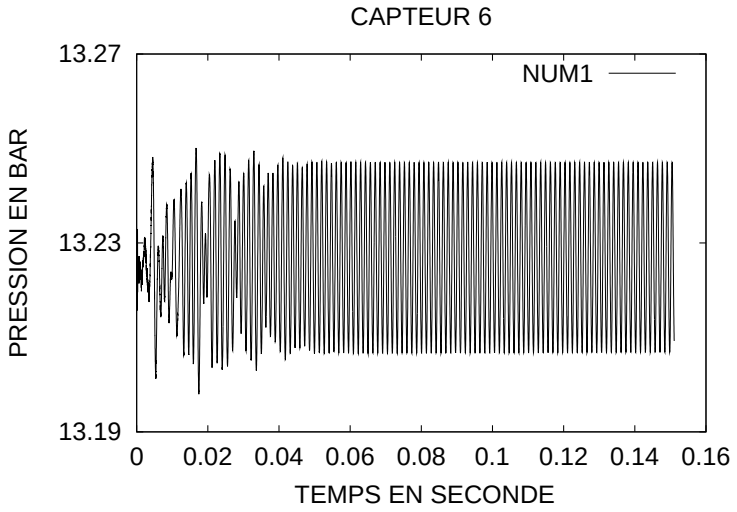
SIGNAL DU CAPTEUR 5 - C3B

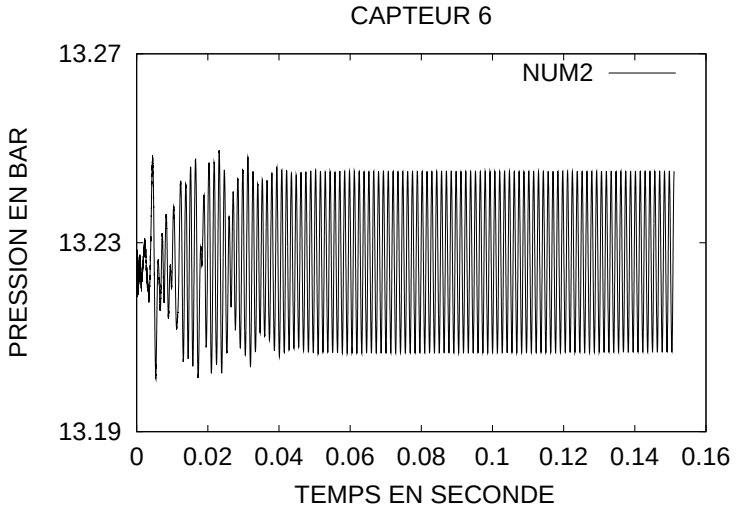


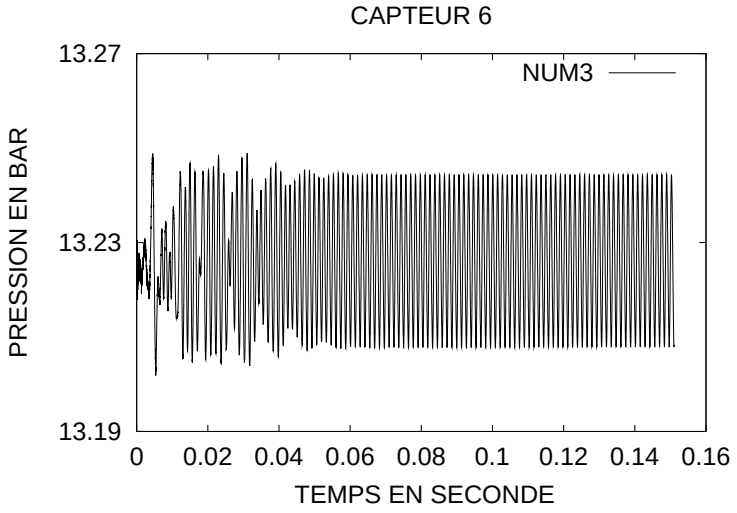




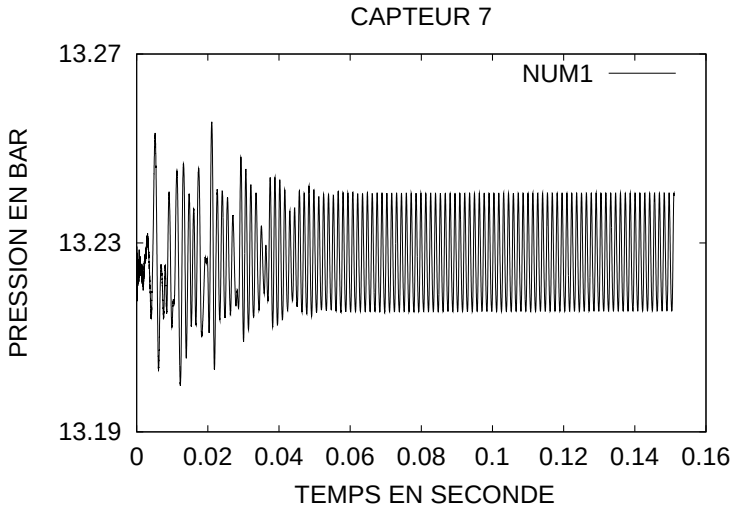
SIGNAL DU CAPTEUR 6 - C3B

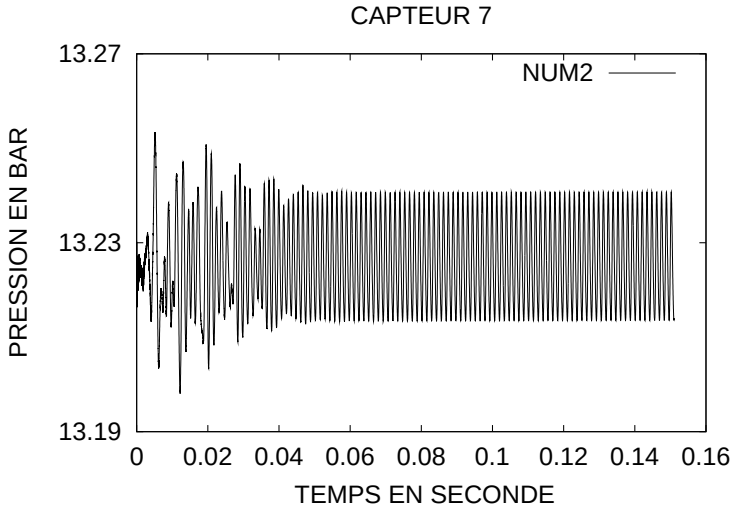


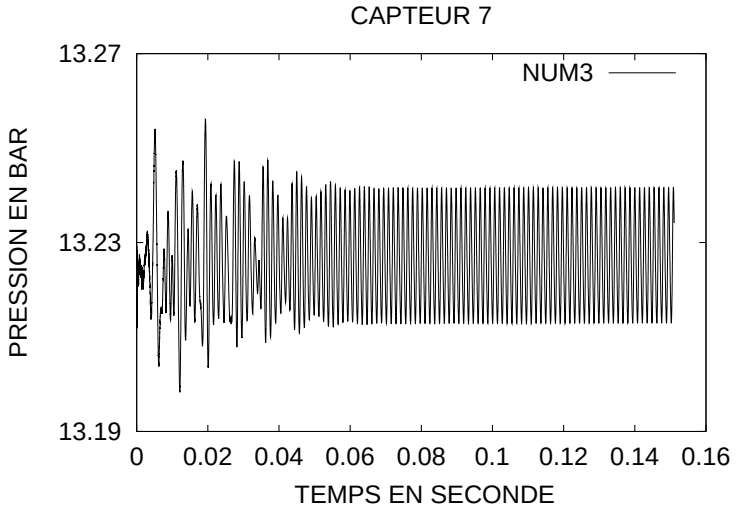




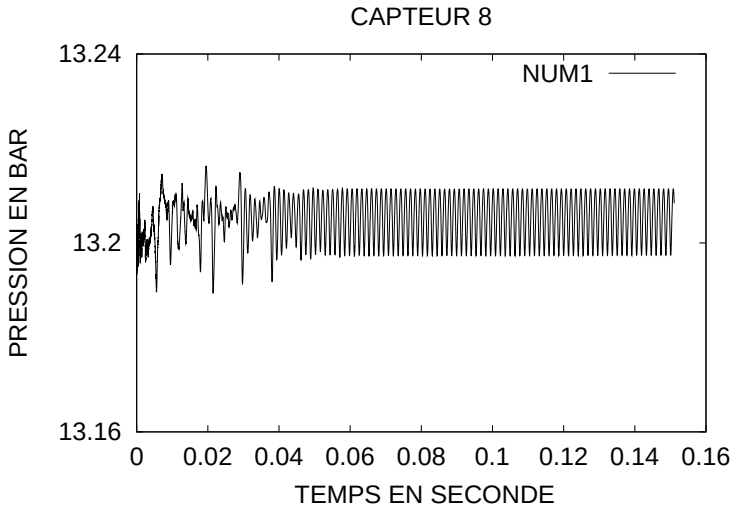
SIGNAL DU CAPTEUR 7 - C3B

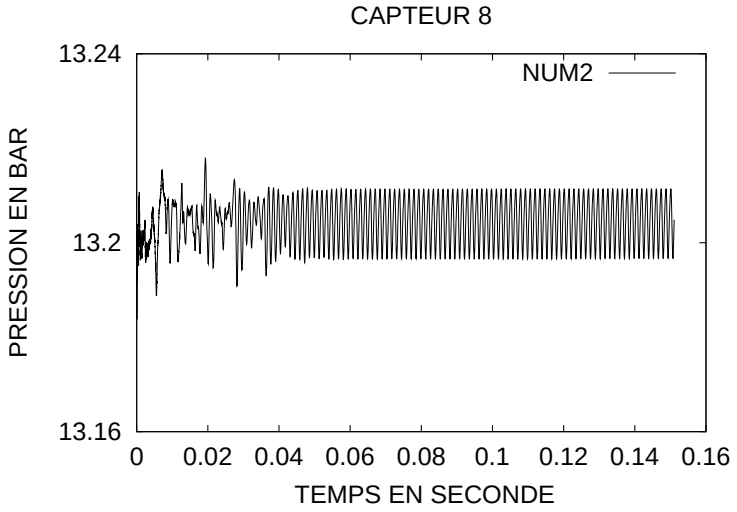


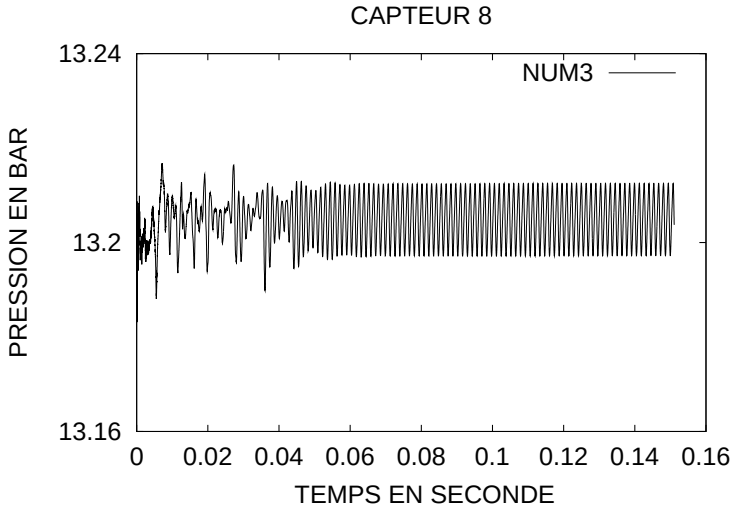




SIGNAL DU CAPTEUR 8 - C3B







3.2.4 Sur le maillage C3D (22 264 points)

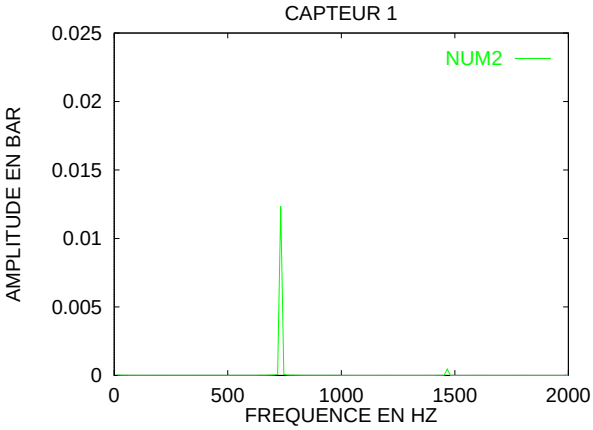
Le maillage C3D se déduit du maillage C3C par un doublement du nombre de points selon l'axe longitudinal (x).

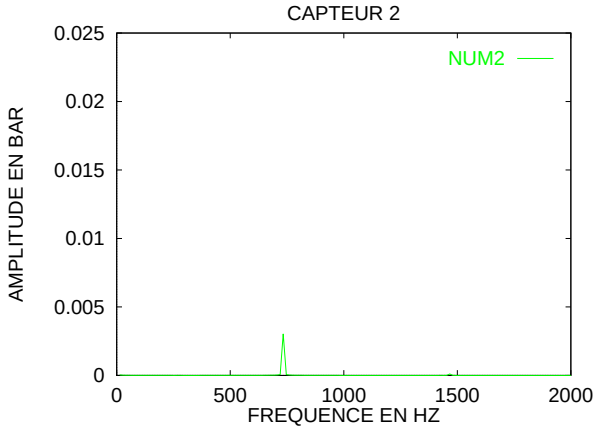
Maillage C3D - Pression moyenne (bar)	
CAPTEURS	NUM2
CAP1	13.40
CAP2	13.23
CAP3	13.23
CAP4	13.23
CAP5	13.23
CAP6	13.23
CAP7	13.23
CAP8	13.21

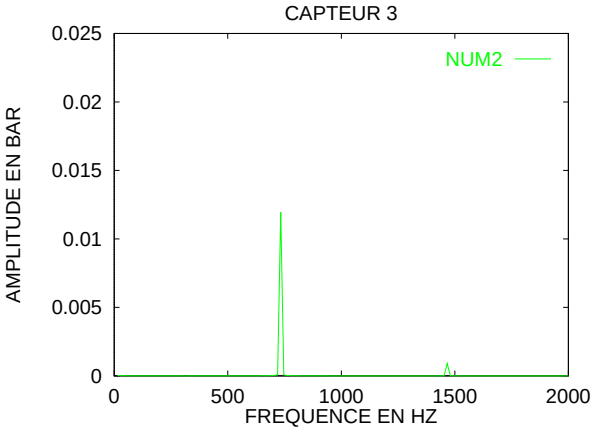
Maillage C3D - Amplitude de la pression (mbar)	
CAPTEURS	NUM2
CAP1	12.3
CAP2	3.0
CAP3	12.0
CAP4	13.4
CAP5	20.9
CAP6	18.5
CAP7	13.4
CAP8	7.5

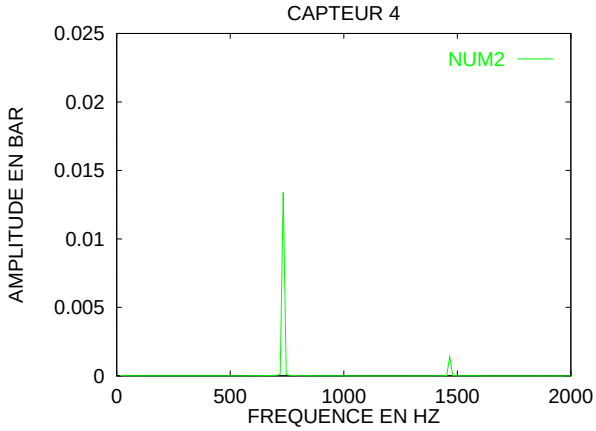
Maillage C3D - fréquence ± 14 Hz	
CAPTEURS	NUM2
CAP1	733
CAP2	733
CAP3	733
CAP4	733
CAP5	733
CAP6	733
CAP7	733
CAP8	733

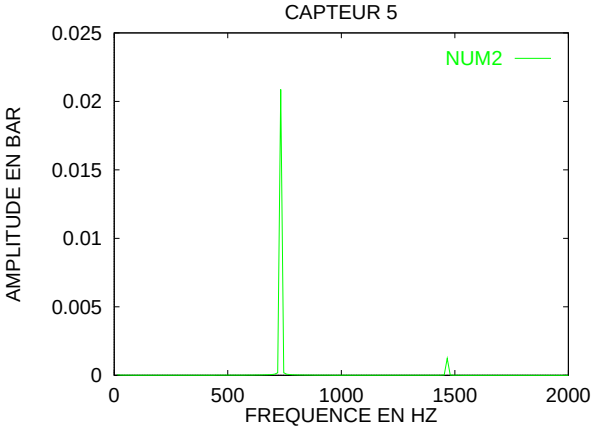
ANALYSE SPECTRALE DES CAPTEURS DE PRESSION - C3D

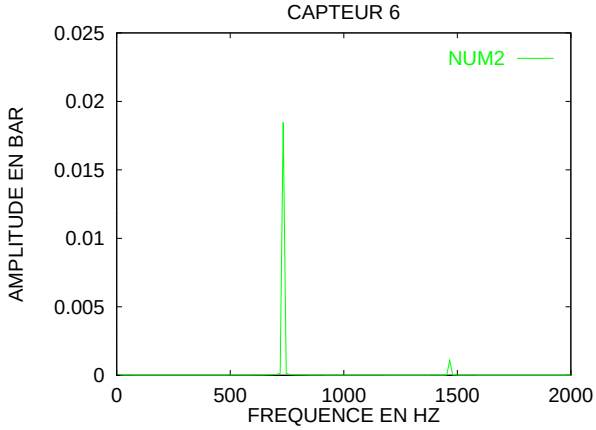


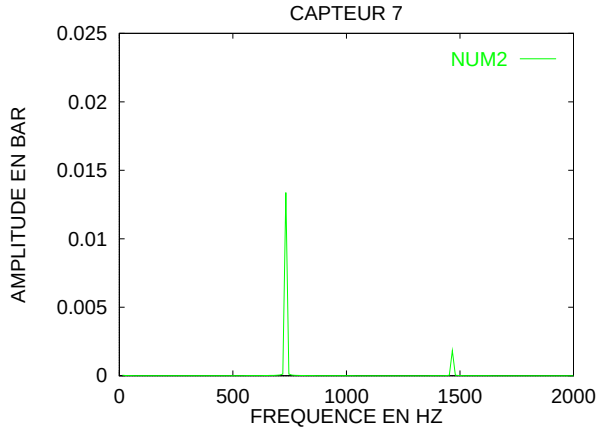


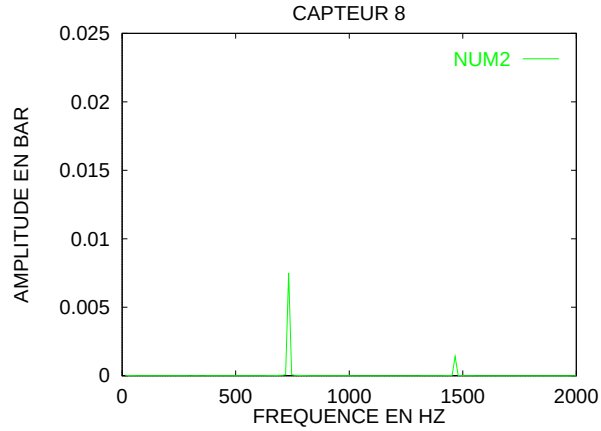




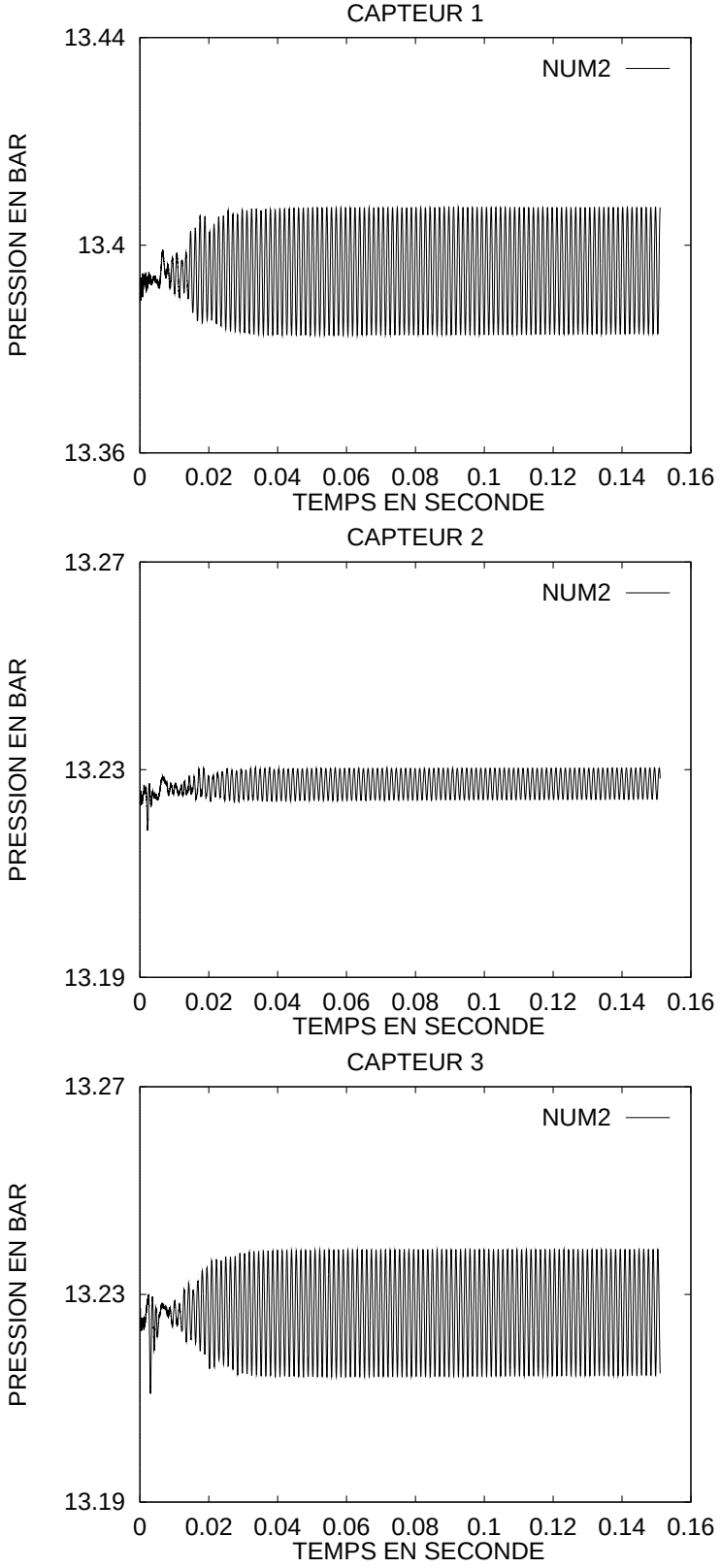




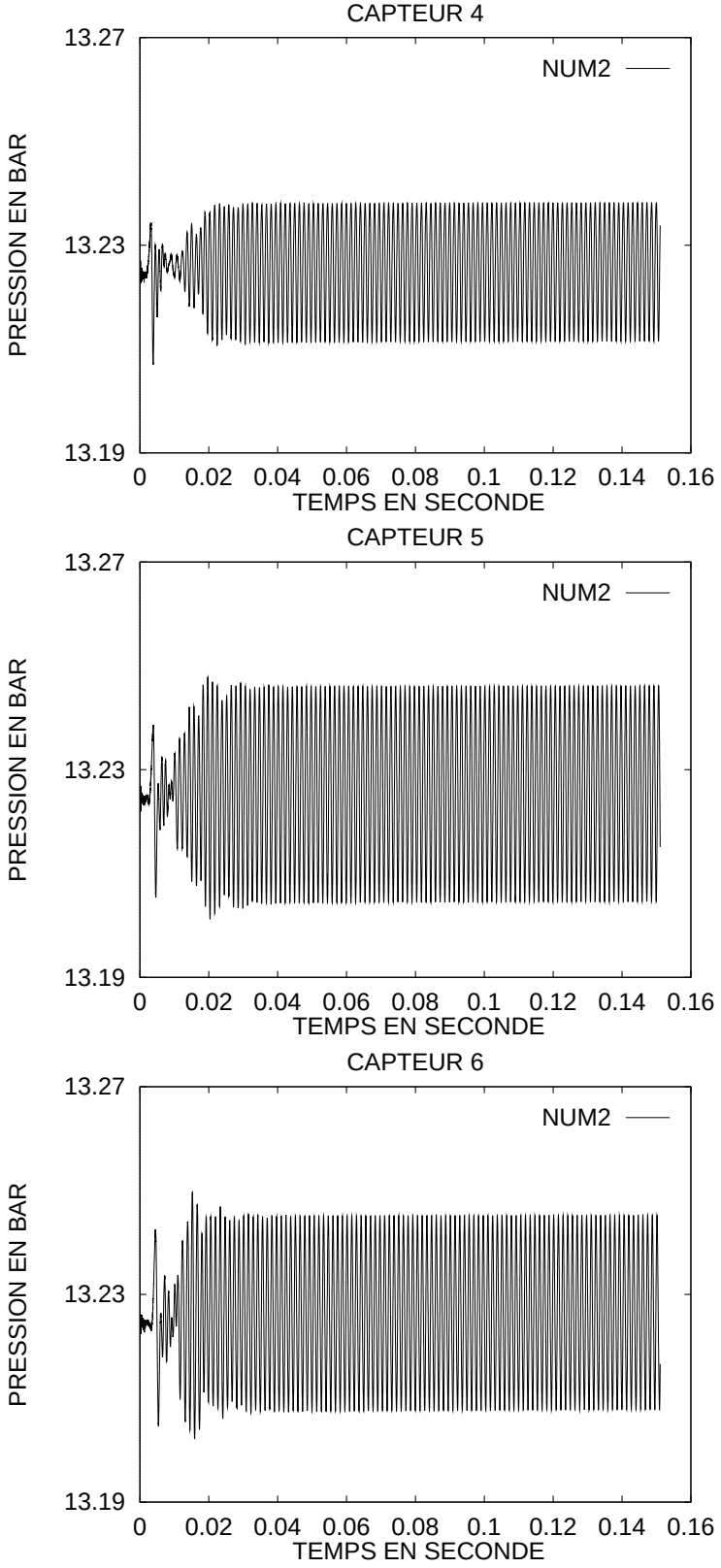




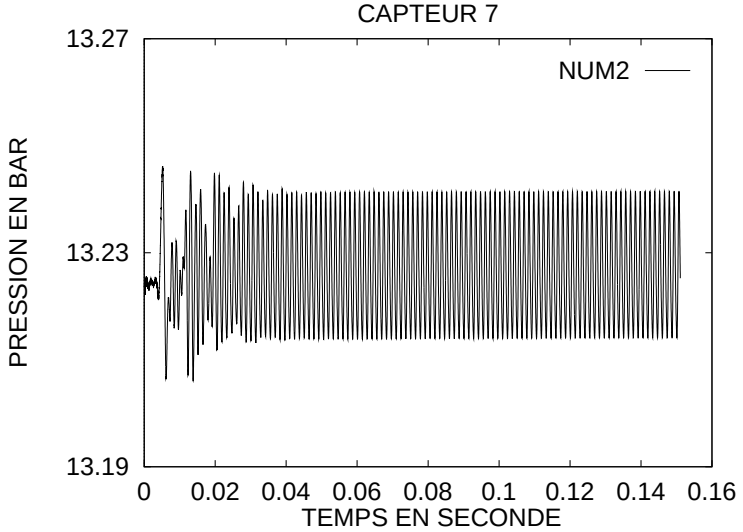
SIGNAL TEMPOREL - CATEURS 1,2,3 - C3D

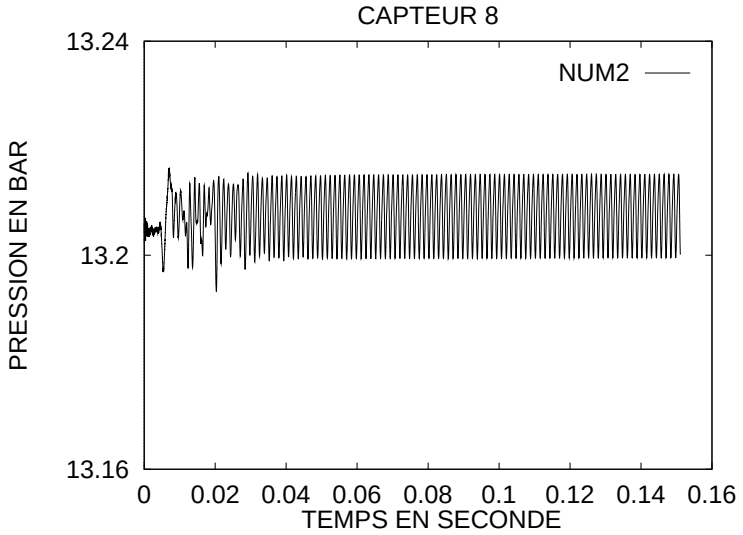


SIGNAL TEMPOREL - CAPTEURS 4,5,6 - C3D



SIGNAL TEMPOREL - CAPTEURS 7,8 - C3D





3.2.5 Sur le maillage C3E (29 452 points)

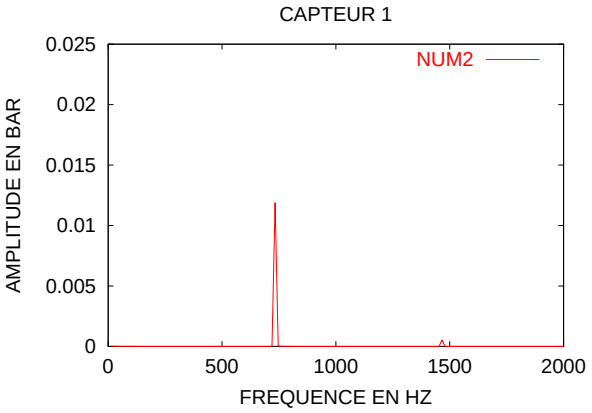
Le maillage C3E se déduit du maillage C3B par un doublement du nombre de points selon l'axe transversal (y).

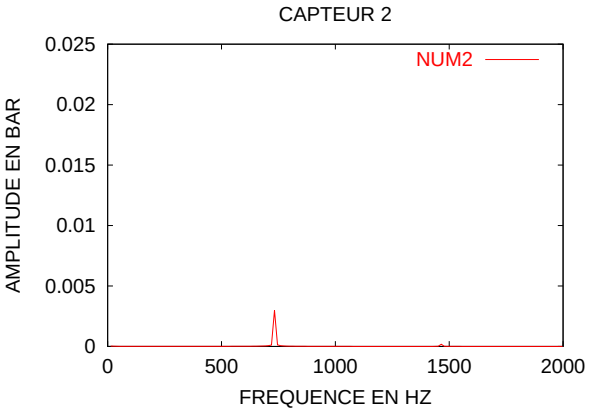
Maillage C3E - Pression moyenne (bar)	
CAPTEURS	C3E
CAP1	13.40
CAP2	13.23
CAP3	13.23
CAP4	13.23
CAP5	13.23
CAP6	13.23
CAP7	13.23
CAP8	13.21

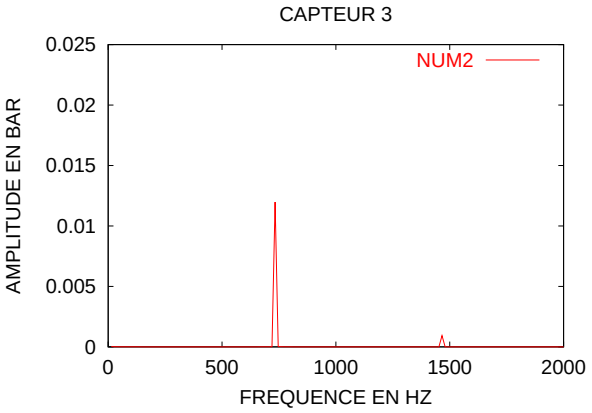
Maillage C3E - Amplitude de la pression (mbar)	
CAPTEURS	NUM2
CAP1	11.9
CAP2	3.0
CAP3	12.0
CAP4	13.9
CAP5	21.1
CAP6	18.8
CAP7	13.6
CAP8	6.6

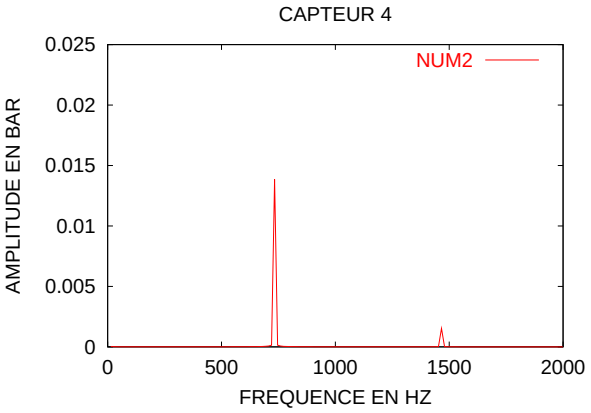
Maillage C3E - fréquence ± 14 Hz	
CAPTEURS	NUM2
CAP1	733
CAP2	733
CAP3	733
CAP4	733
CAP5	733
CAP6	733
CAP7	733
CAP8	733

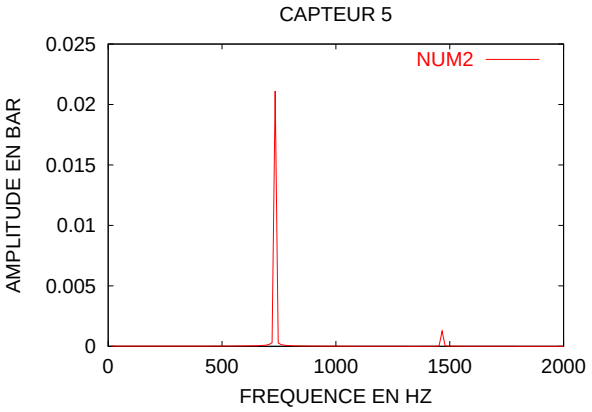
ANALYSE SPECTRALE DES CAPTEURS DE PRESSION - C3E

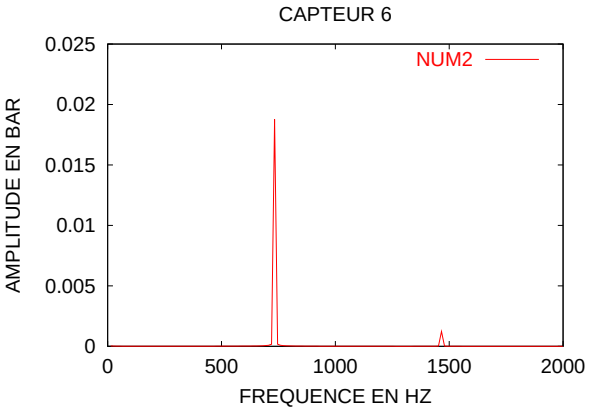


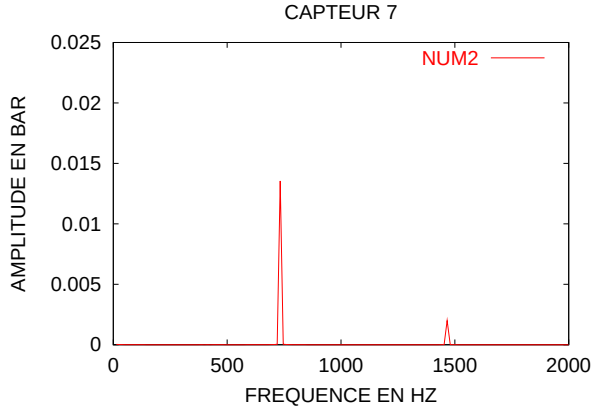


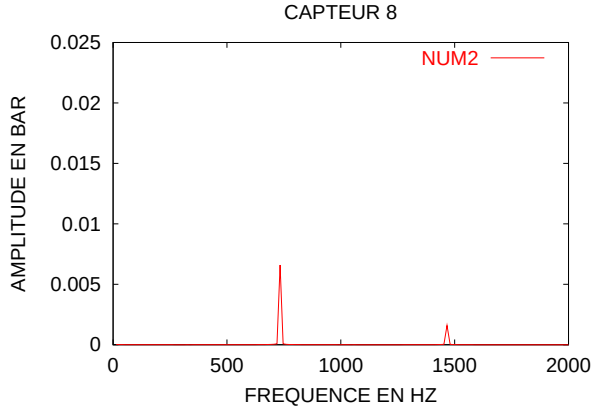




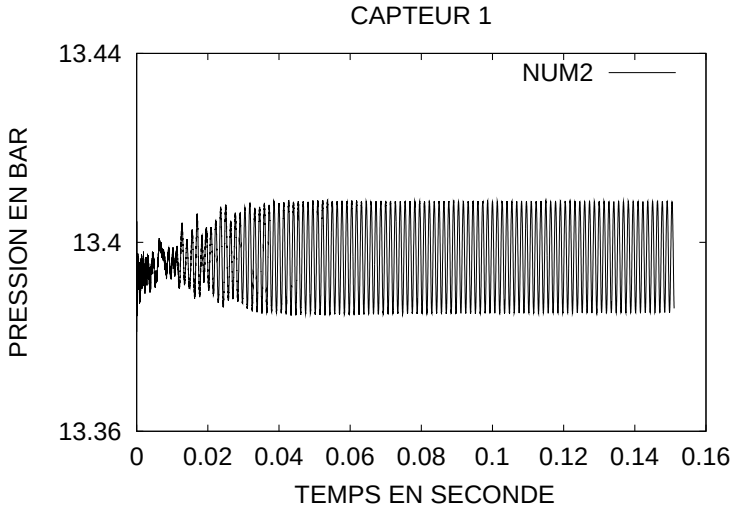


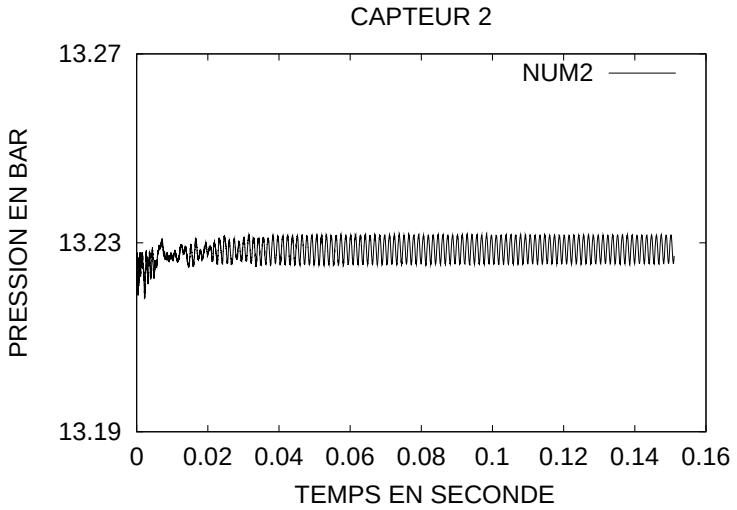


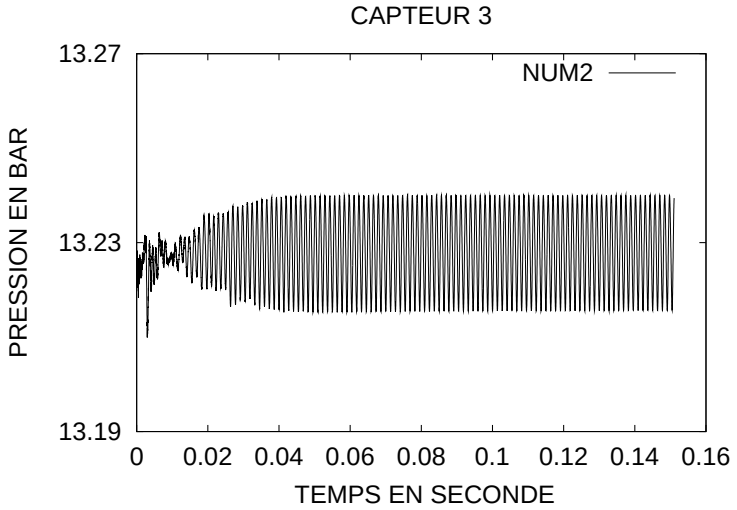




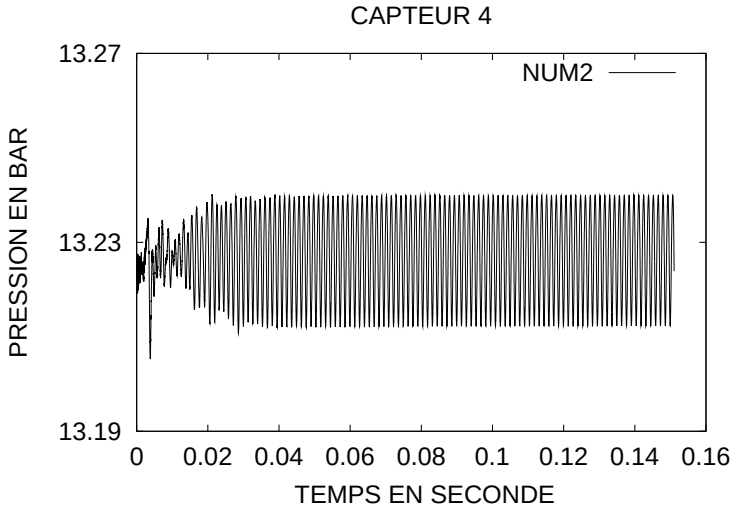
SIGNAL TEMPOREL - CATEURS 1,2,3 - C3E

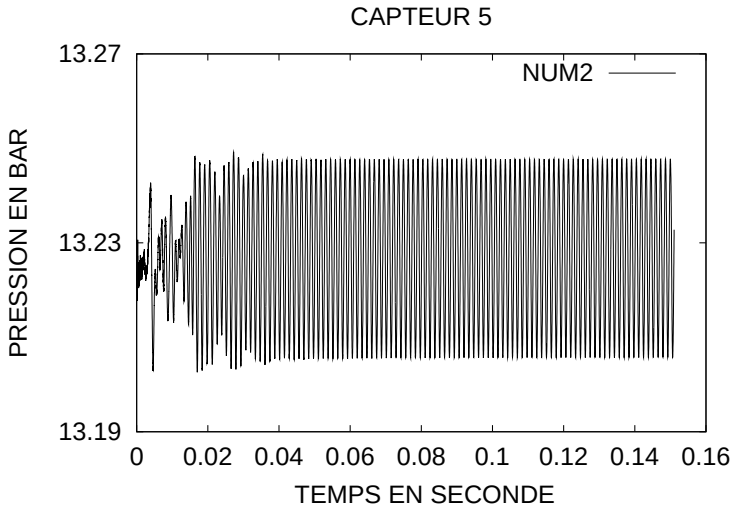


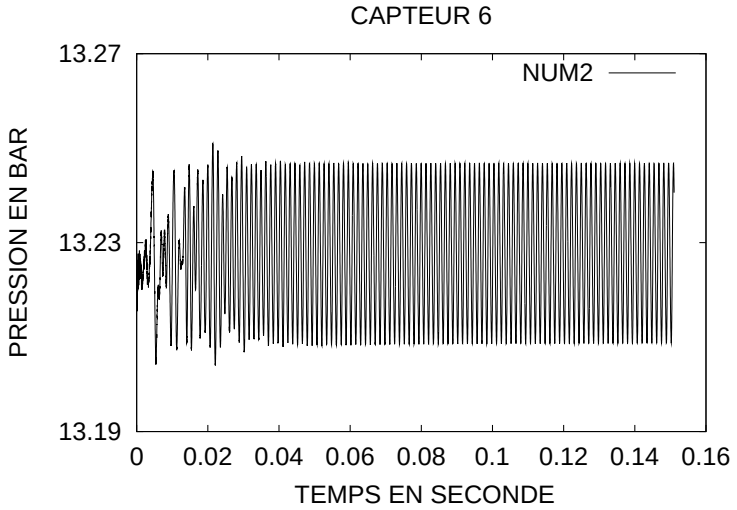




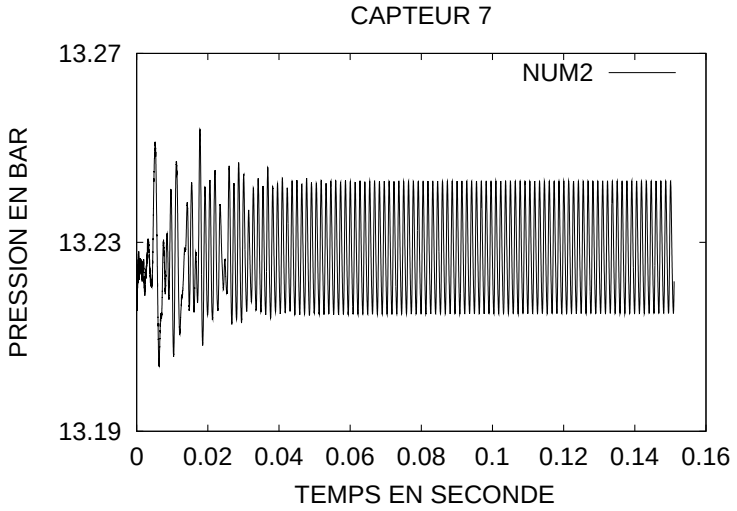
SIGNAL TEMPOREL - CAPTEURS 4,5,6 - C3E

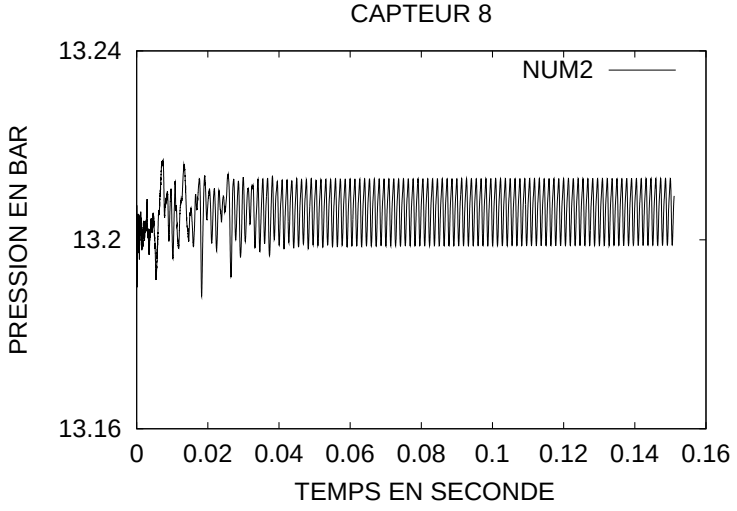






SIGNAL TEMPOREL - CAPTEURS 7,8 - C3E





3.3 Exploitation

Sous ce paragraphe, nous exploitons les résultats obtenus en traduisant les tableaux chiffrés des capteurs de pression du paragraphe précédent. Très vite, nous constatons que ces mesures ponctuelles et en périphérie du propulseurs, ne peuvent nous informer sur la nature de l'écoulement que d'une manière très grossière. C'est pourquoi, nous nous appuierons sur d'autres mesures, beaucoup plus globales comme l'animation de la vorticité de l'écoulement (sur CRDOM), comme une cartographie de l'amplitude maximale en chaque point du propulseur donnant l'aspect bidimensionnel de l'installation des modes acoustiques, ainsi que la mesure de l'énergie totale.

Ce paragraphe est décomposé en 2 parties. Dans la première partie, nous travaillons à maillage fixé et nous nous intéressons aux conséquences sur les résultats que peuvent engendrer une modification du schéma numérique (erreurs d'ordre>2). Dans une seconde partie, nous regardons, pour un schéma numérique donné, l'évolution des mesures en fonction de la finesse du maillage.

3.3.1 Selon la configuration du $\beta\gamma$ schéma

Cette partie ne concerne que les trois maillages les plus grossiers: C3A, C3B et C3C. En règle générale, sachant que nous avons une incertitude de 14Hz pour tous les calculs effectués, l'estimation de la fréquence acoustique paraît valide pour les trois essais numériques (NUM1 à NUM3) effectués sur un maillage donné. Il en est de même pour la pression moyenne de chaque capteur puisque l'on observe seulement une variation toujours inférieure au $1^0/_{00}$!
Par contre, si l'on observe l'amplitude de la pression sur chaque capteur ou l'énergie totale, on peut constater, à maillage fixé, de très fortes différences en niveaux en fonction de l'essai numérique réalisé (NUM1: "retard", NUM2:"Ordre 3", NUM3:"avance").

- C3A ($243 \times 24 = 5\ 566$ points)
  C'est le cas pour le maillage C3A où les mesures ne sont plus significatives puisqu'elles peuvent varier du simple au quadruple (FIG. 3-F: CAP3). L'énergie totale est très distincte d'une simulation à une autre (FIG. 3-I). En observant le détachement tourbillonnaire, on s'aperçoit qu'il se fait en fond de cavité (FIG. 3-L) et qu'il est très sensible à l'erreur d'approximation du calcul (déphasage et taille des tourbillons).
- C3C ($243 \times 47 = 11\ 132$ points)
  La mesure de l'amplitude de la pression sur chacun des capteurs devient significative mais peut être accompagnée d'une erreur relative assez importante (FIG. 3-G: CAP4 avec $\sim 33^0/_0$). L'énergie totale reste très distincte (FIG. 3-J). Le détachement tourbillonnaire s'effectue à la moitié de la cavité de la chambre de combustion. Un déphasage peut être distingué à la fin de l'animation. Ce déphasage corrobore une advection plus ou moins excessive selon la configuration du $\beta\gamma$ schéma utilisé (FIG. 3-M).
- C3B ($399 \times 38 = 14\ 726$ points)
  Sur le maillage C3B, les capteurs de l'amplitude de la pression en fonction du $\beta\gamma$

schéma utilisé donnent une convergence des mesures avec une erreur relative maximale de moins de 15 $^0/_0$ (FIG. 3-H: CAP2). L'énergie totale est plus ciblée (FIG. 3-K). Le détachement tourbillonnaire s'effectue au tiers de la cavité de la chambre de combustion et un net déphasage apparaît à la fin de l'animation (FIG. 3-N). Ce déphasage corrobore toujours l'erreur dispersive linéaire induite par le $\beta\gamma$ schéma.

En conséquence, de tous les maillages dont la solution a été déstabilisée par le $\beta\gamma$ schéma, le maillage C3B (le plus fin des trois) est celui qui est logiquement le moins sensible aux erreurs numériques. Néanmoins, le déphasage des tourbillons selon le $\beta\gamma$ schéma paraît curieux. En effet, on ne peut s'empêcher de remarquer que le déphasage est plus important sur le maillage C3B (FIG. 3-N) que sur le maillage C3C (FIG. 3-M). Or, le maillage C3B est plus raffiné en x (direction principale de l'advection des tourbillons) que ne l'est le maillage C3C. L'erreur dispersive devrait être moindre mais nous ne sommes pas dans une logique linéaire et monodimensionnelle et la finesse du maillage en y est à prendre en compte comme nous allons le voir par la suite!... Enfin, le maillage C3A donne des résultats tellement différents d'une simulation à une autre qu'ils ne peuvent être crédibles. Celà explique aussi pourquoi chaque laboratoire a trouvé sa solution sur ce maillage (ONERA, SNPE)... En effet, rappelons que pour une dissipation classique du schéma de Roe ($\beta\gamma = \frac{1}{2}$) nous avons trouvé une solution stationnaire (servant à l'initialisation de tous les calculs) comme la SNPE et ce n'est qu'en diminuant la viscosité artificielle ($\beta\gamma = \frac{1}{10}$) que nous avons trouvé un phénomène instationnaire comme l'ONERA.

Mesures des capteurs à maillage fixé selon le $\beta\gamma$ schéma.

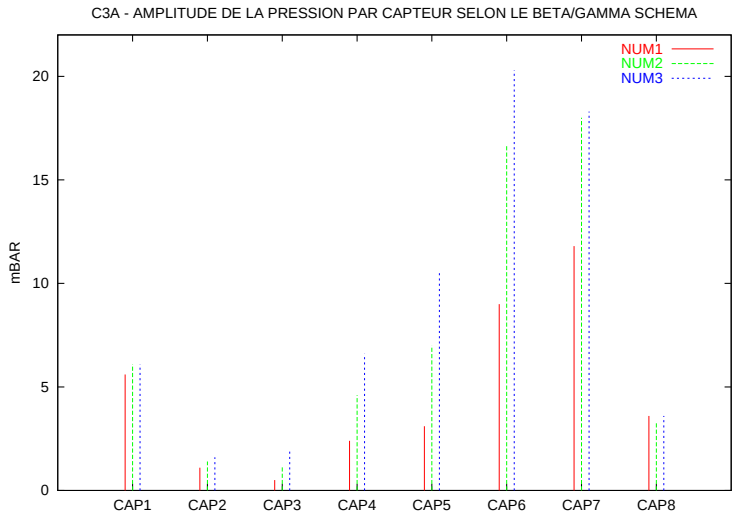


Figure 3-F: C3A

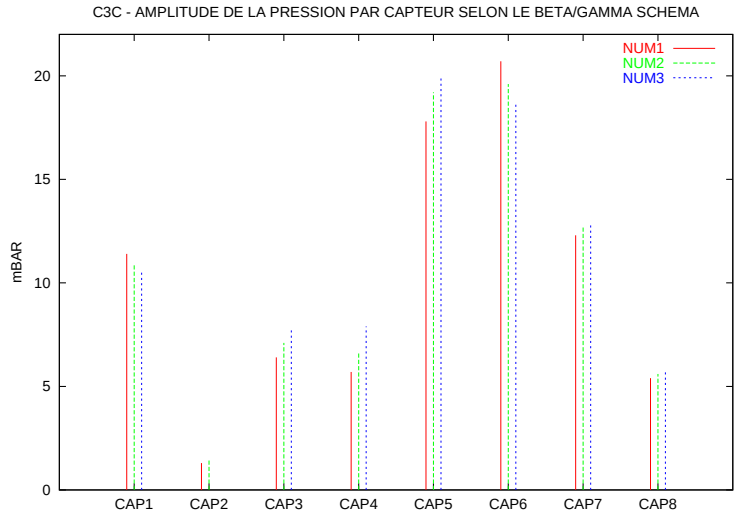


Figure 3-G: C3C

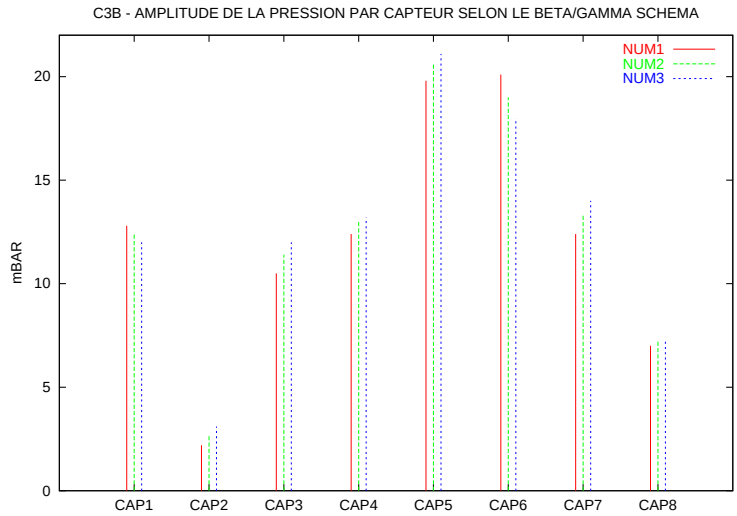


Figure 3-H: C3B

Mesures de l'énergie totale à maillage fixé selon le $\beta\gamma$ schéma.

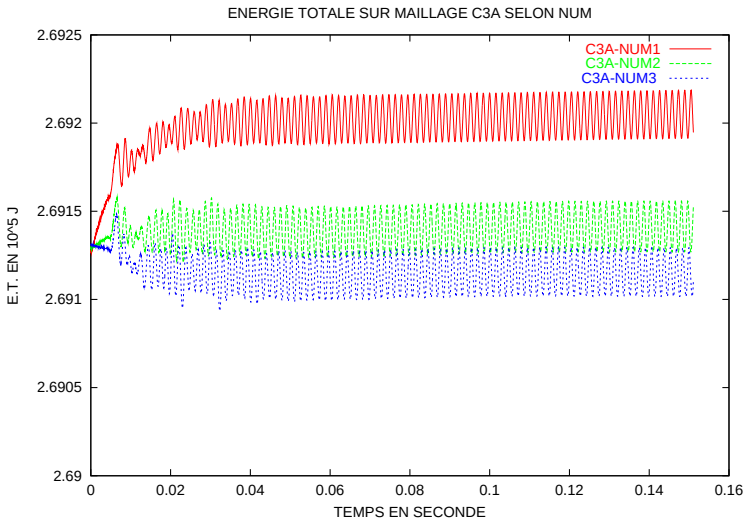


Figure 3-I: C3A

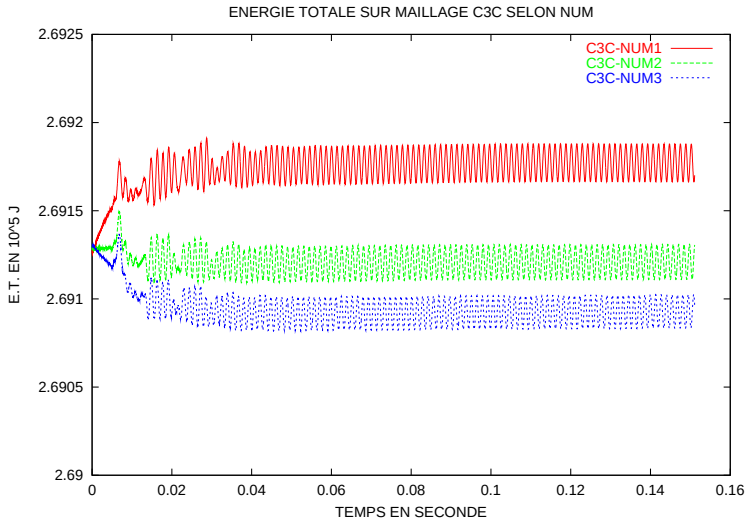


Figure 3-J: C3C

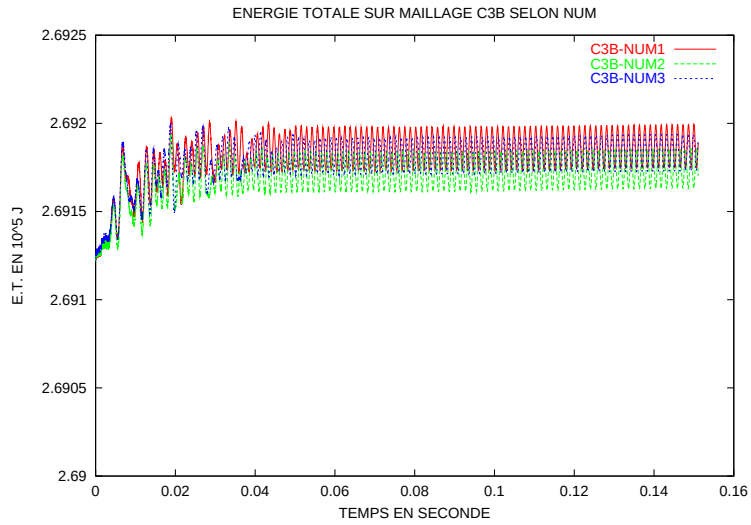


Figure 3-K: C3B

Déphasage des tourbillons à maillage fixé selon le $\beta\gamma$ schéma.

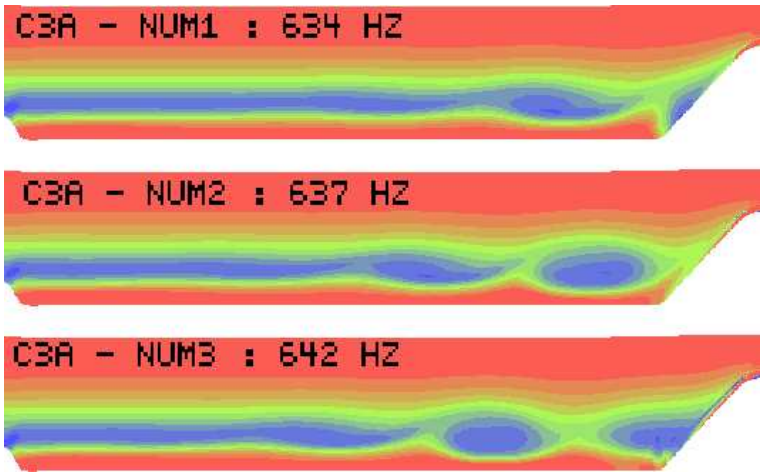


Figure 3-L: C3A (243 × 24) détachement tourbillonnaire en fond de cavité.

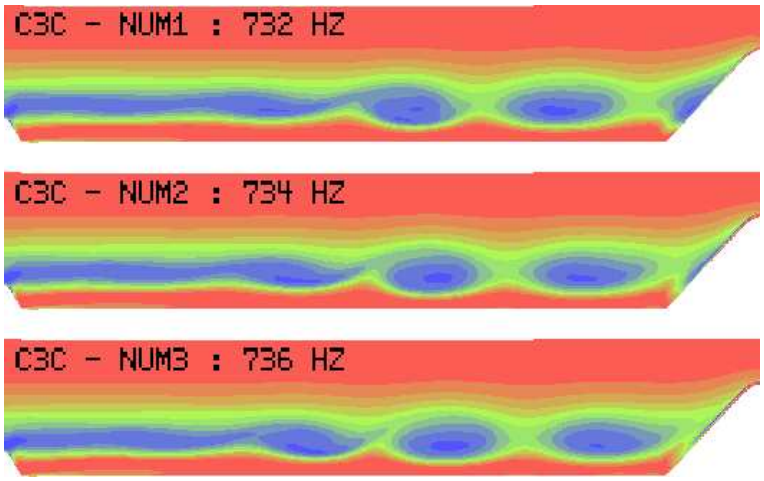


Figure 3-M: C3C (243 × 47) faible déphasage des tourbillons.

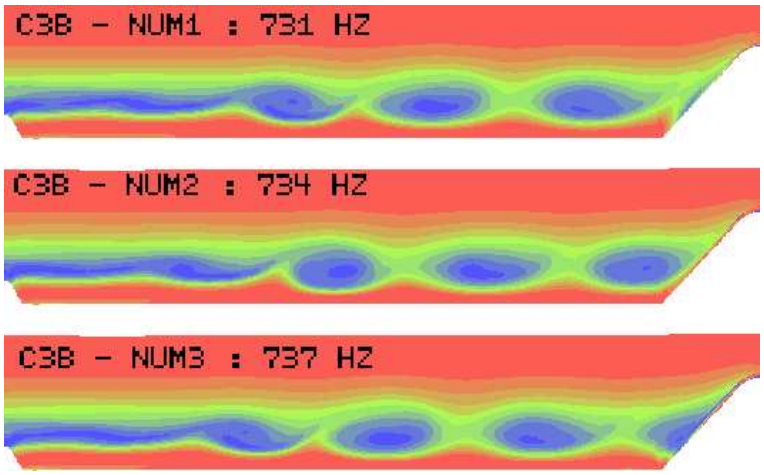


Figure 3-N: C3B (399 × 38) net déphasage des tourbillons.

3.3.2 Selon le maillage

Dans cette partie, nous considérons un seul schéma (NUM2: $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{3}{10}$) précis linéairement à l'ordre 3. L'ensemble des résultats des capteurs mesurant la fréquence et l'amplitude de la pression pour chaque maillage est récapitulé dans le tableau suivant:

Tableau récapitulatif des mesures et expérience

NOM	C3A	C3C	C3B	C3D	C3E	**EXP.**
x × y	243×27	243 × 47	399 × 38	485 × 47	399 × 75	-
Nbre mailles	5566	11132	14726	22264	29452	-
$\Delta t \times 10^{-4}$	4	2.5	2.222	2	1.333	-
PFAV (bar)	13.39	13.39	13.40	13.40	13.40	**14.01**
CAP1 (mbar)	5.9	11.0	12.4	12.3	11.9	**43.9**
CAP2 (mbar)	1.4	1.4	2.7	3.0	3.0	**8.5**
CAP3 (mbar)	1.0	7.1	11.3	12.0	12.0	**20.2**
CAP4 (mbar)	4.5	6.7	12.9	13.4	13.9	**9.0**
CAP5 (mbar)	6.9	19.0	20.5	20.9	21.1	**21.4**
CAP6 (mbar)	15.3	19.7	19.0	18.5	18.8	**-**
CAP7 (mbar)	16.0	12.6	13.2	13.4	13.6	**25.6**
CAP8 (mbar)	3.5	5.6	7.2	7.5	6.6	**34.2**
FREQ (Hz)	637	734	734	733	733	**713**
ΔFr (Hz)	14	14	14	14	14	10

Les chiffres de ce tableau sont mis en valeur par la figure FIG. 3-O.

Plutôt que de mener une bataille de chiffres plus ou moins bien convergente en fonction de la finesse du maillage et de toute façon non convergente vers les résultats de l'expérience physique C1x (EXP.), 3 représentations comparatives sur les maillages vont servir de base à notre analyse. Il s'agit:

- du détachement tourbillonnaire (FIG. 3-P)
- de l'amplitude maximale de pression en tout point du propulseur(FIG. 3-Q),
- de l'énergie totale (FIG. 3-R).

En effet, il me paraît incorrect de s'appuyer sur des mesures de 8 capteurs très ponctuels et en périphérie du propulseur pour pouvoir prétendre de la convergence en maillage de la solution. Pour peu que ces capteurs soient dans une zone de fort gradient en pression ou que les nœuds et les ventres du mode acoustique se déplacent d'un rien et ces mesures ne deviennent plus du tout comparables (FIG. 3-O: C3C max en CAP6; C3B,C3D,C3E max en CAP 5).

Mesures des capteurs selon le maillage.

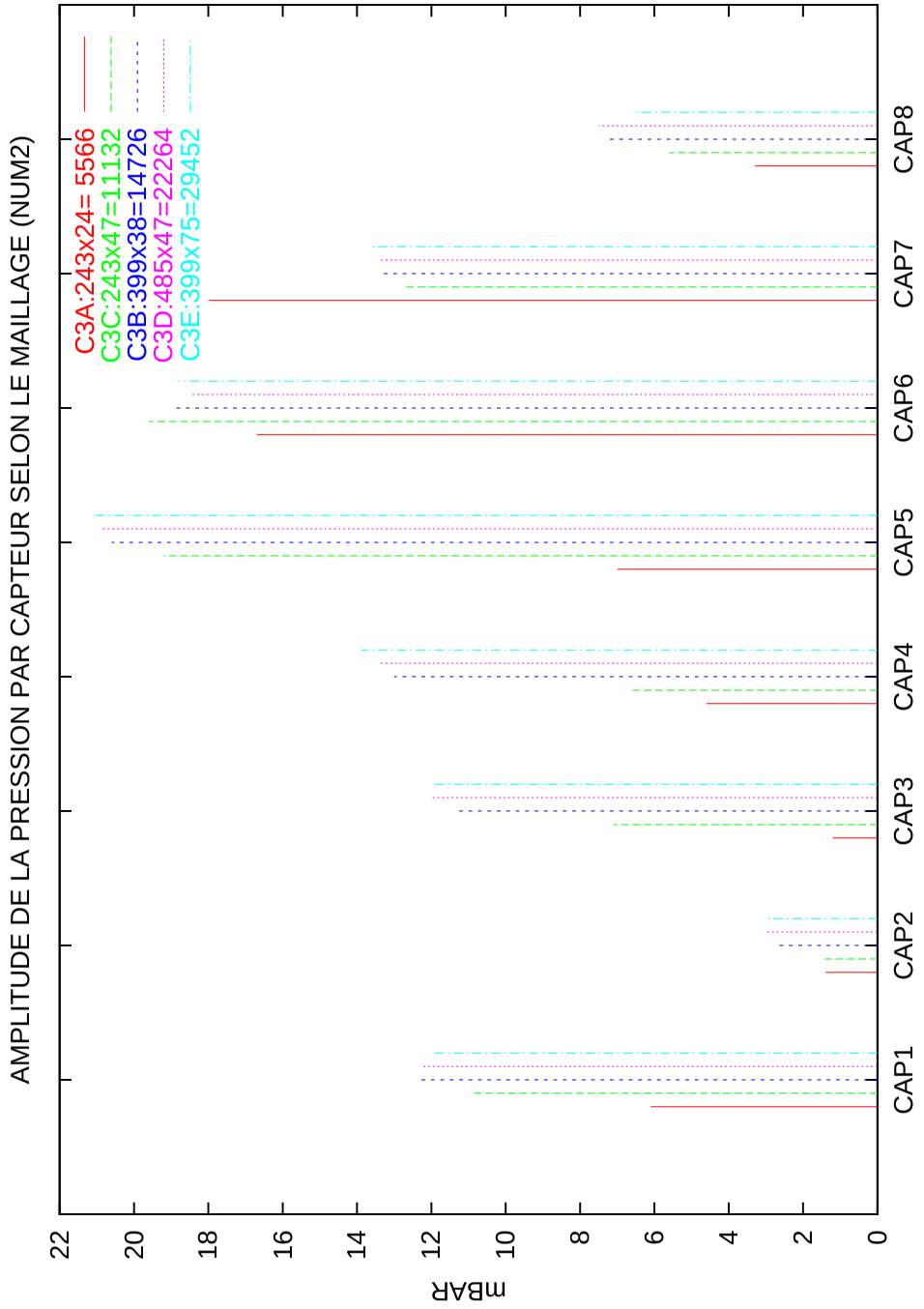


Figure 3-O:
mode acoustique sur C3A totalement différent
valeur maximale en CAP6 pour C3C, en CAP5 pour les autres maillages

Le détachement tourbillonnaire

Sur la figure FIG. 3-P, des traits verticaux indiquent pour chaque maillage, le lieu de détachement des tourbillons dans le propulseur. Il ressort que ce détachement s'effectue au trois quart de la chambre de combustion pour C3A, à moitié pour C3C et au tiers pour C3B, C3D et C3E. Pour ce qui est du détachement tourbillonnaire, nous avons donc une convergence en maillage à partir de C3B.
Comme C3C se déduit de C3A par un doublement de la finesse en y (même nombre de mailles en x), nous constatons l'importance de ce raffinement pour laisser naître l'instabilité hydrodynamique. Cependant, l'instabilité étant établie, un raffinement en y ne joue plus sur le détachement tourbillonnaire (C3B à C3E).
Comme le maillage C3D se déduit du maillage C3C par un doublement de la finesse en x (même nombre de mailles en y), nous constatons principalement que ce raffinement est important pour la vorticité des tourbillons (isovaleurs).

L'amplitude maximale de pression

Sur la figure FIG. 3-Q, l'aspect bidimensionnel du mode acoustique est mis en évidence dans la chambre de combustion. Les lieux de mesure des capteurs sont indiqués par des points blancs qui se comptent de l'amont vers l'aval (CAP1 à CAP8)...
Sur C3A, le mode acoustique est sans comparaison aux autres maillages et le ventre principal se situe en fond de chambre. Sur C3C, C3B, C3D, C3E un même mode acoustique se développe. Il est encore très faible en amplitude sur C3C et va en s'amplifiant avec la finesse du maillage. Sur C3E, il est intéressant de noter que les isovaleurs dans la zone amont du propulseur ne sont plus verticales...

L'énergie totale

Sur la figure FIG. 3-R, la représentation de l'énergie totale au cours du temps est un moyen plus fiable d'estimer la stabilisation de l'état instationnaire que ne l'est une mesure locale comme la pression. Nous constatons une diminution de l'énergie totale du maillage C3A à C3C. Celà s'explique par le changement de mode acoustique. Sur C3A, il y a une telle dissipation artificielle que l'instabilité qui arrive à naître à grand mal se met dans un état énergétique élevé. Ce niveau énergétique est très rapidement abandonné sur C3C en passant à la fréquence de 730 Hz.
Puis, au fur et à mesure que la solution est donnée sur un maillage plus fin, l'énergie totale augmente de nouveau rendant compte d'une meilleure discrétisation des tourbillons et de l'énergie cinétique qu'ils renferment. Si les maillages C3B et C3D présentent des courbes convergentes, le maillage C3E se distingue. Pourtant, l'augmentation en nœuds de calcul est du même ordre de C3B à C3D que ne l'est celle de C3D à C3E ($\sim +7000$ nœuds)...

Détachement tourbillonnaire selon le maillage.

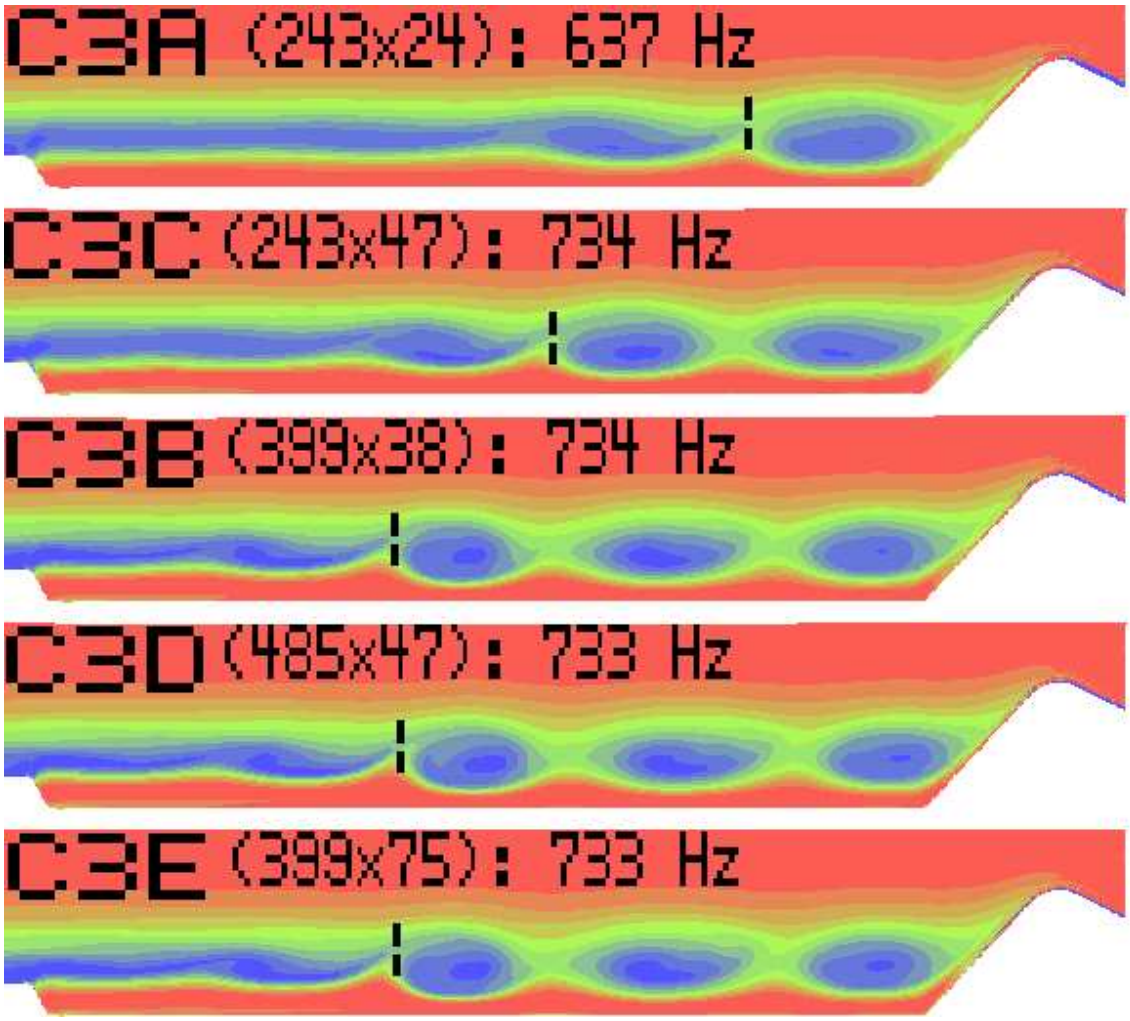


Figure 3-P:
le raffinement selon y est important pour la naissance de l'instabilité hydrodynamique (C3A - C3C)
le raffinement selon x est important pour le développement de cette instabilité (C3C - C3D)
mais ceci jusqu'à un certain niveau du maillage (C3B - C3D - C3E)

Amplitude maximale de la pression.

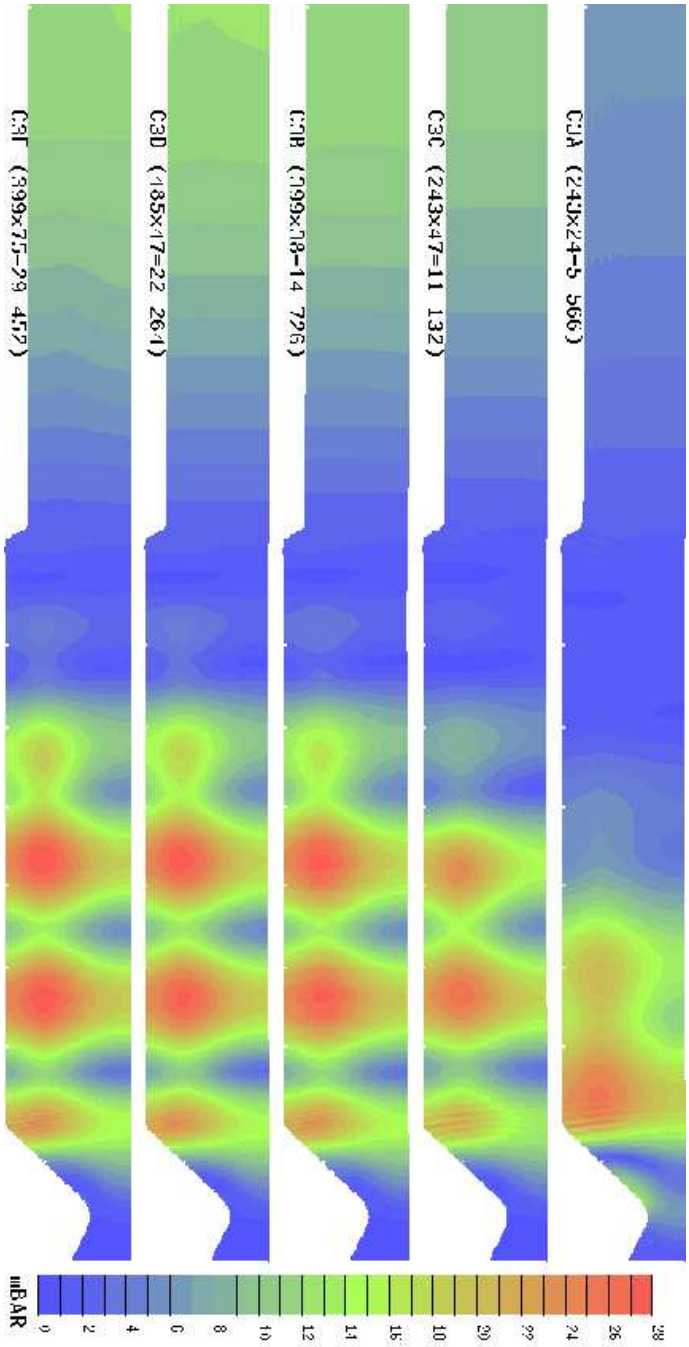


Figure 3-Q (place des capteurs par points blancs):
C3A-C3C: modes acoustiques non développés (dissi pation).
C3B-C3D-C3E: ventres de plus en plus importants,
vers une certaine convergence (inclinaison des isova leurs dans C3E...)

Mesures de l'énergie totale selon le maillage.

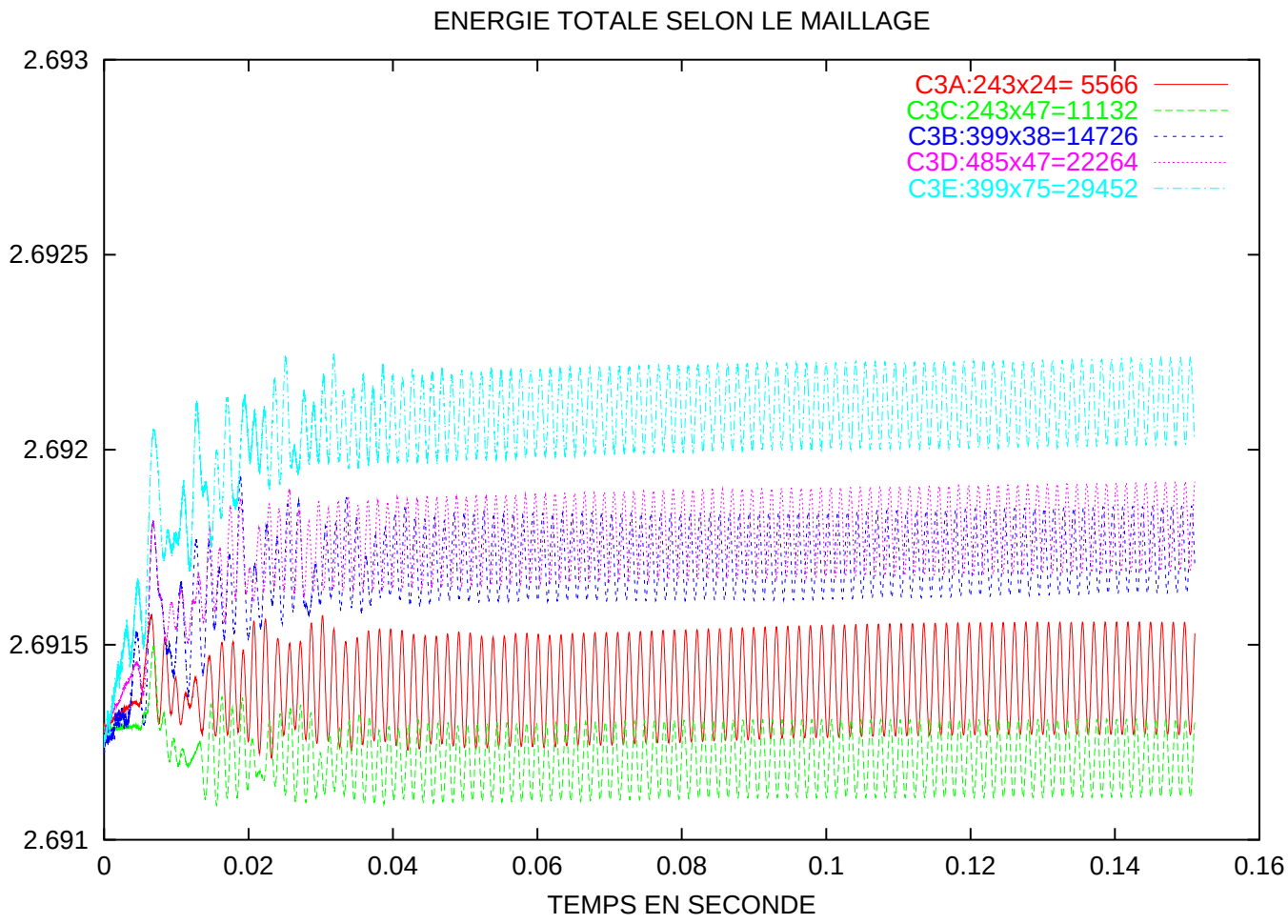
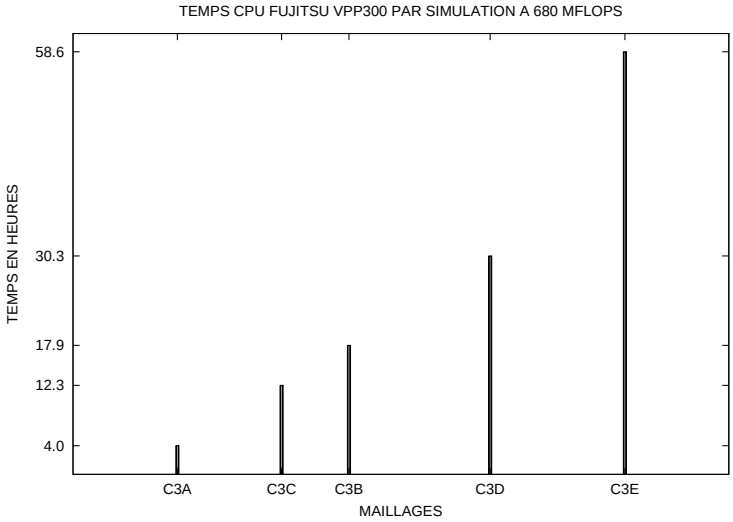


Figure 3-R:
validation de l'état instationnaire établi
meilleure capture des tourbillons selon le maillage

3.3.3 Synthèse

- C3A (5 566 points)
  Le maillage C3A est à rejeter. Il est trop sensible aux erreurs d'approximations du schéma numérique qui simule l'écoulement (dispersion et dissipation). Les tourbillons ont du mal à naître et se développe que faiblement et tardivement. En conséquence, ce maillage rend compte d'une fréquence et d'un mode acoustique atypiques.
- C3C (11 132 points)
  Le maillage C3C est aussi à rejeter. Il est encore sensible aux erreurs d'approximations du schéma numérique qui simule l'écoulement (33%). Les tourbillons tardent encore à apparaître mais la fréquence est bonne. En conséquence, le mode acoustique est correcte mais beaucoup trop dissipé.
- C3B (14 726 points)
  Le maillage C3B est le meilleur rapport "qualité / Coût informatique" de tous les maillages. Il est d'une sensiblilité tolérable (15%) envers les erreurs d'approximations du schéma numérique. Les tourbillons se forment rapidement et le mode acoustique s'établi pleinement dans la chambre de combustion.
- C3D (22 264 points)
  Le maillage C3D concurrence le maillage C3B. Il est plus coûteux et ne gagne que très peu en niveau acoustique.
- C3E (29 452 points)
  Le maillage C3E est beaucoup plus coûteux et donne des résultats qualitativement comparables aux maillages C3B et C3D. Néanmoins, la finesse de ce maillage sème le doute par une énergie totale qui ne converge pas avec les résultats de C3B et C3D ainsi que par des isovaleurs de pression qui ne sont plus constantes selon l'axe y dans la partie débitante du propulseur.



3.4 Conclusion et perspective

Le schéma $\beta\gamma$ est opérationnel pour le modèle des équations de Navier et Stokes dans une configuration axisymétrique. Le code qui le met en œuvre est optimisé pour travailler par coloriage sur une machine vectorielle (680 Mflops sur FUJITSU VPP300) avec un maillage structuré et dans une localisation centrée cellule. Grâce au contrôle que l'on a sur les différents types d'erreur par les paramètres β et γ, nous avons pu expliquer les différents résultats obtenus par les partenaires ASSM pour le maillage C3A du cas test C3 de l'ONERA. De plus, ce schéma a permis de montrer que la finesse du maillage C3B était celle à partir de laquelle les résultats numériques devenaient crédibles, dans la mesure où les différentes configurations du schéma aboutissent sur ce maillage à des résultats assez voisins.

La conclusion principale du cas test C3 est qu'en aucun cas les résultats en niveaux acoustiques de l'expérience sur maquette ne sont atteints par ceux de la simulation numérique et ce, aussi fin que puisse être le maillage. Une remise en cause du modèle mathématique paraît donc nécessaire:

- l'ONERA a su mettre en évidence qu'il est important de prendre en compte la réponse du propergol [10] face à l'onde acoustique dans les conditions de débit,
- la SNPE abandonne le cadre axisymétrique du cas test C3 pour une simulation 3D. La mise en évidence sur le maillage C3E de la perte du caractère monodimensionnel de l'onde acoustique invite très fortement à s'intéresser aux possibilités de perturbations azimutales, choses que n'autorise pas un calcul axisymétrique,
- nous avons pu constater dans la première partie de ce rapport que les schémas volumes finis utilisés, qu'ils soient $\beta\gamma$ ou non, perdent, même dans un cadre linéaire, beaucoup de leur précision d'ordre 2 dès lors que le maillage devient irrégulier et non orthogonal. Or, les maillages du cas test C3 sont justement irréguliers et non orthogonaux et le modèle non linéaire... Notre perspective est donc de dire "stop" aux schémas volumes finis d'ordre 2 sur maillage régulier pour la simulation de phénomènes instationnaires et de bâtir un schéma précis à l'ordre 4 pour maillage et modèle numérique quelconques!

4 ANNEXE

Dans ce chapitre, nous détaillons les calculs géométriques et axisymétriques.

4.1 Calcul d'aire

4.1.1 Aire d'un triangle

Soit (A_1,A_2,A_3) un triangle quelconque (Fig. 4-A). l_1,l_2,l_3 les les mesures des distances des segments. Soit le point H défini comme le projeté de A_3 sur la droite (A_1A_2). Les triangles (A_1,H,A_3) et (A_2,H,A_3) sont alors rectangles en H. Soit α la mesure de l'angle entre les vecteurs $\vec{A_1A_2}$ et $\vec{A_1A_3}$.

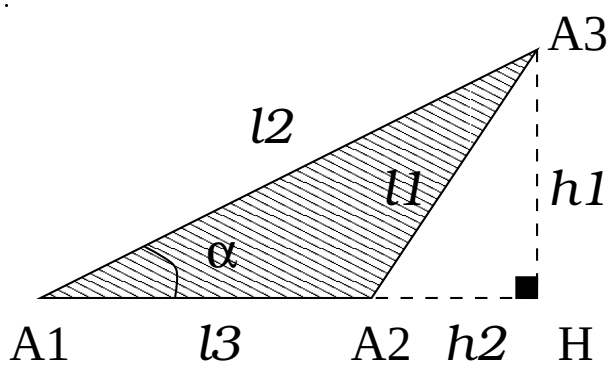


Figure 4-A: Calcul de l'aire d'un triangle quelconque.

Pour déterminer l'aire hachurée du triangle (A_1,A_2,A_3), calculons d'abord les aires des triangles rectangles (A_1,H,A_3) et (A_2,H,A_3):

$$\mathcal{A}_{(A_1,H,A_3)} = \frac{h1(l3+h2)}{2} \quad , \quad \mathcal{A}_{(A_2,H,A_3)} = \frac{h1h2}{2}$$

Soustrayons ces aires et nous obtenons:

$$\mathcal{A}_{(A_1,A_2,A_3)} = \frac{l3h1}{2} = \frac{l2l3\sin\alpha}{2} = \frac{\|\vec{A_1A_2} \wedge \vec{A_1A_3}\|}{2}$$

Pour obtenir une aire positive, il convient de numéroter les sommets du triangle dans le sens trigonométrique. En posant (x_i,y_i) les coordonnées des sommets A_i dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'aire du triangle a pour expression algébrique:

$$\boxed{\mathcal{A}_{(A_1,A_2,A_3)} = \tfrac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]} \tag{62}$$

4.1.2 Aire d'un quadrangle

Soit (A_1,A_2,A_3,A_4) un quadrangle quelconque (Fig 4-B) dont les sommets sont numéroté selon le sens trigonométrique. Ce quadrangle peut être vu comme la réunion des triangles

$T_1 = (A_1,A_2,A_3)$ et $T_2 = (A_1,A_3,A_4)$ parcourus dans le sens trigonométrique.

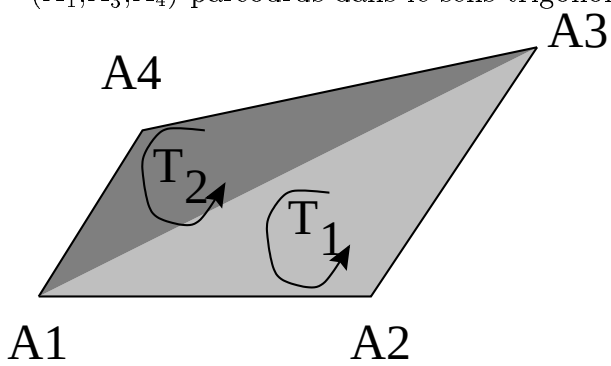


Figure 4-B: Calcul de l'aire d'un quadrangle quelconque.

L'aire du quadrangle $\mathcal{A}$ est donc la somme des aires de ces triangles (62) et a pour expression en fonction des coordonnées (x_i,y_i) des sommets A_i:

$$\boxed{\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}[x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y1 - y3)]} \tag{63}$$

4.2 Calcul de barycentre inertiel

4.2.1 Barycentre d'un triangle

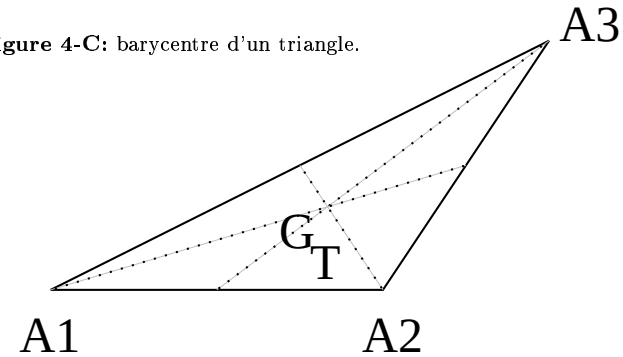
Soit (A_1,A_2,A_3) un triangle quelconque (Fig 4-C). Soit G_T le barycentre inertiel de ce triangle. Il se définit géométriquement comme le point de concours des médianes et mathématiquement par la relation vectorielle de Leibnitz:

$$\vec{G_TA_1} + \vec{G_TA_2} + \vec{G_TA_3} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{OG_T} = \frac{1}{3}(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3})$$

d'où

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x_{G_T} & = & \frac{1}{3}\,(x_1 + x_2 + x_3) \\ y_{G_T} & = & \frac{1}{3}\,(y_1 + y_2 + y_3) \end{array}} \tag{64}$$

Figure 4-C: barycentre d'un triangle.



4.2.2 Barycentre d'un quadrangle

Soit (A_1,A_2,A_3,A_4) un quadrangle quelconque (Fig.4-D) et G de coordonnées (x_G,y_G) le barycentre inertiel de ce quadrangle. G est défini comme étant le barycentre des barycentres des triangles $T_1 = (A_1,A_2,A_3)$ et $T_2 = (A_1,A_3,A_4)$ pondérés par les aires de ces triangles:

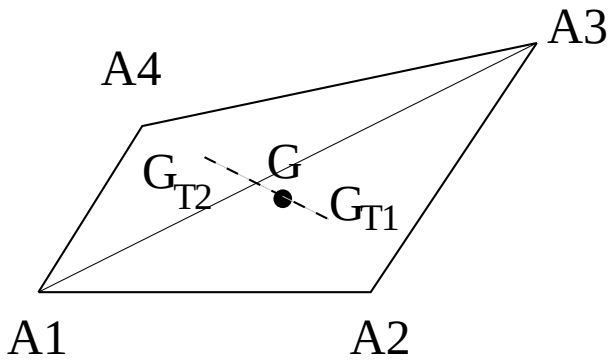


Figure 4-D: barycentre inertiel d'un quadrangle.

$$\mathcal{A}\vec{OG} = \mathcal{A}_{T_1}\vec{OG}_{T_1} + \mathcal{A}_{T_2}\vec{OG}_{T_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathcal{A}x_G &= \tfrac{1}{6}\{y_1(x_4^2 + x_1x_4 - x_1x_2 - x_2^2) \\
&\quad +y_2(x_1^2 + x_1x_2 - x_2x_3 - x_3^2) \\
&\quad +y_3(x_2^2 + x_2x_3 - x_3x_4 - x_4^2) \\
&\quad +y_4(x_3^2 + x_3x_4 - x_1x_4 - x_1^2)\} \\
\mathcal{A}y_G &= \tfrac{1}{6}\{x_1(y_2^2 + y_1y_2 - y_1y_4 - y_4^2) \\
&\quad +x_2(y_3^2 + y_2y_3 - y_1y_2 - y_1^2) \\
&\quad +x_3(y_4^2 + y_3y_4 - y_2y_3 - y_2^2) \\
&\quad +x_4(y_1^2 + y_1y_4 - y_3y_4 - y_3^2)\}
\end{aligned}} \tag{65}$$

4.3 Volume par rotation $\pm\epsilon$ autour de l'axe $O\vec{i}$

4.3.1 Volume issu d'un segment

Soit $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, deux points distincts du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$. Un point $M(x,y)$ appartient à la droite (A_1A_2) si et seulement si:

$$\vec{A_1M} \wedge \vec{A_1A_2} = \vec{0} \Rightarrow y(x_2 - x_1) = x(y_2 - y_1) + x_2y_1 - x_1y_2$$

– Si $x_1 = x_2$ alors la rotation d'un tel segment engendre une portion de disque (Fig 4-E) et le volume n'est pas mesurable ($\mathcal{V}_{[A_1A_2]} = 0$).

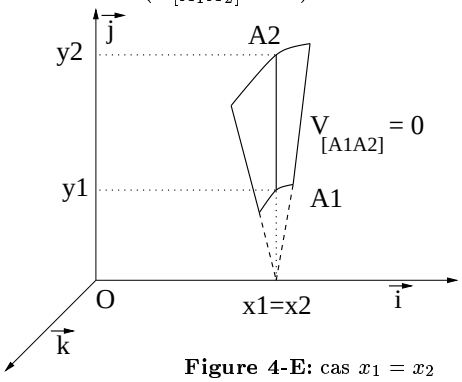


Figure 4-E: cas $x_1 = x_2$

– Si $x_1 \neq x_2$ alors la rotation du segment $[A_1A_2]$ autour de l'axe $O\vec{i}$ d'un angle $\pm\epsilon$ génère un volume $\mathcal{V}_{[A_1A_2]}$ que nous allons quantifier (Fig.4-F).

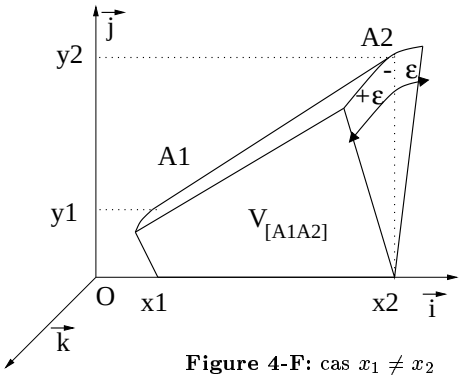


Figure 4-F: cas $x_1 \neq x_2$

En effet, l'équation de la droite (A_1A_2) peut s'écrire sous la forme:

$$y(x) = ax + b \text{ avec } a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ et } b = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

Il convient alors d'intégrer le volume infinitésimal $d\tau = rdrdxd\theta$ sur les variations considérées.

$$\mathcal{V}_{[A_1A_2]} = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_0^{y(x)} rdr \right) dxd\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathcal{V}_{[A_1A_2]} = \frac{\epsilon}{3}(x_2 - x_1)\left(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2\right)} \tag{66}$$

Notons que cette dernière expression de $\mathcal{V}_{[A_1A_2]}$ est générale (si $x_1 = x_2$ alors $\mathcal{V}_{[A_1A_2]} = 0$) et que ce **volume est de valeur algébrique**.

4.3.2 Volume issu d'un quadrangle

Soit (A_1,A_2,A_3,A_4) un quadrangle quelconque (Fig.4-G) dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ parcouru dans le sens trigonométrique.

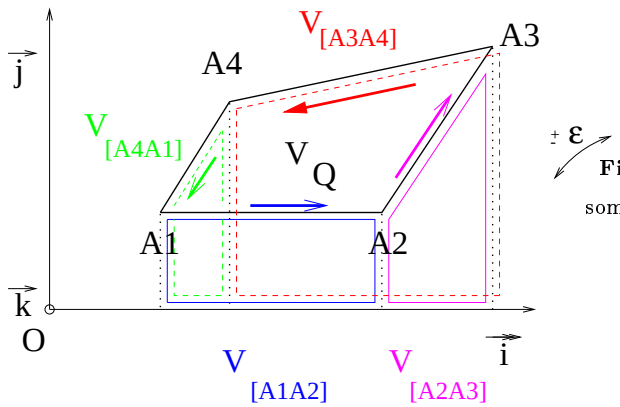


Figure 4-G: Volume du quadrangle par sommation des volumes issus des segments.

Le volume intérieur $\mathcal{V}$ obtenu par la rotation autour de l'axe $O\vec{i}$ d'angles $\pm\epsilon$ de ce quadrangle est obtenu par la somme des volumes générés par chacun des segments constituant le quadrangle (66). Attention, dans le cas d' un parcours des segments dans le sens trigonométrique, le volume obtenu est négatif d'où une correction d'un facteur -1.

$$\mathcal{V} = \frac{\epsilon}{3}\sum_{i=1}^{4}(x_i - x_{i+1})\left(y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2\right) \text{ avec } i \text{ modulo } 4$$

En développant cette expression, grâce à (65), nous trouvons une relation entre le volume $\mathcal{V}$, l'angle ϵ de rotation, l'aire $\mathcal{A}$ du quadrangle et l'ordonnée y_G du barycentre inertiel de ce quadrangle:

$$\boxed{\mathcal{V} = 2\epsilon\,\mathcal{A}\,y_G} \tag{67}$$

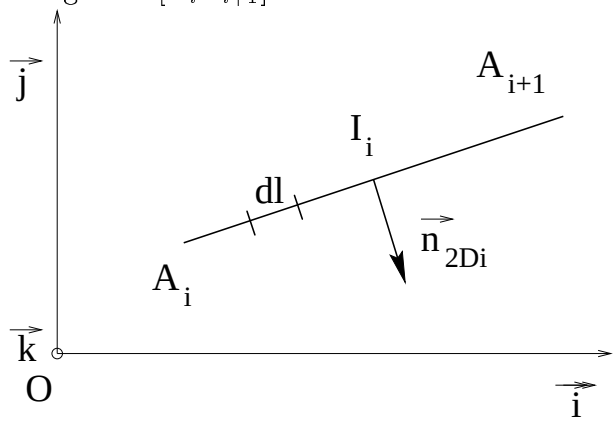
4.4 Calcul des normales

4.4.1 Normale à un segment

Soit $[A_iA_{i+1}]$ un segment appartenant au plan $(O,\vec{i},\vec{j}^+)$. Nous recherchons le vecteur $\vec{N}_{2Di}$ orthogonal au vecteur $A_i\vec{A}_{i+1}$ et ayant pour norme la longueur du segment $[A_iA_{i+1}]$. Nous demandons de plus à ce que $(\vec{N}_{2Di},A_i\vec{A}_{i+1},\vec{k})$ soient dans le sens direct.
$\vec{N}_{2Di}$ s'obtient par rotation de centre A_i et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ du vecteur $A_i\vec{A}_{i+1}$. En posant (x_i,y_i) les coordonnées du point A_i, nous obtenons:

$$A_i\vec{A}_{i+1} = \left|\begin{array}{l} x_{i+1} - x_i \\ y_{i+1} - y_i \end{array}\right. \qquad \vec{N}_{2Di} = \left|\begin{array}{l} y_{i+1} - y_i \\ x_i - x_{i+1} \end{array}\right. \qquad O\vec{I}_i = \left|\begin{array}{l} x_{I_i} = \frac{x_i+x_{i+1}}{2} \\ y_{I_i} = \frac{y_i+y_{i+1}}{2} \end{array}\right.$$

Graphiquement (Fig.4-H), nous représentons le vecteur $\vec{N}_{2Di}$ en l'ancrant au point I_i milieu du segment $[A_iA_{i+1}]$ et nous définissons le vecteur unitaire de $\vec{N}_{2Di}$ noté $\vec{n}_{2Di}$.



où $$\vec{n}_{2Di} = \frac{\vec{N}_{2Di}}{\|A_i\vec{A}_{i+1}\|}$$

Figure 4-H: normale ancrée sur I_i milieu du segment $[A_iA_{i+1}]$

Procédons à une rotation de ce segment d'angle θ par rapport à l'axe $O\vec{i}$. Une rotation étant une isométrie, la transformation $\vec{n}_{2Di}(\theta)$ de $\vec{n}_{2Di}$ est toujours unitaire et normal au nouveau segment.
Dans le repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le vecteur $\vec{n}_{2Di}(\theta)$ a pour expression:

$$\boxed{\vec{n}_{2Di}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}} \left| \begin{array}{l} y_{i+1}-y_i \\ (x_i - x_{i+1})\cos\theta \\ (x_i - x_{i+1})\sin\theta \end{array} \right.} \tag{68}$$

Intégrons $\vec{n}_{2Di}(\theta)$ normale locale unitaire au segment sur toute la surface **géométrique** décrite par ce segment lorsque θ varie de de $-\epsilon$ à $+\epsilon$. Notons cette normale intégrée $\vec{N}_i$.

$$\vec{N}_i \;=\; \int_S \vec{n}_{2Di}(\theta)\;|ds|$$

La surface géométrique élémentaire $|ds|$ s'écrit:

$$|ds| = r\;|dl|\;d\theta$$

Comme $\vec{n}_{2Di}(\theta)$ n'est que fonction de θ (68), il vient:

$$\vec{N}_i = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{n}_{2Di}(\theta)\;d\theta \int_{segment} r\;|dl| \tag{69}$$

Calculons d'abord $\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{n}_{2Di}(\theta)\;d\theta$:

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{n}_{2Di}(\theta)\;d\theta = \frac{2[(y_{i+1}-y_i)\epsilon\;\vec{i} + (x_i - x_{i+1})\sin\epsilon\;\vec{j}]}{\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}} \tag{70}$$

Puis calculons le facteur $\int_{segment} r\ |dl|$ pour lequel 2 cas se présentent:

- Cas $x_i = x_{i+1}$ alors $|dl| = |dr|$

$$\begin{aligned}\int_{segment} r\ |dl| &= \left|\int_{y_i}^{y_{i+1}} r\ dr\right| \\ &= \frac{|(y_i + y_{i+1})(y_{i+1} - y_i)|}{2} \\ &= y_{I_i}|y_{i+1} - y_i|\end{aligned}$$

Dans ce cas (70) se simplifie:

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \vec{n}_{2Di}(\theta)\ d\theta = \frac{2\epsilon(y_{i+1} - y_i)\ \vec{i}}{|y_{i+1} - y_i|}$$

et nous obtenons en utilisant (69):

$$\vec{N}_i = 2\epsilon\ y_{I_i}\ (y_{i+1} - y_i)\ \vec{i} \tag{71}$$

- Cas $x_i \neq x_{i+1}$ alors le rayon est une fonction dépendante de x pouvant s'écrire:

$$r(x) = ax + b \text{ avec } a = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \text{ et } b = \frac{x_{i+1}y_i - x_i y_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$$

L'infiniment petit le long du segment dl s'exprime alors en fonction de dx:

$$\begin{aligned}dl &= \sqrt{1 + a^2}\ dx \\ &= \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{|x_{i+1} - x_i|}\ dx\end{aligned}$$

Si bien que:

$$\begin{aligned}\int_{segment} r\ |dl| &= \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{|x_{i+1} - x_i|}\ \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} r(x)\ dx\right| \\ &= \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{|x_{i+1} - x_i|}\ \left|\left[\frac{x(ax + 2b)}{2}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}\right| \\ &= \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}\ y_{I_i}\end{aligned}$$

d'où de (69) en utilisant (70):

$$\vec{N}_i = 2\ y_{I_i}\left[(y_{i+1} - y_i)\epsilon\ \vec{i} + (x_i - x_{i+1})\sin\epsilon\ \vec{j}\right] \tag{72}$$

On retrouve l'expression (71) à partir de l'expression (72) si l'on prend l'hypothèse que $x_{i+1} = x_i$. De fait et de manière générale, la normale $\vec{N}_i$ issue de la surface décrite par un segment du plan $(O,\vec{i},\vec{j}^+)$ en rotation d'angle $\pm\epsilon$ autour de l'axe $O\vec{i}$ s'écrit dans le repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\boxed{\vec{N}_i = 2\,\epsilon\, y_{I_i} \left| \begin{array}{l} (y_{i+1} - y_i) \\ (x_i - x_{i+1})\frac{\sin\epsilon}{\epsilon} \qquad \text{avec } y_{I_i} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} \\ 0 \end{array} \right.} \tag{73}$$

4.4.2 Normale à un quadrangle

Soient (A_1,A_2,A_3,A_4) un quadrangle quelconque du plan $(O,\vec{i},\vec{j}^+)$ parcouru dans le sens trigonométrique. Ce quadrangle d'aire $\mathcal{A}$ est délimité par 4 segments $[A_i,A_{i+1}]$ avec i modulo 4. Les normales unitaires à ses bords sont donc les vecteurs $\vec{n}_{2Di}$
En faisant subir à ce quadrangle l'ensemble des rotations d'axe $O\vec{i}$ pour tous les angles $\theta \in [-\epsilon,\epsilon]$, ce quadrangle décrit le volume $\mathcal{V}$ délimité par 6 surfaces (Fig.2-C):

- 4 surfaces S_i sont issues de l'ensemble des images d'un segment $[A_iA_{i+1}]$ et dont $\vec{N}_i$ est la normale extérieure intégrée.
- 2 surfaces S_+ et S_- sont issues respectivement de la rotation d'axe $O\vec{i}$ d'angle $+\epsilon$ et $-\epsilon$ du quadrangle considéré. Les normales extérieures intégrées $\vec{N}_+$ et $\vec{N}_-$ s'écrivent:

$$\boxed{\vec{N}_\pm = \mathcal{A} \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\sin\epsilon \\ \pm\cos\epsilon \end{array} \right.} \tag{74}$$

4.5 Calcul des dérivées

4.5.1 Fonction scalaire

Soit f une fonction qui a un point M de l'espace de coordonnées (x,y,z) dans un repère cartésien associe le scalaire $f(x,y,z)$. En considérant les coordonnées polaires (x,r,θ) du point M, nous pouvons définir la fonction $\bar{f}$ telle que:

$$f(x,y,z) = \bar{f}(x,r,\theta)$$

Si de plus la fonction $\bar{f}(x,r,\theta)$ est indépendante de θ, nous l'écrirons $\tilde{f}(x,r)$.
La distance r et l'angle θ sont définis par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} y = r\cos\theta \quad &\Rightarrow \quad dy = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta \\ z = r\sin\theta \quad &\Rightarrow \quad dz = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta \end{aligned}$$

Exprimons la différentielle de f puis celle de $\bar{f}$:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ d\bar{f} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}dx + \frac{\partial \bar{f}}{\partial r}dr + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta}d\theta \end{aligned}$$

En égalisant ces différentielles, nous obtenons le système:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x} \\ \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y} + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial z} & = & \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial r} \\ -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial z} & = & \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

Sa résolution peut donner la correspondance entre les dérivées partielles cartésiennes et les dérivées partielles polaires:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \cos\theta\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & \sin\theta\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \theta} \end{array}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \cos\theta\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & \sin\theta\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \end{array}} \tag{75}$$

4.5.2 Le vecteur vitesse

Un vecteur $\vec{V}$ se décompose en trois composantes u, v, w dans le repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Chaque composante est une fonction scalaire de (x,y,z) coordonnées cartésiennes d'un point M.

$$\vec{V}(x,y,z) = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

On peut définir les fonctions $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ qui sont fonctions des coordonnées polaires (x,r,θ) du point M tout en exprimant toujours le vecteur $\vec{V}$ dans le repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$$\vec{V}(x,r,\theta) = \bar{u}\vec{i} + \bar{v}\vec{j} + \bar{w}\vec{k}$$

Introduisons le fait que nous considérons un écoulement axisymétrique où le vecteur vitesse s'écrit dans le repère cylindrique $(O,\vec{i},\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ sans composante selon $\vec{e}_\theta$ (Fig.4-I).

$$\vec{V}(x,r,\theta) = \tilde{u}\vec{i} + \tilde{v}\vec{e}_r$$

où $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont fonction uniquement de x et de r.
Exprimons $\vec{e}_r$ en fonction des vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$:

$$\vec{V}(x,r,\theta) = \tilde{u}\vec{i} + \tilde{v}\cos\theta\vec{j} + +\tilde{v}\sin\theta\vec{k}$$

De fait, nous en déduisons que:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} u(x,y,z) & = & \bar{u}(x,r,\theta) & = & \tilde{u}(x,r) \\ v(x,y,z) & = & \bar{v}(x,r,\theta) & = & \tilde{v}(x,r)\cos\theta \\ w(x,y,z) & = & \bar{w}(x,r,\theta) & = & \tilde{v}(x,r)\sin\theta \end{array}} \tag{76}$$

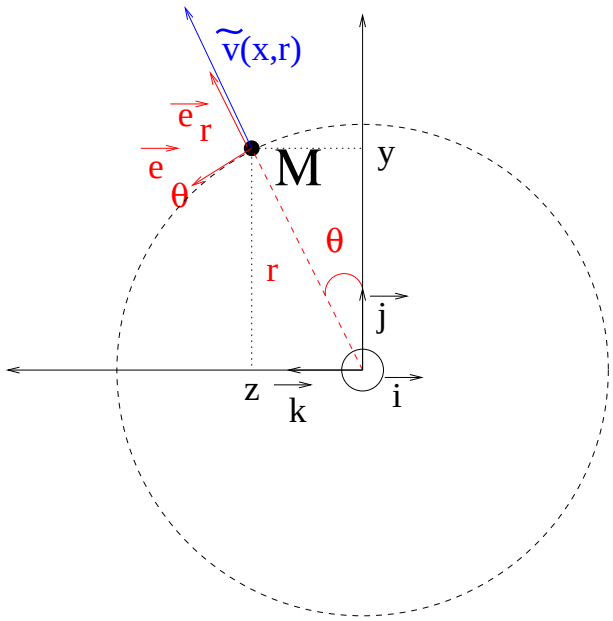


Figure 4-I: le vecteur vitesse dans le repère cylindrique.

Des relations (75) précédentes reliant les dérivées partielles cartésiennes d'une fonction scalaire ayant pour arguments les coordonnées cartésiennes d'un point M en fonction des dérivées partielles polaires de la fonction correspondante ayant pour arguments les coordonnées polaires du point M, nous obtenons:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos\theta \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos\theta \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \cos\theta \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sin\theta \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \sin\theta \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \sin\theta \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta}$$

Au travers de ces expressions, introduisons la particularité axisymétrique (76) considérée, à savoir, que $\bar{u}$, $\bar{v}$ et $\bar{w}$ peuvent s'exprimer à partir de fonctions $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ indépendantes de l'argument θ:

$$\boxed{\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \quad , & \dfrac{\partial v}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \quad , & \dfrac{\partial w}{\partial x} = \sin\theta \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial y} = \cos\theta \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \quad , & \dfrac{\partial v}{\partial y} = \cos^2\theta \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \dfrac{\sin^2\theta}{r}\tilde{v} \quad , & \dfrac{\partial w}{\partial y} = \cos\theta\sin\theta \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \dfrac{\cos\theta\sin\theta}{r}\tilde{v} \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial z} = \sin\theta \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \quad , & \dfrac{\partial v}{\partial z} = \cos\theta\sin\theta \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \dfrac{\cos\theta\sin\theta}{r}\tilde{v} \quad , & \dfrac{\partial w}{\partial z} = \sin^2\theta \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \dfrac{\cos^2\theta}{r}\tilde{v}
\end{array}} \quad (77)$$

4.5.3 Tenseur des contraintes visqueuses

Exprimons les composantes σ_{ij} du tenseur des contraintes (6) en fonction des dérivées partielles polaires des fonctions $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$:

$$\boxed{\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11} &= \tfrac{1}{3}\left(4\tfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x} - 2\tfrac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - \tfrac{2}{r}\tilde{v}\right)\\
\bar{\sigma}_{22} &= \tfrac{1}{3}\left(-2\tfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + (1+3\cos 2\theta)\tfrac{\partial\tilde{v}}{\partial r} + \tfrac{(1-3\cos 2\theta)}{r}\tilde{v}\right)\\
\bar{\sigma}_{33} &= \tfrac{1}{3}\left(-2\tfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x} + (1-3\cos 2\theta)\tfrac{\partial\tilde{v}}{\partial r} + \tfrac{(1+3\cos 2\theta)}{r}\tilde{v}\right)\\
\bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = \cos\theta\left(\tfrac{\partial\tilde{v}}{\partial x} + \tfrac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right)\\
\bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \sin\theta\left(\tfrac{\partial\tilde{v}}{\partial x} + \tfrac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right)\\
\bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \sin 2\theta\left(\tfrac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - \tfrac{1}{r}\tilde{v}\right)
\end{aligned}} \tag{78}$$

4.5.4 Les composantes r_5, s_5 et t_5

Exprimons de (5) les fonctions r_5, s_5, t_5 de (x,y,z) comme des fonctions $\bar{r_5}$, $\bar{s_5}$, $\bar{t_5}$ de (x,r,θ)

$$\boxed{\begin{aligned}
\bar{r_5} &= \tilde{u}\bar{\sigma}_{11} + \cos\theta\tilde{v}\bar{\sigma}_{12} + \sin\theta\tilde{v}\bar{\sigma}_{13} + \tfrac{\Gamma}{Pr}\tfrac{\partial\tilde{\xi}}{\partial x}\\
\bar{s_5} &= \tilde{u}\bar{\sigma}_{21} + \cos\theta\tilde{v}\bar{\sigma}_{22} + \sin\theta\tilde{v}\bar{\sigma}_{23} + \tfrac{\Gamma}{Pr}\cos\theta\tfrac{\partial\tilde{\xi}}{\partial r}\\
\bar{t_5} &= \tilde{u}\bar{\sigma}_{31} + \cos\theta\tilde{v}\bar{\sigma}_{32} + \sin\theta\tilde{v}\bar{\sigma}_{33} + \tfrac{\Gamma}{Pr}\sin\theta\tfrac{\partial\tilde{\xi}}{\partial r}
\end{aligned}} \tag{79}$$

4.6 Passage à la limite

Prenons en compte que l'angle ϵ est aussi petit que l'on veut. L'angle θ appartenant à l'intervalle $]-\epsilon,\ +\ \epsilon[$ est également petit. Ecrivons des développements limités d'ordre 2 dans les expressions précédentes.

4.6.1 Les normales

Nous constatons que les normales parallèles (73) au plan $\mathcal{P}$ de la cellule C s'expriment en fonction des normales (68) du quadrangle Q de $\mathcal{P}$:

$$\boxed{\vec{N}_i \simeq 2\,\epsilon\, y_{I_i}\, \vec{N}_{2D_i}} \tag{80}$$

Quant aux normales perpendiculaires (74), elles deviennent:

$$\boxed{\vec{N}_\pm \simeq \mathcal{A} \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\epsilon \\ \pm 1 \end{array} \right.} \tag{81}$$

4.6.2 Dérivée d'une fonction scalaire

Une fonction $f(x,y,z)$ pouvant s'exprimer comme une fonction $\tilde{f}(x,r)$ s'écrit d'après (75):

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & \theta \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \end{array}} \tag{82}$$

4.6.3 Le vecteur vitesse

Le vecteur vitesse de composantes (u,v,w) devient en utilisant (76):

$$\boxed{\begin{array}{rclcl} u(x,y,z) & = & \bar{u}(x,r,\theta) & = & \tilde{u}(x,r) \\ v(x,y,z) & = & \bar{v}(x,r,\theta) & = & \tilde{v}(x,r) \\ w(x,y,z) & = & \bar{w}(x,r,\theta) & = & \theta\tilde{v}(x,r) \end{array}} \tag{83}$$

et la correspondance des dérivées (77) s'exprime:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \quad , & \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \quad , & \dfrac{\partial w}{\partial x} = \theta \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \quad , & \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \quad , & \dfrac{\partial w}{\partial y} = \theta \left(\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \dfrac{\tilde{v}}{r} \right) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial z} = \theta \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \quad , & \dfrac{\partial v}{\partial z} = \theta \left(\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \dfrac{\tilde{v}}{r} \right) \quad , & \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\tilde{v}}{r} \end{array}} \tag{84}$$

4.6.4 Tenseur des contraintes visqueuses

Le tenseur des contraintes s'écrit en utilisant (78) et (84):

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{\sigma}_{11} = \frac{1}{3}\left(4\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{2}{r}\tilde{v}\right) = \frac{1}{3}\left([4\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial y}] - \frac{2}{y}v\right) = \sigma_{xx} - \frac{2v}{3y} \\[2ex] \tilde{\sigma}_{22} = \frac{1}{3}\left(-2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + 4\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{2}{r}\tilde{v}\right) = \frac{1}{3}\left([-2\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial y}] - \frac{2}{y}v\right) = \sigma_{yy} - \frac{2v}{3y} \\[2ex] \tilde{\sigma}_{33} = \frac{1}{3}\left(-2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} + \frac{4}{r}\tilde{v}\right) = \tilde{\sigma}_{22} - 2\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r}\right) \\[2ex] \tilde{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} = \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \sigma_{xy} \\[2ex] \bar{\sigma}_{13} = \bar{\sigma}_{31} = \theta\tilde{\sigma}_{12} \\[2ex] \bar{\sigma}_{23} = \bar{\sigma}_{32} = 2\theta\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r}\right) \end{array}} \tag{85}$$

4.6.5 Les composantes r_5, s_5 et t_5

Exprimons de (5) les fonctions r_5, s_5, t_5 de (x,y,z) comme des fonctions $\bar{r_5}$, $\bar{s_5}$, $\bar{t_5}$ de (x,r,θ) enutilisant (79):

$$\boxed{\begin{array}{llllll} \bar{r_5} = & \tilde{u}\tilde{\sigma}_{11}+ & \tilde{v}\tilde{\sigma}_{12}+ & & \frac{\Gamma}{Pr}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} & = \tilde{r_5} \\[2ex] \bar{s_5} = & \tilde{u}\tilde{\sigma}_{12}+ & \tilde{v}\tilde{\sigma}_{22}+ & & \frac{\Gamma}{Pr}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r} & = \tilde{s_5} \\[2ex] \bar{t_5} = & \theta\,\{\,\tilde{u}\tilde{\sigma}_{12}+ & 2\tilde{v}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r}\right)+ & \tilde{v}\tilde{\sigma}_{33}+ & \frac{\Gamma}{Pr}\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial r}\,\} & = \theta\,\tilde{s_5} \end{array}} \tag{86}$$

Références

[1] R. CARPENTIER, "Simulations des instabilités tourbillonnaires dans les propulseurs à poudre du cas test C1", film INRIA audiovisuel & hypermédia, UCIS, 1998 (Prix spécial du jury dans la catégorie "Enseignement de la recherche par la recherche" au 3ème festival du film de chercheur, Nancy 24-28 mars 1998.

[2] N. LUPOGLAZOFF, F. VUILLOT, *Conception, spécifications et calculs du cas test C3 pour la validation instationnaire des modèles physiques.*, 3ème colloque R&T du CNES à Poitiers, 25, 26, 27 mars 1998, Volume 1, pp. 137-141.

[3] P. L. ROE, "*Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*", J. Comp. Phys., **43**, pp. 357-372, 1981.

[4] R. CARPENTIER, "*Comparaison entre des schémas 2D de type Roe sur maillage régulier triangle ou quadrangle. I: calcul au sommet - Le $\beta\gamma$ schéma*", rapport INRIA N^o3360, février 1998.

[5] L. FEZOUI, "*Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis*", Rapport INRIA 358, 1985.

[6] S. CANDEL, "*Mécanique des fluides*", Dunod Université, pp 255-260.

[7] A. GOUDJO, J.A. DESIDERI, "*Un schéma de volumes finis décentré pour la résolution des équations d'Euler en axisymétrique*", rapport INRIA N^o1005, mars 1989.

[8] J. DUPAYS, A. DELFOUR, "*Description du montage LP2/C1x et résultats de la campagne d'essais 1994.*", IMG/LEGI, rapport de synthèse 95, février 1995.

[9] J. DUPAYS, P. TARRIN, "*Programme ASSM5, axe SF. Campagne d'essais butalazine sur le montage C1xb-p*, ONERA RT 80/6133 EY, avril 1996.

[10] N. LUPOGLAZOFF, F. VUILLOT, *Application de modèle de turbulence de sous maille aux cas test C1 et C1x et mise au point d'un module de combustion instationnaire*" ONERA RT 50/6133 EY, décembre 1994.

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - B.P. 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - B.P. 101 - 54602 Villers lès Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot St Martin (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, B.P. 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399