



HAL
open science

Une méthode stabilisée d'éléments finis affines pour les équations de Quasi-Stokes

Mohamed Amara, Fadi El Dabaghi, Maatoug Hassine

► **To cite this version:**

Mohamed Amara, Fadi El Dabaghi, Maatoug Hassine. Une méthode stabilisée d'éléments finis affines pour les équations de Quasi-Stokes. [Rapport de recherche] RR-4142, INRIA. 2001. inria-00072483

HAL Id: inria-00072483

<https://inria.hal.science/inria-00072483>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Une méthode stabilisée d'éléments finis affines
pour les équations de Quasi-Stokes*

Mohamed Amara , Fadi El Dabaghi , Maatoug Hassine

No 4142

Mars 2001

_____ THÈME 4 _____



*Rapport
de recherche*

Une méthode stabilisée d'éléments finis affines pour les équations de Quasi-Stokes

Mohamed Amara^{*}, Fadi El Dabaghi[†], Maatoug Hassine[‡]

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet COSIVIE

Rapport de recherche n 4142 — Mars 2001 — 52 pages

Résumé : On présente une méthode d'éléments finis mixte pour la résolution des équations bidimensionnelles de Quasi-Stokes. Cette méthode doit servir de solveur de base pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes instationnaires. Ces dernières sont linéarisées en utilisant une méthode des caractéristiques du premier ordre pour traiter le terme de dérivée particulière. La formulation mixte de Quasi-Stokes a pour inconnues la vorticité et la fonction courant discrétisées par des fonctions continues et affines localement. Une approche directe entraînant la perte d'un ordre d'erreur dans ce type de méthode, on utilise une technique de régularisation-stabilisation par adjonction d'une nouvelle forme discrète. Cette nouvelle formulation reste consistante et est inconditionnellement convergente. En cas de régularité suffisante, une estimation d'erreur optimale en $O(h)$ est obtenue. Des essais numériques sont présentés permettant de confirmer les résultats annoncés dans l'étude théorique.

Mots-clé : Navier-Stokes, Quasi-Stokes, méthodes mixtes, méthodes stabilisées, éléments finis, fonction courant, vorticité

(Abstract: pto)

^{*} COSIVIE-LMA/IPRA Université de Pau et des Pays de l'Adour; mohamed.amara@univ-pau.fr

[†] COSIVIE; dabaghi@squatina.inria.fr

[‡] COSIVIE-LAMSIN/ENIT, Tunisie; Boursier ESIMEAU/CRUCID et STIC ENIT/INRIA

A Linear Piecewise Finite Element Stabilized Method for The Quasi-Stokes Equations

Abstract: We present a mixed finite element method to solve numerically the two-dimensional Quasi-Stokes equations. The aim is to use this method as a basic solver for the instationary Navier-Stokes equations. To linearize these Navier-Stokes equations, the total time derivative term is treated with a first order characteristics method. The unknowns of the mixed Quasi-Stokes formulation, the vorticity and the stream function, are discretized by piecewise continuous functions. A direct approach leading to the loss of one order in the error estimates, we use a regularization-stabilization technic by adding a new discrete form in the formulation. This new formulation remains consistent and is unconditionally convergent. Moreover, in case of sufficient regularity on the vorticity, we get an $O(h)$ optimal error estimate. Numerical tests are performed in order to confirm the results announced in the theoretical analysis.

Key-words: Navier-Stokes, Quasi-Stokes, mixed methods, stabilized methods, finite elements, stream function, vorticity

1 Introduction

On considère un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ polygonale, simplement connexe. La forme standard des équations de Navier-Stokes décrivant le mouvement d'un fluide incompressible dans Ω est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \quad t > 0, \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{dans } \Omega, \quad t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

où u est la vitesse d'écoulement, p la pression, f une force par unité de masse donnée et ν la viscosité cinématique du fluide.

Les conditions aux limites sont de type Dirichlet homogène pour la vitesse et les conditions initiales portent elles aussi sur la vitesse. Cette formulation, appelée formulation vitesse-pression, peut être réécrite en introduisant deux autres fonctions scalaires, à savoir la vorticité ou tourbillon (notée dans la suite par ω) et la fonction courant (notée ψ). Le lien entre ces fonctions est donnée par les relations:

$$\begin{cases} \omega = \nabla \times u & \text{et} & u = \nabla \times \psi. \end{cases} \quad (2)$$

On obtient alors la formulation $\omega - \psi$ ou formulation tourbillon-fonction courant, qui s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \nabla \omega - \nu \Delta \omega = \nabla \times f & \text{dans } \Omega, \quad t > 0, \\ \omega + \Delta \psi = 0 & \text{dans } \Omega, \quad t > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Les conditions aux limites impliquent que la fonction ψ et sa dérivée normale $\partial_n \psi$ sont nulles sur la frontière Γ . Les conditions initiales concernent ω .

Une discrétisation en temps, par une méthode de caractéristiques, nous amène à traiter le terme de dérivée particulaire au temps t en prenant:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(t, x) + u \nabla \omega(t, x) = \frac{\omega(t, x) - \omega(t - \Delta t, x(t - \Delta t))}{\Delta t} \quad (4)$$

où Δt est le paramètre de discrétisation en temps et $x(t - \Delta t)$ correspond au point en aval de x au temps $t - \Delta t$. Le système instationnaire précédent, se discrétise alors à chaque temps t , sous la forme du système de Quasi-Stokes suivant:

$$\begin{cases} \omega + \Delta\psi & = 0 & \text{dans } \Omega \\ -\Delta\omega - \lambda \Delta\psi & = F & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (5)$$

où $\lambda = \frac{1}{\nu \Delta t}$ et $F = \lambda \omega^P + \frac{1}{\nu} \nabla \times f$ avec $\omega^P(t, x) = \omega(t - \Delta t, x(t - \Delta t))$.

Le but de cet article est d'écrire la décomposition $\omega - \psi$ dans un cadre variationnel naturel, à savoir ω dans $L^2(\Omega)$ avec $\Delta\omega$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et ψ dans $H_0^1(\Omega)$, par le biais d'une méthode mixte. Cette décomposition pour le problème de Stokes et les propriétés des espaces fonctionnels induits sont décrits dans Bernardi-Girault-Maday [6], Girault-Giroire-Sequeira [14]. Ce cadre va nous permettre de généraliser ces résultats d'existence et d'unicité de solution à ce problème de Quasi-Stokes sans hypothèse particulière. Il nous permettra aussi de proposer une méthode numérique d'approximation de Quasi-Stokes avec des estimations d'erreur optimales. Cette méthode est une généralisation de celle donnée dans Amara[3], Amara-Dabaghi [4] pour le problème de Stokes.

On cherche ω_h et ψ_h , les approximations respectives de ω et ψ , dans un espace d'éléments finis continus, affines localement i.e. \mathbb{P}_1 . Une approche directe entraîne la perte d'un ordre d'erreur dans ce type de méthode. Cette perte est due au fait que la forme principale a de la méthode mixte n'est plus uniformément coercive en discret. Pour pallier à cet aspect, on utilise la technique de stabilisation décrite dans Amara[3], Amara-Dabaghi [4], qui consiste à changer cette forme principale a en une autre forme a_h par adjonction de termes stabilisants. Cette forme a_h est alors uniformément coercive sur le problème discret et cette nouvelle formulation reste consistante. On obtient ainsi avec l'élément \mathbb{P}_1 , une méthode inconditionnellement convergente. En cas de régularité suffisante sur ω , on a une estimation d'erreur optimale à savoir : $\|\omega - \omega_h\|_{0,\Omega} + |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq Ch (|\omega|_{2,\Omega} + |\psi|_{2,\Omega})$.

Cet article est composé de trois paragraphes. Dans le premier, on présente la formulation variationnelle mixte associée au problème de Quasi-Stokes ainsi que les espaces fonctionnels utilisés. On obtient alors, en utilisant le théorème de Babuska-Brezzi, existence et unicité de la solution de ce problème.

Ensuite dans le deuxième paragraphe, on donne la formulation variationnelle discrète associée à des éléments finis continus, affines localement. L'analyse des estimations d'erreurs a priori montre une perte d'un ordre d'erreur. Cette perte est

dûe à la non-coercivité uniforme de la forme principale a . On introduit alors les termes stabilisants adéquats dans cette forme. On montre alors que la méthode reste consistante et que la nouvelle forme est uniformément coercive dès que le paramètre de stabilisation est convenablement choisi. On donne les estimations d'erreur a priori en fonction du coefficient λ et du paramètre de stabilisation. Dans le cas d'une régularité optimale en ω , on vérifie que l'on récupère une estimation d'erreur optimale i.e. en $O(h)$.

Le dernier paragraphe est dévolu à la validation numérique de la méthode et aux essais numériques. Ces essais permettent de confirmer les résultats annoncés dans l'étude théorique. Ils prouvent ainsi l'efficacité de la méthode proposée. On présente aussi dans cette partie, des essais numériques effectués sur le problème de Navier-Stokes instationnaire, en utilisant une méthode des caractéristiques du premier ordre pour discrétiser le temps.

2 Analyse du problème de Quasi-Stokes

2.1 Notations et rappels mathématiques

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , connexe de frontière Γ simplement connexe, polygonale. On suppose que Ω ne comporte pas de fissures. On note $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1,1,\Omega}$ le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. On précise les notations sur les normes suivantes :

$$\begin{aligned}
 \forall v \in L^2(\Omega) \quad , \quad \|v\|_{0,\Omega} &= \left(\int_{\Omega} |v|^2 d\Omega \right)^{1/2} \\
 \forall v \in H^1(\Omega) \quad , \quad |v|_{1,\Omega} &= \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right)^{1/2} \\
 \forall v \in H^1(\Omega) \quad , \quad \|v\|_{1,\Omega} &= \left(\|v\|_{0,\Omega}^2 + |v|_{1,\Omega}^2 \right)^{1/2} \\
 \forall v \in H^{-1}(\Omega) \quad , \quad \|v\|_{-1,\Omega} &= \sup_{\varphi \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle v, \varphi \rangle_{-1,1,\Omega}}{|\varphi|_{1,\Omega}}
 \end{aligned} \tag{6}$$

On introduit aussi les espaces fonctionnels suivants:

$$\begin{aligned}
 H^0(\Delta; \Omega) &= \left\{ \theta \in L^2(\Omega) ; \Delta\theta \in L^2(\Omega) \right\} , \\
 H^{-1}(\Delta; \Omega) &= \left\{ \theta \in L^2(\Omega) ; \Delta\theta \in H^{-1}(\Omega) \right\} .
 \end{aligned}$$

On définit l'application ρ de $H^{-1}(\Delta; \Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ par:

$$\Delta\rho(v) = \Delta v \text{ dans } H^{-1}(\Omega), \forall v \in H^{-1}(\Delta; \Omega). \quad (7)$$

L'application ρ est linéaire, continue et vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \rho(v) &= v, \\ \forall \theta \in H^{-1}(\Delta; \Omega), \quad |\rho(\theta)|_{1,\Omega} &= \|\Delta\theta\|_{-1,\Omega}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad |\rho(v)|_{1,\Omega} \leq |v|_{1,\Omega},$$

On remarque que

$$\forall v \in H^{-1}(\Delta; \Omega), \quad v - \rho(v) \in H^0(\Delta; \Omega).$$

On associe à l'espace $H^{-1}(\Delta; \Omega)$ le produit scalaire

$$\forall \theta, \delta \in H^{-1}(\Delta; \Omega), \quad \langle \theta, \delta \rangle_{-1,\Delta,\Omega} = \int_{\Omega} \theta \delta \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla\rho(\theta) \nabla\rho(\delta) \, d\Omega,$$

et la norme associée

$$\forall \theta \in H^{-1}(\Delta; \Omega), \quad \|\theta\|_{-1,\Delta,\Omega} = \left(\|\theta\|_{0,\Omega}^2 + \|\Delta\theta\|_{-1,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

On utilise aussi γ_0 et γ_1 respectivement pour noter l'application trace et l'application trace de la dérivée normale. Après ces rappels, on va énoncer les résultats classiques suivants, pour plus de détails voir Bernardi-Girault-Maday[8], Girault-Giroire-Sequera[14],...

Proposition 2.1

- $H^{-1}(\Delta; \Omega)$ est un espace de Hilbert
- $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^{-1}(\Delta; \Omega)$.

Proposition 2.2

- L'injection de $H^0(\Delta; \Omega)$ dans $H^{-1}(\Delta; \Omega)$ est continue.
- Il existe une application trace $\gamma_0 : H^{-1}(\Delta; \Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ telle que $\forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \quad \gamma_0(v) = v|_{\Gamma}$

De plus on a la formule de Green suivante

$$\forall \phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \forall v \in H^{-1}(\Delta; \Omega) \int_{\Omega} \Delta\phi v \, d\Omega - \langle \Delta v, \phi \rangle_{-1,1,\Omega} = \langle \gamma_0(v), \partial_n \phi \rangle_{-1,1,\Omega}$$

où $\partial_n \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est la trace dérivée normale de ϕ .

2.2 Problème continu, existence et unicité de la solution

Etant données $f \in H^{-1}(\Omega)$, $\psi_d \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\lambda \geq 0$. (9)

Le problème de Quasi-Stokes consiste à trouver ω dans $H^{-1}(\Delta; \Omega)$ et ψ dans $H^1(\Omega)$ telles que

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega + \Delta\psi = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \Delta\omega + \lambda\Delta\psi = f \quad \text{dans } \Omega \\ \psi = \psi_d \quad \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} = g \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (10)$$

On a pour tout $\psi_d \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ il existe une fonction $\bar{\varphi} \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_0(\bar{\varphi}) = \psi_d$ p.p. sur Γ . On définit alors la forme linéaire

$$G(\theta) = \int_{\Omega} \nabla\bar{\varphi}\nabla\theta d\Omega - \int_{\Gamma} \theta g d\Gamma \quad \forall \theta \in H^1(\Omega) \quad (11)$$

On note par X l'espace $H^{-1}(\Delta; \Omega)$

Proposition 2.3

La forme G se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue notée G définie de X sur \mathbb{R} et telle que

$$\|G\|_X = \sup_{\theta \in H^1(\Omega)} \frac{|G(\theta)|}{\|\theta\|_X} \quad (12)$$

Preuve 2.1

Il s'agit d'une application du théorème de Hahn-Banach. Sachant que $H^1(\Omega)$ est dense dans X , il suffit de vérifier que G définie en (11) est continue pour la topologie de X sur $H^1(\Omega)$.

D'après (21), il existe $\phi \in H^2(\Omega)$ tel que $\gamma_0(\phi) = \psi_d$ p.p. sur Γ et $\gamma_1(\phi) = g$ p.p. sur Γ (dérivée normale de ϕ).

Par construction $\bar{\varphi} - \phi \in H_0^1(\Omega)$ et on a pour tout $\theta \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
G(\theta) &= \int_{\Omega} \nabla(\bar{\varphi} - \phi) \nabla \theta \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \theta \, d\Omega - \int_{\Gamma} \theta g \, d\Gamma \\
&= -\langle \Delta \theta, \bar{\varphi} - \phi \rangle_{-1,1,\Omega} - \int_{\Omega} \theta \Delta \phi \, d\Omega + \int_{\Gamma} \theta \gamma_1(\phi) \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \theta g \, d\Gamma \\
&= \langle \Delta \theta, \phi - \bar{\varphi} \rangle_{-1,1,\Omega} - \int_{\Omega} \theta \Delta \phi \, d\Omega
\end{aligned} \tag{13}$$

d'où

$$|G(\theta)| \leq \|\theta\|_X \left(\|\phi - \bar{\varphi}\|_{1,\Omega}^2 + \|\Delta \phi\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

On a ainsi la continuité de G sur $H^1(\Omega)$ pour la topologie de X .

Maintenant en fonction de f et λ ; données en (21), on définit sur $M = H_0^1(\Omega)$ la forme linéaire continue

$$F(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{-1,1,\Omega} - \lambda \int_{\Omega} \nabla \bar{\varphi} \nabla \varphi \, d\Omega \quad \forall \varphi \in M \tag{15}$$

On considère le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \omega \in X, \quad \tilde{\psi} \in M \quad \text{tels que} \\ \int_{\Omega} \theta \omega \, d\Omega + \langle \Delta \theta, \tilde{\psi} \rangle_{-1,1,\Omega} = G(\theta) \quad \forall \theta \in X \\ -\langle \Delta \omega, \varphi \rangle_{-1,1,\Omega} + \lambda \int_{\Omega} \nabla \tilde{\psi} \nabla \varphi \, d\Omega = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in M \end{array} \right. \tag{16}$$

Par densité, ce problème est équivalent au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \omega \in X, \quad \tilde{\psi} \in M \quad \text{tels que} \\ \int_{\Omega} \theta \omega \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \tilde{\psi} \nabla \theta \, d\Omega = G(\theta) \quad \forall \theta \in H^1(\Omega) \\ -\langle \Delta \omega, \varphi \rangle_{-1,1,\Omega} + \lambda \int_{\Omega} \nabla \tilde{\psi} \nabla \varphi \, d\Omega = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{17}$$

En posant

$$\psi = \tilde{\psi} + \bar{\varphi}, \tag{18}$$

le problème (17) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \omega \in X, \quad \psi \in M^d \text{ tels que} \\ \int_{\Omega} \theta \omega \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \theta \, d\Omega = \int_{\Gamma} g \theta \, d\Omega \quad \forall \theta \in H^1(\Omega) \\ - \langle \Delta \omega, \varphi \rangle_{-1,1,\Omega} + \lambda \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \varphi \, d\Omega = \langle f, \varphi \rangle_{-1,1,\Omega} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (19)$$

où

$$M^d = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega); \quad \gamma_0(\varphi) = \psi_d \text{ p. p. sur } \Gamma \right\} \quad (20)$$

On a donc équivalence entre les problèmes (16), (17) et (19) sous la définition (18) de ψ . D'autre part, le problème (19) s'interprètent immédiatement en

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \in X, \quad \psi \in M^d \\ \omega + \Delta \psi = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ -\Delta \omega - \lambda \Delta \psi = f \quad \text{dans } \Omega \\ \psi = \psi_d \quad \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} = g \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (21)$$

Théorème 2.1 *pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, $\psi_d \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$;
le problème (P) admet une solution unique.*

Preuve 2.2 *D'après ce qui précède, on a d'une part l'équivalence entre les problèmes (16), (17) et (19) et d'autre part l'équivalence entre le problème (19) et le problème (P). Il suffit de montrer donc l'existence et l'unicité de la solution de (16) pour en déduire celle de (17), (19) et de (P) respectivement.*

Or pour cela, on peut s'appuyer sur un cadre abstrait général donné par Brezzi-Fortin[7] pour en déduire ce résultat.

Dans la suite, on s'intéresse à séparer les contributions des données f, g et ψ_d en décomposant le problème (19) en deux problèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \omega^0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla \omega^0 \nabla \varphi d\Omega = \langle f, \varphi \rangle_{-1,1,\Omega}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \omega^* \in X, \quad \psi \in M^d \text{ tels que} \\ \int_{\Omega} \theta \omega^* d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \theta d\Omega = - \int_{\Omega} \theta \omega^0 d\Omega - \int_{\Gamma} g \theta d\Omega \quad \forall \theta \in H^1(\Omega) \\ - \langle \Delta \omega^*, \varphi \rangle_{-1,1,\Omega} + \lambda \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \varphi d\Omega = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (23)$$

L'équivalence entre (19) d'une part et (22)-(23) d'autre part a lieu sous la définition

$$\omega = \omega^0 + \omega^* \quad (24)$$

Ces deux problèmes s'interprètent immédiatement en

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^0 \in H_0^1(\Omega) \\ -\Delta \omega^0 = f \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^* \in X, \quad \psi \in H^2(\Omega) \\ -\Delta \psi = \omega^0 + \omega^* \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ -\Delta \omega^* - \lambda \Delta \psi = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \\ \gamma_0(\psi) = \psi_d \quad \text{p.p. sur } \Gamma \\ \gamma_1(\psi) = g \quad \text{p.p. sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (26)$$

L'intérêt de cette écriture est de permettre d'avoir une régularité plus forte pour ω^* , car

$$-\Delta \omega^* = \lambda \Delta \psi \in L^2(\Omega) \quad (27)$$

alors que

$$\begin{array}{l} -\Delta \omega^0 = f \in H^{-1}(\Omega) \\ \text{et} \\ -\Delta \omega = f + \lambda \Delta \psi \in H^{-1}(\Omega) \end{array} \quad (28)$$

On va s'intéresser à la discrétisation des problèmes (22)-(23) en tenant compte de cette particularité de ω^* pour améliorer le comportement des méthodes discrètes.

3 Approximations Numériques

3.1 Méthode des éléments finis

Soit \mathcal{T}_h une famille de triangulations régulières de $\overline{\Omega}$. On note, pour chaque triangle K de \mathcal{T}_h , h_K son diamètre et $mesK$ son aire et on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall h > 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad h_K^2 \leq C \, mesK \quad (29)$$

On note aussi

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \quad \text{et} \quad h_{min} = \min_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \quad (30)$$

A la décomposition \mathcal{T}_h , on associe l'ensemble \mathcal{C}_h des côtés internes de \mathcal{T}_h . On a alors, pour chaque côté T de \mathcal{C}_h , l'existence de 2 triangles K et K' de \mathcal{T}_h tels que :

$$K \neq K' \quad \text{et} \quad T = \partial K \cap \partial K' \quad (31)$$

A toute fonction $v \in L^2(\Omega)$, on associe $v|_K = v_K \in L^2(K)$ pour tout $K \in \mathcal{T}_h$.

Soient $K \in \mathcal{T}_h$ et $v_K \in H^2(K)$, on note $\partial_n^K v_K$ la dérivée normale de v_K sur ∂K .

Sous les notations (31), on définit alors le saut de la dérivée normale de v sur tout côté T de \mathcal{T}_h par

$$[\partial_n v]_T = \begin{cases} \partial_n^K v_K + \partial_n^{K'} v_{K'} & \text{p.p. sur } T \quad \text{si } T \in \mathcal{C}_h \\ 0 & \text{sur } T \quad \text{si } T \text{ est un côté frontalier.} \end{cases} \quad (32)$$

On remarque que si $v \in H^2(\Omega)$ alors $[\partial_n v]_T = 0 \quad \forall T \in \mathcal{C}_h$.

On considère les espaces discrets suivants :

$$\begin{cases} X_h & = \left\{ \theta_h \in C^0(\overline{\Omega}) ; \forall K \in \mathcal{T}_h, \theta|_K \in IP_1(K) \right\} \\ M_h & = X_h \cap H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (33)$$

où $IP_1(K)$ est l'espace des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 1, définies dans \bar{K} . On note

$$V_h = \left\{ \theta_h \in X_h; \quad \int_{\Omega} \nabla \theta_h \nabla \eta_h \, d\Omega = 0 \quad \forall \eta_h \in M_h \right\} \quad (34)$$

On rappelle que $\psi^d \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et que $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ s'injecte continument dans $C^0(\Gamma)$. On définit alors ψ_h^d une approximation de la fonction ψ^d dans X_h telle que pour tout sommet S de \mathcal{T}_h , on a

$$\psi_h^d(S) = \begin{cases} \psi^d(S) & \text{si } S \text{ est un sommet frontalier} \\ 0 & \text{si } S \text{ est un sommet interne} \end{cases} \quad (35)$$

On note

$$M_h^d = \left\{ \varphi_h \in X_h; \quad \varphi_h - \psi_h^d \in M_h \right\} \quad (36)$$

On définit enfin

$$\begin{cases} \langle \theta_h, \delta_h \rangle_h = \sum_{T \in \mathcal{C}_h} \text{mes}T \int_T [\partial_n \theta_h] [\partial_n \delta_h] \, dT & \forall \theta_h \in X_h, \forall \delta_h \in X_h \\ |\theta_h|_h = \sqrt{\langle \theta_h, \theta_h \rangle_h} & \forall \theta_h \in X_h \end{cases} \quad (37)$$

où $\text{mes}T$ est la mesure du côté T de \mathcal{C}_h .

Proposition 3.1

Il existe une constante $C > 0$, indépendante de h , telle que

$$|\theta_h|_h \leq C \|\Delta \theta_h\|_{-1, \Omega} \quad \forall \theta_h \in X_h \quad (38)$$

$$\|\Delta \theta_h\|_{-1, \Omega} \leq C |\theta_h|_h \quad \forall \theta_h \in V_h \quad (39)$$

- Pour la démonstration de ces résultats, on peut se référer à Amara-Dabaghi [4]. Le problème continu précédent se décompose aussi en

$$\begin{cases} \text{trouver } \omega^0 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla \omega^0 \nabla \varphi \, d\Omega = \langle f, \varphi \rangle_{-1, 1, \Omega}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \omega^* \in X, \quad \tilde{\psi} \in M \quad \text{tels que} \\ \int_{\Omega} \theta \omega^* d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \theta d\Omega = - \int_{\Omega} \theta \omega^0 d\Omega - \int_{\Gamma} g \theta d\Omega \quad \forall \theta \in H^1(\Omega) \\ - \langle \Delta \omega^*, \varphi \rangle_{-1,1,\Omega} + \lambda \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \varphi d\Omega = 0 \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (41)$$

$$\omega = \omega^0 + \omega^*. \quad (42)$$

En terme d'équations aux dérivées partielles, cette décomposition s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta \omega^0 = f \text{ dans } H^{-1}(\Omega), \quad \omega^0 \in H_0^1(\Omega), \\ \omega^0 + \omega^* = -\Delta \psi \text{ dans } L^2(\Omega), \quad \omega^* \in X, \quad \psi \in H^2(\Omega) \\ -\Delta \omega^* - \lambda \Delta \psi = 0 \text{ dans } H^{-1}(\Omega), \\ \gamma_0(\psi) = \psi_d \quad \text{p.p. sur } \Gamma, \quad \gamma_1(\psi) = g \quad \text{p.p. sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (43)$$

La discrétisation du problème va s'appuyer sur cette décomposition.

- On se donne un paramètre de stabilisation $\beta_h \geq 0$ et on considère les problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \omega_h^0 \in M_h \quad \text{tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla \omega_h^0 \nabla \varphi_h d\Omega = \langle f, \varphi_h \rangle_{-1,1,\Omega}, \quad \forall \varphi_h \in M_h \end{array} \right. \quad (44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \omega_h^* \in X_h, \quad \psi_h \in M_h^d \quad \text{tels que } \forall \theta_h \in X_h \\ \int_{\Omega} \theta_h \omega_h^* d\Omega + \beta_h \langle \omega_h^*, \theta_h \rangle_h - \int_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla \theta_h d\Omega = - \int_{\Omega} \theta_h \omega_h^0 d\Omega - \int_{\Gamma} g \theta_h d\Omega \\ \int_{\Omega} \nabla \omega_h^* \nabla \varphi_h d\Omega + \lambda \int_{\Omega} \nabla \psi_h \nabla \varphi_h d\Omega = 0 \quad \forall \varphi_h \in M_h \end{array} \right. \quad (45)$$

$$\omega_h = \omega_h^0 + \omega_h^* \quad (46)$$

On a immédiatement

Théorème 3.1

Pour tout $\beta_h \geq 0$, les problèmes (44) et (45) admettent une unique solution.

3.2 Estimations d'erreur a priori

On a immédiatement que

$$\int_{\Omega} \nabla(\omega^0 - \omega_h^0) \nabla \varphi_h \, d\Omega = 0 \quad \forall \varphi_h \in M_h$$

d'où

$$\begin{cases} |\omega^0 - \omega_h^0|_{1,\Omega} = \inf_{\eta_h \in M_h} |\omega^0 - \eta_h|_{1,\Omega} \\ \lim_{h \rightarrow 0} |\omega^0 - \omega_h^0|_{1,\Omega} = 0 \end{cases} \quad (47)$$

Proposition 3.2

Il existe deux constantes $a \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $C > 0$, ne dépendant que de Ω telles que

$$\|\omega^0 - \omega_h^0\|_{0,\Omega} \leq C h^a |\omega^0 - \omega_h^0|_{1,\Omega} \quad (48)$$

Preuve 3.1 Soit $\mu \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta\mu = \omega^0 - \omega_h^0 \in H_0^1(\Omega)$. Les résultats de régularité du laplacien (voir Grisvard [18], Kondratiev[19]) nous donnent l'existence de $a \in [\frac{1}{2}, 1]$ et de $C > 0$ ne dépendant que de Ω telles que $\mu \in H^{1+a}(\Omega)$ et $\|\mu\|_{1+a,\Omega} \leq C \|\omega^0 - \omega_h^0\|_{0,\Omega}$. On a aussi

$$\begin{aligned} \|\omega^0 - \omega_h^0\|_{0,\Omega}^2 &= - \int_{\Omega} (\omega^0 - \omega_h^0) \Delta\mu \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla(\omega^0 - \omega_h^0) \nabla\mu \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \nabla(\omega^0 - \omega_h^0) \nabla(\mu - \varphi_h) \, d\Omega \quad \forall \varphi_h \in M_h \\ &\leq |\omega^0 - \omega_h^0|_{1,\Omega} \inf_{\varphi_h \in M_h} |\omega^0 - \varphi_h|_{1,\Omega} \end{aligned} \quad (49)$$

Comme $\mu \in H_0^1(\Omega) \cap H^{1+a}(\Omega)$, on en déduit que

$$\inf_{\varphi_h \in M_h} |\omega^0 - \varphi_h|_{1,\Omega} \leq C h^a |\mu|_{1+a,\Omega}$$

d'où

$$\|\omega^0 - \omega_h^0\|_{0,\Omega} \leq C h^a \|\omega^0 - \omega_h^0\|_{1,\Omega} \text{ avec } C > 0 \text{ ne dépendant que de } \Omega.$$

• On s'intéresse maintenant à l'erreur sur ω^* et ψ . Nous aurons besoin des résultats de régularité du bilaplacien (voir Grisvard [18], Kondratiev [19]) que l'on rappelle: si $u \in H_0^2(\Omega)$ avec $\Delta^2 u \in H^{-1}(\Omega)$ alors il existe $b \in]\frac{1}{2}, 1]$, $p \in]\frac{4}{3}, +\infty[$ et $C > 0$ ne dépendant que de Ω tels que

$$u \in H^{2+b}(\Omega) \cap W^{3,p}(\Omega), \quad \|u\|_{2+b,\Omega} + \|u\|_{3,p,\Omega} \leq C \|\Delta^2 u\|_{-1,\Omega}. \quad (50)$$

Dans le cas de notre problème, on a

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi - \lambda \Delta \psi = f & \in H^{-1}(\Omega) \\ \psi \in H^2(\Omega), & \text{avec } \gamma_0(\psi) = \psi_d \text{ sur } \Gamma, \quad \gamma_1(\psi) = g \text{ p.p. sur } \Gamma \\ \psi^d \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), & g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{cases} \quad (51)$$

Proposition 3.3

Soit $\phi \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\gamma_0(\phi) = \psi_d \text{ sur } \Gamma, \quad \gamma_1(\phi) = g \text{ p.p. sur } \Gamma \text{ et } \Delta^2 \phi = 0 \text{ p.p. sur } \Omega$$

alors il existe $C > 0$ ne dépendant que de Ω , tel que

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \psi - \phi \in H^{2+b}(\Omega) \cap W^{3,p}(\Omega) \\ & \bullet \quad \|\psi - \phi\|_{2+b,\Omega} + \|\psi - \phi\|_{3,p,\Omega} \leq C \left(1 + \sqrt{\lambda}\right) \left(\|f\|_{-1,\Omega} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \sqrt{\lambda} \left(\|\psi_d\|_{\frac{3}{2},\Gamma} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma}\right)\right) \end{aligned} \quad (52)$$

Si de plus, $\phi \in W^{3,p}(\Omega)$ alors $\psi \in H^{2+b}(\Omega) \cap W^{3,p}(\Omega)$ et on a

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{2+b,\Omega} + \|\psi\|_{3,p,\Omega} \leq C \left(1 + \sqrt{\lambda}\right) \left(\|f\|_{-1,\Omega} \right. \\ \left. + \left(1 + \sqrt{\lambda}\right) \left(\|\psi_d\|_{\frac{3}{2}+b,\Gamma} + \|g\|_{\frac{1}{2}+b,\Gamma}\right)\right) \end{aligned} \quad (53)$$

Preuve 3.2 On a $\psi^d \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe donc $\phi \in H^2(\Omega)$ tel que $\Delta^2 \phi = 0$ p.p. dans Ω , $\gamma_0(\phi) = \psi^d$ sur Γ et $\gamma_1(\phi) = g$ p.p. sur Γ .

De plus, on a

$$\|\phi\|_{2,\Omega} \leq C \left(\|\psi^d\|_{\frac{3}{2},\Gamma} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \right)$$

où $C > 0$ ne dépend que de Ω .

1./ On remarque que $\psi^* = \psi - \phi \in H_0^2(\Omega)$ et $\Delta^2 \psi^* = \Delta^2 \psi$
d'où

$$\Delta^2 \psi^* = f + \lambda \Delta \psi \in H^{-1}(\Omega)$$

On a donc

$$\psi^* \in H_0^2(\Omega) \cap H^{2+b}(\Omega) \cap W^{3,p}(\Omega) \tag{54}$$

$$\|\psi^*\|_{2+b,\Omega} + \|\psi^*\|_{3,p,\Omega} \leq C \|f + \lambda \Delta \psi\|_{-1,\Omega}$$

On a aussi

$$\int_{\Omega} \Delta \psi \Delta \psi^* d\Omega + \lambda \int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \psi^* d\Omega = \langle f, \psi^* \rangle_{-2,2,\Omega}, \quad \text{car } \psi^* \in H_0^2(\Omega)$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\Delta \psi\|_{0,\Omega}^2 + \lambda \|\psi\|_{1,\Omega}^2 &= \langle f, \psi^* \rangle_{-2,2,\Omega} + \int_{\Omega} \Delta \phi \Delta \psi d\Omega + \lambda \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi d\Omega \\ &\leq \|f\|_{-2,\Omega} \|\psi - \phi\|_{2,\Omega} + \|\Delta \phi\|_{0,\Omega} \|\Delta \psi\|_{0,\Omega} + \lambda \|\phi\|_{1,\Omega} \|\psi\|_{1,\Omega} \\ \text{et } \|\psi - \phi\|_{2,\Omega} &= \|\Delta \psi - \Delta \phi\|_{0,\Omega} \leq \|\Delta \psi\|_{0,\Omega} + \|\Delta \phi\|_{0,\Omega} \end{aligned} \tag{55}$$

On en déduit que

$$\|\Delta \psi\|_{0,\Omega} + \sqrt{\lambda} \|\psi\|_{1,\Omega} \leq C \left(\|f\|_{-2,\Omega} + \|\Delta \phi\|_{0,\Omega} + \sqrt{\lambda} \|\phi\|_{1,\Omega} \right)$$

d'où

$$\sqrt{\lambda} \|\Delta \psi\|_{-1,\Omega} \leq \sqrt{\lambda} \|\psi\|_{1,\Omega} \leq C \left(\|f\|_{-1,\Omega} + (\lambda + \sqrt{\lambda}) \|\phi\|_{2,\Omega} \right).$$

On a par ailleurs, l'existence de $C > 0$ ne dépendant que de Ω , tel que

$$\|\psi^*\|_{2+b,\Omega} + \|\psi^*\|_{3,p,\Omega} \leq C \left(\|f\|_{-1,\Omega} + \lambda \|\psi\|_{1,\Omega} \right). \tag{56}$$

On en tire la majoration désirée.

2./ Si la régularité sur ψ_d et g est plus forte, i.e. il existe $\xi \in H^{2+b}(\Omega) \cap W^{3,p}(\Omega)$ tel que $\gamma_0(\xi) = \psi_d$ sur Γ et $\gamma_1(\xi) = g$ p.p. sur Γ

On a alors $\phi - \xi \in H_0^2(\Omega)$ et $\Delta^2(\phi - \xi) = -\Delta^2(\xi) \in H^{b-2}(\Omega)$

On obtient ainsi que $\phi - \xi \in H^{2+b}(\Omega) \cap W^{3,p}(\Omega)$

d'où

ϕ et $\psi \in H^{2+b}(\Omega) \cap W^{3,p}(\Omega)$

On en conclut que

$$\begin{aligned}
 \|\psi\|_{2+b,\Omega} + \|\psi\|_{3,p,\Omega} &\leq C(\Omega) \left(\|\phi\|_{3,p,\Omega} + \|\psi - \phi\|_{3,p,\Omega} \right) \\
 &\leq C(\Omega) \left(\|\phi - \xi\|_{3,p,\Omega} + \|\xi\|_{3,p,\Omega} + \|\psi - \phi\|_{3,p,\Omega} \right) \\
 &\leq C'(\Omega) \left(\|\Delta^2 \xi\|_{b-2,\Omega} + \|\xi\|_{3,p,\Omega} + \|\psi - \phi\|_{3,p,\Omega} \right) \\
 &\leq C''(\Omega) \left(\|\xi\|_{\frac{3}{2}+b,\Gamma} + \|\partial_n \xi\|_{\frac{1}{2}+b,\Gamma} + \|\psi - \phi\|_{3,p,\Omega} \right)
 \end{aligned} \tag{57}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \|\psi\|_{2+b,\Omega} + \|\psi\|_{3,p,\Omega} &\leq C \left(\|\psi_d\|_{\frac{3}{2}+b,\Gamma} + \|g\|_{\frac{1}{2}+b,\Gamma} + \|f\|_{-1,\Omega} \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\lambda} \|f\|_{-1,\Omega} + (\lambda + \sqrt{\lambda}) \left(\|\psi_d\|_{\frac{3}{2},\Gamma} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{58}$$

- On rappelle que $\omega = -\Delta\psi$, $\omega = \omega^0 + \omega^*$ avec $\omega^0 \in H_0^1(\Omega)$.

On en déduit que si $\phi \in W^{3,p}(\Omega)$ alors $\omega \in W^{1,p}(\Omega)$ ainsi que $\omega^* \in W^{1,p}(\Omega)$ et on a

$$\|\omega^*\|_{1,p,\Omega} \leq C \left(1 + \sqrt{\lambda} \right) \left(\left(1 + \sqrt{\lambda} \right) \left(\|\psi_d\|_{\frac{3}{2}+b,\Gamma} + \|g\|_{\frac{1}{2}+b,\Gamma} \right) + \|f\|_{-1,\Omega} \right). \tag{59}$$

Proposition 3.5

On a la relation

$$\lambda |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq \|\Delta\omega^* - \Delta\omega_h^*\|_{-1,\Omega} + 2\lambda \inf_{\varphi_h \in M_h^d} |\psi - \varphi_h|_{1,\Omega} \quad (63)$$

Preuve 3.4 Soient $\varphi_h \in M_h^d$ et $\xi_h = \psi_h - \varphi_h \in M_h$, on a alors

$$\begin{aligned} \lambda |\xi_h|_{1,\Omega}^2 &= \lambda \int_{\Omega} \nabla(\psi_h - \psi) \nabla \xi_h \, d\Omega + \lambda \int_{\Omega} \nabla(\psi - \varphi_h) \nabla \xi_h \, d\Omega \\ &= \langle \Delta(\omega^* - \omega_h^*), \xi_h \rangle_{-1,1,\Omega} + \lambda \int_{\Omega} \nabla(\psi - \varphi_h) \nabla \xi_h \, d\Omega \end{aligned} \quad (64)$$

d'où

$$\lambda |\xi_h|_{1,\Omega} \leq \|\Delta(\omega^* - \omega_h^*)\|_{-1,\Omega} + \lambda |\psi - \varphi_h|_{1,\Omega}$$

et on conclut comme précédemment.

- On note π_h l'opérateur d'interpolation de Lagrange avec

$$\begin{aligned} \pi_h : \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) &\longrightarrow X_h \\ v &\longrightarrow \pi_h v \end{aligned} \quad (65)$$

avec $\pi_h v(S) = v(S)$ pour tout S sommet de \mathcal{T}_h .

On rappelle qu'il existe $C > 0$, indépendante de h , telle que

$$\begin{aligned} \forall v \in H^2(\Omega), \quad |v - \pi_h v|_{1,K} &\leq C h_K |v|_{2,K} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \\ \|v - \pi_h v\|_{0,K} &\leq C h_K^2 |v|_{2,K} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \end{aligned} \quad (66)$$

On remarque que $\psi \in H^2(\Omega)$ et $\pi_h \psi \in M_h^d$ par construction. On en déduit que

$$\inf_{\varphi_h \in M_h^d} |\psi - \varphi_h|_{1,\Omega} \leq C h |\psi|_{2,\Omega}$$

on a donc

$$\begin{aligned} |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} &\leq C \left(\|\omega - \omega_h\|_{-1,\Omega} + \beta_h |\omega_h^*|_h + h |\psi|_{2,\Omega} \right) \\ |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} &\leq \frac{1}{\lambda} \|\Delta\omega^* - \Delta\omega_h^*\|_{-1,\Omega} + C h |\psi|_{2,\Omega} \end{aligned} \quad (67)$$

Le paramètre λ ayant pour vocation à tendre vers $+\infty$, la deuxième estimation est particulièrement intéressante dans cette situation. Cette estimation n'apparaît pas pour le système de Stokes. L'effet régularisant des problèmes instationnaires intervient ainsi, en particulier, à ce niveau.

3.2.2 Estimations d'erreur sur ω^*

On note P_h l'opérateur de projection, défini de $W^{1,p}(\Omega)$ dans X_h par

$$\int_{\Omega} (\theta - P_h \theta) d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \nabla(\theta - P_h \theta) \nabla \rho_h d\Omega = 0 \quad \forall \rho_h \in X_h.$$

Proposition 3.6

Il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que de Ω telle que

$$\begin{aligned} \|\omega^* - \omega_h^*\|_{0,\Omega} + \sqrt{\lambda} |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} &\leq C \left(h^a |\omega^0 - \omega_h^0|_{1,\Omega} + \|\omega^* - P_h \omega^*\|_{0,\Omega} \right. \\ &\quad \left. + \left(\lambda h \sqrt{\beta_h} + \frac{h}{\sqrt{\beta_h}} + h \sqrt{\lambda} \right) |\psi|_{2,\Omega} + \sqrt{\beta_h} \|\Delta(\omega^* - P_h \omega^*)\|_{-1,\Omega} \right) \end{aligned} \quad (68)$$

Preuve 3.5

Soit $\theta_h = P_h \omega^*$, on pose $\delta_h = \omega_h^* - \theta_h$, on a alors

$$\begin{aligned} \|\delta_h\|_{0,\Omega}^2 + \beta_h |\delta_h|_h^2 &= \int_{\Omega} (\omega_h^* - \omega^*) \delta_h d\Omega + \beta_h \langle \omega_h^*, \delta_h \rangle_h \\ &\quad + \int_{\Omega} (\omega^* - \theta_h) \delta_h d\Omega - \beta_h \langle \theta_h, \delta_h \rangle_h \\ &= \int_{\Omega} (\omega^0 - \omega_h^0) \delta_h d\Omega - \int_{\Omega} \nabla(\psi - \psi_h) \nabla \delta_h d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} (\omega^* - \theta_h) \delta_h d\Omega - \beta_h \langle \theta_h, \delta_h \rangle_h. \end{aligned} \quad (69)$$

Soit $\varphi_h = \pi_h \psi$ l'interpolé de Lagrange de ψ alors $\varphi_h \in M_h^d$. On pose $\xi_h = \psi_h - \varphi_h$, on a $\xi_h \in M_h$ et

$$\begin{aligned}
 \lambda |\xi_h|_{1,\Omega}^2 &= \lambda \int_{\Omega} \nabla(\psi_h - \psi) \nabla \xi_h \, d\Omega + \lambda \int_{\Omega} \nabla(\psi - \varphi_h) \nabla \xi_h \, d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \nabla(\omega^* - \omega_h^*) \nabla \xi_h \, d\Omega + \lambda \int_{\Omega} \nabla(\psi - \varphi_h) \nabla \xi_h \, d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \nabla(\omega^* - \theta_h) \nabla \xi_h \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \delta_h \nabla \xi_h \, d\Omega + \lambda \int_{\Omega} \nabla(\psi - \varphi_h) \nabla \xi_h \, d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \nabla \delta_h \nabla(\psi - \psi_h) \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \delta_h \nabla(\psi - \varphi_h) \, d\Omega \\
 &\quad + \lambda \int_{\Omega} \nabla(\psi - \varphi_h) \nabla \xi_h \, d\Omega.
 \end{aligned} \tag{70}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
 \|\delta_h\|_{0,\Omega}^2 + \beta_h |\delta_h|_h^2 + \lambda |\xi_h|_{1,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} (\omega^0 - \omega_h^0) \delta_h \, d\Omega + \int_{\Omega} (\omega^* - \theta_h) \delta_h \, d\Omega \\
 &\quad - \beta_h \langle \theta_h, \delta_h \rangle_h - \int_{\Omega} \nabla \delta_h \nabla(\psi - \varphi_h) \, d\Omega \\
 &\quad + \lambda \int_{\Omega} \nabla(\psi - \varphi_h) \nabla \xi_h \, d\Omega.
 \end{aligned} \tag{71}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 \|\delta_h\|_{0,\Omega}^2 + \beta_h |\delta_h|_h^2 + \lambda |\xi_h|_{1,\Omega}^2 &\leq (\|\omega^0 - \omega_h^0\|_{0,\Omega} + \|\omega^* - \theta_h\|_{0,\Omega}) \|\delta_h\|_{0,\Omega} \\
 &\quad - \beta_h \langle \theta_h, \delta_h \rangle_h - \int_{\Omega} \nabla \delta_h \nabla(\psi - \varphi_h) \, d\Omega \\
 &\quad + C\lambda h |\psi|_{2,\Omega} |\xi_h|_{1,\Omega}.
 \end{aligned} \tag{72}$$

On va s'intéresser particulièrement aux termes $\langle \theta_h, \delta_h \rangle_h$ et $\int_{\Omega} \nabla \delta_h \nabla(\psi - \varphi_h) \, d\Omega$.

- On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla \delta_h \nabla (\psi - \varphi_h) \, d\Omega &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \delta_h \nabla (\psi - \varphi_h) \, dK \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\psi - \varphi_h) \partial_n \delta_h \, d\partial K \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\psi - \varphi_h) [\partial_n \delta_h] \, dT
\end{aligned} \tag{73}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} \nabla \delta_h \nabla (\psi - \varphi_h) \, d\Omega \right| &\leq |\delta_h|_h \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_T} \|(\psi - \varphi_h)\|_{0,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C |\delta_h|_h \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_K} \|(\psi - \varphi_h)\|_{0,\partial K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{74}$$

On rappelle que $\|\psi - \varphi_h\|_{0,\partial K} \leq C \left\{ \frac{1}{\sqrt{h_K}} \|\psi - \varphi_h\|_{0,K} + \sqrt{h_K} |\psi - \varphi_h|_{1,K} \right\}$

mais comme $\varphi_h = \pi_h \psi$, on en déduit que $\|\psi - \varphi_h\|_{0,\partial K} \leq Ch_K \sqrt{h_K} |\psi|_{2,K}$.

On a alors:

$$\left| \int_{\Omega} \nabla \delta_h \nabla (\psi - \varphi_h) \, d\Omega \right| \leq Ch |\delta_h|_h |\psi|_{2,\Omega}. \tag{75}$$

• On rappelle aussi le résultat suivant, démontré dans Amara - Dabaghi [4]:

$\forall \rho_h \in X_h$, il existe $\Lambda(\rho_h) \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned}
\Lambda(\rho_h) |_{K \in \mathcal{T}_h} &\in IP_2(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \\
\Lambda(\rho_h)(S) &= 0 \quad \forall S \text{ sommet de } \mathcal{T}_h, \\
|\Lambda(\rho_h)|_{1,\Omega} &\leq C |\rho_h|_h, \\
\|\Lambda(\rho_h)\|_{0,\Omega} &\leq Ch |\Lambda(\rho_h)|_{1,\Omega}, \\
\langle \rho_h, \tau_h \rangle_h &= \int_{\Omega} \nabla \tau_h \nabla \Lambda(\rho_h) \, d\Omega \quad \forall \tau_h \in X_h.
\end{aligned} \tag{76}$$

• On en déduit que

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_h, \varphi_h \rangle_h &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_h \nabla \Lambda(\varphi_h) \, d\Omega = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Lambda(\varphi_h) [\partial_n \varphi_h] \, dT \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Lambda(\varphi_h) [\partial_n(\varphi_h - \psi)]_T \, dT, \quad \text{car } \psi \in H^2(\Omega) \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K \Lambda(\varphi_h) \Delta(\varphi_h - \psi) \, dK + \int_K \nabla \Lambda(\varphi_h) \nabla(\varphi_h - \psi) \, dK \right) \\
 &= - \int_{\Omega} \Lambda(\varphi_h) \Delta \psi \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \Lambda(\varphi_h) \nabla(\varphi_h - \psi) \, d\Omega \\
 &\leq \|\Lambda(\varphi_h)\|_{0,\Omega} \|\Delta \psi\|_{0,\Omega} + |\Lambda(\varphi_h)|_{1,\Omega} |\psi - \varphi_h|_{1,\Omega} \\
 &\leq C \left(h |\psi|_{2,\Omega} + |\psi - \varphi_h|_{1,\Omega} \right) |\varphi_h|_h
 \end{aligned} \tag{77}$$

d'où

$$|\varphi_h|_h \leq Ch |\psi|_{2,\Omega}.$$

• On s'intéresse maintenant à $\langle \theta_h, \delta_h \rangle_h$:

On a $\langle \theta_h, \delta_h \rangle_h = \langle \theta_h + \lambda \varphi_h, \delta_h \rangle_h - \lambda \langle \varphi_h, \delta_h \rangle_h$ et

$$\begin{aligned}
 \langle \theta_h + \lambda \varphi_h, \delta_h \rangle_h &= \int_{\Omega} \nabla(\theta_h + \lambda \varphi_h) \nabla \Lambda(\delta_h) \, d\Omega \\
 &= \langle \Delta(\omega^* + \lambda \psi - \theta_h - \lambda \varphi_h), \Lambda(\delta_h) \rangle_{-1,1,\Omega} \\
 &\leq \|\Delta(\omega^* + \lambda \psi - \theta_h - \lambda \varphi_h)\|_{-1,\Omega} |\Lambda(\delta_h)|_{1,\Omega} \\
 &\leq C \left(\|\Delta(\omega^* - \theta_h)\|_{-1,\Omega} + \lambda |\psi - \varphi_h|_{1,\Omega} \right) |\delta_h|_h
 \end{aligned} \tag{78}$$

d'où

$$|\langle \theta_h, \delta_h \rangle_h| \leq C \left(\|\Delta(\omega^* - \theta_h)\|_{-1,\Omega} + \lambda h |\psi|_{2,\Omega} \right) |\delta_h|_h. \tag{79}$$

On obtient alors, à partir de (71), la relation

$$\begin{aligned}
\|\delta_h\|_{0,\Omega} + \sqrt{\beta_h} |\delta_h|_h + \sqrt{\lambda} |\xi_h|_{1,\Omega} \leq C \left\{ \|\omega^0 - \omega_h^0\|_{0,\Omega} + \|\omega^* - \theta_h\|_{0,\Omega} \right. \\
+ \sqrt{\beta_h} \|\Delta(\omega^* - \theta_h)\|_{-1,\Omega} + \lambda h \sqrt{\beta_h} |\psi|_{2,\Omega} \\
\left. + \frac{h}{\sqrt{\beta_h}} |\psi|_{2,\Omega} + h\sqrt{\lambda} |\psi|_{2,\Omega} \right\}.
\end{aligned} \tag{80}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\|\omega^* - \omega_h^*\|_{0,\Omega} + \sqrt{\lambda} |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq C \left\{ \|\omega^0 - \omega_h^0\|_{0,\Omega} + \|\omega^* - \theta_h\|_{0,\Omega} \right. \\
+ \sqrt{\beta_h} \|\Delta(\omega^* - \theta_h)\|_{-1,\Omega} + \lambda h \sqrt{\beta_h} |\psi|_{2,\Omega} \\
\left. + \frac{h}{\sqrt{\beta_h}} |\psi|_{2,\Omega} + h\sqrt{\lambda} |\psi|_{2,\Omega} \right\}.
\end{aligned} \tag{81}$$

Proposition 3.7

Il existe $C > 0$, $p \in]\frac{4}{3}, 2]$, et $a \in]\frac{1}{2}, 1]$, ne dépendants que de Ω telles que

$$\|\Delta(\omega^* - P_h \omega^*)\|_{-1,\Omega} \leq C \left(h_{\min}^{1-\frac{2}{p}} |\omega^*|_{1,p,\Omega} + \lambda h |\psi|_{2,\Omega} \right), \tag{82}$$

$$\|\omega^* - P_h \omega^*\|_{0,\Omega} \leq C h^a h_{\min}^{1-\frac{2}{p}} |\omega^*|_{1,p,\Omega}.$$

Preuve 3.6

• On rappelle qu'il existe $p \in]\frac{4}{3}, 2]$ tel que ω et ω^* appartiennent à $W^{1,p}(\Omega)$ et on pose $p^* = \frac{p}{p-1}$. On note $\theta_h = P_h \omega^*$ et on remarque que $\Delta \omega^* + \lambda \Delta \psi = 0$ d'où $\Delta \omega^* \in L^2(\Omega)$.

On a

$$\begin{aligned}
\|\Delta(\omega^* - \theta_h)\|_{-1,\Omega} &= \|\lambda \Delta \psi + \Delta \theta_h\|_{-1,\Omega} \\
&\leq \lambda |\psi - \eta_h|_{1,\Omega} + \|\Delta \theta_h + \lambda \Delta \eta_h\|_{-1,\Omega} \quad \forall \eta_h \in M_h.
\end{aligned} \tag{83}$$

On choisit $\eta_h \in M_h$ tel que $\int_{\Omega} \nabla(\psi - \eta_h) \nabla \xi_h \, d\Omega = 0 \quad \forall \xi_h \in M_h$.

On a alors $|\psi - \eta_h|_{1,\Omega} = \inf_{\xi_h \in M_h} |\psi - \xi_h|_{1,\Omega} \leq C h |\psi|_{2,\Omega}$.

De plus, $\int_{\Omega} \nabla(\theta_h + \lambda\eta_h) \nabla \xi_h \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla(\omega^* + \lambda\psi) \nabla \xi_h \, d\Omega = 0 \quad \forall \xi_h \in M_h$.

On a donc $\theta_h + \lambda\eta_h \in V_h$ et $\|\Delta\theta_h + \lambda\Delta\eta_h\|_{-1,\Omega} \leq C |\theta_h + \lambda\eta_h|_h$

d'où

$$\begin{aligned} \|\Delta\theta_h + \lambda\Delta\eta_h\|_{-1,\Omega} &\leq C (|\theta_h|_h + \lambda |\eta_h - \pi_h\psi|_h + \lambda |\pi_h\psi|_h) \\ &\leq C (|\theta_h|_h + \lambda |\eta_h - \pi_h\psi|_{1,\Omega} + \lambda |\pi_h\psi|_h) \\ &\leq C (|\theta_h|_h + \lambda h |\psi|_{2,\Omega}). \end{aligned} \quad (84)$$

On a alors

$$\|\Delta(\omega^* - \theta_h)\|_{-1,\Omega} \leq C (|\theta_h|_h + \lambda h |\psi|_{2,\Omega})$$

Par ailleurs, pour tout $\tau_h \in X_h$, on a aussi

$$|\theta_h|_h^2 = \int_{\Omega} \nabla\theta_h \nabla\Lambda(\theta_h) \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla\theta_h \nabla(\Lambda(\theta_h) - \tau_h) \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla\theta_h \nabla\tau_h \, d\Omega$$

On choisit $\tau_h \in X_h$ tel que $\tau_h = P_h\Lambda(\theta_h)$ d'où

$$\begin{aligned} |\theta_h|_h^2 &= \int_{\Omega} \nabla\theta_h \nabla\tau_h \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla\omega^* \nabla\tau_h \, d\Omega \\ &\leq |\omega^*|_{1,p,\Omega} |\tau_h|_{1,p^*,\Omega} \leq C h_{\min}^{1-\frac{2}{p}} |\omega^*|_{1,p,\Omega} |\tau_h|_{1,\Omega} \\ &\leq C h_{\min}^{1-\frac{2}{p}} |\omega^*|_{1,p,\Omega} |\Lambda(\theta_h)|_{1,\Omega} \\ &\leq C h_{\min}^{1-\frac{2}{p}} |\omega^*|_{1,p,\Omega} |\theta_h|_h. \end{aligned} \quad (85)$$

On en déduit le résultat désiré.

• Il reste à estimer $\|\omega^* - \theta_h\|_{0,\Omega}$. On considère le problème auxiliaire

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla \mu \nabla \rho \, d\Omega = \int_{\Omega} (\omega^* - \theta_h) \rho \, d\Omega \quad \forall \rho \in H^1(\Omega) \\ \mu \in H^1(\Omega), \quad \text{avec} \int_{\Omega} \mu \, d\Omega = 0 \end{cases} \quad (86)$$

Ce problème de Laplace-Neumann admet une unique solution qui vérifie les résultats de régularité suivants (voir Grisvard [18], Kondratiev [19]):

$$\mu \in H^{1+a}(\Omega) \cap W^{1,p^*}(\Omega) \quad (87)$$

$$\|\mu\|_{1+a,\Omega} \leq C \|\omega^* - \theta_h\|_{0,\Omega}$$

avec $a \in]\frac{1}{2}, 1]$, $p^* \geq 4$ et $C > 0$ ne dépendant que de Ω .

On a alors

$$\begin{aligned} \|\omega^* - \theta_h\|_{0,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} (\omega^* - \theta_h)(\omega^* - \rho) \, d\Omega + \int_{\Omega} (\omega^* - \theta_h)(\rho - \theta_h) \, d\Omega \quad \forall \rho \in H^1(\Omega) \\ &= \int_{\Omega} (\omega^* - \theta_h)(\omega^* - \rho) \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \mu \nabla (\rho - \theta_h) \, d\Omega \end{aligned} \quad (88)$$

Or $\omega^* \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\mu \in W^{1,p^*}(\Omega)$, d'où

$$\int_{\Omega} \nabla \mu \nabla (\rho - \theta_h) \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \mu \nabla (\omega^* - \theta_h) \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \mu \nabla (\rho - \omega^*) \, d\Omega$$

En utilisant la densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ et l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|\omega^* - \theta_h\|_{0,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} \nabla \mu \nabla (\omega^* - \theta_h) \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla (\mu - \rho_h) \nabla (\omega^* - \theta_h) \, d\Omega \quad \forall \rho_h \in X_h \\ &\leq |\mu - \rho_h|_{1,p^*,\Omega} |\omega^*|_{1,p,\Omega} \quad \text{avec le choix} \rho_h = P_h(\mu). \end{aligned} \quad (89)$$

On obtient aussi que, pour ce choix de ρ_h ,

$$\begin{aligned}
 |\mu - \rho_h|_{1,p^*,\Omega} &\leq |\mu - \pi_h \mu|_{1,p^*,\Omega} + |\pi_h \mu - \rho_h|_{1,p^*,\Omega} \\
 &\leq |\mu - \pi_h \mu|_{1,p^*,\Omega} + C h_{\min}^{1-\frac{2}{p}} |\pi_h \mu - \rho_h|_{1,\Omega} \\
 &\leq |\mu - \pi_h \mu|_{1,p^*,\Omega} + C h_{\min}^{1-\frac{2}{p}} \left(|\mu - \pi_h \mu|_{1,\Omega} + |\mu - \rho_h|_{1,\Omega} \right).
 \end{aligned} \tag{90}$$

On a par ailleurs, d'une part que:

$$|\mu - \rho_h|_{1,\Omega} = \inf_{\tau_h \in X_h} |\mu - \tau_h|_{1,\Omega} \leq |\mu - \pi_h \mu|_{1,\Omega} \leq C h^a |\mu|_{1+a,\Omega},$$

et d'autre part que:

$$|\mu - \pi_h \mu|_{1,p^*,\Omega} \leq C h^{a+1-\frac{2}{p}} |\mu|_{1+a,\Omega} \leq C h^a h_{\min}^{1-\frac{2}{p}} |\mu|_{1+a,\Omega}.$$

On en déduit

$$|\mu - \rho_h|_{1,p^*,\Omega} \leq C h^a h_{\min}^{1-\frac{2}{p}} \|\omega^* - \theta_h\|_{0,\Omega}.$$

Proposition 3.8

Sous l'hypothèse de régularité $\omega^* \in H^2(\Omega)$, il existe $C > 0$, ne dépendant que de Ω telle que

$$\begin{aligned}
 \|\Delta(\omega^* - P_h \omega^*)\|_{-1,\Omega} &\leq C h |\omega^*|_{2,\Omega}, \\
 \|\omega^* - P_h \omega^*\|_{0,\Omega} &\leq C h^{a+1} |\omega^*|_{2,\Omega}.
 \end{aligned} \tag{91}$$

Preuve 3.7

Le premier résultat est immédiat, le second se démontre avec le même argument d'Aubin-Nitsche que celui utilisé dans la proposition précédente.

Théorème 3.2 Il existe $C > 0$, $p \in [\frac{4}{3}, 2]$ et $a \in [\frac{1}{2}, 1]$, ne dépendant que de Ω , telles que, si on note

$$e_h = \left(\lambda h \sqrt{\beta_h} + \frac{h}{\sqrt{\beta_h}} + h \sqrt{\lambda} \right) |\psi|_{2,\Omega} + \left(h^a + \sqrt{\beta_h} \right) h_{\min}^{1-\frac{2}{p}} |\omega^*|_{1,p,\Omega}$$

on a alors les estimations d'erreur a priori suivantes:

$$\|\omega^* - \omega_h^*\|_{0,\Omega} + \sqrt{\lambda} |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq C \left\{ h^a |\omega^0 - \omega_h^0|_{1,\Omega} + e_h \right\}, \quad (92)$$

$$\|\omega^0 - \omega_h^0\|_{0,\Omega} \leq C h^a |\omega^0 - \omega_h^0|_{1,\Omega} \quad (93)$$

$$|\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq C h |\psi|_{2,\Omega} + C (1 + \sqrt{\beta_h}) \left\{ h^a |\omega^0 - \omega_h^0|_{1,\Omega} + e_h \right\} \quad (94)$$

Théorème 3.3 *Sous les hypothèses de régularité $\omega^* \in H^2(\Omega)$ et $\omega^0 \in H^2(\Omega)$, il existe $C > 0$ et $a \in]\frac{1}{2}, 1]$, ne dépendant que de Ω , telles que, si on note*

$$e_h = \left(\lambda h \sqrt{\beta_h} + \frac{h}{\sqrt{\beta_h}} + h \sqrt{\lambda} \right) |\psi|_{2,\Omega} + \left(h^a + \sqrt{\beta_h} \right) h |\omega^*|_{2,\Omega}$$

on a alors les estimations d'erreur a priori suivantes:

$$\|\omega^* - \omega_h^*\|_{0,\Omega} + \sqrt{\lambda} |\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq C \left(h^{a+1} |\omega^0|_{2,\Omega} + e_h \right), \quad (95)$$

$$\|\omega^0 - \omega_h^0\|_{0,\Omega} \leq C h^{a+1} |\omega^0|_{2,\Omega} \quad (96)$$

$$|\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq C h |\psi|_{2,\Omega} + C \left(1 + \sqrt{\beta_h} \right) \left\{ h^{a+1} |\omega^0|_{2,\Omega} + e_h \right\} \quad (97)$$

3.2.3 Choix du paramètre de stabilisation β_h

Le paramètre β_h est choisi de telle façon que les estimations d'erreur précédentes soient les meilleures possibles. Ce choix doit assurer une convergence inconditionnelle d'une part et une convergence optimale en cas de régularité suffisante d'autre part.

- Dans le cas régulier où $\omega^* \in H^2(\Omega)$ et $\omega^0 \in H^2(\Omega)$, il suffit de choisir

$$\sqrt{\beta_h} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (98)$$

On obtient en ce cas que:

$$e_h = h \sqrt{\lambda} |\psi|_{2,\Omega} + \left(h^{a+1} + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right) |\omega^*|_{2,\Omega}.$$

On a alors les estimations d'erreur a priori suivantes:

$$\|\omega^* - \omega_h^*\|_{0,\Omega} \leq C \left\{ h\sqrt{\lambda} + h^{a+1} + \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right\}, \quad (99)$$

$$|\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq C \left\{ h + \frac{h^{a+1}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{h}{\lambda} \right\}, \quad (100)$$

où les constantes $C > 0$ ne dépendent que de Ω , $|\omega^*|_{2,\Omega}$, $|\omega^0|_{2,\Omega}$, $|\psi|_{2,\Omega}$.

Ce choix de paramètre β_h nous donne un comportement optimal sur ces estimations d'erreur à savoir un comportement en $O(h)$. On remarque que le coefficient λ étant très petit, l'estimation sur ψ est meilleure que celle sur ω .

• Dans le cas général maintenant, on a

$$e_h = \left(\lambda h \sqrt{\beta_h} + \frac{h}{\sqrt{\beta_h}} + h\sqrt{\lambda} \right) |\psi|_{2,\Omega} + \left(h^a + \sqrt{\beta_h} \right) h_{min}^{1-\frac{2}{p}} |\omega^*|_{1,p,\Omega}.$$

On rappelle aussi que $a \in [\frac{1}{2}, 1]$, un comportement convergent nécessiterait donc que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_h = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\beta_h} e_h = 0. \quad (101)$$

On définit la constante suivante

$$\alpha_h = h^{\frac{a}{2}} h_{min}^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{p})}, \quad (102)$$

et on pose

$$\beta_h = \frac{h^a h_{min}^{\frac{2}{p}-1}}{\lambda}. \quad (103)$$

On obtient alors que

$$e_h = \sqrt{\lambda} \left(h \alpha_h h_{min}^{\frac{2}{p}-1} + h^{1-a} \alpha_h + h \right) |\psi|_{2,\Omega} + \left(\alpha_h + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \alpha_h |\omega^*|_{1,p,\Omega}.$$

On impose la condition de maillage

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha_h = 0. \quad (104)$$

Cette condition porte sur le maillage. Elle impose que h_{min} est d'un ordre en h . dans le cas où $p = 2$, cette condition est triviale; elle intervient dans les cas intermédiaires où $p \in]\frac{4}{3}, 2]$.

Sous cette condition de maillage et le choix précédent de β_h , on obtient le comportement suivant:

$$e_h \leq C \left(\sqrt{\lambda} (h^{1-a} \alpha_h + h) + \alpha_h \left(\alpha_h + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \right),$$

où la constante $C > 0$ ne dépend que de Ω , $|\omega^*|_{2,\Omega}$, $|\omega^0|_{2,\Omega}$, $|\psi|_{2,\Omega}$.

On a alors pour les estimations d'erreur:

$$\|\omega^* - \omega_h^*\|_{0,\Omega} \leq C \left(h^a + \sqrt{\lambda} (h^{1-a} \alpha_h + h) + \alpha_h \left(\alpha_h + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \right), \quad (105)$$

$$|\psi - \psi_h|_{1,\Omega} \leq C \left(h^{1-a} \alpha_h + h + \frac{h^a + \alpha_h^2}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\alpha_h}{\lambda} \right). \quad (106)$$

On en déduit une convergence inconditionnelle de la méthode. Dans le cas particulier où $p = 2$, on récupère que $\alpha_h = h^{\frac{a}{2}}$, on a alors un convergence en $O(h^{\frac{a}{2}})$.

On remarque que là encore, le coefficient λ étant très petit, les estimations sur ψ sont meilleures que celles sur ω .

4 Validation numérique

Ce paragraphe est dédié à la validation numérique de la méthode introduite au paragraphe 3. La validation numérique est faite en deux étapes:

Dans la première, on considère des cas de solutions analytiques connues sur des ouverts réguliers. Différents tests de convergence de maillages et des études de comportement des solutions en fonction du paramètre de stabilisation β_h ont été effectuées.

Tandis que dans la seconde étape, on effectue l'extension de ce travail aux équations de Navier-Stokes instationnaires. La dérivée particulaire est approchée par une méthode des caractéristiques résolue par un schéma d'ordre un. Comme application

test de cette dernière partie, on considère le cas de la cavité et on compare les solutions obtenues par cette approche à d'autres résultats de référence.

- En effet, pour les premiers cas tests analytiques, on considère le domaine Ω représenté par le carré $[0, 10] \times [0, 10]$, et les fonctions analytiques suivantes:

$$\psi_1(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{10}\right) \quad \text{et} \quad \psi_2(x, y) = 3x\sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{10}\right)$$

Ces fonctions sont utilisées comme solutions exactes. Les calculs permettent d'avoir des solutions approchées dont on évalue l'erreur par rapport aux solutions exactes. On a mesuré les écarts entre les solutions calculées et les solutions exactes pour chacune des fonctions ψ et ω . On a utilisé les normes $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ et $|\cdot|_h$ pour ω et les normes $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ et $|\cdot|_{1,\Omega}$ pour ψ .

On a aussi calculé les variations de ces erreurs en fonction du paramètre de stabilisation β_h et en fonction de pas de discrétisation différents.

Le domaine Ω est discrétisé suivant les trois maillages décrits dans le tableau ci-dessous :

Maillage	Nbre Noeuds	Nbre Eléments
h1=1	121	200
h2=0.5	441	800
h4=0.25	1681	3200

Tableau des maillages utilisés

Pour chaque cas analytique, on a effectué des simulations sur les trois maillages en faisant varier le paramètre β_h en fonction des valeurs suivantes :

β_h	0.	0.03	0.07	0.1	0.2	0.4	0.7	1.
-----------	----	------	------	-----	-----	-----	-----	----

Sur les figures **1.a**, **1.b**, **1.c**, **1.d** et **1.e**, on présente en fonction de β_h les normes d'erreur $\|\omega_1 - \omega_{1h}\|_{0,\Omega}$, $|\omega_1 - \omega_{1h}|_h$, $\|\psi_1 - \psi_{1h}\|_{0,\Omega}$ et $|\psi_1 - \psi_{1h}|_{1,\Omega}$ respectivement ainsi que l'erreur totale $E = \|\omega_1 - \omega_{1h}\|_{-1,\Delta,\Omega} + |\psi_1 - \psi_{1h}|_{1,\Omega}$ correspondant à la première solution analytique ψ_1 .

Sur la figure **2**, on montre la pente de l'erreur des normes mentionnées en fonction du paramètre β_h . On observe que cette pente est comprise dans l'intervalle $[1.4, 2]$ ce qui valide l'estimation d'erreur donnée dans le paragraphe 3. On remarque que

lorsque $\beta_h \rightarrow 0$, ψ_{1h} reste qualitativement bon mais par contre ω_{1h} se dégrade.

A titre illustratif, pour le maillage h_3 , on présente sur les figures **3.a** et **3.b** les isovaleurs de ψ_{1h} et de ψ_1 analytique, de même, sur les figures **3.c** et **3.d** sont données les isovaleurs de ω_{1h} et ω_1 . La solution (ψ_{1h}, ω_{1h}) est donnée pour $\beta_h = 0.1$. Cette valeur correspond à l'une des valeurs de β pour lesquelles on a une bonne convergence, voir Fig 2.

On a mené la même étude pour l'autre cas analytique (ψ_2, ω_2) . Les résultats de ce cas sont donnés figures **4**, **5** et **6**. Les courbes **4.a**, **4.b**, **4.c**, **4.d** et **4.e** présentent les variations des normes d'erreurs en fonction du paramètre β_h . La courbe **5** décrit la pente de ces normes en fonction de β_h . Figure **6**, sont données les isovaleurs des solutions analytiques (ψ_2, ω_2) et celles des solutions calculées (ψ_{2h}, ω_{2h}) .

Outre la comparaison, figure 6, entre les solutions calculées et les solutions exactes, on effectue aussi la comparaison entre la méthode stabilisée (pour $\beta_h > 0$) et la méthode classique (pour $\beta_h = 0$). Le résultat de cette comparaison est présentée figures 7 et 8. En utilisant toujours la solution exacte comme référence, on voit bien l'apport de la stabilisation sur la qualité de la solution correspondant aux β_h non nul. Cet apport est surtout sensible pour la vorticité.

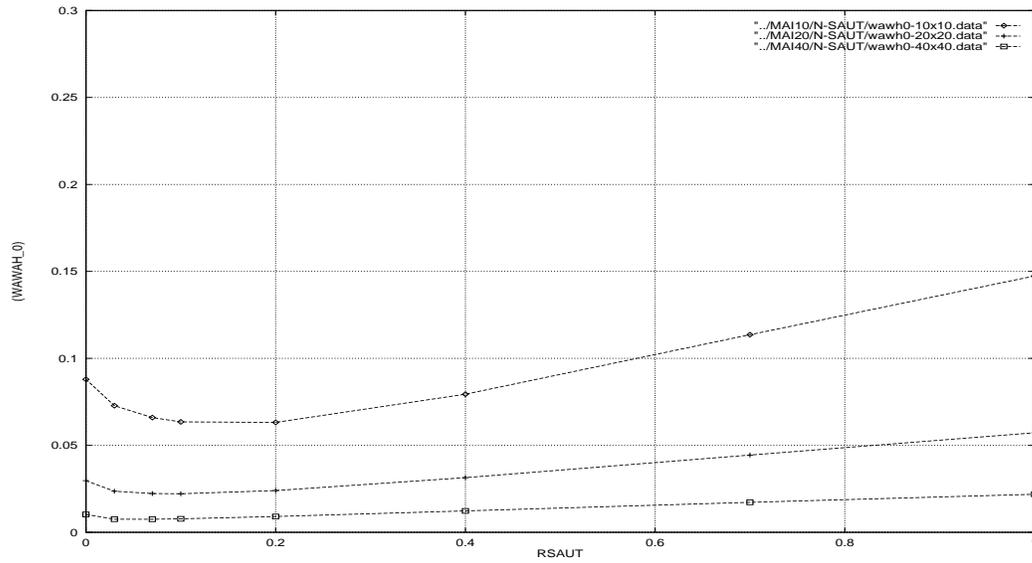


FIG 1a: $\|\omega_1 - \omega_{1h}\|_{0,\Omega}$ en fonction de β_h pour les trois maillages

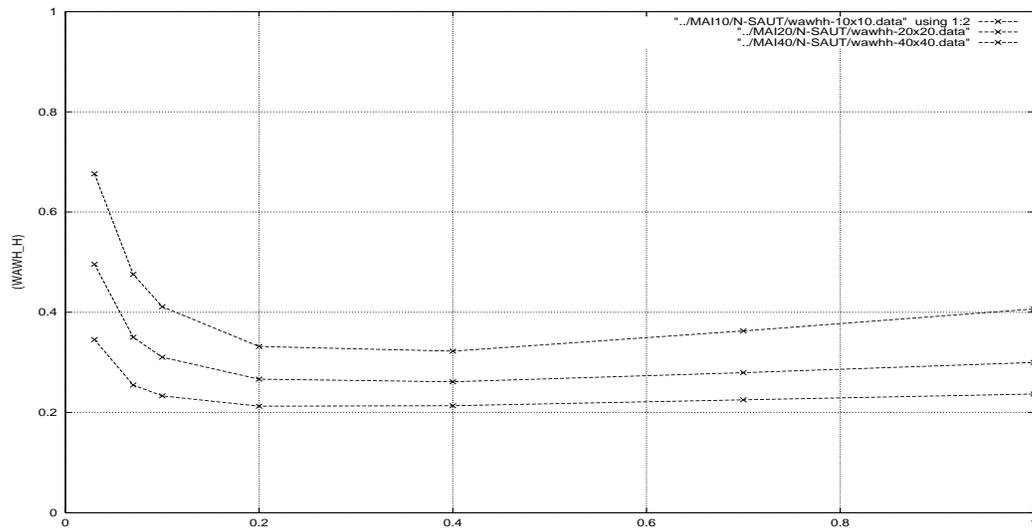


FIG 1b: $|\omega_1 - \omega_{1h}|_h$ en fonction de β_h pour les trois maillages

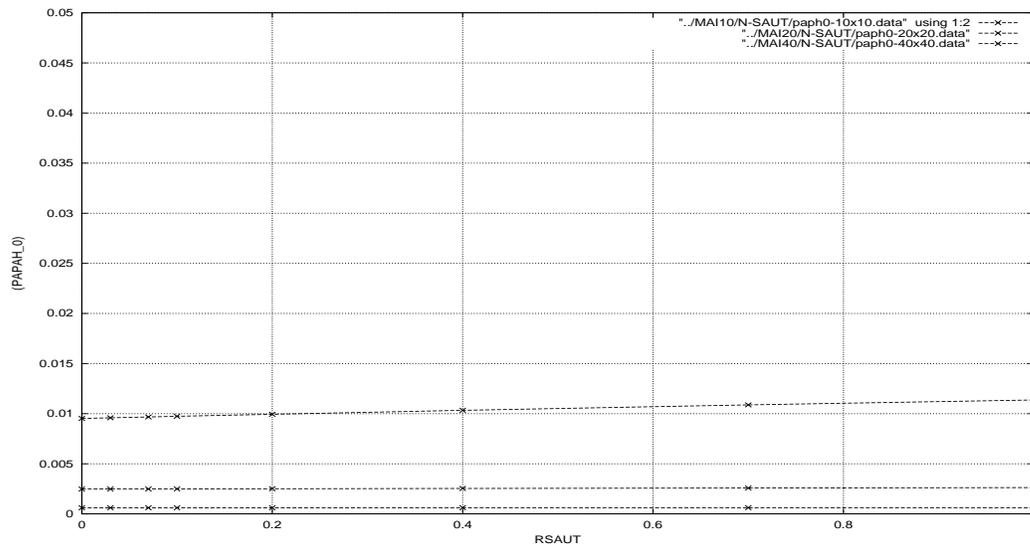


FIG 1c: $\|\psi_1 - \psi_{1h}\|_{0,\Omega}$ en fonction de β_h pour les trois maillages

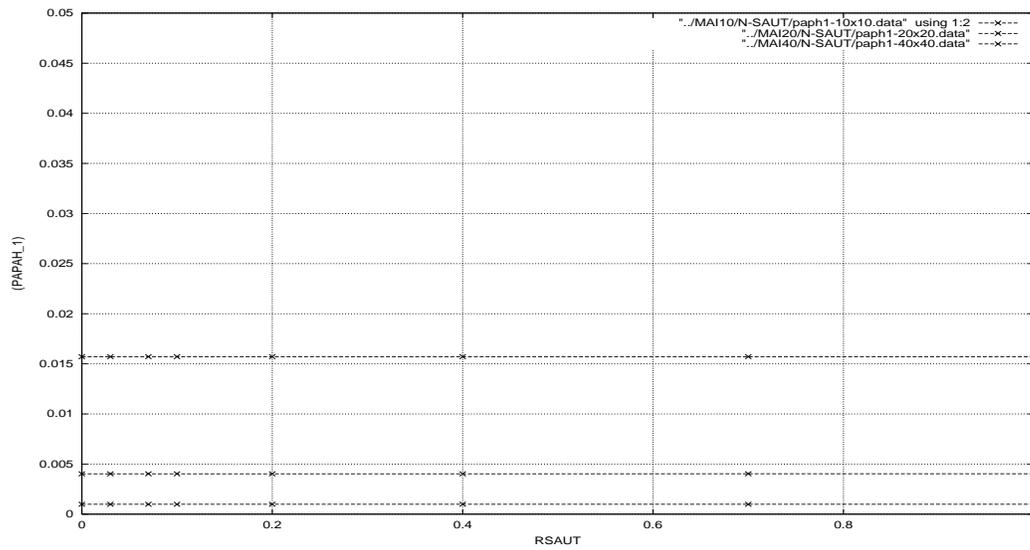


FIG 1d: $|\psi_1 - \psi_{1h}|_{1,\Omega}$ en fonction de β_h pour les trois maillages

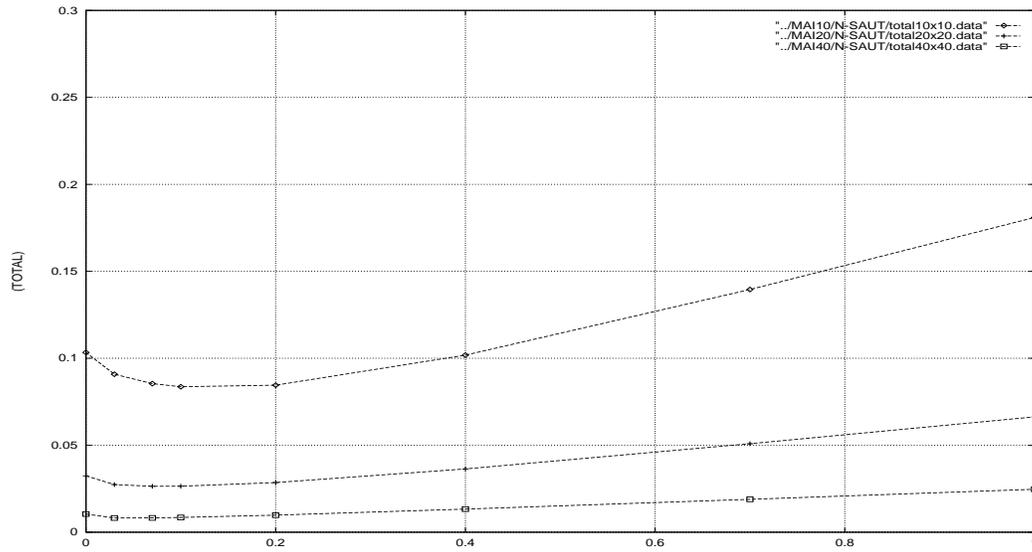


FIG 1e: L'erreur totale en fonction de β_h pour les trois maillages

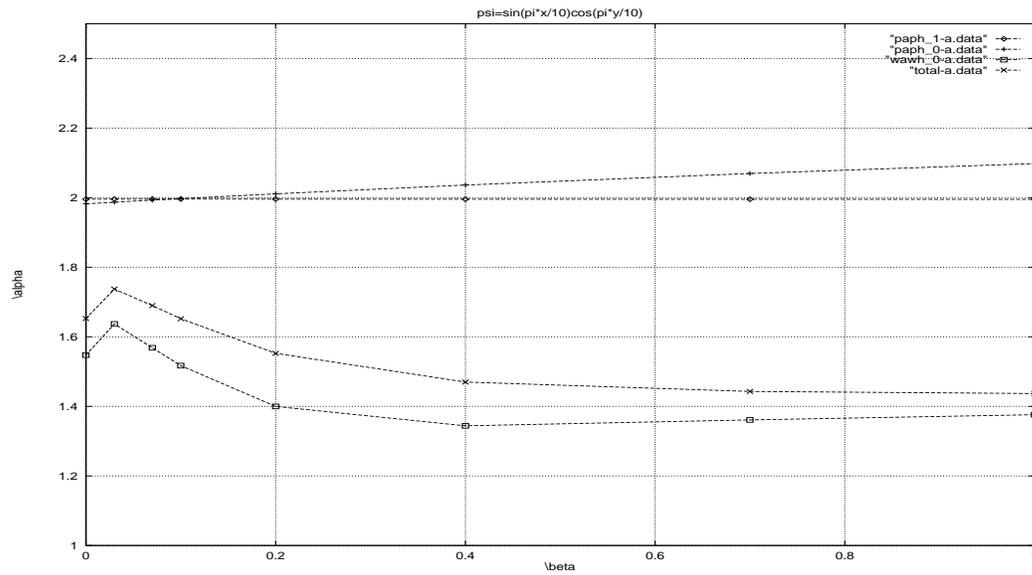
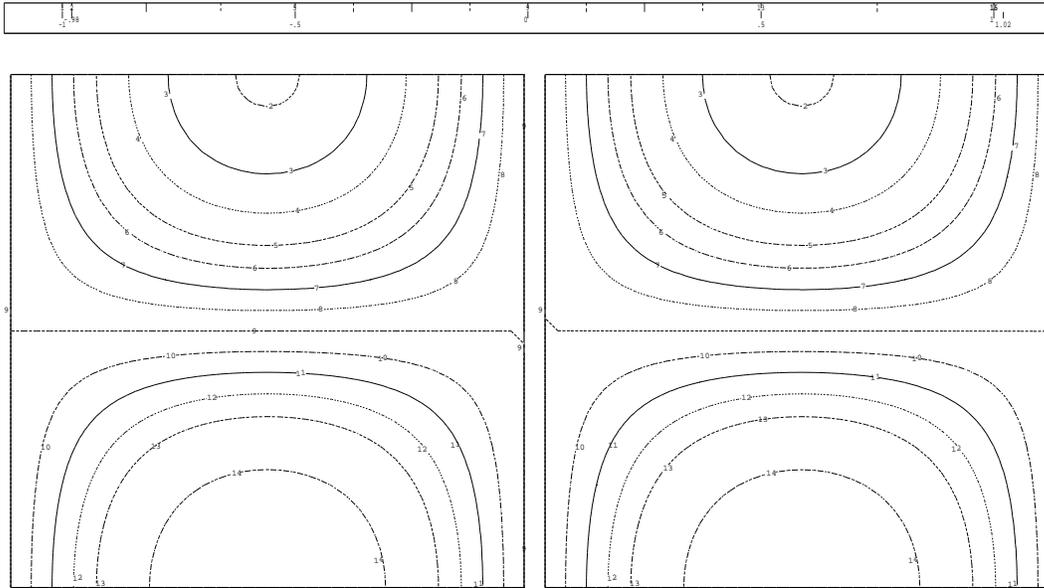
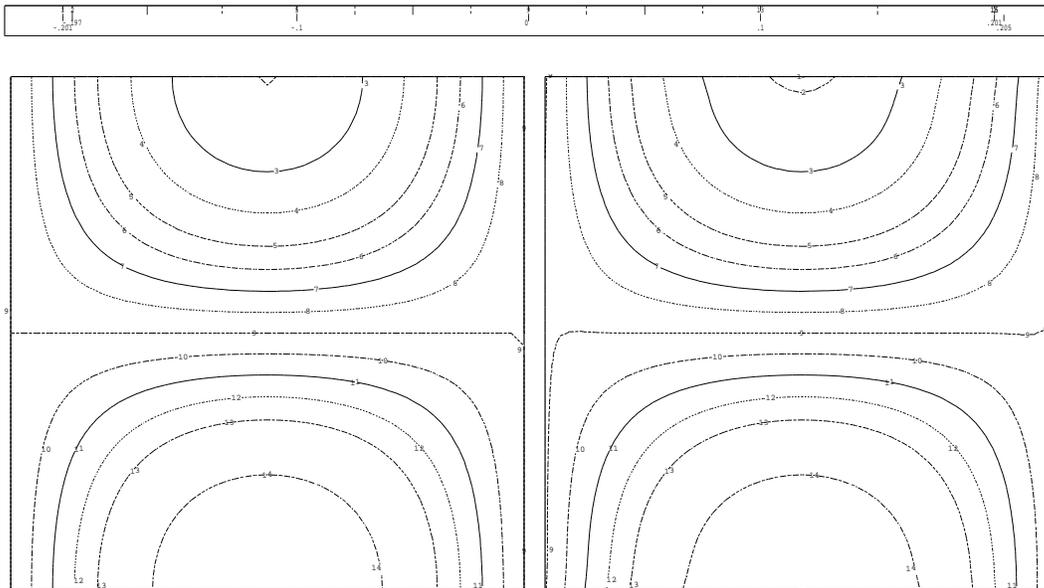


FIG 2: Coefficient de la puissance α de la convergence en h

FIG 3a: Iso-valeurs de ψ_1 analytiqueFIG 3b: Iso-valeurs de ψ_{1h} , $\beta_h = 0.1$ FIG 3c: Iso-valeurs de ω_1 analytiqueFIG 3d: Iso-valeurs de ω_{1h} , $\beta_h = 0.1$

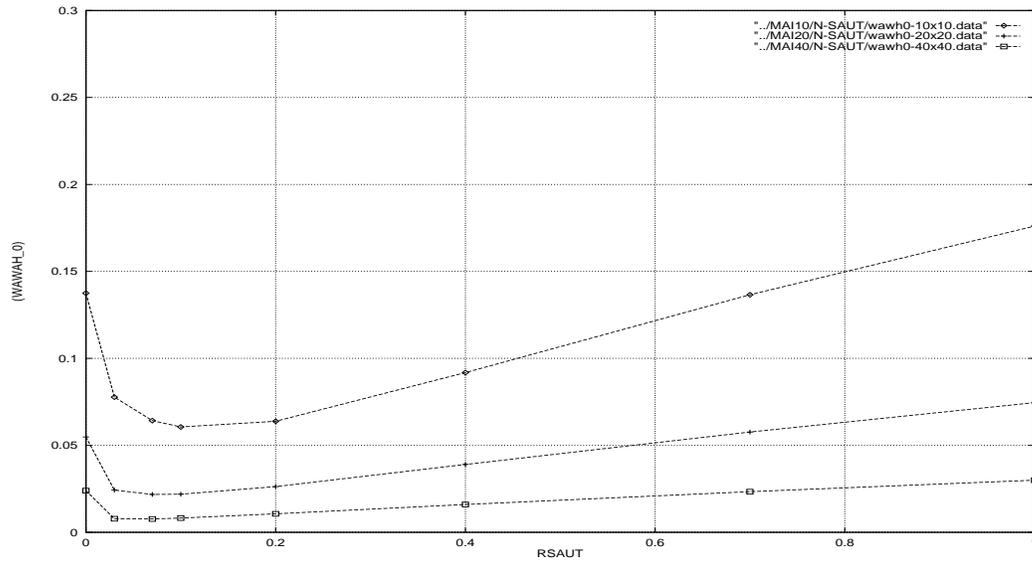


FIG 4a: $\|\omega_2 - \omega_{2h}\|_{0,\Omega}$ en fonction de β_h pour les trois maillages

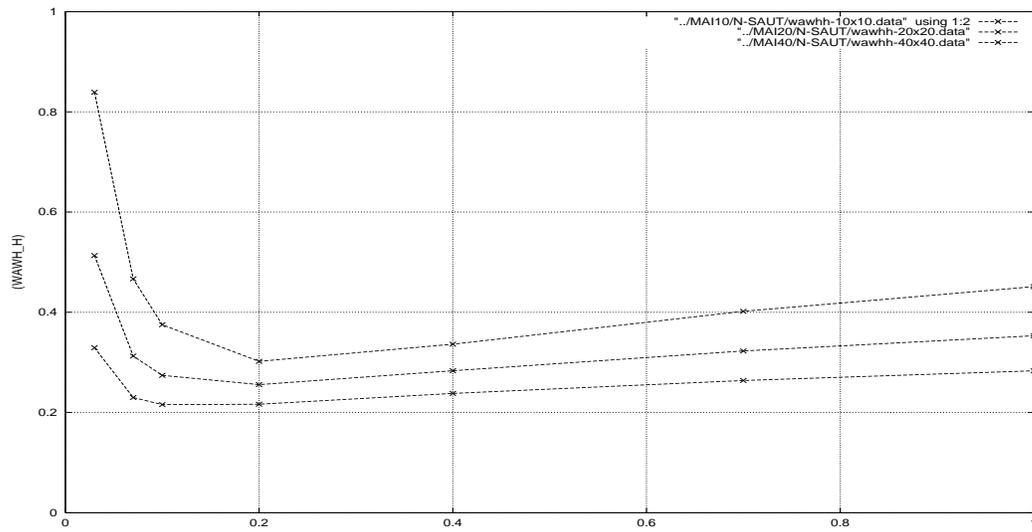


FIG 4b: $|\omega_2 - \omega_{2h}|_h$ en fonction de β_h pour les trois maillages

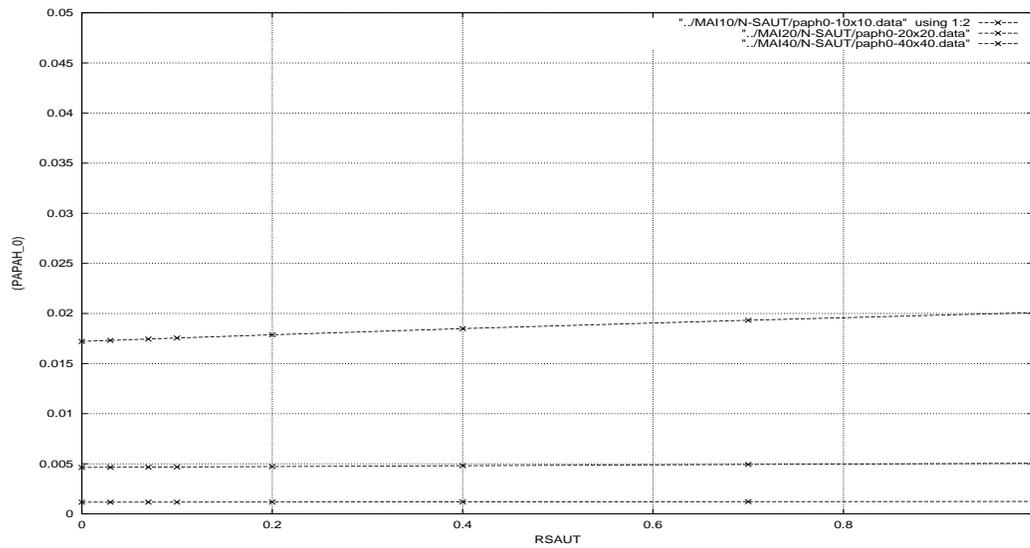


FIG 4c: $\|\psi_2 - \psi_{2h}\|_{0,\Omega}$ en fonction de β_h pour les trois maillages

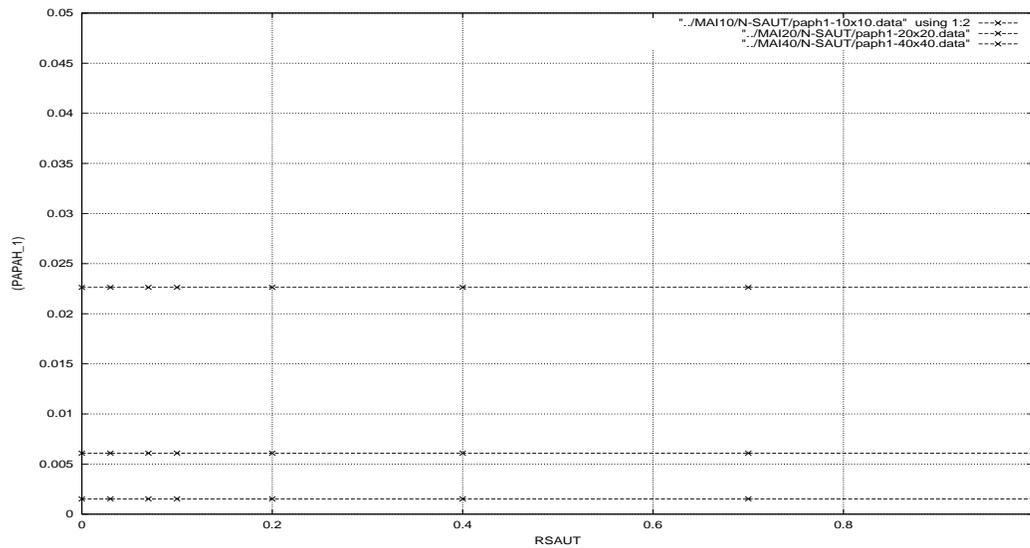


FIG 4d: $|\psi_2 - \psi_{2h}|_{1,\Omega}$ en fonction de β_h pour les trois maillages

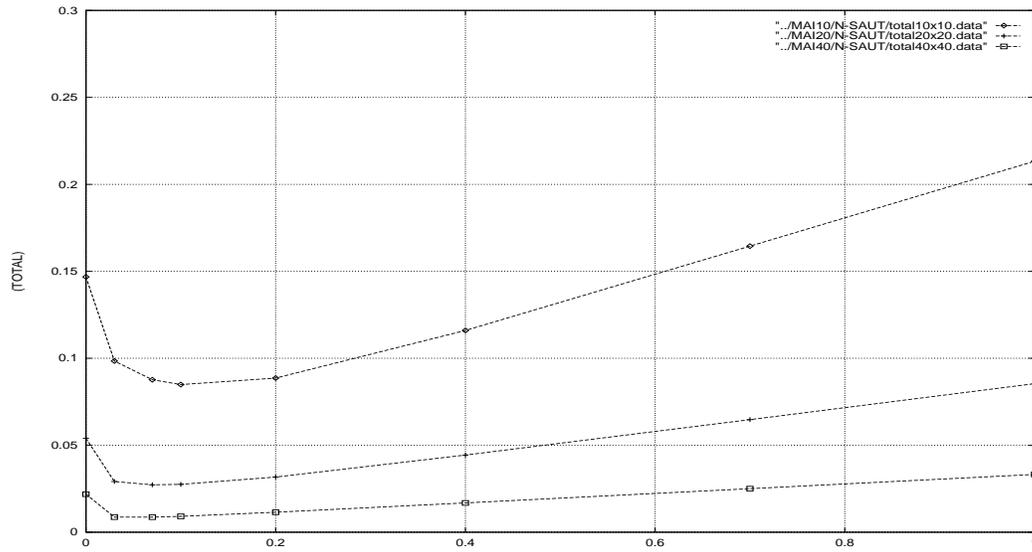


FIG 4e: L'erreur totale en fonction de β_h pour les trois maillages

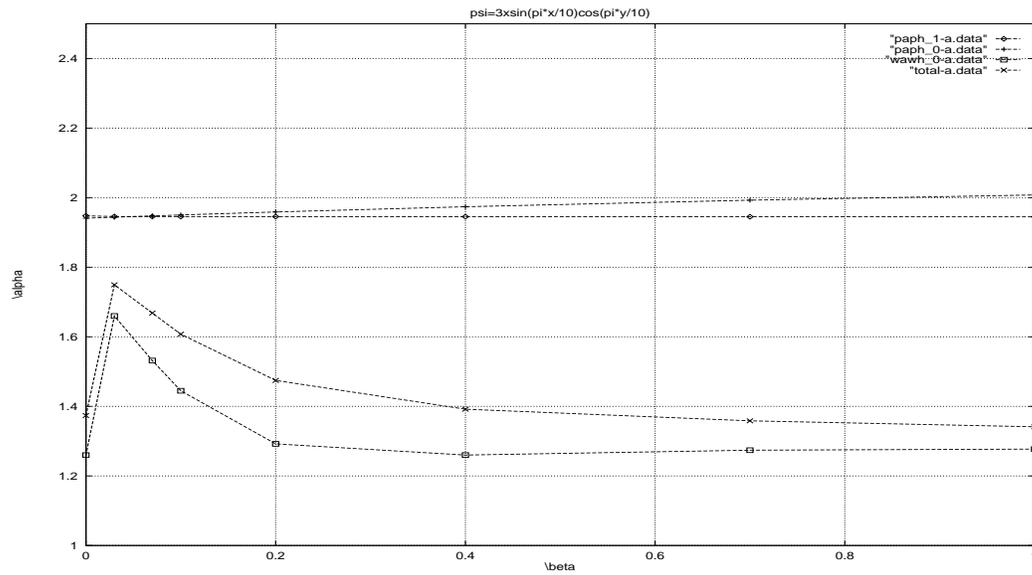
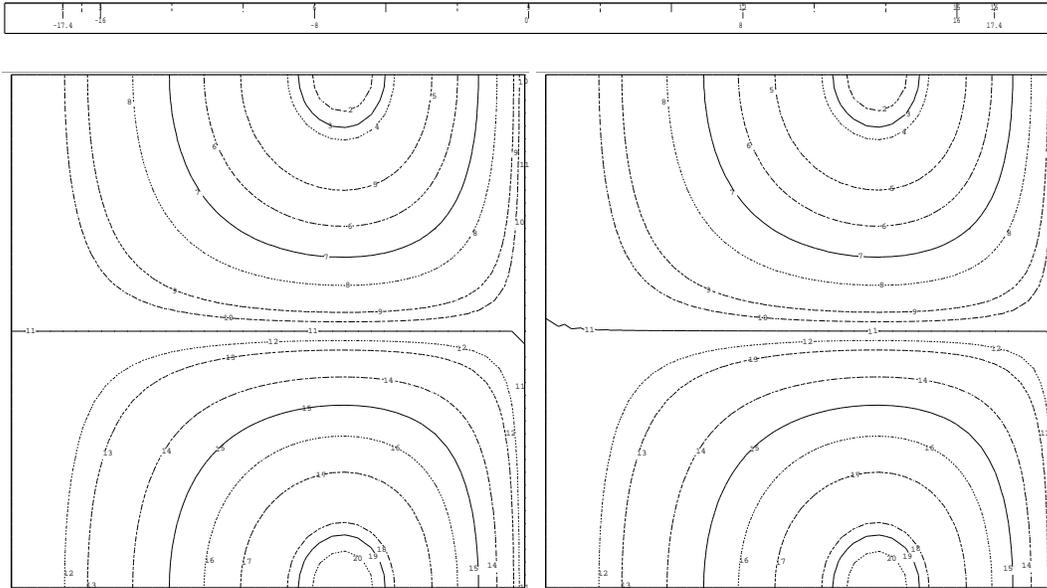
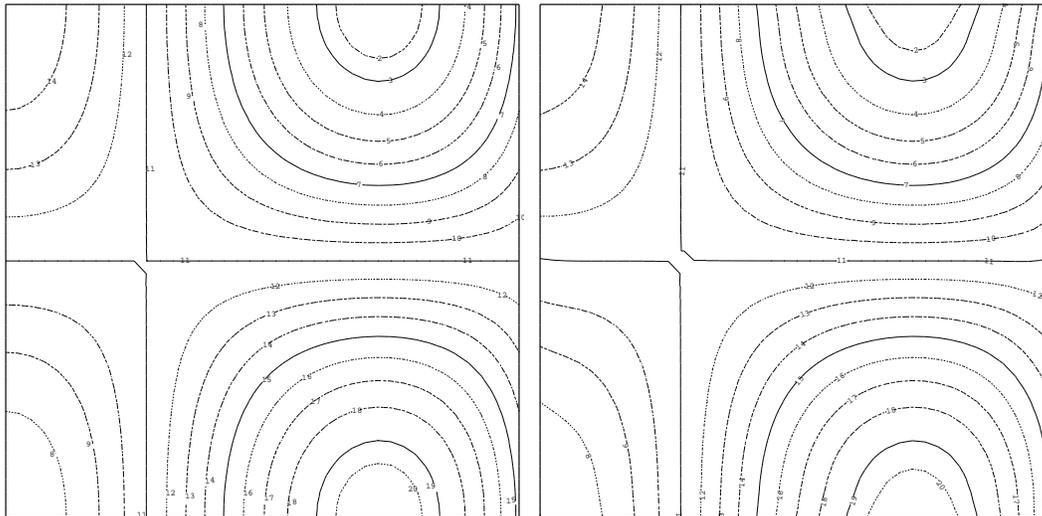


FIG 5: Coefficient de la puissance α de la convergence en h

FIG 6a: *Iso-valeurs de ψ_2 analytique*FIG 6b: *Iso-valeurs de ψ_{2h} , $\beta_h = 0.07$* FIG 6c: *Iso-valeurs de ω_2 analytique*FIG 6d: *Iso-valeurs de ω_{2h} , $\beta_h = 0.07$*

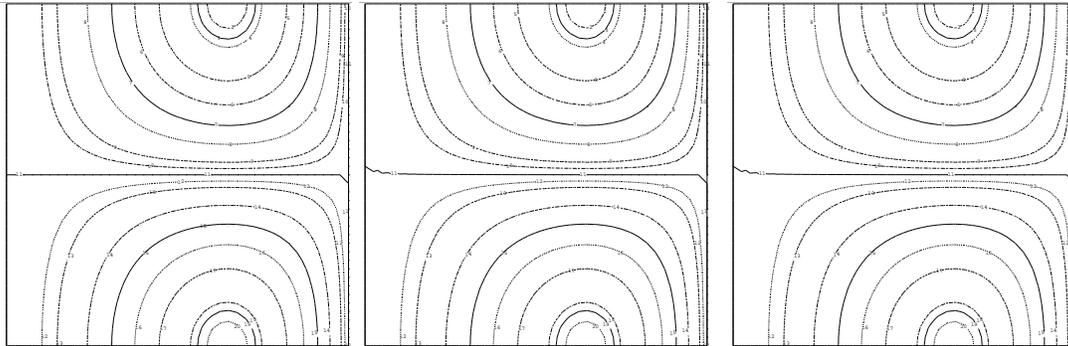
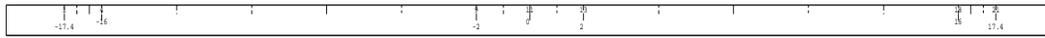


FIG 7a: *Isov. de ψ_2 analytique* FIG 7b: *Isov. de $\psi_{2h}, \beta_h = 0.0$* FIG 7c: *Isov. de $\psi_{2h}, \beta_h = 0.03$*

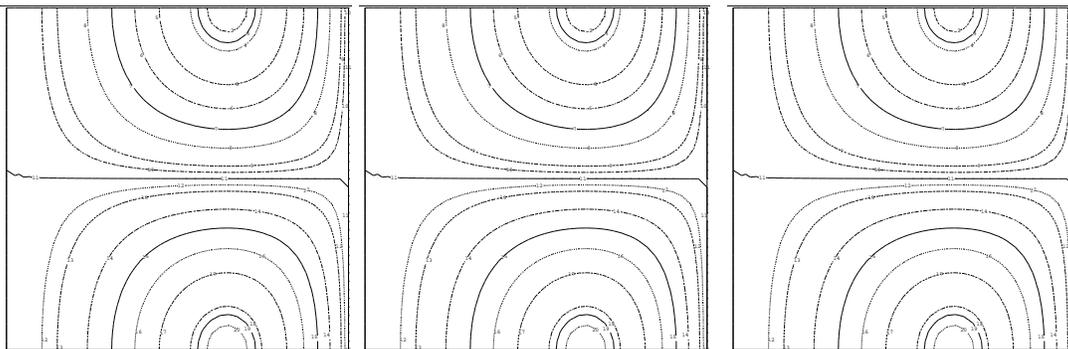


FIG 7d: *Isov. de $\psi_{2h}, \beta_h = 0.07$* FIG 7e: *Isov. de $\psi_{2h}, \beta_h = 0.1$* FIG 7f: *Isov. de $\psi_{2h}, \beta_h = 0.2$*

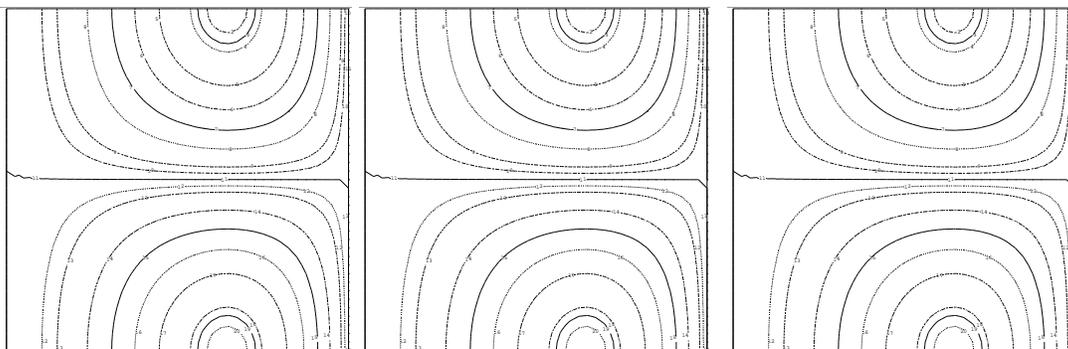


FIG 7g: *Isov. de $\psi_{2h}, \beta_h = 0.4$* FIG 7h: *Isov. de $\psi_{2h}, \beta_h = 0.7$* FIG 7i: *Isov. de $\psi_{2h}, \beta_h = 1.0$*

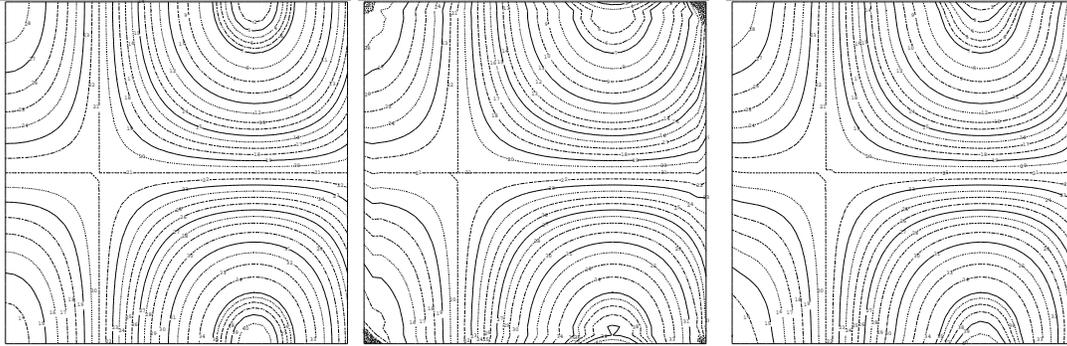
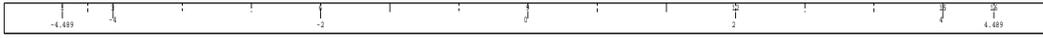


FIG 8a: *Isov. de ω analytique* FIG 8b: *Isov. de ω_{2h} , $\beta_h = 0.0$* FIG 8c: *Isov. de ω_{2h} , $\beta_h = 0.03$*

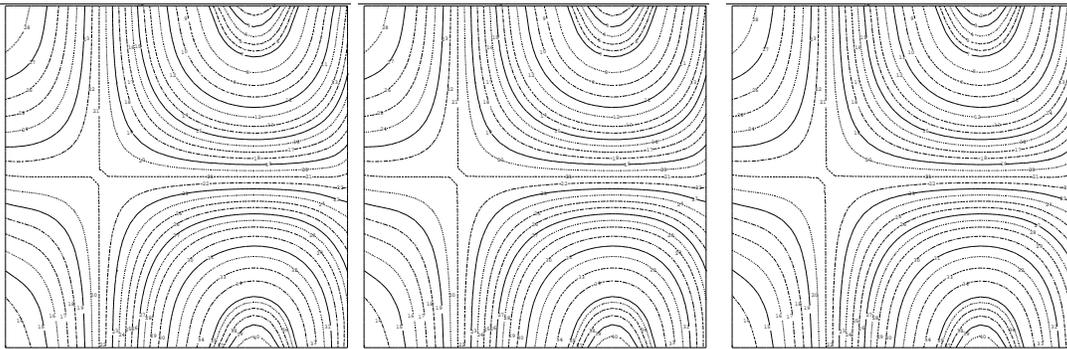


FIG 8d: *Isov. de ω_{2h} , $\beta_h = 0.07$* FIG 8e: *Isov. de ω_{2h} , $\beta_h = 0.1$* FIG 8f: *Isov. de ω_{2h} , $\beta_h = 0.2$*

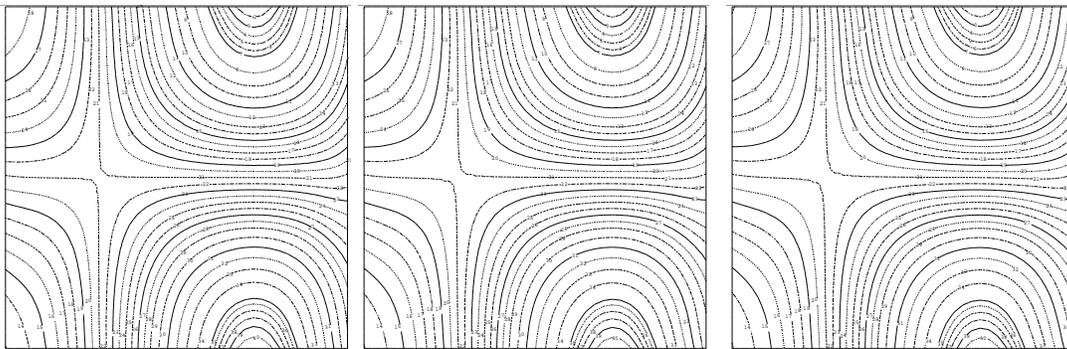


FIG 8g: *Isov. de ω_{2h} , $\beta_h = 0.4$* FIG 8h: *Isov. de ω_{2h} , $\beta_h = 0.7$* FIG 8i: *Isov. de ω_{2h} , $\beta_h = 1.0$*

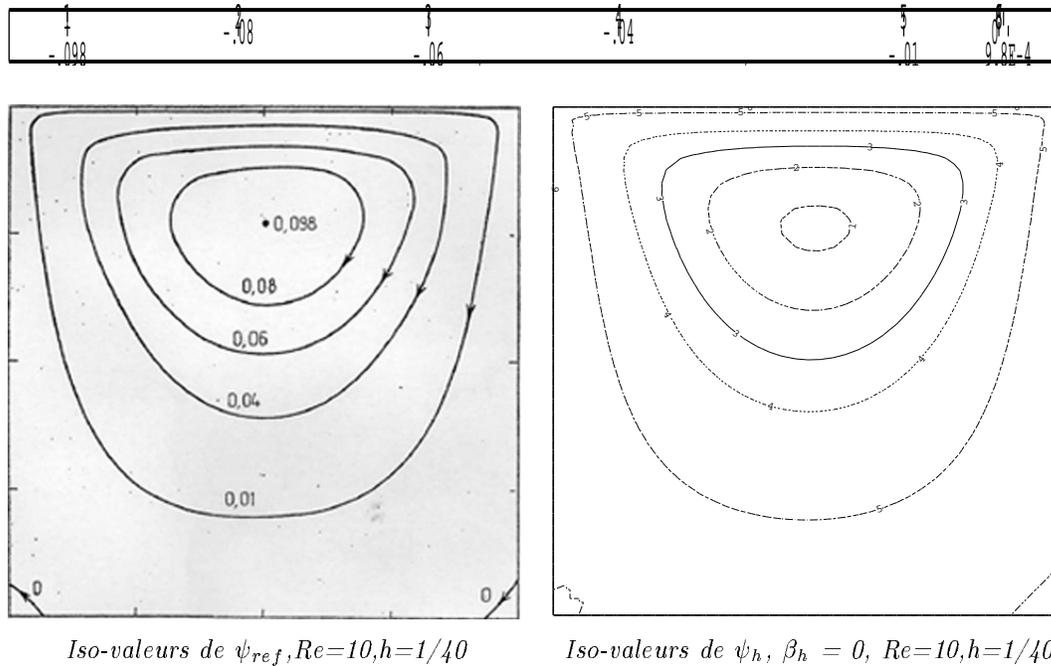
- Le solver développé pour le problème de Quasi-Stokes, nous a servi aussi pour le problème de Navier-Stokes. On traite, dans ces dernières équations, le terme de dérivée en temps et le terme de convection en utilisant une méthode des caractéristiques discrétisée par un schéma d'ordre un (voir Bermudez-Durany[5], Pironneau[20]). Les résultats montrent un bon comportement de la méthode.

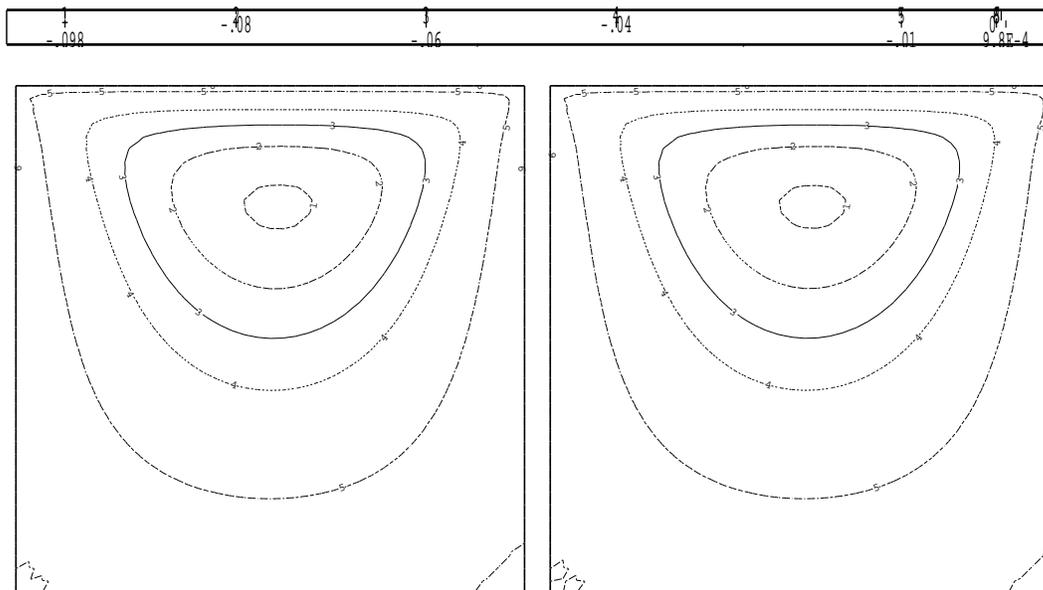
On s'intéresse au cas de la cavité comparé aux résultats de référence de Bruneau-Jouron[9].

Ce cas correspond à un nombre de Reynolds $Re=100$. On a utilisé la géométrie définie pour le carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$ avec un maillage triangulaire de 3200 éléments. Les conditions aux limites sont celles proposées par Bruneau-Jouron dans [9] :

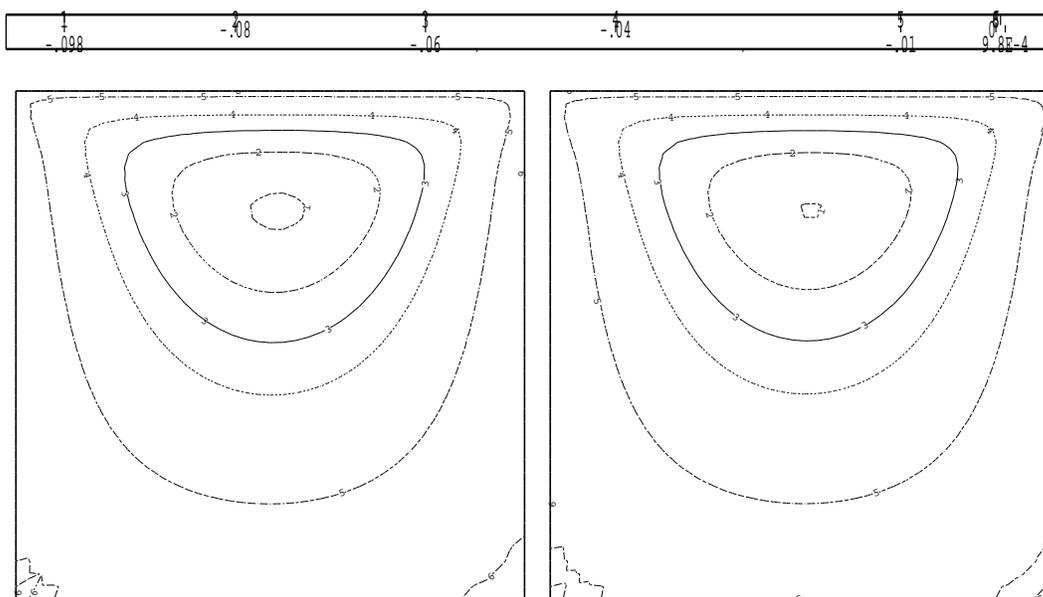
$$\psi = 0 \text{ sur toute la frontière, } \frac{\partial \psi}{\partial y} = 1 \text{ si } y = 1 \text{ et nulle ailleurs.}$$

On a étudié aussi les cas correspondant aux nombres de Reynolds $Re=10, 100, 400$ et 1000 en faisant varier le paramètre β_h pour chaque cas. Pour la solution de référence ψ_{ref} , les lettres y, x, w, v, u, t, s et r indiquent respectivement les isovaleurs -0.08, -0.06, -0.04, -0.02, -0.01, -0.003 et -0.001. Ces mêmes isovaleurs sont tracées pour notre solution dans **9b**, mais sont indexés respectivement par les chiffres de 1 à 8.

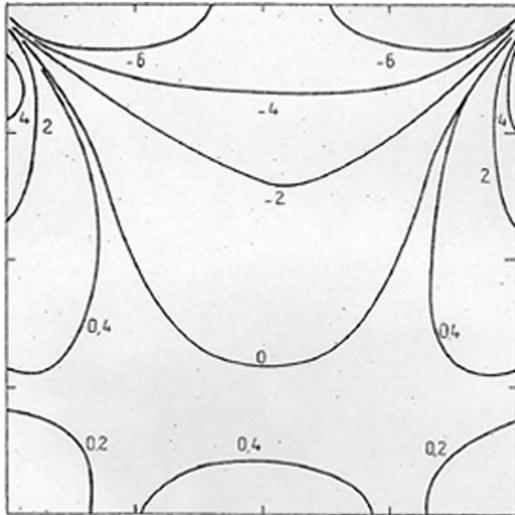




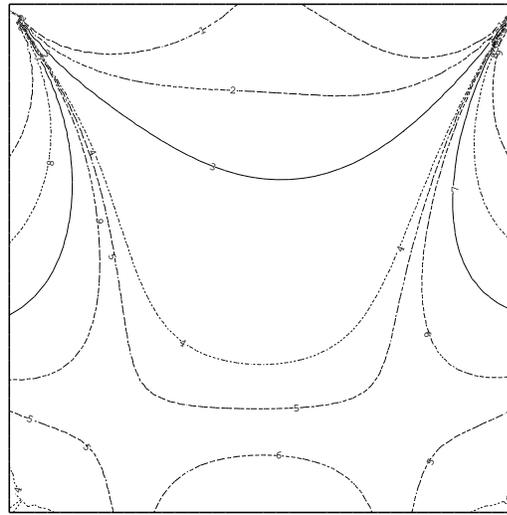
Iso-valeurs de ψ_h , $\beta_h = 5e-5$, $Re=10, h=1/40$ Iso-valeurs de ψ_h , $\beta_h = 1e-4$, $Re=10, h=1/40$



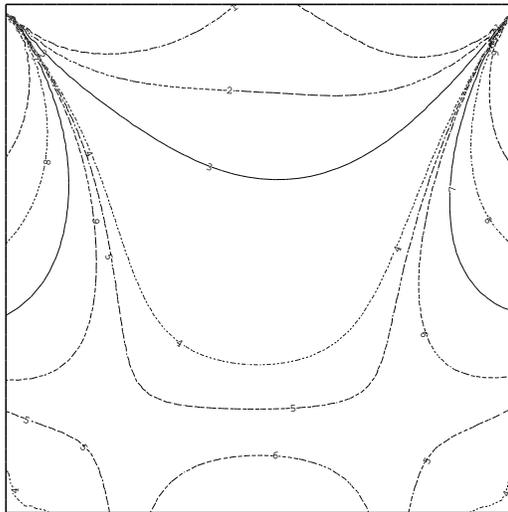
Iso-valeurs de ψ_h , $\beta_h = 4e-4$, $Re=10, h=1/40$ Iso-valeurs de ψ_h , $\beta_h = 1e-3$, $Re=10, h=1/40$



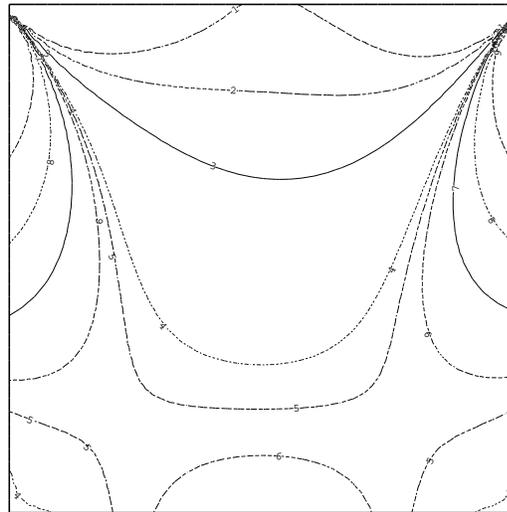
Iso-valeurs de ω_{ref} , $Re=10, h=1/40$



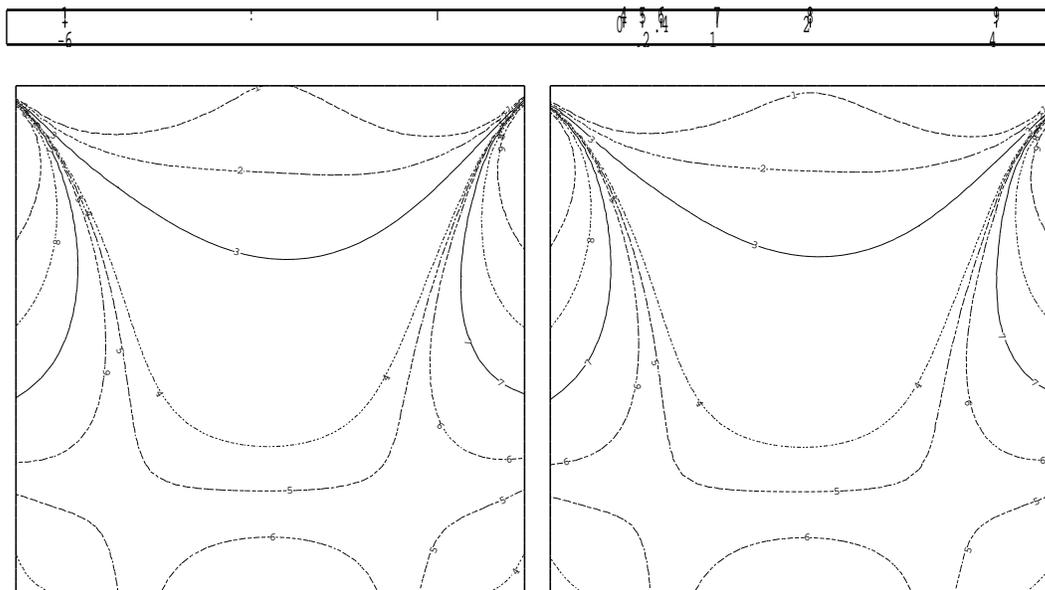
Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 0.$, $Re=10, h=1/40$



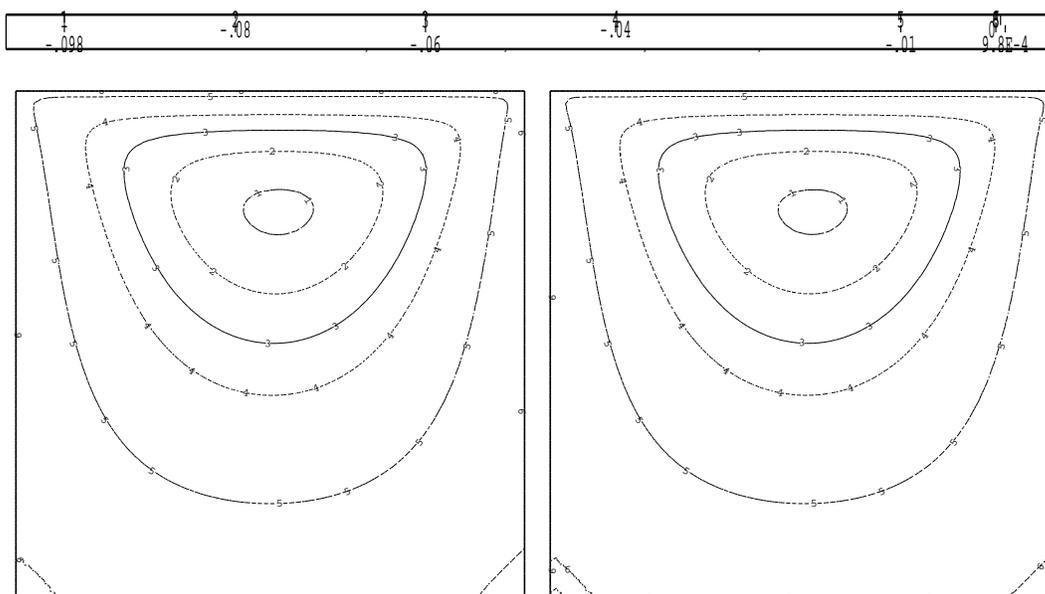
Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 5e-5$, $Re=10, h=1/40$



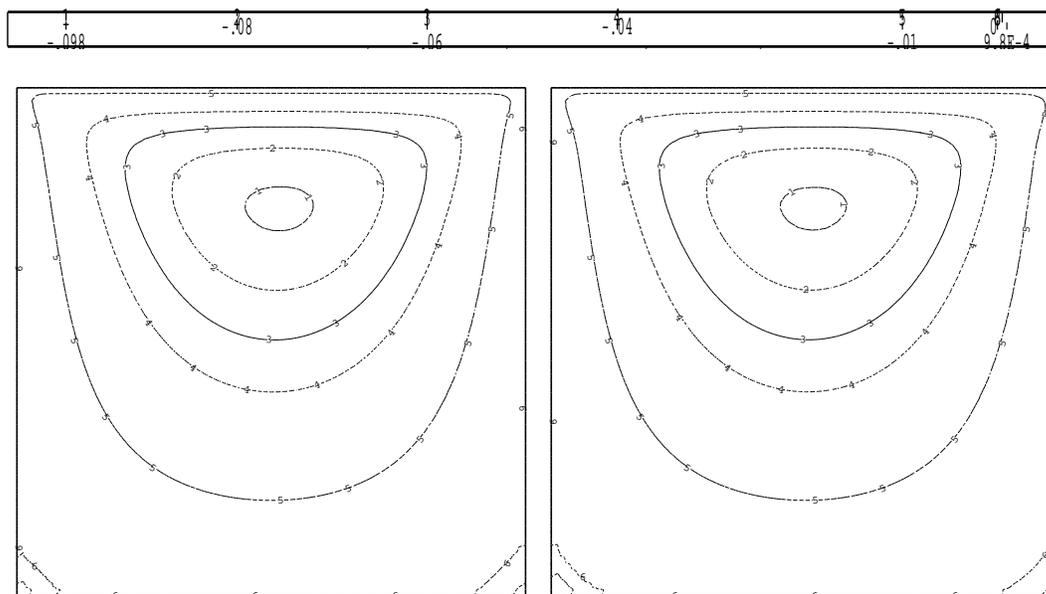
Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 1e-4$, $Re=10, h=1/40$



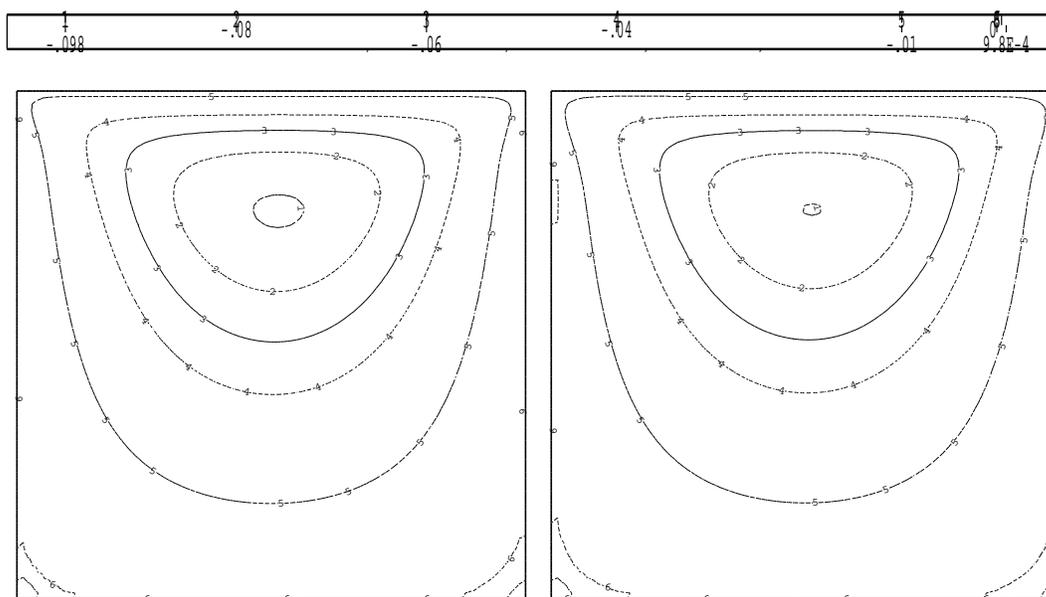
Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 4e-4$, $Re=10, h=1/40$ *Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 1e-3$, $Re=10, h=1/40$*



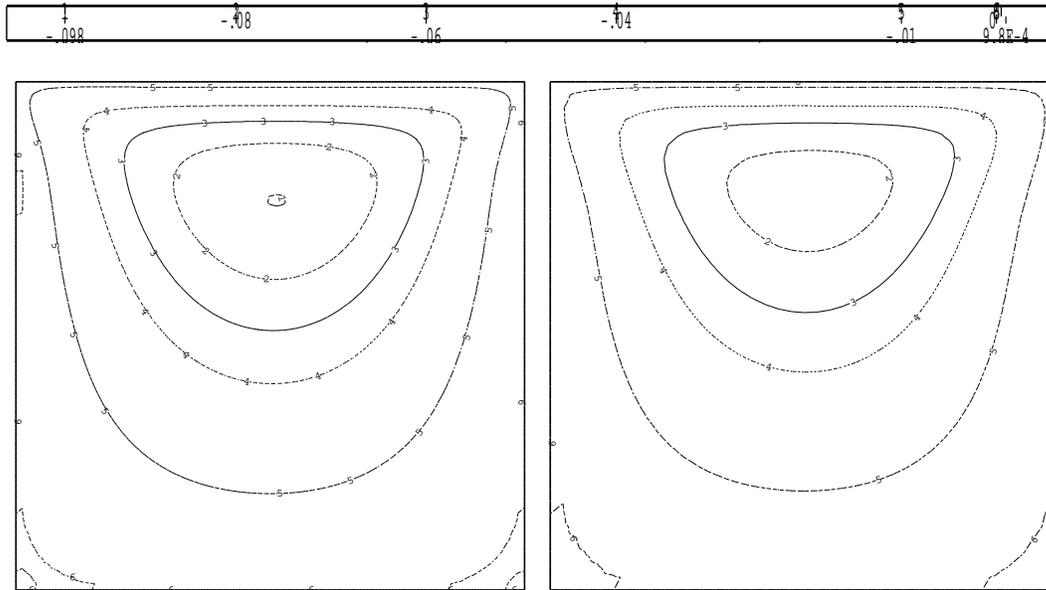
Iso-valeurs de ψ_h , $\beta_h = 0$, $Re=10, h=1/80$ *Iso-valeurs de ψ_h , $\beta_h = 5e-5$, $Re=10, h=1/80$*



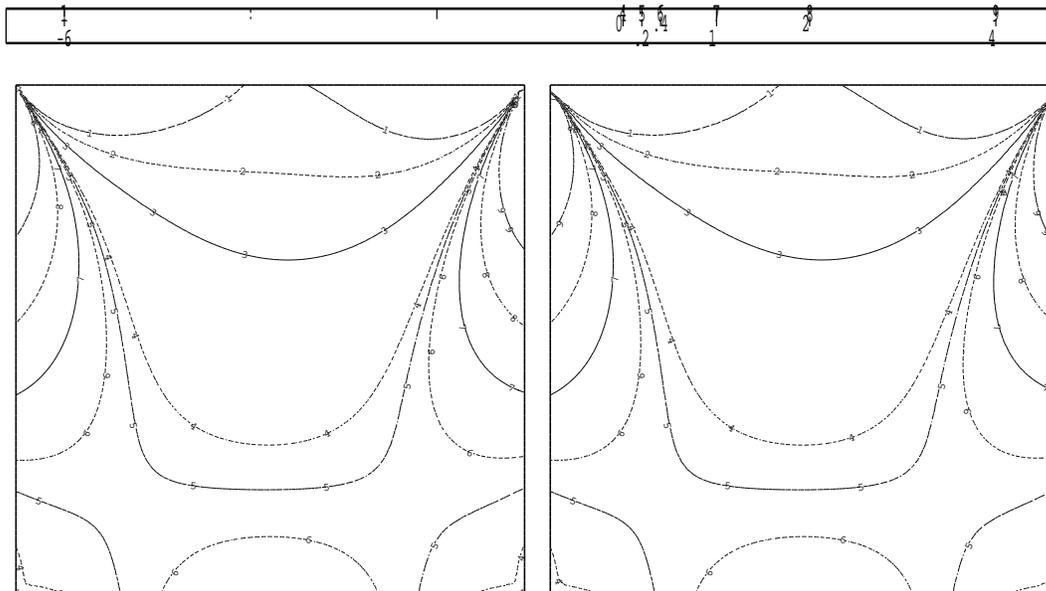
Iso-valeurs de ψ_h , $\beta_h = 1e-4$, $Re=10, h=1/80$ Iso-valeurs de ψ_h , $\beta_h = 4e-4$, $Re=10, h=1/80$



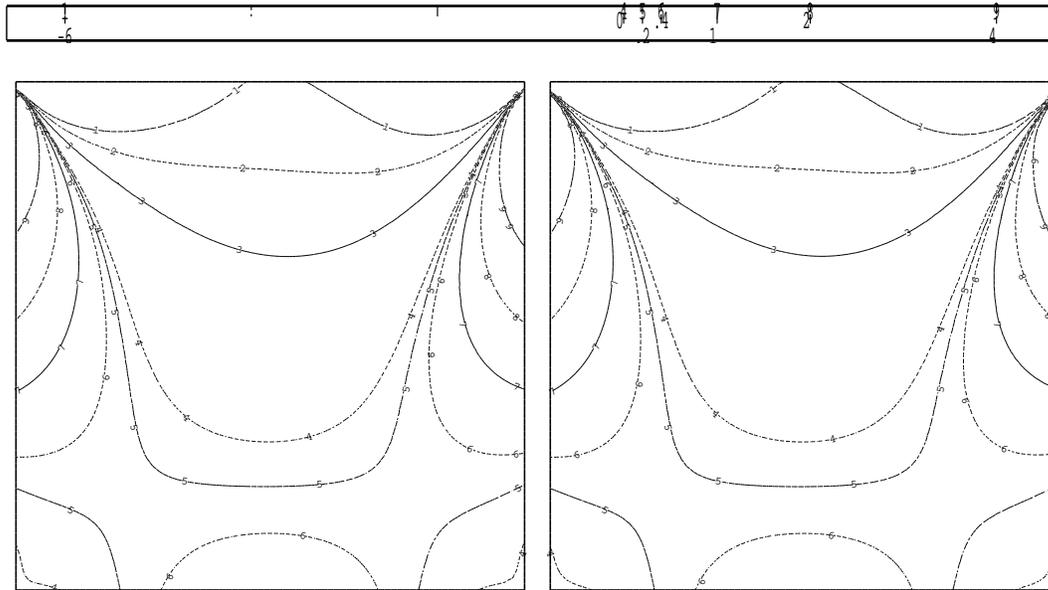
Iso-valeurs de ψ_h , $\beta_h = 1e-3$, $Re=10, h=1/80$ Iso-valeurs de ψ_h , $\beta_h = 4e-3$, $Re=10, h=1/80$



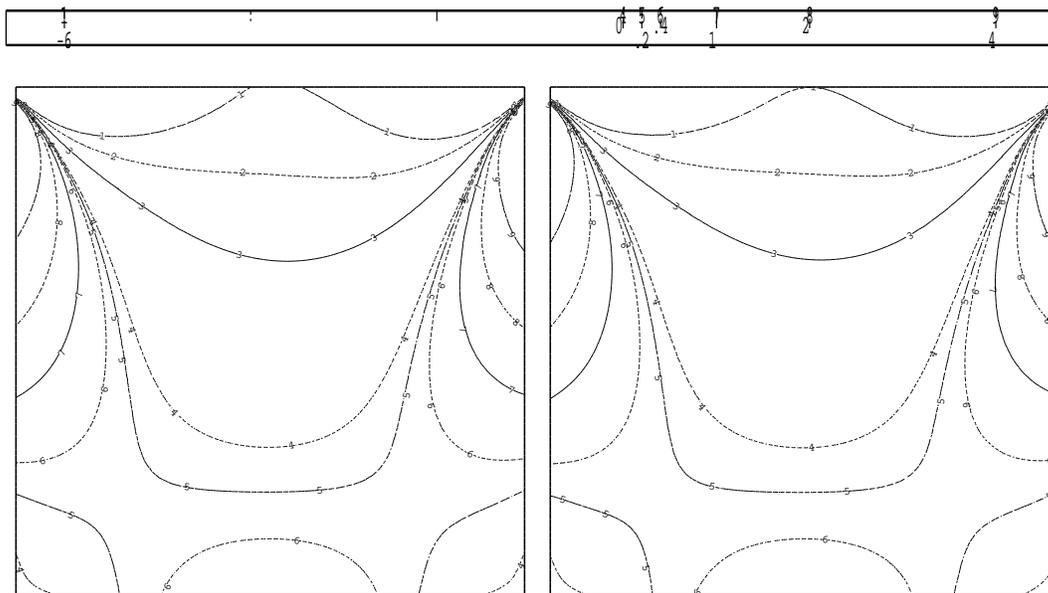
Iso-valeurs de ψ_h , $\beta_h = 4e-3$, $Re=10, h=1/80$ Iso-valeurs de ψ_h , $\beta_h = 7e-3$, $Re=10, h=1/80$



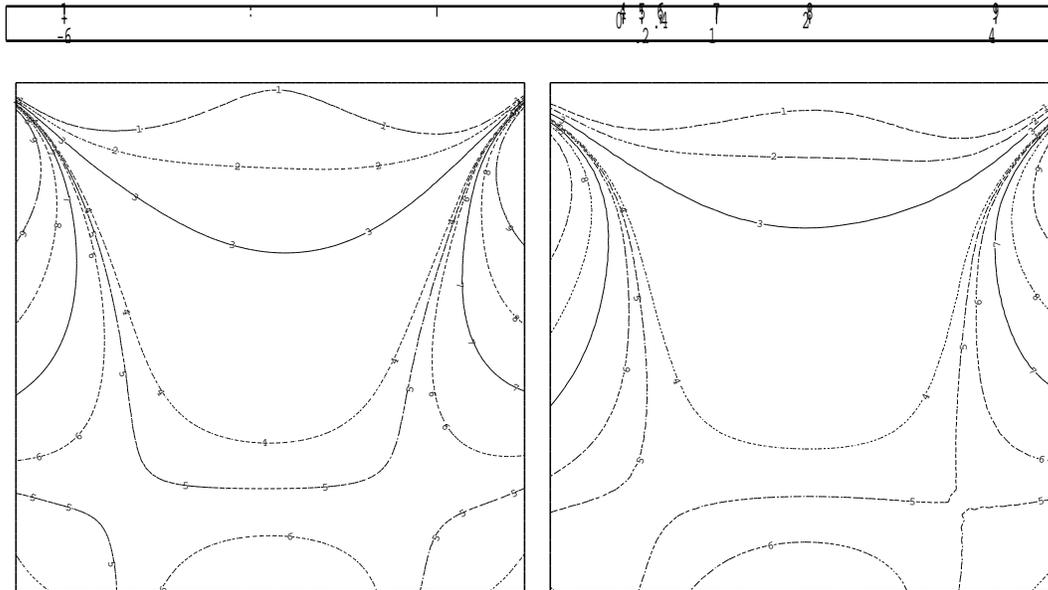
Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 0$, $Re=10, h=1/80$ Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 5e-5$, $Re=10, h=1/80$



Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 1e-4$, $Re=10, h=1/80$ Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 4e-4$, $Re=10, h=1/80$



Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 7e-4$, $Re=10, h=1/80$ Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 1e-3$, $Re=10, h=1/80$



Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 4e-3$, $Re=10$, $h=1/80$ Iso-valeurs de ω_h , $\beta_h = 7e-3$, $Re=10$, $h=1/80$

5 Conclusion

Les résultats numériques obtenus montrent le bon comportement de la méthode stabilisée et valident l'étude théorique. Ceci généralise les résultats donnés pour ce type de méthode pour le problème de Stokes (Amara-Dabaghi [4]). Des applications numériques de cette méthode ont été effectuées pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressible et pour la simulation des écoulements diphasiques (voir [1],[12]). Ces résultats préliminaires encourageants montrent et confirment l'apport qualitatif de cette approche. L'extension des résultats théoriques aux équations de Navier-Stokes est envisageable sur la base des techniques présentées dans Amara-Bernardi [2].

Références

- [1] Abdelwahed M., Amara M., El Dabaghi F., Hassine M. *A numerical modelling of a two phase flow for water eutrophication problems*. ECCOMAS 2000, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelone, 11-14 September 2000.
- [2] Amara M., Bernardi C., *Convergence of a finite element discretization of the Navier-Stokes equations in vorticity and stream function formulation*. Mathematical Modelling and Numerical analysis, vol 33, N° 5, pp. 1033-1056, 1999.
- [3] Amara M. , *Une méthode optimale de classe C^0 d'approximation du bilaplacien*; Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Tome 319, pp.1327-1330, Série I, Paris 1994.
- [4] Amara M., El Dabaghi F., *Une méthode optimale d'éléments finis de classe C^0 d'approximation du bilaplacien 2D: analyse théorique et résultats numériques*. Rapport de Recherche INRIA, N° 3068, Décembre 1996, accepté pour publication 2000, Numerisch Mathematik.
- [5] Bermudez A., Durany J., *Application of characteristics method with variable time step to steady convection-diffusion problems*. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, 1987
- [6] Bernardi C., Girault V., Maday Y., *Mixed spectral element approximation of the Navier Stokes equations in the stream function and vorticity formulation*; IMA Journal of Numerical Analysis, 12, pp.565-608, 1992.
- [7] Brezzi F., Fortin M., *Mixed and hybrid finite element method*; Springer Series in Computational Mathematics, 15, Springer Verlag New York, 1991.
- [8] Brezzi F., Fortin M., Marini L.D., *Mixed finite element methods with continuous stresses*; Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 3, No 2, pp.275-287, 1993.
- [9] Bruneau Ch.H., Jouron C., *An efficient scheme for solving steady incompressible Navier-Stokes equations*; RR 88-22, Laboratoire d'analyse Numérique, Université de Paris-Sud, France, 1988.
- [10] Ciarlet P.G., Glowinski R., *Dual iterative techniques for solving a finite element approximation of the biharmonic equation*; Springer Verlag Berlin, 1984.

- [11] Ciarlet P.G., Raviart P.A., *A mixed method for the biharmonic problem*; Mathematical aspect of finite elements in partial differential equations, Carl de Boor Ed, Academic Press, New York, pp.125-145, 1974.
- [12] El Dabaghi F., *2D numerical simulation of some eutrophication aspects* . SAMS, 1999, vol. 00, pp 1-24.
- [13] Fortin M., Peyret R., Temam R. ,*Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible*. Journal de Mécanique, Vol. 10, Num. 3, Septembre 1971.
- [14] Girault V., Giroire J., Sequeira A., *A stream function-vorticity variational formulation for the exterior Stokes problem in weighted Sobolev spaces*; Math. Meth. in the Applied Sciences, 15 5, pp.345-363, 1992.
- [15] Girault V., Raviart P.A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations, Theory and Algorithms*; Springer Verlag Berlin, 1986.
- [16] Glowinski R., Pironneau O., *Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two dimensional Stokes problem*; SIAM Review, 17, pp.167-212, 1979.
- [17] Grisvard P., *Elliptic problems in non smooth domains*; Pitman Publishing Inc., London, 1985.
- [18] Kondratiev V.A., *The smoothness of a solution of Dirichlet's problem for second order elliptic equations in a region with a piecewise smooth boundary*; Differential Equations, 6, 1392-1401, 1970.
- [19] Nitsche J., *Über ein variationsprinzip zur lösung von Dirichlet-problem bei verwendung von Teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind*; Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 36:9-15, 1970/1971.
- [20] Pironneau O., *On the transport diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations.*; Numer Math. 38, pages 309-332,1982.



Unit é de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unit é de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unit é de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unit é de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unit é de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399