

Méthode volumes finis pour la résolution du système de Maxwell 1D sur des grilles raffinées localement

Nicolas Canouet, Loula Fatima Fezoui, Serge Piperno

▶ **To cite this version:**

Nicolas Canouet, Loula Fatima Fezoui, Serge Piperno. Méthode volumes finis pour la résolution du système de Maxwell 1D sur des grilles raffinées localement. RR-4301, INRIA. 2001. inria-00072286

HAL Id: inria-00072286
https://inria.hal.science/inria-00072286

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INRIA

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Méthode volumes finis pour la résolution du système de Maxwell 1D sur des grilles raffinées localement

Nicolas Canouet - Loula Fézoui - Serge Piperno

N° 4301

Octobre 2001

THÈME 4



ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--4301--FR

INRIA
SOPHIA ANTIPOLIS

Méthode volumes finis pour la résolution du système de Maxwell 1D sur des grilles raffinées localement

Nicolas Canouet - Loula Fézoui - Serge Piperno

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet CAIMAN

Rapport de recherche n° 4301 — Octobre 2001 — 29 pages

Résumé : On propose dans ce rapport un schéma volumes finis adapté au raffinement de maillage local. L'étude est menée dans un cadre monodimensionnel. Le schéma proposé repose sur une discrétisation temporelle de type saute-mouton et sur une évaluation des flux par un β-schéma (méthode MUSCL). On montre dans le cas d'un maillage uniforme que pour tout CFL infèrieur au CFL maximum, il existe un choix de β tel que le schéma associé soit d'ordre 4. L'idée dans le cas du raffinement de maillage est de choisir β de telle sorte que localement le schéma soit d'ordre 4. Les effets dispersifs sont ainsi considérablement réduits.

Mots-clés : Électromagnétisme - Volumes Finis - Raffinement de maillage spatial - Équations de Maxwell 1D

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : +33 4 92 38 77 77 — Télécopie : +33 4 92 38 77 65

A finite volume method for the solution of the one-dimensional Maxwell's equation on locally refined grids

Abstract: In this report, we study a finite volume scheme for the solution of the one-dimensional Maxwell's equation on locally refined grids. The solver presented is based on a leap-frog time scheme coupled with a centered flux formula which uses a convex interpolation depending on a parameter beta (MUSCL method). We show that, for all CFLs, on uniform grids beta can be fixed in such a way that the order of the scheme is 4. On local refined grids, the same choice is made to get locally a 4th order scheme. Thus, the dispersion of the method is really small.

Key-words: Electromagnetism - Finite Volume - Locally refined grids - Maxwell's equations 1D -

Table des matières

1 Le schéma volumes finis [10] 6
1.1 Description du schéma 6
1.2 Propriétés du schéma 7

2 Flux numériques pondérés 9
2.1 Propagation d'un pulse en milieu hétérogène 10
2.2 Description des nouveaux flux 11

3 La famille des β-schémas 11
3.1 Description du schéma 12
3.2 Analyse 1-D du schéma 13
3.2.1 Stabilité du schéma 15
3.2.2 Précision du schéma 16
3.2.3 Résultats numériques 19

4 Application aux grilles raffinées 19
4.1 Présentation de la méthode 21
4.2 Expériences numériques 21
4.2.1 Calculs à petit pas de temps sur une grille uniforme 21
4.2.2 Simulations avec des grilles raffinées 23

Bibliographie 29

Introduction

On s'intéresse ici à la résolution du système de Maxwell dans le domaine temporel. Dans ce cadre les méthodes les plus connues et les plus utilisées sont les méthodes dites **FDTD** (pour **F**inite **D**ifference **T**ime **D**omain). Elles sont issues d'un schéma saute-mouton en temps et à grille spatiale décalée proposé par Yee en 1966 [12] . On peut aisément prouver que ce schéma est stable, précis à l'ordre deux en temps et en espace et que de plus il préserve la propriété de divergence nulle au cours des itérations. Toutes ces propriétés ainsi que son faible coût et la simplicité de sa mise en œuvre sont sérieusement compromises dès que la grille spatiale n'est plus orthogonale uniforme (ie grille en rectangles identiques). Hélas il n'est pas toujours aisé voire possible de mailler un domaine quelconque avec de telles grilles. Ainsi la présence de frontières courbes à l'intérieur du domaine peut engendrer des oscillations parasites dans les solutions. De même la présence de structures fines par rapport à la taille du domaine (fils, incrustations, etc..) peut rendre le coût de la simulation en temps de calcul et en place mémoire très élevé et dans certains cas prohibitif.

Une solution classique dans ces cas est l'emploi de grilles localement raffinées. Plusieurs travaux ont été menés pour étendre le schéma de Yee à ce type de maillages. Citons parmi d'autres les travaux de Kim et Hoefer [7], de Prescott et Shuley [9], de Chevalier et al. [2]. Tous ces travaux proposent des techniques d'interpolation plus ou moins sophistiquées à l'interface des sous-grilles afin de stabiliser le schéma et de corriger les phénomènes de réflexions parasites et de dispersion. Plus récemment Joly et Fouquet[5] ont proposé une nouvelle méthode en dimensions trois d'espace garantissant un raccord stable entre les grilles basée sur la conservation d'une énergie électromagnétique discrète. Les résultats numériques présentés dans [5] montrent cependant que la qualité des solutions se dégrade dès que le niveau de raffinement est supérieur à deux à cause principalement des phénomènes de dispersion.

Il y a bien d'autres travaux sur diverses extensions du schéma de Yee aux grilles non uniformes et on pourra consulter l'ouvrage de Taflove [11] et l'abondante littérature qu'il cite. Le travail que nous présentons ici s'inscrit dans cette recherche de schémas stables, précis et aptes à prendre en compte des maillages localement raffinés. Nous nous basons sur un schéma volumes finis centrés proposé par Remaki [10]. Utilisé avec des grilles orthogonales, ce schéma partage avec celui de Yee beaucoup de propriétés: précision d'ordre deux en temps et espace (l'intégration en temps est identique), conservation d'un équivalent discret de l'énergie électromagnétique, même niveau de dispersion, simplicité de mise en œuvre et temps de calcul voisins. L'avantage principal d'un schéma de type volumes finis sur une méthode de différences finies est l'extension directe au cas de maillages non structurés et on a pu prouver que dans ce dernier cas le schéma reste stable et conserve l'énergie [8].

Néanmoins, appliqué tel quel à des grilles localement raffinées, des phénomènes de dispersion apparaissent qui dégradent d'autant plus la solution que le niveau de raffinement est grand. Cela est du principalement au fait que le pas de temps imposé par la condition de stabilité s'avère trop petit sur les mailles plus grossières.

Nous introduisons ici des gradients centrés et décentrés que nous combinons à l'aide d'un paramètre local appelé β par référence à une étude antérieure effectuée dans le cadre de schémas décentrés [1]. En comparaison avec le travail cité, le schéma en temps est ici un schéma saute-mouton et les flux sont centrés (ce qui correspond à une valeur nulle du paramètre γ dans [1]).

De plus ce paramètre β est utilisé ici pour minimiser la dispersion locale et ce afin de prendre en compte des grilles raffinées sans ajout de degrés de liberté aux interfaces entre les grilles ou les mailles de tailles différentes. Notons que cette étude préliminaire est à une dimension d'espace.

Un autre problème est apparu dans le cas de grilles structurées que nous n'avons pas observé avec des maillages triangulaires: l'apparition d'oscillations parasites à l'interface de matériaux, l'amplitude des oscillations grandissant avec le saut d'indice. Nous proposons ici une pondération des flux qui supprime complètement ces oscillations et cette modification est aisément extensible aux dimensions supérieures.

Dans la première partie de ce rapport nous décrivons le schéma dans sa forme initiale et rappelons ses propriétés principales.
Nous présentons dans la deuxième partie les flux pondérés et des simulations numériques en milieu hétérogène.
Dans la troisième partie nous introduisons le paramètre β dans le cadre de grilles orthogonales et nous analysons le schéma obtenu dans un cadre monodimensionnel.
La quatrième partie est consacrée au problème du raffinement à une dimension d'espace.

1 Le schéma volumes finis [10]

On décrit brièvement le schéma volumes finis proposé par M. Remaki [10] dans un cadre général et on rappelle quelques propriétés.

1.1 Description du schéma

On considère le système de Maxwell en l'absence de charge et de courant sous la forme conservative suivante:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + div\mathbb{F}(\mathbf{Q}) = 0 \tag{1}$$

où $\mathbf{Q} = {}^t(\mathbf{B},\mathbf{D})$, et $\mathbb{F} = (\mathbf{F_1},\mathbf{F_1},\mathbf{F_3})$, avec

$$\mathbf{F_1}(\mathbf{Q}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -D_z/\varepsilon \\ D_y/\varepsilon \\ 0 \\ B_z/\mu \\ -B_y/\mu \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F_2}(\mathbf{Q}) = \begin{Bmatrix} D_z/\varepsilon \\ 0 \\ -D_x/\varepsilon \\ -B_z/\mu \\ 0 \\ B_x/\mu \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F_3}(\mathbf{Q}) = \begin{Bmatrix} -D_y/\varepsilon \\ D_x/\varepsilon \\ 0 \\ B_y/\mu \\ -B_x/\mu \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

où B et D désignent respectivement les inductions magnétique et électrique et ε et μ la permittivité électrique et la perméabilité magnétique.
On considère ce système posé dans un domaine borné de $I\!R^3$ à la frontière duquel des conditions aux limites de type métallique et/ou absorbant sont posées. Le traitement de ces conditions étant identique à celui décrit dans [8], le lecteur pourra s'y référer pour de plus amples détails.
On suppose que le domaine de calcul est maillé de façon conforme en polyèdres que nous choisissons comme volumes de contrôle encore appelées cellules. Nous rappelons que d'autres choix sont possibles comme celui considéré dans [1] par exemple.

On intègre par parties le système (1) sur chaque cellule $\mathbf{V}$ du maillage et on note $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à $\mathbf{V}$:

$$\int_{\mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}\, dv + \int_{\partial \mathbf{V}} \mathbb{F}(\mathbf{Q}).\mathbf{n}\, ds = 0 \tag{2}$$

En supposant que la dérivée en temps est constante en espace sur chaque cellule et en introduisant la fonction de flux numérique $\mathbf{\Phi}(\mathbf{Q_V},\mathbf{Q_{V'}})$ qui approche le flux continu entre deux cellules adjacentes $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$, on obtient le système semi-discret suivant:

$$Vol(\mathbf{V})(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}) + \sum_{\mathbf{V}' \in \mathbf{P}(\mathbf{V})} \mathbf{\Phi}(\mathbf{Q_V},\mathbf{Q}'_{\mathbf{V}}) = 0 \tag{3}$$

où $\mathbf{P}(\mathbf{V})$ est l'ensemble des voisins de $\mathbf{V}$ et $\mathbf{Q_V}$ est la valeur moyenne du champ sur la cellule $\mathbf{V}$ définie par :

$$\mathbf{Q_V} = \frac{1}{\mathbf{V}} \int_{\mathbf{V}} \mathbf{Q}(X) dX.$$

Plusieurs choix sont possibles pour le flux numérique Φ. Celui proposé par Remaki dans [10] est un flux centré défini par :

$$\Phi(U,U^{'}) = \mathcal{F}\left(\frac{U+U^{'}}{2},\eta\right). \tag{4}$$

$$\text{avec } \mathcal{F}(U,\eta) = \eta.\mathbf{IF}(U) \quad \text{et} \quad \eta = \int\limits_{\partial\mathbf{V}\cap\partial\mathbf{V}'} \mathbf{nds}$$

Discrétisation temporelle

Après discrétisation spatiale, le système approché peut s'écrire sur chaque cellule comme suit :

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \Psi_1(\mathbf{D}) = 0$$

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} + \Psi_2(\mathbf{B}) = 0$$

où Ψ_1 et Ψ_2 représentent la somme des flux numériques de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$ respectivement.

Le schéma choisi est un schéma saute-mouton d'ordre deux qui s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t\Psi_1(\mathbf{D}^n) \\ \\ \mathbf{D}^{n+1} = \mathbf{D}^n - \Delta t\Psi_2(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}) \end{cases} \tag{5}$$

1.2 Propriétés du schéma

Nous énonçons dans ce paragraphe les caractéristiques numériques du schéma volumes finis décrit ci-dessus.

Stabilité du schéma dans le cas structuré

Nous considérons un maillage composé de parallélépipèdes identiques où le domaine de calcul est infini. Alors la stabilité du schéma est assurée pour un matériau homogène par la condition de CFL suivante :

$$C\Delta t\sqrt{(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{1}{\Delta z^2})} \leq 2 \tag{6}$$

où C_{max} est la vitesse maximale de l'onde dans le domaine de propagation. On pourra se référer à [10] pour la preuve. On rappelle que le schéma de Yee est stable sous la condition CFL deux fois plus contraignante :

$$C\Delta t\sqrt{(\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{1}{\Delta z^2})} \leq 1 \tag{7}$$

Stabilité du schéma dans le cas non structuré

On montre dans [8] que le schéma est stable en norme L^2 sur tout maillage en polyèdres si pour toutes cellules adjacentes $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ le pas de temps Δt vérifie :

$$\Delta t^2 < 16 \frac{VV'}{PP'} \min(\varepsilon\mu', \varepsilon'\mu) \tag{8}$$

où V est le volume de la cellule $\mathbf{V}$ et P l'aire de sa frontière.

Ordre du schéma

Par la méthode des équations équivalentes on montre dans [10] que le schéma est d'ordre deux en espace et en temps sur une grille structurée uniforme.

Dispersion numérique

Rappelons la relation de dispersion dans le cas continu :

$$\omega^2 = |k|^2 C^2$$

Cette relation est vérifiée par des ondes de vitesse de phase $\pm C$. Pour étudier la dispersion numérique d'un schéma, on considère une onde harmonique :

$$E(j\Delta x, l\Delta y, m\Delta z, n\Delta t) = E_0 e^{i[\omega n\Delta t - (k_x j\Delta x + k_y l\Delta y + k_z m\Delta z)]}$$

On injecte une telle onde dans l'équation des ondes discrète obtenue à partir du schéma. Un développement de Taylor donne ensuite la relation de dispersion.

On obtient pour le schéma étudié dans cette section :

$$\omega^2\left(1 - \frac{\omega^2\Delta t^2}{12} + O(\omega^4\Delta t^4)\right) =$$

$$C^2|k|^2 \left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{k_x^4\Delta x^2 + k_y^4\Delta y^2 + k_z^4\Delta z^2}{|k|^2}\right) + O\left(\frac{k_x^6\Delta x^4 + k_y^6\Delta y^4 + k_z^6\Delta z^4}{|k|^2}\right)\right)$$

La relation de dispersion dans le cas du schéma de Yee est

$$\omega^2\left(1 - \frac{\omega^2\Delta t^2}{12} + O(\omega^4\Delta t^4)\right) =$$

$$C^2|k|^2 \left(1 - \frac{1}{12}\left(\frac{k_x^4\Delta x^2 + k_y^4\Delta y^2 + k_z^4\Delta z^2}{|k|^2}\right) + O\left(\frac{k_x^6\Delta x^4 + k_y^6\Delta y^4 + k_z^6\Delta z^4}{|k|^2}\right)\right)$$

Ainsi, tout comme le schéma de Yee, la méthode volumes finis présente une dispersion d'ordre 2. On note toutefois que celle donnée par le schéma de Yee est plus faible.

Conservation de l'énergie discrète

On définit un analogue discret de l'énergie électromagnétique totale par:

$$\mathcal{E}_h^n = \sum_i V_i \left(\mathbf{D}_i^n . \mathbf{E}_i^n + \mathbf{B}_i^{n+\frac{1}{2}} . \mathbf{H}_i^{n-\frac{1}{2}} \right) \tag{9}$$

où les champs électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{H}$ sont reliés respectivement aux inductions $\mathbf{D}$ et $\mathbf{B}$ par :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

On montre dans [8] que cette énergie est conservée par le schéma pour un maillage quelconque d'un domaine sans frontière absorbante. Ce dernier cas y est aussi traité et on pourra s'y référer pour plus de détails.
En conclusion ce schéma présente des caractéristiques analogues au schéma de Yee sur les grilles orthogonales. On peut montrer qu'en dimension n d'espace ($n \leq 3$) ce schéma est équivalent à 2^n schémas de Yee décalés [8] . Il y a toutefois une différence importante qui est que dans les volumes finis toutes les composantes du champ sont localisées au même endroit alors que dans le schéma de Yee les composantes des champs sont réparties sur les faces et les arêtes du maillage. Cette façon de faire est considérée comme un avantage si on regarde en priorité la vérification au niveau discret des relations entre opérateurs différentiels, le rotationnel et la divergence notamment. Le prix à payer est que l'extension au cas de maillages non uniformes (pas d'espace variable dans chaque direction) est difficile et demande des modifications importantes dans le schéma sans garantir que les bonnes propriétés du schéma de Yee soient toutes conservées après extension comme le faible coût et la simplicité de mise en œuvre par exemple.
La méthode des volumes finis permet en principe d'envisager des maillages quelconques avec cependant des limites imposées par l'intégration en temps. Nous avons fait le choix du schéma saute-mouton pour sa simplicité, sa précision et son rôle important dans la conservation de l'énergie. Il reste que c'est un schéma explicite soumis à une condition de type CFL et ceci restreint l'usage de grilles spatiales quelconques par la perte de précision engendrée par les phénomènes de dispersion déjà cités.

2 Flux numériques pondérés

Avant de présenter la nouvelle fonction de flux numérique, nous allons mettre en évidence la présence d'oscillations à l'interface entre deux matériaux d'indices différents. Nous tenons à rappeler que ce problème n'a jamais été observé dans le cas de maillages triangulaires et ce même avec des milieux fortement hétérogènes (voir les résultats numériques dans la thèse de Remaki [10]).

2.1 Propagation d'un pulse en milieu hétérogène

On simule donc la propagation d'un pulse dans un matériau linéaire hétérogène non dispersif dans le cas monodimensionnel. Le système de Maxwell s'écrit dans ce cas:

$$\begin{cases} \mu(x)\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0 \\ \epsilon(x)\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

On considère une subdivision uniforme de l'intervalle de calcul en cellules $[x_i,x_{i+1}]$ avec $x_i = i\Delta x$ et le schéma volumes finis centrés décrit ci-dessus devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \dfrac{1}{2\mu_{i+\frac{1}{2}}\Delta x}\left(\mathbf{E}_{i+\frac{3}{2}}^{n} - \mathbf{E}_{i-\frac{1}{2}}^{n}\right), \\ \dfrac{\mathbf{E}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \mathbf{E}_{i+\frac{1}{2}}^{n}}{\Delta t} = \dfrac{1}{2\epsilon_{i+\frac{1}{2}}\Delta x}\left(\mathbf{H}_{i+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \end{cases} \tag{11}$$

où $\epsilon_{i+\frac{1}{2}} = \epsilon(x_i + \frac{1}{2})$ et $\mu_{i+\frac{1}{2}} = \mu(x_i + \frac{1}{2})$.

Pour ce cas test nous avons choisi comme matériaux le vide à droite de l'origine ($\epsilon(x) = \epsilon_0$) et du verre à gauche ($\epsilon(x) = 4\epsilon_0$) et on a $\mu(x) = \mu_0$ dans tout le domaine. A $t = 0$ le pulse de type gaussien se trouve dans le vide (figure 1).

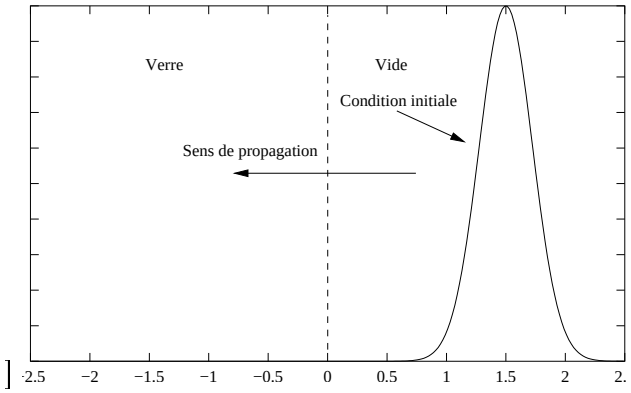


FIG. 1 – *Propagation d'un pulse dans un milieu hétérogène*

On présente sur la figure (2) l'un des champs après la traversée de l'interface entre les 2 matériaux. On constate que l'onde réfléchie présente des oscillations parasites. On signale que l'amplitude de ces oscillations diminue avec le pas d'espace, néanmoins ce remède ne nous paraît pas satisfaisant et nous présentons ci-dessous une nouvelle formulation des flux.

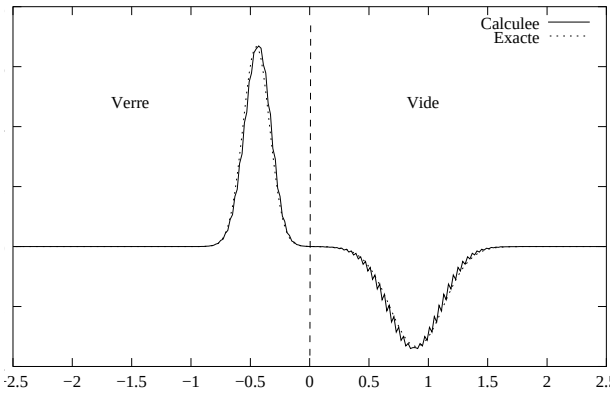


FIG. 2 – *Propagation d'un pulse dans un milieu hétérogène* - $t = 60\Delta t$.

2.2 Description des nouveaux flux

Rappelons que le flux numérique entre deux cellules voisines V et V' s'écrit :

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{Q_V},\mathbf{Q_{V'}}) = \mathcal{F}\left(\frac{\mathbf{Q_V}+\mathbf{Q'_V}}{2}\right).$$

Nous proposons ici des flux pondérés par les caractéristiques du milieu :

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{Q_V},\mathbf{Q_{V'}}) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_H\left(\dfrac{\epsilon_{\mathbf{V'}}H_{\mathbf{V}}+\epsilon_{\mathbf{V}}H_{V'}}{\epsilon_{\mathbf{V}}+\epsilon_{\mathbf{V'}}}\right) \\ \mathcal{F}_E\left(\dfrac{\mu_{\mathbf{V'}}E_{\mathbf{V}}+\mu_{\mathbf{V}}E_{\mathbf{V'}}}{\mu_{\mathbf{V}}+\mu_{\mathbf{V'}}}\right) \end{pmatrix}$$

où $\epsilon_{\mathbf{V}}$ et $\mu_{\mathbf{V}}$ sont les valeurs moyennes de $\epsilon(x)$ et de $\mu(x)$ sur la cellule $\mathbf{V}$ et $\mathcal{F} = {}^t(\mathcal{F}_H,\mathcal{F}_E)$.

On présente sur la figure (3) le résultat du cas test précédent avec ce nouveau flux, tous les autres paramètres restant identiques. On constate que les oscillations ont disparu et que la solution se compare très bien à la solution exacte.

Notons qu'on retrouve le schéma décrit dans la section précédente dans le cas d'un milieu homogène et que la nouvelle formulation des flux s'étend de façon directe aux dimensions supérieures.

3 La famille des β-schémas

Les β-schémas ont été introduits en 1987 par Desideri et al [3] en volumes finis décentrés et une intégration temporelle de type Runge-Kutta. On montrait dans cette étude qu'on pouvait contrôler le niveau de dispersion et de diffusion du schéma par le choix du paramètre β.

Nous présentons ici une étude analogue pour le système de Maxwell en partant du schéma volumes finis centrés décrit dans la première partie de ce rapport. L'analyse des propriétés du schéma (stabilité et précision) sera menée dans un cadre monodimensionnel.

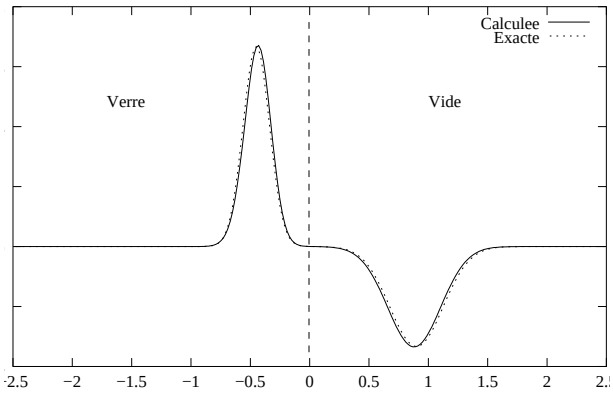


FIG. 3 – *Propagation d'un pulse dans un milieu hétérogène - Flux pondérés* $t = 60\Delta t$.

3.1 Description du schéma

On considère ici le système de Maxwell en variables $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$:

$$\begin{cases} \epsilon(x)\dfrac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathrm{rot}(\mathbf{H}) \\ \\ \mu(x)\dfrac{d\mathbf{H}}{dt} = -\mathrm{rot}(\mathbf{E}) \end{cases} \tag{12}$$

On intègre le système sur chaque élément noté $\mathbf{V}$ du maillage:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbf{V}} \epsilon(x)\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \int_{\mathbf{V}} \mathrm{rot}(\mathbf{H}) \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbf{V}} \mu(x)\frac{d\mathbf{H}}{dt} = -\int_{\mathbf{V}} \mathrm{rot}(\mathbf{E}). \end{cases} \tag{13}$$

En supposant que ϵ, μ et les dérivées en temps des champs sont constants sur chaque cellule V et en utilisant une formule de Green pour les termes de droite des équations, on obtient:

$$\begin{cases} \mathbf{V}\epsilon(x)\dfrac{d\mathbf{E}}{dt} = \displaystyle\sum_{\mathbf{V}' \text{ voisin de } \mathbf{V}} \int_{\partial\mathbf{V}\cap\partial\mathbf{V}'} \mathbf{n}\times\mathbf{H} \\ \\ \mathbf{V}\mu(x)\dfrac{d\mathbf{H}}{dt} = -\displaystyle\sum_{\mathbf{V}' \text{ voisin de } \mathbf{V}} \int_{\partial\mathbf{V}\cap\partial\mathbf{V}'} \mathbf{n}\times\mathbf{E}. \end{cases} \tag{14}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire extérieure à $\mathbf{V}$
Il reste à évaluer les intégrales aux interfaces des cellules. Ces intégrales s'interprètent physiquement comme les courants électriques et magnétiques aux interfaces. On note $\mathbf{E}_{\mathbf{VV}'}$ (respectivement $\mathbf{H}_{\mathbf{VV}'}$) la valeur moyenne de $\mathbf{E}$ (respectivement $\mathbf{H}$) sur $\partial\mathbf{V}\cap\partial\mathbf{V}'$. L'équation (14) devient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}\epsilon(x)\dfrac{d\mathbf{E}}{dt} = \displaystyle\sum_{\mathbf{V}' \text{ voisin de } \mathbf{V}} \eta \ \times \mathbf{H}_{\mathbf{V}\mathbf{V}'} \\ \\ \mathbf{V}\mu(x)\dfrac{d\mathbf{H}}{dt} = - \displaystyle\sum_{\mathbf{V}' \text{ voisin de } \mathbf{V}} \eta \ \times \mathbf{E}_{\mathbf{V}\mathbf{V}'}. \end{array} \right. \tag{15}$$

ou $\eta = \int_{\partial\mathbf{V}\cap\partial\mathbf{V}'} \mathbf{n} = \text{Aire}(\partial\mathbf{V} \cap \partial\mathbf{V}')$

Fonction de flux numérique

Pour évaluer les flux, on prend la même fonction de flux définie par (4) calculée ici avec de nouvelles valeurs de part et d'autre des interfaces des cellules. Ces valeurs sont obtenues via une combinaison convexe de paramètre β de la manière suivante (en notant $\mathbf{Q} =^t (\mathbf{H},\mathbf{E})$) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}'} & = & \mathbf{Q}_{\mathbf{V}} + \{ (1-2\,\beta)\dfrac{(\mathbf{Q}_{\mathbf{V}'} - \mathbf{Q}_{\mathbf{V}})}{G_{\mathbf{V}}G_{\mathbf{V}'}} + 2\,\beta\overrightarrow{\nabla}\mathbf{Q}_{\mathbf{V}}.\overrightarrow{\mathbf{G}_{\mathbf{V}}\mathbf{G}_{\mathbf{V}'}} \}\|\overrightarrow{\mathbf{G}_{\mathbf{V}}\mathbf{G}_{\mathbf{V}\mathbf{V}'}}\| \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{V}'\mathbf{V}} & = & \mathbf{Q}_{\mathbf{V}'} - \{ (1-2\,\beta)\dfrac{(\mathbf{Q}_{\mathbf{V}'} - \mathbf{Q}_{\mathbf{V}})}{G_{\mathbf{V}}G_{\mathbf{V}'}} + 2\,\beta\overrightarrow{\nabla}\mathbf{Q}_{\mathbf{V}'}.\overrightarrow{\mathbf{G}_{\mathbf{V}'}\mathbf{G}_{\mathbf{V}}} \}\|\overrightarrow{\mathbf{G}_{\mathbf{V}}\mathbf{G}_{\mathbf{V}\mathbf{V}'}}\| \end{array} \right.$$

où $G_{\mathbf{V}}$ et $G_{\mathbf{V}'}$ sont les centres de gravité des cellules $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$, $G_{\mathbf{V}\mathbf{V}'}$ le point milieu de l'arête $\partial\mathbf{V} \cap \partial\mathbf{V}'$, $\overrightarrow{\nabla}\mathbf{Q}_{\mathbf{V}}$ est le gradient du champ sur la cellule $\mathbf{V}$. Il y a plusieurs façons de définir ce gradient en particulier pour des maillages non structurés (voir [4] par exemple), nous en donnerons une formulation simple pour une grille structurée dans la section suivante.
La fonction flux numérique est alors

$$\text{flux}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{V},\mathbf{V}') = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_{\mathbf{V}\mathbf{V}'} + \mathbf{Q}_{\mathbf{V}'\mathbf{V}}).$$

Le reste de la discrétisation spatiale et l'intégration en temps sont identiques au schéma présenté dans la première partie.

3.2 Analyse 1-D du schéma

On se propose d'étudier le schéma dans le cas du système de Maxwell à une dimension d'espace pour une grille uniforme (les cellules sont donc des segments de taille identique). On considère le cas transverse magnétique et on désigne par H la composante en y du champ magnétique et par E la composante en z du champ électrique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial t} - \dfrac{\partial E}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial t} - \dfrac{\partial H}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \tag{16}$$

On définit le gradient du champ sur chaque cellule d'indice i par :

$$\nabla Q_i = \frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2\Delta x}$$

où $Q_i = {}^t(H_i,E_i)$.

Ainsi, la fonction de flux numérique entre la cellule i et $i+1$ est

$$\text{flux}_Q(i,i+1) = \frac{Q_i + Q_{i+1}}{2} + \beta\frac{Q_{i+2} - Q_i}{2} - \beta\frac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{2}$$

On aboutit dans le cas du vide où ε et μ sont normalisés au schéma :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_i^{n+\frac{1}{2}} = H_i^{n-\frac{1}{2}} + \nu \left(\text{flux}_E(i,i+1) - \text{flux}_E(i-1,i)\right) \\ E_i^{n+1} = E_i^n + \nu \left(\text{flux}_H(i,i+1) - \text{flux}_H(i-1,i)\right) . \end{array} \right. \tag{17}$$

C'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{l} H_i^{n+\frac{1}{2}} = H_i^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{\nu}{2}\left(-\dfrac{\beta}{2}E_{i+2}^n + \beta' E_{i+1}^n - \beta' E_{i-1}^n + \dfrac{\beta}{2}E_{i-2}^n\right) \\ E_i^{n+1} = E_i^n + \dfrac{\nu}{2}\left(-\dfrac{\beta}{2}H_{i+2}^{n+\frac{1}{2}} + \beta' H_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - \beta' H_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + \dfrac{\beta}{2}H_{i-2}^{n+\frac{1}{2}}\right) . \end{array} \right. \tag{18}$$

où $\nu = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ et $\beta' = \beta + 1$.

Conditions aux limites pour une frontière métallique

Les simulations numériques présentées dans cette étude font intervenir des conditions aux limites de type métallique. On note en dimension trois $\mathbf{E}_s$ et $\mathbf{H}_s$ les champs électriques et magnétiques sur la surface extérieure du métal. Ces champs vérifient alors

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n}.\mathbf{H}_s = 0.$$

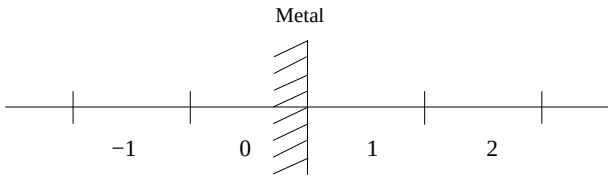


FIG. 4 – *Condition métallique : méthode des images*

On modélise en 1D ces relations par la méthode des images. Avec les notations de la figure 4, on pose

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0^{n+\frac{1}{2}} = H_1^{n+\frac{1}{2}} \\ H_{-1}^{n+\frac{1}{2}} = H_2^{n+\frac{1}{2}} \\ E_0^n = -E_1^n \\ E_{-1}^n = -E_2^n. \end{array} \right.$$

Les fonctions de flux numériques sont alors données par

$$\begin{cases} \text{flux}_H(0,1) = H_1 + \beta \dfrac{H_1 - H_2}{2} \\ \text{flux}_H(1,2) = \dfrac{H_1 + H_2}{2} + \beta \dfrac{-H_3 + H_2}{4} \\ \text{flux}_E(0,1) = 0 \\ \text{flux}_E(1,2) = \dfrac{E_1 + E_2}{2} + \beta \dfrac{-E_3 + E_2 + 2E_1}{4} \end{cases}$$

3.2.1 Stabilité du schéma

Proposition 1 *le schéma (18) est stable sous la condition de CFL :*

$$C \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \min_{\theta \in [0,2\pi]} \frac{4}{|2(1+\beta)\sin(\theta) - \beta \sin(2\theta)|}. \tag{19}$$

On donne dans le tableau 1 quelques valeurs du CFL en fonction de β.

	CFL
$\beta = 0$	2
$\beta = \frac{1}{4}$	1,57
$\beta = \frac{1}{3}$	1,46
$\beta = 1$	0,9

TAB. 1 – *CFL en fonction de β*

Preuve : On montre ce résultat en utilisant le critère de stabilité de Von Neumann. On note :

$$\mathbf{Q}_l^n = \begin{pmatrix} H_l^{n-\frac{1}{2}} \\ E_l^n \end{pmatrix}$$

On procède à l'analyse de Fourier en définissant :

$$\hat{\mathbf{Q}}_l^n = g^n(\theta)\ \exp(i\, l\theta \Delta x) \tag{20}$$

A l'itération $(n+1)$ le mode de Fourier s'écrit :

$$\hat{\mathbf{Q}}_l^{n+1} = G_\theta\, \hat{\mathbf{Q}}_l^n, \tag{21}$$

Où la matrice d'amplification G_θ est donnée par :

$$G_\theta = \mathrm{Id} + \begin{pmatrix} -\alpha^2 & i\alpha \\ i\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = \frac{\Delta t}{2\Delta x} |2(1+\beta)\sin(\theta) - \beta \sin(2\theta)|$.

La condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma (condition de Von Neuman) s'écrit :

$$\forall\, \theta \in [0,2\pi], \quad \min_{s=1,2} \lambda_\theta^s \leq 1$$

où les valeurs λ_θ^s représentent les valeurs propres de la matrice G_θ.
Considérons $M = G_\theta - \mathrm{Id}$. Le polynôme caractéristique de M est

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \alpha.$$

Supposons $\alpha \leq 4$. Les valeurs propres de M sont données par

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm i\sqrt{4\alpha - \alpha^2}}{2}$$

$$\Longrightarrow \max_i |1 + \lambda_i| = \sqrt{\frac{(2-\alpha)^2 + (4\alpha - \alpha^2)}{4}} = 1.$$

Ce qui implique la stabilité du schéma.

Réciproquement, montrons que pour $\alpha > 4$, le schéma est instable.
Nous avons pour $\alpha > 4$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha}}{2}.$$

On suppose que

$$|1 + \lambda_i| \leq 1$$

$$\Longrightarrow \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha} \leq 4.$$

Ce qui est absurde. Ceci achève la démonstration de la proposition.

3.2.2 Précision du schéma

Proposition 2 *Le β-schéma (18) est d'ordre deux en espace et en temps sur un maillage uniforme. De plus, si $\beta < \frac{1}{3}$ et $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \sqrt{4(1-3\beta)}$ le schéma est d'ordre 4 en espace et en temps. La dispersion numérique est aussi d'ordre 4.*

Pour vérifier le degré de dispersion d'un schéma, on établit la relation qui relie la pulsation w d'une onde plane au vecteur d'onde k. Elle est donnée dans le cas continu par $w^2 = |k|^2 C^2$. On établit l'équation des ondes discrète dans le vide à partir du schéma et par une analyse harmonique on établit la relation de dispersion discrète. Dans le cas présent on obtient

$$w^2 = |k|^2 C^2 + \frac{k^4 C^2 \Delta x^2}{12} \left(\frac{C^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} - 4(1-3\beta) \right) + O(\Delta^4). \tag{22}$$

On trouve ainsi que la dispersion est d'ordre 2 dans le cas général et qu'elle est d'ordre 4 sous la condition évoquée ci-dessus.
On utilise pour montrer le résultat précédent la méthode des équations équivalentes. La

démarche est de chercher l'équation que vérifie une fonction régulière solution des équations discrètes.

Preuve :

Supposons qu'il existe $(H,E) \in C^\infty_{x,t} \times C^\infty_{x,t}$ tels que

$$\forall i, \forall n,\ H(i\Delta x, n\Delta t) = H_i^n \text{ et } E(i\Delta x, n\Delta t) = E_i^n.$$

En substituant ces valeurs dans le schéma (18) et après un développement de Taylor à l'ordre trois, on montre que (H,E) vérifient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial E}{\partial x}(x,t) + \Delta x^2 \dfrac{\partial^3 E}{\partial x^3}(x,t) \left(\dfrac{1-3\beta}{6} - \dfrac{\Delta t^2}{24\Delta x^2} \right) + O(\Delta^4) \\ \dfrac{\partial E}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,t) + \Delta x^2 \dfrac{\partial^3 H}{\partial x^3}(x,t) \left(\dfrac{1-3\beta}{6} - \dfrac{\Delta t^2}{24\Delta x^2} \right) + O(\Delta^4) \end{cases}$$

Ceci montre que le schéma est d'ordre 2 en temps et en espace et que lorsque $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \sqrt{4(1-3\beta)}$ le schéma est d'ordre 4. Ceci montre aussi que la dispersion (donnée par les dérivées impaires) est bien d'ordre 4. Ceci n'est bien sûr possible que lorsque $\beta < \frac{1}{3}$. Il reste tout de même à vérifier que le schéma est stable sous cette condition i.e.

$$\forall \beta < \frac{1}{3},\ \sqrt{4(1-3\beta)} < \min_{\theta \in [0,2\pi]} \frac{4}{|2(1+\beta)\sin(\theta) - \beta \sin(2\theta)|}.$$

On apporte seulement une vérification graphique de cette inégalité. On montre sur la figure 5 le CFL maximum autorisé par la limite de stabilité et le CFL permettant de rendre le β-schéma d'ordre 4 en fonction de β ($\beta \in [0, \frac{1}{3}]$).

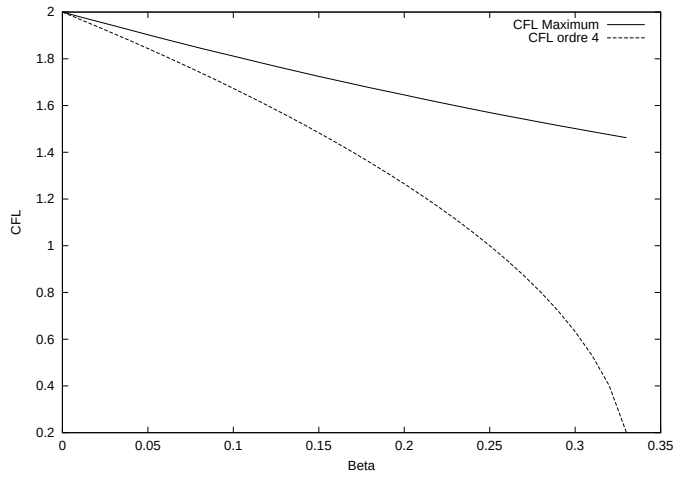


FIG. 5 – *CFL maximum et celui de l'ordre 4 en fonction de β*

Remarque 1 *Cette relation entre le paramètre β et l'erreur de dispersion rend cette classe de schémas très intéressante pour le raffinement de maillage. L'idée que nous exploiterons*

par la suite sera de choisir le paramètre β de telle sorte que le schéma soit d'ordre 4 pour un Δx et un Δt donnés. Cette approche nous permettra de construire une méthode non dispersive.

Remarque 2 *Dans l'équation équivalente nous n'avons aucuns termes de dérivées paires (termes de diffusion). Ceci explique pourquoi le schéma conserve comme nous allons le voir une énergie discrète.*

Conservation de l'énergie

Proposition 3 $\forall \beta \in [0,1]$, *le β-schéma conserve un équivalent discret de l'énergie électromagnétique.*

Preuve : On définit l'énergie discrète pour le schéma saute-mouton par:

$$2\mathcal{E}_h^n = \sum_i (E_i^n)^2 + H_i^{n+\frac{1}{2}}.H_i^{n-\frac{1}{2}}$$

On note $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ et on suppose la grille infinie.
La variation d'énergie est donnée par :

$$2\Delta\mathcal{E}_h^n = 2\mathcal{E}_h^{n+1} - 2\mathcal{E}_h^n$$

$$= \sum_i (E_i^{n+1})^2 - (E_i^n)^2 + \left(H_i^{n+\frac{3}{2}}.H_i^{n+\frac{1}{2}} - H_i^{n+\frac{1}{2}}.H_i^{n-\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \sum_i (E_i^{n+1} - E_i^n)(E_i^{n+1} + E_i^n) + H_i^{n+\frac{1}{2}} \left(H_i^{n+\frac{3}{2}} - H_i^{n+\frac{1}{2}} \right) + H_i^{n+\frac{1}{2}} \left(H_i^{n+\frac{1}{2}} - H_i^{n-\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \sum_i (E_i^{n+1} + E_i^n) \frac{\nu}{2} \left(-\frac{\beta}{2} H_{i+2}^{n+\frac{1}{2}} + (1+\beta) H_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - (1+\beta) H_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2} H_{i-2}^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$+ H_i^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{2} \left(-\frac{\beta}{2} E_{i+2}^n + (1+\beta) E_{i+1}^n - (1+\beta) E_{i-1}^n + \frac{\beta}{2} E_{i-2}^n \right) \right)$$

$$+ H_i^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{2} \left(-\frac{\beta}{2} E_{i+2}^{n+1} + (1+\beta) E_{i+1}^{n+1} - (1+\beta) E_{i-1}^{n+1} + \frac{\beta}{2} E_{i-2}^{n+1} \right) \right)$$

$$= \sum_i \frac{\nu\beta}{2} \left(-E_i^{n+1} H_{i+2}^{n+\frac{1}{2}} + E_i^{n+1} H_{i-2}^{n+\frac{1}{2}} - E_{i+2}^{n+1} H_i^{n+\frac{1}{2}} + E_{i-2}^{n+1} H_i^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$+ \frac{\nu(1+\beta)}{2} \left(E_i^{n+1} H_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - E_i^{n+1} H_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + E_{i+1}^{n+1} H_i^{n+\frac{1}{2}} - E_{i-1}^{n+1} H_i^{n+\frac{1}{2}} \right\}$$

$$+ \frac{\nu\beta}{2} \left(-E_i^n H_{i+2}^{n+\frac{1}{2}} + E_i^n H_{i-2}^{n+\frac{1}{2}} - E_{i+2}^n H_i^{n+\frac{1}{2}} + E_{i-2}^n H_i^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$+ \frac{\nu(1+\beta)}{2} \left(E_i^n H_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - E_i^n H_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + E_{i+1}^n H_i^{n+\frac{1}{2}} - E_{i-1}^n H_i^{n+\frac{1}{2}} \right) = 0.$$

Ce qui prouve que le schéma conserve l'énergie discrète et ce pour tout β.

3.2.3 Résultats numériques

On reprend la simulation présentée au paragraphe 2.1. On choisit une permittivité plus grande que celle du verre afin de mettre en évidence le caractère peu dispersif du β-schéma. La permittivité du matériau est ici $\epsilon = 10\epsilon_0$. Le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ vaut 2. On choisit $\beta = 0$ dans le vide et comme le suggère la relation (22),on pose $\beta = \left(4 - \frac{\Delta t^2}{\epsilon \Delta x^2}\right)/12$ dans le matériau et ainsi la dispersion sera d'ordre 4 dans cette zone.

On montre sur la figure 6 la solution après que l'onde ait atteint le matériau. On ne constate aucune oscillation parasite due au changement de milieu. Sur les figures 7 et 8, on laisse la simulation se dérouler plus longtemps de telle sorte que l'onde se propage dans le matériau. On compare la solution exacte aux solutions obtenues par le β-schéma et le schéma volumes finis centrés décrit dans la première partie et qui correspond ici à la valeur nulle de β. On montre les résultats obtenus avec deux grilles différentes. On constate un bon accord avec l'analyse théorique: le β-schéma est beaucoup moins dispersif et plus précis que le schéma volumes finis centrés.

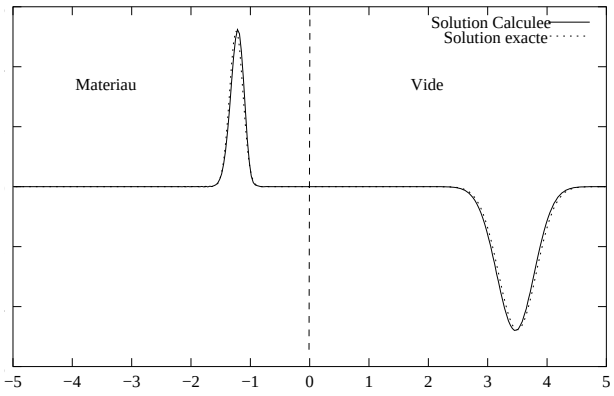


FIG. 6 – *Propagation d'un pulse dans un matériau - $t = 100\Delta t$ - Maillage correspondant à 25 points sur le support de la gaussienne*

4 Application aux grilles raffinées

Rappelons qu'avec un schéma stable sous une condition de type CFL (ie liant le pas d'espace au pas de temps), l'usage de grilles raffinées localement en espace amène à utiliser le pas de temps correspondant à la plus petite maille. Comme nous l'avons déjà souligné, l'usage d'un tel pas de temps amplifie les erreurs de dispersion du schéma obérant ainsi les calculs en temps long. Ce problème sera illustré pour le schéma de Yee avec une simulation sur une grille uniforme et un pas de temps choisi volontairement inférieur au maximum autorisé.

Auparavant nous allons présenter une alternative dans le cas monodimensionnel au schéma volumes finis en utilisant les propriétés des β-schémas présentés ci-dessus. On se référera à [5] pour un raffinement spatio-temporel pour le schéma de Yee.

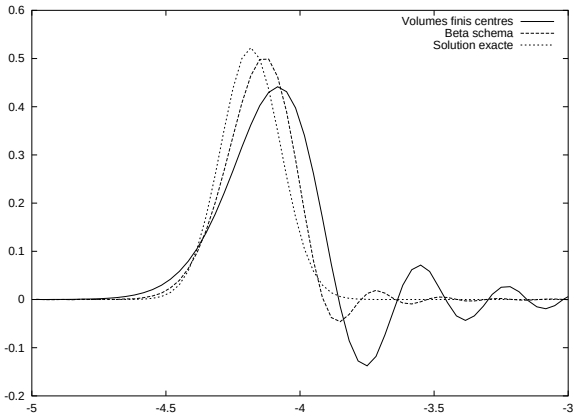


FIG. 7 – *Propagation d'un pulse dans un matériau - $t = 200\Delta t$ - Maillage correspondant à 25 points sur le support de la gaussienne - Zoom dans le matériau*

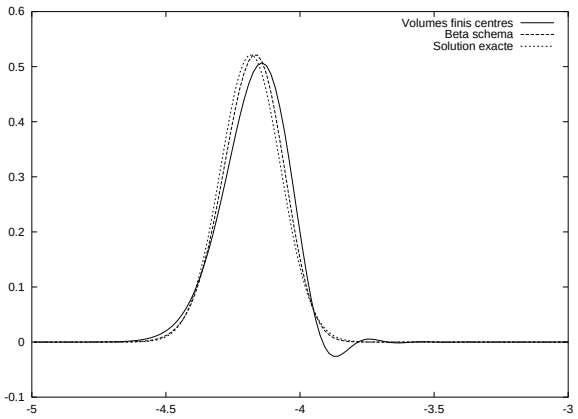


FIG. 8 – *Propagation d'un pulse dans un matériau - $t = 400\Delta t$ - Maillage correspondant à 50 points sur le support de la gaussienne - Zoom dans le matériau*

4.1 Présentation de la méthode

L'idée de base de la méthode est l'utilisation de la relation de dispersion des β-schémas démontrée dans un cadre de grille uniforme et que nous formulons ainsi:

Propriété des β-schémas

Pour tout sous-domaine de pas d'espace Δx et de pas de temps Δt vérifiant $0 < \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 2$ il existe β dans $[0,\frac{1}{3}[$ tel que le β-schéma associé soit d'ordre 4 et que sa dispersion soit aussi d'ordre 4 localement.

On se donne donc un maillage 1D constitué de cellules de taille variable Δx_i. On choisit un $\nu \in]0,2]$ et on pose $\Delta t = \nu \min_i \Delta x_i$. On propose de choisir le paramètre β est fonction du pas d'espace local Δx_i. Les flux sont alors évalués de la manière suivante (en notant $Q_i = {}^t(H_i,E_i)$):

$$\text{flux}_Q(i,i+1) = \frac{Q_{i,i+1} + Q_{i+1,i}}{2}$$

avec

$$\begin{cases} Q_{i,i+1} = Q_i + \left((1-2\beta_{i+1}) \dfrac{Q_{i+1} - Q_i}{\frac{1}{2}(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} + 2\beta_{i+1} \dfrac{Q_{i+1} - Q_{i-1}}{\Delta x_i + \frac{1}{2}(\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i-1})} \right) \dfrac{\Delta x_i}{2} \\ Q_{i+1,i} = Q_{i+1} - \left((1-2\beta_i) \dfrac{Q_{i+1} - Q_i}{\frac{1}{2}(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} + 2\beta_i \dfrac{Q_{i+2} - Q_i}{\Delta x_{i+1} + \frac{1}{2}(\Delta x_{i+2} + \Delta x_i)} \right) \dfrac{\Delta x_{i+1}}{2} \end{cases}$$

où $\beta_i = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\Delta t^2}{12 \Delta x_i^2}$.

Ainsi le schéma construit a une dispersion locale d'ordre 4 (dans toute zone où β est constant ie où Δx est constant). On peut noter le choix "étonnant" des β dans la formule d'interpolation. On aurait tendance à utiliser la valeur β_i pour calculer la valeur interpolée à partir de Q_i. Nous proposons plutôt d'utiliser β_{i+1}. Ce choix s'est révélé être le plus performant numériquement.

4.2 Expériences numériques

4.2.1 Calculs à petit pas de temps sur une grille uniforme

Pour pouvoir comparer le nouveau schéma que nous venons de décrire au schéma de Yee, nous allons considérer l'évolution d'un mode propre dans une cavité fermée maillée de façon uniforme mais avec un pas de temps dix fois plus petit que celui autorisé par la loi de stabilité du schéma de Yee. On montre sur la figure 9 les cinq dernières périodes d'une simulation portant sur cinquante périodes. La solution du schéma de Yee est comparée d'une part à la solution exacte et à la solution obtenue par un β-schéma d'autre part. On voit clairement que la solution issue du β-schéma se compare mieux à la solution exacte et que son taux de dispersion est nettement inférieur.

On réalise la même expérience en initialisant les schémas par un pulse. La simulation est stoppée des lors que le pulse a fait 10 aller-retours (figure 10). Le caractère peu dispersif du β-schéma est à nouveau mis en évidence.

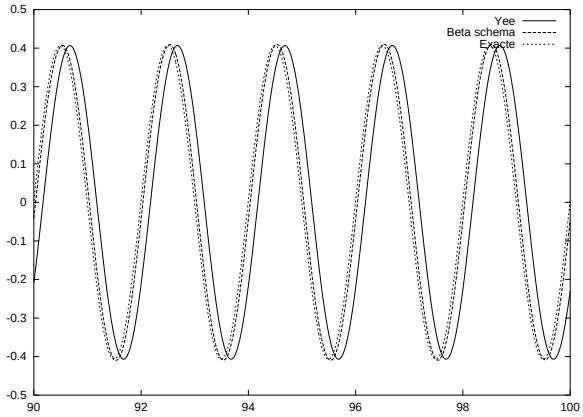


FIG. 9 – *Comparaison schéma de Yee β-schéma : Mode propre*

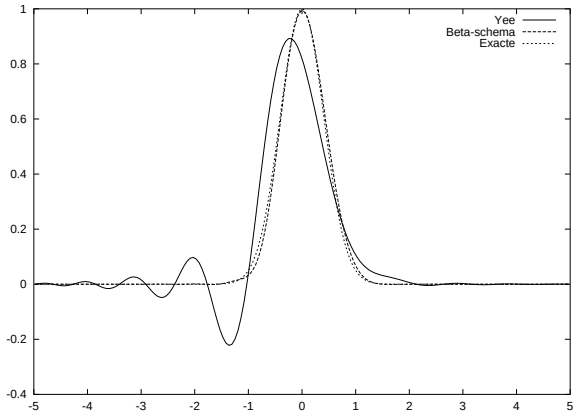


FIG. 10 – *Comparaison schéma de Yee β-schéma : Pulse*

4.2.2 Simulations avec des grilles raffinées

Évolution d'un mode propre

On reprend la même expérience que la précédente avec maintenant un maillage constitué de deux grilles de rapport 10 entre les pas d'espace. Le maillage dans la grille grossière correspond à environ 20 points par période. La figure 11 montre la solution en espace du champ **E** après un temps de simulation correspondant à 50 périodes du mode propre. La solution approchée est comparée à la solution exacte sur tout le domaine et on peut constater la très bonne concordance entre les deux solutions et ce y compris à l'interface entre les deux sous-grilles.
La figure 12 montre l'évolution au cours du temps en un point. Pour plus de lisibilité, seule l'évolution sur les cinq dernières périodes est présentée. On note une très légère dispersion dans la solution approchée (ceci après 50 périodes) mais aucune diffusion ce qui est un indice que l'énergie électromagnétique est bien conservée.

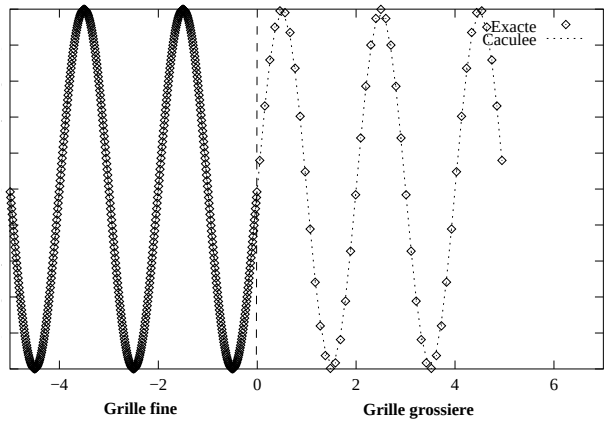


FIG. 11 – *Solution en espace - Raffinement 1:10*

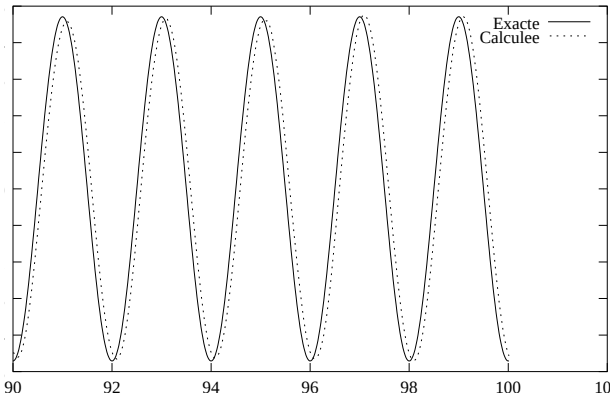


FIG. 12 – *Evolution en temps - Zoom sur les cinq dernières périodes - Raffinement 1:10*

Évolution d'un pulse dans une cavité métallique

On considère maintenant l'évolution d'un pulse gaussien dans une cavité métallique (voir figure 13) constituée de deux grilles régulières de rapport entre les pas d'espace de $1/n$ où n prendra différentes valeurs dans nos expériences. A l'initialisation, le champ est donné par:

$$\begin{cases} H_i^{\frac{-\Delta t}{2}} = -exp(5(x - \frac{c\Delta t}{2} + 2)^2) \\ E_i^0 = exp(5(x+2)^2). \end{cases} \tag{23}$$

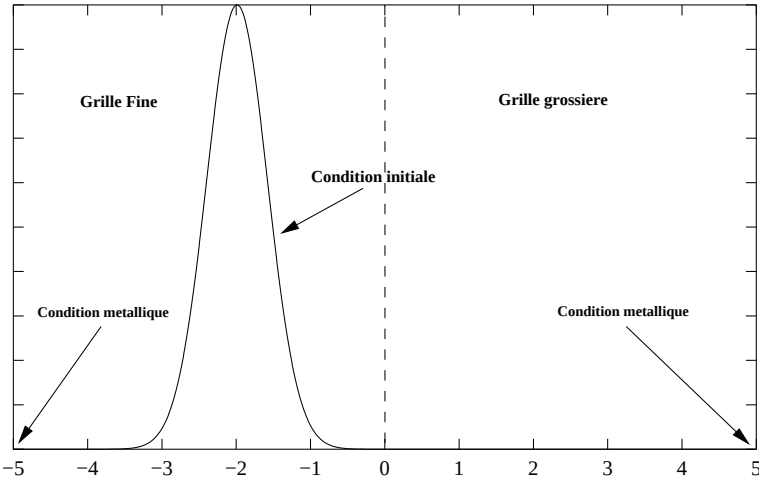


FIG. 13 – *Présentation du test*

Passage de la grille grossière à la grille fine

Afin d'observer les diverses erreurs (réflexion et transmission) on mène les calculs jusqu' à ce que le support de la gaussienne situé initialement dans la grille grossière se retrouve entièrement dans la grille fine. La solution exacte étant calculable, on peut analyser les erreurs et leurs sources. Il y a d'une part une erreur de réflexion due au changement de grille et d'autre part une erreur de transmission à laquelle s'ajoute une erreur de dispersion. La grille fine a un pas d'espace deux fois plus petit que celui de la grille grossière. Afin d'évaluer la précision du schéma, on raffine successivement le maillage en doublant le nombre de points tout en conservant un rapport 2 entre le pas d'espace de la grille grossière et celui de la grille fine. On rappelle que le schéma sera d'ordre p si les erreurs de 2 raffinements successifs sont divisées par 2^p. Les différentes erreurs sont regroupées dans le tableau 2.

On peut déduire du tableau 2 que l'erreur de réflexion semble d'ordre 4. On peut penser que l'erreur de transmission est du même ordre. L'erreur de dispersion serait alors d'ordre 2. Le fait que la dispersion soit d'ordre 4 sur chacune des grilles n'implique pas qu'elle le soit aussi globalement.

On réalise la même expérience mais cette fois-ci le pas de la grille fine est 6 fois plus petit que celui de la grille grossière. Ainsi dans le cas du premier test (175 points), on a 150 points sur la grille fine et 25 sur la grille grossière. Les résultats de grande qualité au demeurant sont rassemblés dans le tableau 3.

	Réflexion	Transmission et dispersion
75 points	25.10^{-3}	7.10^{-2}
150 points	17.10^{-4}	12.10^{-3}
300 points	12.10^{-5}	2.10^{-3}

TAB. 2 – *Erreur du schéma (Raffinement 1:2)*

	Réflexion	Transmission et dispersion
175 points	9.10^{-3}	12.10^{-2}
350 points	7.10^{-4}	15.10^{-3}
700 points	6.10^{-5}	25.10^{-4}

TAB. 3 – *Erreur du schéma (Raffinement 1:6)*

Calcul en temps long

On réalise la simulation précédente sur des temps plus longs. On présente des résultats où le pulse a fait 2 et 10 aller-retours avec des raffinements du type 1:2, 1:10. On ne remarque pas de phénomènes d'instabilité analogues à ceux observés avec les méthodes d'interpolation. Pour nous en convaincre, nous avons effectué une simulation sur 100 aller-retours (200000 itérations) avec un rapport de raffinement 1/10. On pourra se référer à [5] pour des expériences analogues avec la méthode de raffinement spatio-temporel pour le schéma de Yee.

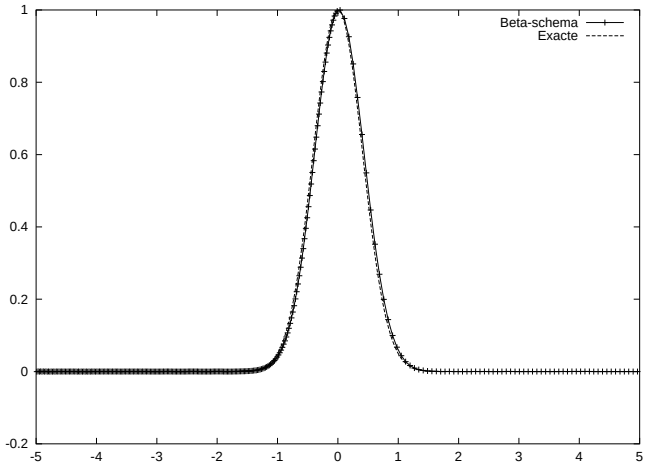


FIG. 14 – *Deux aller-retours - Raffinement 1:2*

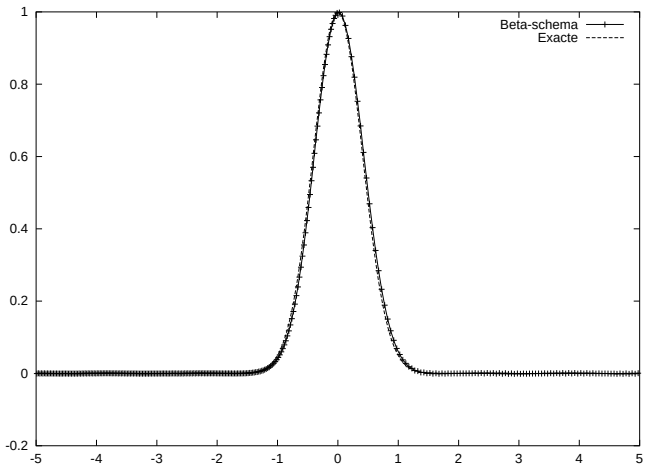


FIG. 15 – *Dix aller-retours - Raffinement 1:2*

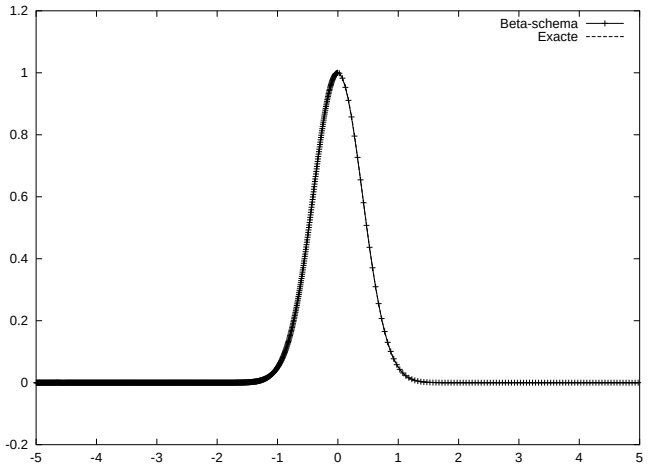


FIG. 16 – *Deux aller-retours - Raffinement 1:10*

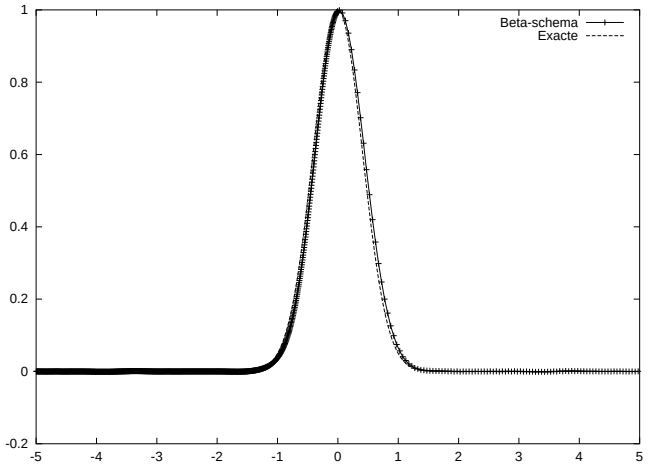


FIG. 17 – *Dix aller-retours - Raffinement 1:10*

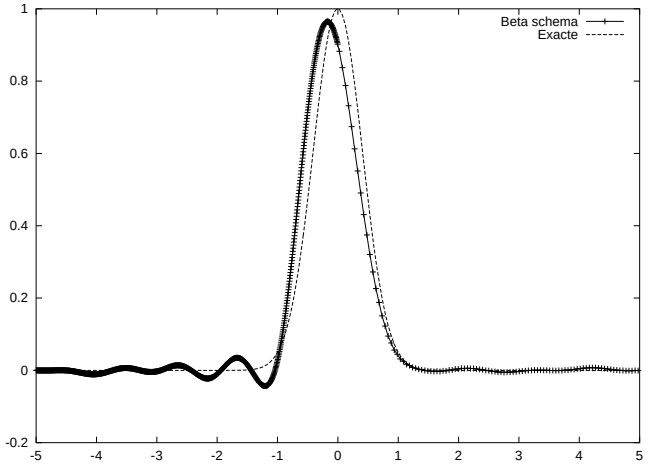


FIG. 18 – *Cent aller-retours - Raffinement 1:10*

Conclusion

Nous avons mis en évidence la difficulté voire l'impossibilité pour des schémas explicites stables sous condition de type CFL de résoudre correctement des problèmes d'électromagnétisme en domaine temporel avec des maillages raffinés localement. Ce raffinement est aujourd'hui dicté par des contraintes de temps de calcul et/ou de place mémoire. Mais au-delà de cet aspect il y a aussi la nécessité de prendre en compte des détails infimes de la géométrie du domaine de calcul, ce qui amène aux maillages non uniformes. Nous nous sommes concentrés ici sur deux types de schémas, un schéma de type volumes finis et le schéma de Yee qui appartient à la famille des différences finies. Nous avons signalé pour ce dernier quelques tentatives pour l'étendre au grilles raffinées. Nous avons volontairement omis quelques autres extensions comme les méthodes mimétiques car les rares publications concernant les équations de Maxwell [6] ne nous permettent pas de commentaire quant à leur fonctionnement avec des maillages raffinés.
Nous avons proposé une extension d'un schéma volumes finis centrés basée sur une interpolation à l'aide d'un paramètre appelé à contrôler la dispersion locale. Les résultats obtenus sont très encourageants. Néanmoins, l'étude théorique ainsi que les expériences numériques ont été menés dans un cadre monodimensionnel et nous travaillons à l'extension aux dimensions supérieures pour des grilles structurées et non structurées.

Références

[1] F. Bonnet, M. Bostan, *Etude d'une classe de $\beta - \gamma$ schéma en formulation volumes finis pour des problèmes hyperboliques.* Rapport Inria No 3288, 1997.

[2] M. W. Chevalier and R. J. Luebbers, *FDTD local grid with material tranverse* IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 45(3):411-421, March 1997.

[3] J.A. Desideri, A. Goudjo. V. Selmin, *Third order schemes for hyperbolic problems* rapport INRIA No 607, 1987.

[4] L. Fezoui and B. Stoufflet, *A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes*, J. Comp. Phys. 84, 174-206 (1989).

[5] T. Fouquet *Raffinement de maillage spatio-temporel local pour les équations de Maxwell*, Thèse, Paris IX Dauphine, Juin 2000.

[6] J. M. Hyman and M. Shashkov, *Mimetic discretizations for Maxwell's equations*, J. Comp. Phys. 151, 881-909 (1999).

[7] I. S. Kim and W. J. R. Hoefer, *A local mesh refinement algorithm for the FD-TD method to solve Maxwell's equations.* IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 38(6):812-815, June 1990.

[8] S. Piperno, M.Remaki, L.Fezoui *A centered second-order finite volume scheme for heterogenous Maxwell equations in three dimensions on arbitrary unstructured meshes.* rapport INRIA No 4161, 2001

[9] D. T. Prescott and N. V. Shuley, *A method for incorporating different sized cells into the FD-TD analysis technique.* IEEE Microwave Guided Wave Lett. 2:434-436, Nov. 1992.

[10] M. Remaki , *Méthodes numériques pour les équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogènes.* Thèse ENPC, 1999.

[11] A. Taflove, *Computational electrodynamics : the Finite-Difference Time-Domain*, Artech House, Boston, 1995.

[12] K.S. YEE, *Numerical Solution of initial boundary value problem involving Maxwell's equations in isotropic media.* IEEE Trans. Ant. Propagat., Vol AP14, 1966.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399