Proofs with Coq of theorems in plane geometry using oriented angles

Frédérique Guilhot

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Proofs with Coq of theorems in plane geometry using oriented angles.

Frédérique Guilhot

N° 4356

Janvier 2002

THÈME 2

Rapport de recherche

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--4356--FR+ENG

Proofs with Coq of theorems in plane geometry using oriented angles.

Frédérique Guilhot

Thème 2 — Génie logiciel
et calcul symbolique
Projet Lemme

Rapport de recherche n° 4356 — Janvier 2002 — 23 pages

Abstract: Formalization of the theory of oriented angles of non zero vectors using Coq is reported. Using this theory, some classical plane geometry theorems are proved, among them : the theorem which gives a necessary and sufficient condition so that four points are cocyclic, the one which shows that the reflected points with respect to the sides of a triangle orthocenter are on its circumscribed circle, the Simson's theorem and the Napoleon's theorem. Elaboration of proofs using Coq that followed the traditional proofs in geometry, and the difficulties encountered are described. Use of the interface Pcoq allows notations close to mathematical ones.

Key-words: Coq , Pcoq , geometry, theorem, proof, angle, circle.

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles, BP 93, 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Téléphone : +33 4 92 38 77 77 — Télécopie : +33 4 92 38 77 65

Démonstrations avec Coq de théorèmes de géométrie plane utilisant les angles orientés.

Résumé : Dans ce rapport, nous présentons une formalisation en Coq de la théorie des angles orientés de vecteurs non nuls. En utilisant ces objets, nous avons démontré en Coq des théorèmes classiques de la géométrie plane dont : le théorème qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points soient cocycliques, le théorème qui montre que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à ses côtés sont sur son cercle circonscrit, le théorème de la droite de Simson et le théorème de Napoléon. Nous décrivons la construction de preuves en Coq qui suivent les démonstrations classiques de géométrie, et les difficultés rencontrées lors de ce travail. Nous montrons que l'utilisation de l'interface Pcoq permet des notations proches de celles des mathématiques.

Mots-clés : Coq , Pcoq , géométrie, théorème, démonstration, angle, cercle.

1. Introduction.

Dans le cadre du travail de **formalisation de théories mathématiques en Coq**, nous avons en 1999 et 2000 formalisé en ***Coq*** [1] les bases de la théorie des matrices et de celle des nombres complexes et des racines de l'unité, en utilisant la formalisation de l'algèbre de [2]. Ce travail a été effectué sous ***Ctcoq*** [3], puis sous ***Pcoq*** [4] afin de faciliter la lisibilité des notations mathématiques et son éventuelle utilisation didactique.
Nous avons mis à jour des difficultés liées à la manipulation des *sétoïdes* qui rend très lourdes les réécritures et la définition des fonctions.
La notion de quotients proposée [5] pour pallier ces inconvénients a été utilisée pour formaliser la théorie des groupes finis.

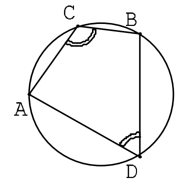
Pour abandonner un moment l'algèbre et puisqu'on veut produire en ***Coq*** des preuves lisibles par des néophytes en calcul des constructions inductives mais qui ont des connaissances de mathématiques, nous avons pensé faire des preuves de théorèmes de **géométrie** ; l'apprentissage du **raisonnement déductif** se faisant essentiellement avec les démonstrations de géométrie.

Il existe des systèmes de génération automatique de preuves de théorèmes de géométrie qui utilisent des méthodes de calcul : différence de Pythagore, aires signées de triangles orientés, volumes signés de solides, produit interne et externe de vecteurs etc... Ces systèmes sont très performants et permettent de démontrer automatiquement un nombre très important de théorèmes mais les démonstrations produites par la machine consistent en une suite de calculs incompréhensibles pour un néophyte (voir par exemple le livre [6]).

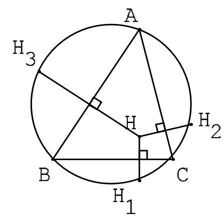
Nous avons choisi de faire la preuve en ***Coq*** (en utilisant l'interface ***Pcoq***) du théorème dit de cocyclicité et de l'utiliser ensuite pour faire des preuves de théorèmes qui en découlent. Le but avoué étant de rester au plus près des démonstrations 'classiques' afin qu'un étudiant en mathématiques puisse les suivre et les comprendre pas à pas en s'aidant éventuellement d'une figure.

[1] L'outil d'aide à la preuve Coq, http://pauillac.inria.fr/coq/coq-fra.html
[2] Loïc Pottier, <<Notions de base d'algèbre>>, contribution utilisateur de Coq, http://pauillac.inria.fr/coq/contribs-fra.html
[3] L'environnement de preuves CtCoq, http://www-sop.inria.fr/croap/ctcoq/ctcoq-fra.html
[4] L'environnement de preuves Pcoq, http://www-sop.inria.fr/lemme/pcoq/pcoq-fra.html
[5] Loïc Pottier, <<Quotients dans le CCI>>, rapport de recherche INRIA n° 4053, nov. 2000, http://www-sop.inria.fr/rapports/sophia/RR-4053.html
[6] 'Machine proofs in geometry' de Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao et Jing-Zhong Zhang

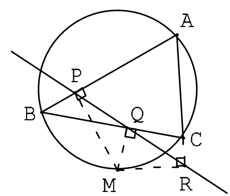
- *<u>Théorème de cocyclicité</u> : quatre points deux à deux distincts A , B , C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si* $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\quad[\pi]$



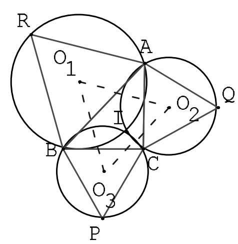
- *<u>Théorème de l'orthocentre</u> : Soit un triangle ABC et son orthocentre H. Les symétriques du point H par rapport aux côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit à ce triangle.*



- *<u>Théorème de la droite de Simson</u> : Soit un triangle ABC non aplati, un point M et ses projetés orthogonaux respectifs P, Q et R sur les côtés du triangle. Les points P, Q et R sont alignés si et seulement si M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.*



- *<u>Théorème de Napoléon</u> : Soit un triangle ABC et les triangles équilatéraux RAB, QAC et PBC construits extérieurement à ABC. Alors les cercles circonscrits à ces trois triangles sont concourants en un point I et le triangle $O_1O_2O_3$ joignant les centres de ces cercles est équilatéral.*



Les démonstrations 'classiques' de ces théorèmes utilisent uniquement des calculs d'**angles orientés de vecteurs non nuls**.

Nous avons donc écrit un module dans lequel ces outils de base sont mis en place (sans chercher à reprendre le travail fait en algèbre sur les quotients).

Nous avons fait la preuve du théorème de cocyclicité, en donnant des preuves 'constructives'.

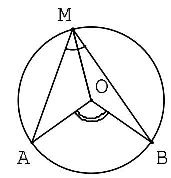
Nous avons ensuite démontré les théorèmes dits de l'orthocentre, de la droite de Simson et de Napoléon pour vérifier que le théorème de cocyclicité est utilisable dans d'autres preuves.

Dans ce rapport, nous suivrons le plan chronologique de notre travail, expliquerons nos choix et partis pris et indiquerons les difficultés rencontrées.

2. Objets construits dans Coq et premiers axiomes.

C'est en étudiant la démonstration classique (donnée ci-dessous) du théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre que l'on a décidé des premiers objets à construire dans ***Coq*** et des axiomes de départ.

- *<u>Théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre</u> :*
  Soit A, B et M trois points deux à deux distincts sur un cercle de centre O. On a $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\quad[2\pi]$



<u>Démonstration</u> : (N.B. : dans cette démonstration, on confond un angle orienté de vecteurs non nuls et une de ses mesures, on remplace par exemple l'angle plat par π *et l'angle nul par 0 ou* 2π *)*

Les points A, B et M étant sur un cercle de centre O, les triangles OAM et OBM sont isocèles en O et donc on a les égalités d' angles orientés de vecteurs :

$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right)=\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)$ *et* $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)$.

En utilisant la relation de Chasles, on obtient $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)$ *et d'autre part* $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\right)$

En utilisant la somme des angles dans un triangle isocèle et en utilisant la propriété : pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *: on a* $\left(\vec{v},\vec{u}\right)=-\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

on obtient successivement $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)=\pi-2\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AO}\right)=\pi+2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)$

et de même $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OB}\right)=\pi-2\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BM}\right)=\pi+2\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)$ *. Et en sommant, il vient*

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\pi+2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)+\pi+2\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)$ *ce qui permet d'écrire*

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=2\left[\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)\right]=2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$. *(Q.E.D.)*

L'étude de cette démonstration montre qu'il suffit de créer un **Type V** de vecteurs non nuls, puis un **Type AV** d'angles orientés de vecteurs non nuls et une fonction **cons** de type **V -> V -> AV** qui permet de construire un angle avec un couple de vecteurs. On définit ensuite une relation d'équivalence **R** sur **AV** qui sera interprétée comme l'égalité d'angles orientés de vecteurs non nuls (ou comme l'égalité modulo 2π de leurs mesures). Ce qui donne à l'écran en utilisant l'interface ***Pcoq*** :

Variable V : Type.
Variable AV : Type.
Variable cons : V => V => AV.
Variable R : AV => AV => Prop.

Axiom reflexive : ∀a : AV. a ≡ a.

Axiom symetrique : ∀a, b : AV. a ≡ b => b ≡ a.

Axiom transitive : ∀a, b, c : AV. a ≡ b => b ≡ c => a ≡ c.

On définit aussi une relation d'équivalence **vR** sur **V** qui sera interprétée comme l'égalité des vecteurs et qui vérifie : si $\vec{u} = \vec{u}'$ et $\vec{v} = \vec{v}'$ alors on a $(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u}',\vec{v}')$ $[2\pi]$.

Variable vR : V => V => Prop.

Axiom v_refl : ∀u : V. u = u.

Axiom v_sym : ∀u, v : V. u = v => v = u.

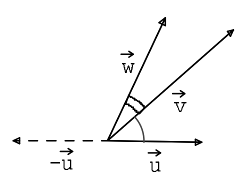
Axiom v_trans : ∀u, v, w : V. u = v => v = w => u = w.

Axiom vR_R_compatible : ∀u, u', v, v' : V. u = u' => v = v' => (u, v) ≡ (u', v').

Il faut aussi une opération **plus** de type **AV -> AV -> AV** compatible avec la relation **R** et qui a les propriétés algébriques liées à la structure de groupe et d'autres propriétés spécifiques aux angles comme celles-ci :

Variable plus : AV => AV => AV.

Axiom compatible : ∀a, b, c, d : AV. a ≡ b => c ≡ d => a + c ≡ b + d.



pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a :
$(\vec{u},\vec{u}) = 0$ $[2\pi]$; $(\vec{u},-\vec{u}) = \pi$ $[2\pi]$
et la relation de Chasles : $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})$ $[2\pi]$
(qui correspond à l'idée intuitive de somme d'angles adjacents) d'où l'on tire des relations du type :
$(\vec{u},\vec{v}) = -(\vec{v},\vec{u})$ $[2\pi]$ et $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{w},-\vec{u}) + (-\vec{v},-\vec{w}) = \pi$ $[2\pi]$
C'est cette dernière relation qui permet de montrer que la somme des angles orientés dans un triangle ABC est l'angle plat, en effet si on l'applique avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$, on obtient : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \pi$ $[2\pi]$

Variable opp : V => V.
Variable 0 : AV.
Variable π : AV.

Axiom angle_nul : ∀u : V. (u, u) ≡ 0.

Axiom angle_plat : ∀u : V. (u, -u) ≡ π.
Axiom Chasles : ∀u, v, w : V. (u, v) + (v, w) ≡ (u, w).

Lemma permute: ∀u, v : V. (u, v) + (v, u) ≡ 0.

Lemma oppu_u: ∀u : V. (-u, u) ≡ π.

Lemma pi_plus_pi: π + π ≡ 0.

Lemma u_oppv: ∀u, v : V. (u, -v) ≡ (u, v) + π.

Lemma oppu_oppv: ∀u, v : V. (-u, -v) ≡ (u, v).

Il faut aussi pouvoir construire un vecteur non nul à l'aide de deux points distincts (exemple : $\overrightarrow{AB}$). Il faut donc créer un **Type PO** de points et une fonction **vec** de type **PO -> PO -> V** qui permette de construire de tels vecteurs (remarque : les vecteurs devant êtres non nuls, les points sont considérés comme distincts deux à deux).
La théorie élémentaire de la géométrie vectorielle n'a pas été formalisée puisque ce sont les angles orientés de vecteurs non nuls et non les vecteurs qui nous intéressent ici.

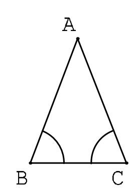
Variable PO : Type.
Variable vec : PO => PO => V.

Lemma somme_pi: ∀u, v, w : V. (u, v) + ((w, -u) + (-v, -w)) ≡ π.

Theorem somme_triangle: ∀A, B, C : PO. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + ((\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})) \equiv \pi$.

Si l'on veut suivre la démonstration classique du théorème de l'angle inscrit, bien que l'on parle de cercle (ce qui sous-entend une distance), on n'a besoin ici que de l'égalité de 2 angles orientés dans les triangles isocèles. On donne donc une définition de triangle isocèle qui répond à cet objectif :

le triangle ABC est isocèle en A signifie ici $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\ [2\pi]$.



et on remplace l'hypothèse : A, B et M trois points deux à deux distincts sur un cercle de centre O par : les triangles OAM et OBM sont isocèles en O.

Definition isocele : PO => PO => PO => Prop :=
λA, B, C : PO. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Lemma triangle_isocele: $\forall$A, B, C : PO .
(isocele A B C) => $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + 2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \pi$.

Dans l'énoncé du théorème de cocyclicité, apparaît l'égalité modulo π des mesures d'angles orientés, on pourrait définir en ***Coq*** une autre relation d'équivalence sur **AV** pour la décrire, mais nous avons choisi d'utiliser la proposition :

$a = b \quad [\pi]$ équivaut à $2a = 2b \quad [2\pi]$

On aura besoin dans la suite des notions d'orthogonalité et de colinéarité de vecteurs, qui s'énoncent facilement en utilisant les angles de vecteurs non nuls.

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$2(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad [2\pi]$ qui peut se lire $(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad [\pi]$

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$2(\vec{u}, \vec{v}) = \pi \quad [2\pi]$ qui peut se lire $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$

Definition colineaire: V => V => Prop := λu, v : V. 2(u, v) $\equiv$ 0.

Definition orthogonal := λu, v : V. 2(u, v) $\equiv \pi$.

Lemma orthogonal_sym: $\forall$u, v : V. u $\perp$ v => v $\perp$ u.

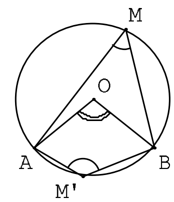
Lemma colineaire_sym: $\forall$u, v : V. u // v => v // u.

3. Deux démonstrations du théorème de cocyclicité.

On a vu dans le paragraphe précédent que la preuve du théorème de l'angle inscrit et de l'angle au centre est facile à suivre avec les objets construits dans ***Coq***. L'application de ce théorème donne une preuve immédiate de la partie directe du théorème de cocyclicité :

soit A, B , M et M' quatre points deux à deux distincts sur un cercle de centre O. On a

$$2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=2\left(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\quad[2\pi]$$



Theorem angle_inscrit: $\forall$A, B, M, O : PO .
(isocele O M A) => (isocele O M B) => $2(\overrightarrow{M\,A}, \overrightarrow{M\,B}) \equiv (\overrightarrow{O\,A}, \overrightarrow{O\,B})$.

Theorem cocyclique: $\forall$M, A, B, O, M' : PO .
(isocele O A B) =>
(isocele O M A) =>
(isocele O M B) =>
(isocele O M' A) => (isocele O M' B) => $2(\overrightarrow{M'\,A}, \overrightarrow{M'\,B}) \equiv 2(\overrightarrow{M\,A}, \overrightarrow{M\,B})$.

C'est la preuve de la réciproque qui est difficile. Pour démontrer que quatre points *M*, *M'*, *A* et *B* deux à deux distincts et non alignés sont cocycliques, il suffit de montrer que les cercles circonscrits aux triangles *MAB* et *M'AB* sont confondus.

3.1. Existence et unicité du cercle circonscrit à un triangle non aplati.

Etant donné un triangle non aplati *MAB* , il existe un unique cercle circonscrit à ce triangle. Ce cercle a pour centre, on le sait, le point de concours des médiatrices des côtés du triangle.
On peut poser ce résultat en axiome ou essayer de le démontrer. La difficulté de la démonstration tient au fait qu'il faut construire le point de concours de trois droites, ce qui n'est pas facile avec nos objets primitifs : les angles de vecteurs non nuls. On arrive à construire des vecteurs directeurs de droites et à montrer des propriétés intéressantes sur ces vecteurs mais on ne peut passer des vecteurs aux points. Bien que l'on ne puisse aller au bout des démonstrations, il nous a semblé intéressant de les faire parce qu'elles 'donnent des constructions'.

Pour la démonstration de l'unicité, de manière classique, on suppose qu'il existe deux cercles circonscrits au triangle non aplati MAB et on montre que leurs centres O et O' sont confondus (ou plutôt ici que les droites (OA) et $(O'A)$ sont confondues ainsi que les droites (OB) et $(O'B)$ et les droites (OM) et $(O'M)$)

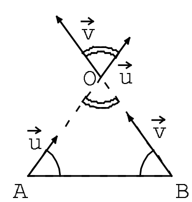
Lemma unicité_circonscrit: ∀M, A, B, O, O' : PO.
(isocele O A B) =>
(isocele O M B) =>
(isocele O M A) =>
(isocele O' A B) =>
(isocele O' M B) =>
(isocele O' M A) => $\left(\overrightarrow{OA} // \overrightarrow{O'A} \wedge \overrightarrow{OB} // \overrightarrow{O'B}\right) \wedge \overrightarrow{OM} // \overrightarrow{O'M}$.

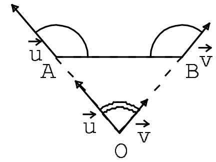
Pour l'existence, la démonstration classique utilise le point de concours des médiatrices des côtés du triangle. Encore une fois, n'ayant pas de distance, nous ne pouvons utiliser les médiatrices. Nous procédons donc ainsi :

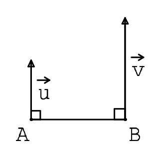
- analyse : si le cercle circonscrit à MAB existe, son centre O doit vérifier : OAB est isocèle et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$ d'après le théorème de l'angle inscrit
- synthèse : il suffit de construire un triangle isocèle OAB de base $[AB]$ et d'angle au sommet de mesure égale à $2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$ et de vérifier ensuite que les triangles OMA et OMB ainsi obtenus sont aussi isocèles en O.

Nous avons prouvé le lemme suivant : *Etant donné deux points A et B et a une mesure d'angle, il existe deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que* $\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) = \left(\vec{v}, \overrightarrow{BA}\right)$ *et* $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 2a$

Lemma construction_isocele_base: ∀A, B : PO.
∀a : AV. ∃u : V. ∃v : V. $\left(\left(\overrightarrow{AB}, u\right) \equiv \left(v, \overrightarrow{BA}\right)\right) \wedge \left(\left(u, v\right) \equiv 2a\right)$.



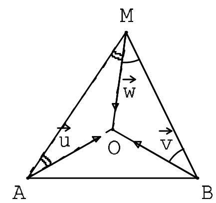




Sauf dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on admet qu'on sait alors construire le point O point de concours des droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ passant respectivement par les points A et B.

Le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires correspond au cas : $2a = 0\ [2\pi]$ c'est-à-dire si $2a = 2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$ au cas où $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires (soit encore MAB triangle aplati)

Une fois les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi définis, on construit un vecteur non nul $\vec{w}$ qui vérifie $\left(\overrightarrow{MA},\vec{w}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)$.



En utilisant $\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right)=\left(\vec{v},\overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$ on démontre que $\left(\vec{w},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{BM},\vec{v}\right)$ et que $\left(\vec{v},\vec{w}\right)=2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)$ et $\left(\vec{u},\vec{w}\right)=2\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant des vecteurs directeurs des droites (OA) et (OB), le vecteur $\vec{w}$ est un bon candidat pour être un vecteur directeur de la droite (OM) mais on ne peut le démontrer. On admet donc l'existence du point *O,* point de concours des trois droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

```
Lemma construction_circonscrit_vecteur:
 ∀M, A, B : PO.
  ∃u : V.
  ∃v : V.
  ∃w : V.
 (((u, v) ≡ 2(M A, M B)) ∧ (((u, w) ≡ 2(B A, B M)) ∧ ((v, w) ≡ 2(A B, A M)))) ∧
 (((A B, u) ≡ (v, B A)) ∧ (((w, M B) ≡ (B M, v)) ∧ ((M A, w) ≡ (u, A M)))).

Axiom
    construction_circonscrit :
    ∀M, A, B : PO.
    ¬ M A // M B  =>  ∃O : PO. (isocele O A B) ∧ ((isocele O A M) ∧ (isocele O B M)).
```

3.2. Une démonstration de la réciproque de théorème de cocyclicité.

Soit quatre points *M, M', A* et *B* deux à deux distincts et non alignés, pour démontrer qu'ils sont cocycliques, il suffit de montrer que les centres des cercles circonscrits aux triangles *MAB* et *M'AB* sont confondus. Nous avons tous les lemmes nécessaires pour le faire.

Definition circonscrit :=
$\lambda M, A, B, O : PO.\ (isocele\ O\ A\ B) \wedge ((isocele\ O\ A\ M) \wedge (isocele\ O\ B\ M))$.

Definition sont_cocycliques :=
$\lambda M, A, B, M' : PO.$
$\exists O : PO.\ \exists O' : PO.\ ((circonscrit\ M\ A\ B\ O) \wedge (circonscrit\ M'\ A\ B\ O')) \wedge (\overrightarrow{O\,A} // \overrightarrow{O'\,A} \wedge \overrightarrow{O\,B} // \overrightarrow{O'\,B})$

Theorem reciproque_cocyclique:
$\forall M, A, B, M' : PO.$
$\neg \overrightarrow{M\,A} // \overrightarrow{M\,B} \Rightarrow 2(\overrightarrow{M'\,A}, \overrightarrow{M'\,B}) \equiv 2(\overrightarrow{M\,A}, \overrightarrow{M\,B}) \Rightarrow (sont\_cocycliques\ M\ A\ B\ M')$.

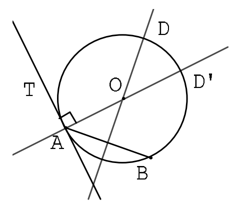
Reprenons les étapes de la preuve de la réciproque du théorème de cocyclicité :

- Hypothèses : *A, B , M* et *M'* quatre points fixes deux à deux distincts et non alignés qui vérifient $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = 2\alpha$.
- Il existe un cercle circonscrit *(C)* au triangle *ABM*, on appelle *O* son centre.
- Il existe un cercle circonscrit *(C')* au triangle *ABM'*, on appelle *O'* son centre.
- On utilise le théorème de l'angle inscrit dans *(C)*, on a $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$
- On utilise le théorème de l'angle inscrit dans *(C')*, on a $(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}) = 2(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$
- On utilise l'hypothèse $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = 2\alpha$ et on obtient $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}) = 2\alpha$
- Les triangles *OAB* et *O'AB* étant isocèles en *O* et *O'* respectivement, on a :
  $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = 2(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \pi - 2\alpha$ et $2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO'}) = 2(\overrightarrow{BO'}, \overrightarrow{BA}) = \pi - 2\alpha$
  (les droites *(AB)* et *(AO)* d'une part et *(BA)* et *(BO)* d'autre part ne sont pas perpendiculaires car $2\alpha \neq 0$, les points *A, B , M* n'étant pas alignés)
- Ce qui donne en utilisant la relation de Chasles : $2(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = 0$ et $2(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BO'}) = 0$ c'est-à-dire que les droites (OA) et $(O'A)$ d'une part et les droites (OB) et $(O'B)$ d'autre part sont confondues. Ceci prouve que les points *O et O'* sont confondus (point de concours de deux droites non parallèles)
- donc les points *A , B , M* et *M'* sont cocycliques

3.3. Une démonstration de la réciproque de théorème de cocyclicité utilisant le théorème de la tangente.

L'idée de cette autre démonstration est la suivante : étant donnés deux points distincts A et B, pour démontrer que deux cercles passant par A et B sont confondus, il suffit de montrer que leurs tangentes en A sont confondues.

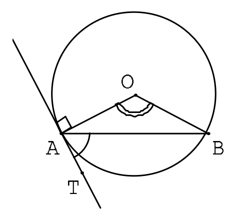
En effet, étant donné un segment *[AB]*, on sait construire sa médiatrice (unique) notée *D*.
Etant donné une droite notée *T* distincte de la droite *(AB)* passant par *A*, on sait construire sa perpendiculaire en A (unique) notée *D'*.



D et *D'* ne sont pas parallèles (car les droites *(AB)* et *T* ne sont pas confondues), alors *D* et *D'* se coupent en un point *O*. Il existe un unique cercle de centre *O* passant par *A* et *B*, et de plus la droite *T* est tangente en *A* à ce cercle.

Si nous voulons utiliser cet argument, il nous faut démontrer d'abord le théorème suivant :

- *<u>Théorème de la tangente</u> : Soit A, B deux points distincts sur un cercle de centre O et T un point quelconque distinct de A. T appartient à la tangente en A à ce cercle si et seulement si on a :* $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})\quad[2\pi]$



<u>Démonstration</u> :

en utilisant la somme des angles dans le triangle OAB isocèle en O on a : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \pi - 2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})$

et avec la relation de Chasles : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \pi - 2\left[(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AO}) - (\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})\right] = \pi - 2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AO}) + 2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})$.

Si T appartient à la tangente en A à ce cercle, la droite (AT) est perpendiculaire à la droite (AO), on a l'égalité : $2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AO}) = \pi$. *On en déduit que* $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})$

Réciproquement, si $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB})$ *et si T un point quelconque distinct de A de la tangente en A au cercle de centre O. On a* $2(\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})$ *donc par la relation de Chasles :* $2(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AT'}) = 0$ *donc les vecteurs* $\overrightarrow{AT}$ *et* $\overrightarrow{AT'}$ *sont colinéaires ce qui prouve que T' est aussi un point de la tangente en A au cercle de centre O.* *(Q.E.D.)*

Les objets construits en ***Coq*** permettent de suivre cette démonstration sans difficulté .

Theorem **tangente**: $\forall$A, B, O, T : PO .
(isocele O A B) => $\overrightarrow{AT} \perp \overrightarrow{OA}$ => $2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Theorem **tangente_reciproque**: $\forall$A, B, O, T, T' : PO .
(isocele O A B) =>
$\overrightarrow{AT} \perp \overrightarrow{OA}$ => $2(\overrightarrow{AT'}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ => $\overrightarrow{AT} \,//\, \overrightarrow{AT'}$.

Reprenons les étapes de la preuve de la réciproque du théorème de cocyclicité qui utilise le théorème de la tangente

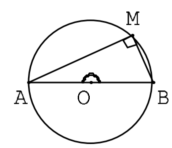
- Hypothèses : *A, B , M* et *M'* quatre points fixes deux à deux distincts et non alignés qui vérifient $2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=2\left(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}\right)$.
- Il existe un cercle *(C)* circonscrit au triangle *ABM*, on appelle *O* son centre.
- Il existe un cercle (*C')* circonscrit au triangle *ABM'*, on appelle *O'* son centre.
- Il existe une droite perpendiculaire en *A* à la droite *(AO)*. Soit *T* un point de cette droite, distinct de *A*. La droite *(AT)* est tangente en *A* au cercle *(C)*.
- Il existe une droite perpendiculaire en *A* à la droite *(AO')*. Soit *T'* un point de cette droite, distinct de *A*. La droite *(AT')* est tangente en *A* au cercle *(C')*.
- On utilise le théorème de la tangente et le théorème de l'angle inscrit dans *(C*), on a $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$
- On utilise le théorème de la tangente et le théorème de l'angle inscrit dans *(C'*), on a $\left(\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'B}\right)=2\left(\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB}\right)=2\left(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}\right)$
- On utilise l'hypothèse $2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=2\left(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}\right)$ et on obtient $2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=2\left(\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB}\right)$
- Ceci prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{AT'}$ sont colinéaires car $2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AT'}\right)=0$
- On a $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{O'A}\perp\overrightarrow{AT'}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O'A}$ sont colinéaires
- puis en utilisant les triangles isocèles *OAB* et *OA'B* on obtient $2\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}\right)=2\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO'}\right)$, ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{O'B}$ sont aussi colinéaires
- les cercles *(C)* et *(C')* sont confondus car leurs centres sont confondus (point de concours des droites (*OA*) et (*OB*) qui ne sont pas parallèles car les points *A, B , M* ne sont pas alignés)
- donc les points *A , B , M* et *M'* sont cocycliques

4. Des preuves qui utilisent le théorème de cocyclicité.

4.1. Des conséquences immédiates.

On montre facilement les lemmes suivants en utilisant le théorème de l'angle inscrit :

- Si le triangle MAB est rectangle en M alors son cercle circonscrit a pour diamètre $[AB]$.
- Si M est un point du cercle de diamètre $[AB]$ alors le triangle MAB est rectangle en M.

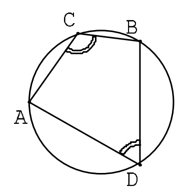


En effet si M est un point du cercle de centre O passant par A et B alors $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$. Et on a $2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \pi$ si et seulement si $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \pi$

Lemma **triangle_rectangle**: $\forall A, B, M, O : PO.$
$(\text{isocele } O\ M\ A) \Rightarrow (\text{isocele } O\ M\ B) \Rightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Rightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \pi.$

Lemma **triangle_diametre**: $\forall A, B, M, O : PO.$
$(\text{isocele } O\ M\ A) \Rightarrow (\text{isocele } O\ M\ B) \Rightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \pi \Rightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}.$

L'énoncé du théorème de cocyclicité :
« quatre points deux à deux distincts A, B, C et D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})\ [2\pi]$. »



fait jouer un rôle privilégié aux deux points A et B (que nous appellerons points de base) qui n'apparaît pas dans la proposition : les quatre points A, B, C et D sont cocycliques.
On peut changer les deux points de base et on obtient par exemple :
Si $2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = 2(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})$ alors les quatre points A, B, C et D sont cocycliques et donc
$2(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = 2(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ en prenant C et D comme points de base ou encore
$2(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) = 2(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$ en prenant C et A comme points de base .
Pour démontrer ces propriétés, on ne peut utiliser la définition de points cocyliques qui a servi jusqu'ici, car elle utilise 2 centres de cercles différents et la colinéarité de 2 vecteurs. Ceci ne suffit pas ici, d'où l'utilité de l'axiome suivant :

Axiom
cocyclicite_six :
$\forall A, B, C, D : PO.$
$(\text{sont\_cocycliques } C\ A\ B\ D) \Rightarrow$
$\exists O : PO.\ \big((\text{circonscrit } C\ A\ B\ O) \wedge (\text{circonscrit } D\ A\ B\ O)\big) \wedge (\text{isocele } O\ C\ D).$

Lemma changement_base_cocyclique: $\forall A, B, C, D : PO.$
$\neg\ \overrightarrow{CA} \,//\, \overrightarrow{CB} \Rightarrow$
$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \Rightarrow 2(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv 2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}).$

Lemma changement_base_cocyclique_2: $\forall A, B, C, D : PO.$
$\neg\ \overrightarrow{CA} \,//\, \overrightarrow{CB} \Rightarrow$
$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \Rightarrow 2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv 2(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}).$

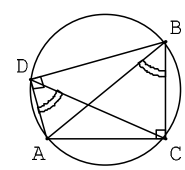
Un cas particulier du théorème de cocyclicité est le cas où l'on a deux triangles rectangles de même hypoténuse :

Si $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DB}$ alors on a

$2\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = 2\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right) = \pi \quad [2\pi]$ donc les points

A, B, C et D sont cocycliques et on a par exemple

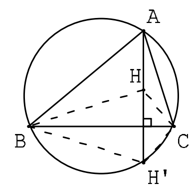
$2\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = 2\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\right) \quad [2\pi]$



Lemma deux_rectangles: $\forall A, B, C, D : PO.$
$\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DB} \Rightarrow 2(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv 2(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}).$

4.2. Démonstration du théorème de l'orthocentre.

Il faut définir l'orthocentre H d'un triangle ABC non aplati, ce qui se fait sans difficulté avec la notion d'orthogonalité de vecteurs.



Definition **orthocentre** :=
$\lambda H, A, B, C : PO. \left(\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{AC}\right) \wedge \overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}.$

Quitte à renommer les sommets, on peut supposer que le triangle ABC n'est ni rectangle en B, ni rectangle en C.

Il faut définir le symétrique H' du point H par rapport à la droite (BC) avec uniquement des angles de vecteurs (on sait que la réflexion inverse les angles orientés).

On écrit : $\left(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{H'C}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HC}\right)$

Ces deux égalités permettent de voir H' comme le point d'intersection des deux droites symétriques des droites (BH) et (CH) par rapport à la droite (BC). Ces droites ne sont pas parallèles car le point H n'est pas sur la droite (BC), le triangle ABC n'étant pas aplati et n'étant ni rectangle en B, ni rectangle en C.

Parameters **H, A, B, C** : PO.
Hypothesis **triangle** : $\neg \overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{AC}$.
Hypothesis **H_orthocentre** : (orthocentre H A B C).

Lemma **orthocentre_double**: $2(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}) \equiv 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Theorem **symetrique_orthocentre_cercle**: $\forall$H' : PO .
$(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HB})$ =>
$(\overrightarrow{H'C}, \overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HC})$ => (sont_cocycliques A B C H').

Pour démontrer que H' appartient au cercle circonscrit à ABC, il suffit de démontrer en utilisant la réciproque du théorème de cocyclicité que : $2\left(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}\right) = 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, soit encore en utilisant la propriété d'inversion des angles par une réflexion

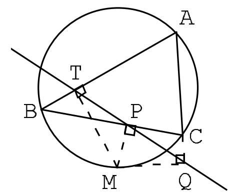
Lemma **reflexion**: $\forall$i, u, v, u', v' : V .
(u', i) $\equiv$ (i, u) => (v', i) $\equiv$ (i, v) => (u, v) $\equiv$ (v', u').

$-2\left(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}\right) = 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 2\left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}\right)$ ce qui se montre facilement en écrivant $2\left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}\right) = 2\left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{AB}\right) + 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + 2\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{HB}\right)$ puis en utilisant la définition de l'orthocentre , on a : $2\left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}\right) = \pi + 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \pi = 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ (Q.E.D.)

4.3. Démonstration du théorème de la droite de Simson.

Etant donné un triangle ABC non aplati, et un point M , il faut définir ses projetés orthogonaux respectifs sur les côtés du triangle , ce qui se fait sans difficulté en utilisant les notions d'orthogonalité et de colinéarité des vecteurs : par exemple, P est le projeté orthogonal de M sur la droite (BC) signifie $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{PB}$ et ($\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{PB}$ sont colinéaires)

On démontre d'abord le lemme suivant : Si P , Q et T sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur les côtés du triangle ABC . Avec les notations de la figure, on a : $2\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PT}\right) = 2\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}\right) + 2\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}\right)$.



Une conséquence immédiate de cette égalité est que : $2\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PT}\right) = 0$ si et seulement si $2\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}\right) + 2\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}\right) = 0$, ce qui se lit :

P , Q et T sont alignés si et seulement si $2\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}\right) = 2\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}\right)$

(c'est-à-dire M appartient au cercle circonscrit au triangle ABC) (Q.E.D.)

Lemma projete_ortho_cote: $\forall A, B, C, M, P, Q, T : PO .$
$\overrightarrow{CA} \,//\, \overrightarrow{CQ} \Rightarrow$
$\overrightarrow{PC} \,//\, \overrightarrow{PB} \Rightarrow$
$\overrightarrow{BA} \,//\, \overrightarrow{BT} \Rightarrow$
$\overrightarrow{TM} \perp \overrightarrow{TB} \Rightarrow$
$\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{PB} \Rightarrow$
$\overrightarrow{QM} \perp \overrightarrow{QC} \Rightarrow 2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PT}) \equiv 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}) + 2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}).$

Theorem droite_Simson:
$\forall A, B, C, M, P, Q, T : PO .$
$\neg\, \overrightarrow{CA} \,//\, \overrightarrow{CM} \Rightarrow$
$\overrightarrow{CA} \,//\, \overrightarrow{CQ} \Rightarrow$
$\overrightarrow{PC} \,//\, \overrightarrow{PB} \Rightarrow$
$\overrightarrow{BA} \,//\, \overrightarrow{BT} \Rightarrow$
$\overrightarrow{TM} \perp \overrightarrow{TB} \Rightarrow$
$\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{QM} \perp \overrightarrow{QC} \Rightarrow \left(\overrightarrow{PQ} \,//\, \overrightarrow{PT}\right) \Leftrightarrow$ (sont_cocycliques C A M B).

Pour démontrer que $2(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PT}) = 2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}) + 2(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA})$, on utilise deux fois le théorème des 2 triangles rectangles de même hypoténuse : ce qui donne $2(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}) = 2(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM})$ et $2(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PT}) = 2(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BT})$. Puis on utilise l'hypothèse : $\overrightarrow{BT}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires qui donne $2(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BT}) = 2(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA})$ et l'hypothèse : $\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont colinéaires qui donne $2(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}) = 2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM})$. Finalement, en utilisant la relation de Chasles on a

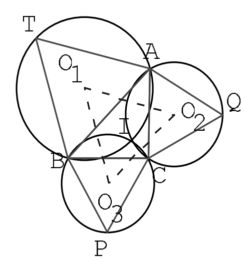
$2(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PT}) = 2(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}) + 2(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PT}) = 2(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}) + 2(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA})$ (Q.E.D.)

4.4. Démonstration du théorème de Napoléon.

On peut douter que Napoléon, comme la légende le prétend, soit le père de ce théorème. « Mon général, nous nous attendions à tout de vous, sauf à des leçons de géométrie » lui auraient dit Lagrange et Laplace.

Intéressons-nous à sa démonstration .

En prenant les notations de la figure, on remplace ici l'hypothèse : les triangles *TAB, QAC et PBC* construits extérieurement à *ABC* sont équilatéraux par l'hypothèse plus générale : (H) $(\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PB}) + (\overrightarrow{TB},\overrightarrow{TA}) + (\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QC}) = \pi$



Et on veut montrer que les cercles circonscrits à ces trois triangles sont concourants en un point I .

Pour cela , on suppose que les cercles circonscrits aux deux triangles *TAB* et *QAC* se coupent en A et en un deuxième point I et il faut montrer que le point I appartient au cercle circonscrit à *PBC*.

Lemma concours_3circonscrits:

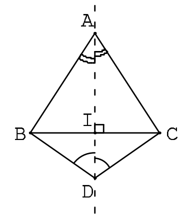
$$
\begin{array}{l}
\forall A,\ B,\ C,\ P,\ Q,\ T,\ O1,\ O2,\ I : PO.\\
\quad (\text{circonscrit}\ T\ A\ B\ O1) \Rightarrow\\
\quad\ (\text{circonscrit}\ I\ A\ B\ O1) \Rightarrow\\
\quad\quad (\text{circonscrit}\ Q\ A\ C\ O2) \Rightarrow\\
\quad\quad\ (\text{circonscrit}\ I\ A\ C\ O2) \Rightarrow\\
\quad\quad\quad \neg\ \overrightarrow{PB} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{PC} \Rightarrow\\
\quad\quad\quad\ (\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PB}) + \left((\overrightarrow{TB},\overrightarrow{TA}) + (\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QC})\right) \equiv \pi \Rightarrow (\text{sont\_cocycliques}\ P\ B\ C\ I).
\end{array}
$$

Il suffit de montrer que $2(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}) = 2(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC})$. Pour ce faire, on utilise les 2 autres cercles et on a $2(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IA}) = 2(\overrightarrow{TB},\overrightarrow{TA})$ et $2(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}) = 2(\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QC})$. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$2(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}) = 2(\overrightarrow{TB},\overrightarrow{TA}) + 2(\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QC})$. Puis, en utilisant l'hypothèse (H)

$2(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}) = 2\pi - 2(\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PB}) = 2(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC})$ (Q.E.D.)

Si on appelle les centres des 3 cercles respectivement O_1, O_2 et O_3, on veut démontrer alors que le triangle $O_1O_2O_3$ a des angles respectivement égaux aux angles $\hat{T}, \hat{Q}$ et $\hat{P}$.



Pour cela , il nous faut un nouveau résultat : si on a deux triangles isocèles ABC et DBC de même base $[BC]$, alors $(AD) \perp (BC)$.

Il est clair que cette propriété est liée à la notion de médiatrice que nous n'avons pas. Nous avons donc utilisé la notion de bissectrice (facile à définir avec les angles orientés) et démontré que si dans un triangle isocèle ABC en A, (AI) est la bissectrice de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ alors $(AI) \perp (BC)$ et réciproquement.

Definition **bissectrice** **:=**
  λI, A, B, C : PO. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) \equiv (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})$.

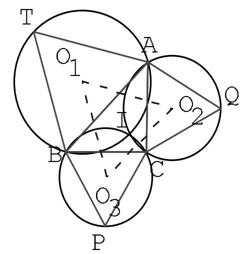
Lemma **isocele_hauteur_bissectrice**: $\forall$I, A, B, C : PO.
(isocele A B C) => $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BC}$ => (bissectrice I A B C).

Lemma **isocele_bissectrice_hauteur**: $\forall$I, A, B, C : PO.
(bissectrice I A B C) => (isocele A B C) => $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BC}$.

En appliquant ces lemmes on montre que si (AI) est la bissectrice de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ dans le triangle isocèle ABC en A, alors $(AI) \perp (BC)$ donc la droite (AI) est aussi bissectrice de l'angle orienté $(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$ dans le triangle isocèle DBC en D. Par unicité de la bissectrice, la droite (AI) passe donc par le point D et on a $(AD) \perp (BC)$. *(Q.E.D.)*

Lemma **bissectrice_unicite**: $\forall$I, A, B, C, J : PO.
(bissectrice I A B C) => (bissectrice J A B C) => $\overrightarrow{AI} \,//\, \overrightarrow{AJ}$.

Lemma **existence_mediatrice_base_isocele**:
$\forall$A, B, C, D : PO.
(isocele A B C) => (isocele D B C) => (bissectrice D A B C) $\wedge$ (bissectrice A D B C).



On peut appliquer ce résultat aux triangles O_1AI et O_2AI qui sont isocèles et de même base $[AI]$, on obtient donc $(O_1O_2) \perp (AI)$. De la même façon, on obtient $(O_1O_3) \perp (BI)$ et $(O_3O_2) \perp (CI)$.

En utilisant la propriété : si $\vec{u} \perp \vec{u}'$ et $\vec{v} \perp \vec{v}'$ alors $2(\vec{u},\vec{v}) = 2(\vec{u}',\vec{v}')$

Lemma **double_orthogonal**: ∀u, u', v, v' : V.
u ⊥ u' => v ⊥ v' => 2(u, v) ≡ 2(u', v').

On en déduit les égalités : $2(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}) = 2(\overrightarrow{O_1O_2},\overrightarrow{O_1O_3})$ et $2(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}) = 2(\overrightarrow{O_1O_3},\overrightarrow{O_2O_3})$ et enfin $2(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}) = 2(\overrightarrow{O_1O_2},\overrightarrow{O_2O_3})$.

Puis en appliquant le théorème de cocyclicité $2(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TB}) = 2(\overrightarrow{O_1O_2},\overrightarrow{O_1O_3})$ et $2(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}) = 2(\overrightarrow{O_1O_3},\overrightarrow{O_2O_3})$ et enfin $2(\overrightarrow{QA},\overrightarrow{QC}) = 2(\overrightarrow{O_1O_2},\overrightarrow{O_2O_3})$ (Q.E.D.)

Lemma **circonscrit_3centres**:
∀A, B, C, O1, O2, O3, I : PO.
(circonscrit I A B O1) =>
(circonscrit I A C O2) =>
(circonscrit I B C O3) =>
$\left(2(\overrightarrow{O1\ O2},\overrightarrow{O1\ O3}) \equiv 2(\overrightarrow{I\ A},\overrightarrow{I\ B})\right) \wedge \left(\left(2(\overrightarrow{O1\ O3},\overrightarrow{O2\ O3}) \equiv 2(\overrightarrow{I\ B},\overrightarrow{I\ C})\right) \wedge \left(2(\overrightarrow{O1\ O2},\overrightarrow{O2\ O3}) \equiv 2(\overrightarrow{I\ A},\overrightarrow{I\ C})\right)\right)$.

Theorem **general_Napoleon**:
∀A, B, C, P, Q, T, O1, O2, I : PO.
(circonscrit T A B O1) =>
(circonscrit I A B O1) =>
(circonscrit Q A C O2) =>
(circonscrit I A C O2) =>
$\neg\, \overrightarrow{P\ B} \,//\, \overrightarrow{P\ C}$ =>
$(\overrightarrow{P\ C},\overrightarrow{P\ B}) + \left((\overrightarrow{T\ B},\overrightarrow{T\ A}) + (\overrightarrow{Q\ A},\overrightarrow{Q\ C})\right) \equiv \pi$ =>
∃O3 : P.
$\left(2(\overrightarrow{O1\ O2},\overrightarrow{O1\ O3}) \equiv 2(\overrightarrow{T\ A},\overrightarrow{T\ B})\right) \wedge$
$\left(\left(2(\overrightarrow{O1\ O3},\overrightarrow{O2\ O3}) \equiv 2(\overrightarrow{P\ B},\overrightarrow{P\ C})\right) \wedge \left(2(\overrightarrow{O1\ O2},\overrightarrow{O2\ O3}) \equiv 2(\overrightarrow{Q\ A},\overrightarrow{Q\ C})\right)\right)$.

5. Conclusion

Le travail présenté ici ne représente qu'une tentative de formalisation en ***Coq*** de la **théorie des angles orientés de vecteurs non nuls pour la description de la notion de cocyclicité** de quatre points. Nous avons voulu montrer que les démonstrations classiques des théorèmes où intervient cette notion se résument à une manipulation habile de ces angles orientés, manipulation que nous pouvions faire en ***Coq***.

Le parti pris 'minimaliste' qui consiste à ne vouloir utiliser que ces objets pour faire des preuves a conduit à quelques difficultés.

- On n'a pas voulu donner les bases de la géométrie affine euclidienne donc on n'a pas défini de distance, et par conséquent on n'a pas les définitions habituelles de cercle, médiatrice de segment, triangle isocèle etc... ce qui fait perdre en lisibilité.
- On n'a pas non plus de notion de droite (avec les angles de vecteurs non nuls, on ne peut parler que de direction de droite) et il est difficile voire impossible de faire des preuves qui utilisent des points de concours de droites comme on l'a vu par exemple pour le centre du cercle circonscrit à un triangle.

Si l'on garde l'idée de ne pas faire de géométrie analytique, c'est-à-dire de ne pas identifier le plan à $I\!R^2$ pour ne pas réduire les preuves à une suite de calculs dans $I\!R$, il serait possible de reprendre ce travail en prenant comme objets de base les points du plan, en définissant ensuite les bipoints, puis les vecteurs comme classes d'équivalence de bipoints. On pourrait alors définir une opération notée '+' pour ces vecteurs. On peut imaginer pour ce faire d'utiliser la notion de quotients [1]. On pourrait formaliser ainsi la **théorie élémentaire de la géométrie vectorielle plane**.

Les angles orientés de vecteurs non nuls seraient alors des classes d'équivalence de couples de vecteurs non nuls pour lesquels on définirait une addition qui aurait les mêmes propriétés que celles que nous avons utilisées.

Il faudrait de plus, définir la notion de points alignés, de concours de droites et définir une distance puis donner les définitions habituelles de cercle, médiatrice etc... On commencerait alors à formaliser la **théorie élémentaire de la géométrie affine euclidienne plane.** Tout ceci permettrait de gagner en lisibilité, puisqu'on retrouverait les définitions et propriétés habituelles des objets mathématiques utilisés.

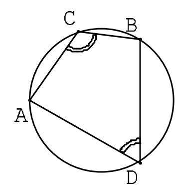
[1] Loïc Pottier, <<Quotients dans le CCI>>, rapport de recherche INRIA n° 4053, nov. 2000, http://www-sop.inria.fr/rapports/sophia/RR-4053.html

A contrario, il nous a semblé intéressant de ne pas trop enrichir les structures de base, puisque nous avions choisi de faire les démonstrations de théorèmes qui n'utilisaient qu'un type d'objets, quitte à écrire des axiomes pour les résultats relevant d'une autre théorie.

Si le travail de formalisation de la géométrie élémentaire 'de la règle et du compas' en ***Coq*** intéresse un public, il y a d'autres champs 'à structure légère' de ce type à explorer.

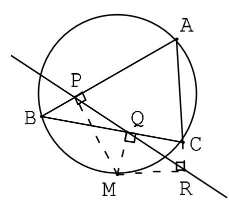
Du point de vue de la forme, l'utilisation de l'interface ***Pcoq*** permet une écriture proche de l'écriture mathématique et il serait intéressant, si l'on veut faire de la géométrie dans un but didactique, de pouvoir insérer à côté des définitions et théorèmes **des figures dynamiques interactives**, le lecteur pouvant alors les modifier à loisir et éventuellement créer d'autres objets pour vérifier des résultats ou faire des conjectures.

Dans l'exemple du théorème de cocyclicité :



quatre points deux à deux distincts A, B, C *et* D *sont cocycliques ou alignés si et seulement si* $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\ [\pi]$, il peut être utile d'avoir une figure interactive dans laquelle on peut déplacer les points sur le cercle et faire des mesures d'angles pour comprendre par exemple qu'on ne peut avoir l'égalité $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\ [2\pi]$ dans ce théorème.

Dans l'exemple du théorème de la droite de Simson :



Soit un triangle ABC non aplati, un point M *et ses projetés orthogonaux respectifs* P, Q *et* R *sur les côtés du triangle. Les points* P, Q *et* R *sont alignés si et seulement si* M *appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.*

Il peut être intéressant pour le comprendre, de pouvoir faire des 'manipulations' sur une figure interactive. On peut par exemple, effacer le cercle et déplacer le point M dans le plan et voir se déplacer les points P, Q et R. On peut alors essayer de construire point par point, l'ensemble des points M tels que les points P, Q et R soient alignés.

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399