



**HAL**  
open science

# Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire. Partie 1 : Existence et coût

Paul-Louis George, Houman Borouchaki

► **To cite this version:**

Paul-Louis George, Houman Borouchaki. Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire. Partie 1 : Existence et coût. [Rapport de recherche] RR-4397, INRIA. 2002. inria-00072191

**HAL Id: inria-00072191**

**<https://inria.hal.science/inria-00072191>**

Submitted on 23 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

*Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire.  
Partie 1 : Existence et coût*

P.L. George et H. Borouchaki

N° 4397

13 mars 2002

THÈME 4



*R*apport  
*de recherche*





# Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire.

## Partie 1 : Existence et coût

P.L. George et H. Borouchaki\*

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 4397 — 13 mars 2002 — 31 pages

### Résumé :

On discute de l'existence d'un maillage simplicial pour un polyèdre arbitraire. Étant donné un maillage (une liste de triangles) conforme de la surface du domaine, décider s'il existe ou non un maillage en simplexes de ce domaine est un problème réputé *NP*-complet. Ce papier décrit une méthode qui construit un tel maillage, assurant ainsi son existence. La méthode proposée comprend trois étapes. En premier, un algorithme de triangulation de Delaunay est appliqué aux points donnés, ensuite une étape de régénération des éléments de la surface est faite qui conduit à la partition des faces initiales. Enfin, une dernière étape permet de supprimer les points ajoutés lors de cette partition. La complexité de la construction est discutée puis un exemple est montré qui illustre l'intérêt pratique de cette construction. La Partie 2 de ce papier donne une description détaillée de la méthode de construction décrite brièvement ici et montre de nombreux exemples concrets.

**Mots-clés :** Maillage d'un polyèdre, Triangulation, Delaunay, Partition de Faces

\* UTT,GSM-LASMIS (et INRIA, Projet Gamma),  
Université de Technologie de Troyes,  
BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France.  
email: houman.borouchaki@utt.fr

# **Simplicial mesh of an arbitrary polyhedron.**

## **Part 1 : Existence and complexity**

### **Abstract:**

Issues related to the existence of a triangulation of an arbitrary polyhedron are addressed. Given a boundary surface mesh (a set of triangular facets), the problem to decide whether or not a triangulation exists is reported to be  $NP$ -hard. In this paper, an algorithm to triangulate a general polyhedron is used which makes use of a classical Delaunay triangulation algorithm, a phase for recovering the missing boundary facets by means of facet partitioning and a final phase that makes it possible to remove the additional points defined in the previous step so as to recover the initial boundary mesh thus resulting in a mesh of the given polyhedron whose construction cost is discussed. To conclude, one example is shown to illustrate the actual interest of the proposed construction. Part 2 of this paper gives a detailed description of the corresponding construction method along with a series of application examples.

**Key-words:** Mesh of a polyhedron, Triangulation, Delaunay, Facet Partitioning

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Existence d'un maillage simplicial d'un polygone arbitraire</b>	<b>6</b>
2.1	Une méthode naïve de construction . . . . .	6
2.1.1	Domaine convexe . . . . .	7
2.1.2	Domaine non convexe simple . . . . .	8
2.1.3	Domaine quelconque . . . . .	9
2.2	Une méthode partant de la triangulation de Delaunay . . . . .	9
2.3	Une méthode par subdivision . . . . .	10
2.4	Complexité . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Existence d'un maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire</b>	<b>13</b>
3.1	Le prisme de Schönhardt et le polyèdre de Chazelle . . . . .	13
3.2	Polyèdre arbitraire . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Méthode directe et méthode basée sur Delaunay</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Une méthode constructive montrant l'existence d'une solution</b>	<b>17</b>
5.1	Triangulation de Delaunay . . . . .	17
5.2	Partition des faces frontières du polyèdre . . . . .	17
5.3	Contrainte des faces frontières du polyèdre . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Complexité</b>	<b>20</b>
6.1	Complexité en deux dimensions . . . . .	20
6.2	Complexité en trois dimensions . . . . .	24
<b>7</b>	<b>Un exemple d'application</b>	<b>27</b>
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>30</b>

## 1 Introduction

En deux dimensions, tout polygone non auto-intersectant est triangulable. Ce résultat, connu depuis longtemps, est en particulier démontré dans [12] et [1]. Des algorithmes presque optimaux (de complexité presque linéaire) ont été même proposés. La recherche d'un algorithme optimal (de complexité linéaire) a longtemps occupé les chercheurs dans le domaine de la géométrie algorithmique. Ce problème est enfin résolu, en 1991, par B. Chazelle, [6]. Cependant, la mise en œuvre de son algorithme paraît difficile, voire impossible !

En trois dimensions, l'existence d'un maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire est considérée comme une question difficile. En effet, ce problème n'est pas, en général, de complexité polynomiale, cf. [13] et [5]. Deux questions sont posées, est ce que la triangulation existe sans ajout de points supplémentaires (points dits de Steiner) et, sinon, quel est le nombre optimal (minimal) de tels points ?

En pratique, moyennant des heuristiques, plusieurs méthodes existent qui permettent de résoudre le problème de la construction d'une triangulation sans se préoccuper explicitement des questions relatives aux points de Steiner (leur nombre en particulier).

George et al.,[8], ont proposé une méthode basée sur la construction d'une triangulation de Delaunay des points de la peau du polyèdre suivie de modifications topologiques locales (bascules d'arêtes et de faces) et ajout de points (de Steiner) pour traiter des pathologies bloquantes afin de former les faces initiales. La méthode, sur le plan théorique, donne la solution escomptée mais, d'un point de vue numérique, peut être mise en défaut dans des configurations particulièrement délicates (sans toutefois, en général, être présentes dans les exemples issus des applications de type éléments finis). Un exemple de configurations délicates est celui où des faces de taille très variées sont voisines, un autre exemple est celui où les faces du polyèdre sont fortement anisotropes (étirées). Une approche d'apparence proche est proposée dans [9] qui s'autorise à modifier les faces spécifiées via des bascules d'arêtes dans certains cas (faces coplanaires ou pratiquement coplanaires). De la sorte, la contrainte est amoindrie et plus facile à satisfaire (on ne cherche plus à imposer le jeu de faces données mais un "équivalent" plus ou moins géométriquement proche).

Weatherill et al., [15], ont proposé une méthode qui revient à casser les faces contraintes après ajout de points internes au domaine (compte tenu du type d'ap-

plications envisagées, la mécanique des fluides). L'idée sous-jacente étant que ces points facilitent la formation des sous-faces issues du cassage des faces initiales. Cette méthode produit un maillage du polyèdre considéré mais, malgré une phase tendant à supprimer les points ajoutés sur les faces, ne garantit pas que tous ces points sont détruits et par suite que toutes les faces initiales existent dans le maillage résultant.

Chazelle et al., [5], ont proposé une méthode permettant de trianguler un polyèdre non convexe sans trou(s) (topologique(s)) ayant  $n$  sommets et  $r$  arêtes réflexes en  $O(n + r^2)$  tétraèdres. L'approche consiste à partitionner le polyèdre avec des cylindres ayant comme base les triangles (les faces) de la peau. Ici aussi, l'apport reste purement théorique et, à notre connaissance, il n'y a pas d'implémentation numérique.

À cette liste non exhaustive, il convient de rajouter tous les travaux relatifs à la notion de Delaunay admissibilité d'une surface triangulée. Dans cet esprit, on trouve essentiellement deux approches. L'une, par exemple [10], revient à casser les contraintes via un jeu de sphères protectrices. Des points sont ajoutés sur les contraintes. Ils sont positionnés de manière à ce que leur voisinage n'interfère pas. Cette première approche est d'un intérêt théorique pur et, sur le plan pratique, peut conduire à un nombre de points prohibitif, par suite, elle n'a probablement pas de réelles applications. L'autre approche proposée par exemple par [7] et, plus récemment, par [11], est plus proche de la réalité. L'idée, dans cette seconde approche, est de modifier la triangulation initiale de la surface par ajout de points et via des bascules d'arêtes afin que la triangulation de Delaunay de tous les points (initiaux et ajoutés) contienne exactement les faces correspondantes (ce qui est la même idée que dans la première approche). Notons que les points ajoutés, dont le nombre reste contrôlé, le sont sur les faces initiales (et, en général, pas sur la surface sous-jacente).

Dans ce papier, on propose une méthode simple de construction de la triangulation d'un polyèdre quelconque. Cette méthode est similaire, dans son concept, à celle de Weatherill et al. mais s'en différencie par le fait qu'on ne rajoute pas de points internes *a priori* et, de plus, que l'on a la garantie que les points rajoutés sont soit purement et simplement supprimés, soit déplacés vers l'extérieur des faces permettant ainsi de retrouver toutes les faces initiales. Ce papier (Partie 1) présente le schéma général de la méthode tandis qu'un second papier (Partie 2) montrera

les aspects algorithmiques et pratiques et de nombreux exemples tirés de différents types d'applications.

Section 2, avant d'aborder le cas de la trois dimensions, on revient sur le cas (simple) de la deux dimensions. On traite l'existence de la triangulation et on propose des algorithmes de construction dont les complexités sont brièvement décrites. Section 3, on aborde le cas de la trois dimensions sous l'angle de l'existence. Section 4, on revient sur la méthode (directe) proposée par George et al. (déjà esquissée dans l'introduction). Section 5, on décrit notre nouvelle approche. Section 6, on discute de la complexité. Ensuite, Section 7, un exemple d'application est montré puis, Section 8, une brève conclusion est donnée.

## 2 Existence d'un maillage simplicial d'un polygone arbitraire

On se donne un domaine dans le plan décrit par sa frontière. Celle-ci est constituée de polygones simples. Ces derniers sont donnés sous la forme d'un ensemble de segments. L'existence d'un (au moins un) maillage triangulaire de ce domaine tel que les segments frontières donnés se retrouvent comme arête d'éléments constitue un résultat bien connu. Néanmoins, il nous a semblé intéressant de donner trois démonstrations de ce résultat, la première basé sur une méthode naïve de construction, la seconde faisant appel à un algorithme de triangulation de Delaunay, avant de décrire rapidement une troisième méthode qui est la restriction au cas bidimensionnel de la méthode qui sera proposée dans le cas tridimensionnel.

On se donne donc un ensemble (une liste)  $(S_i^j)_{i=1, n^j}$  de points qui sont les extrémités des segments formant la discrétisation du  $j^{ieme}$  polygone frontière du domaine. On suppose de plus que les sommets  $S_i^j$  de chaque composante connexe  $j$  du domaine sont ordonnés selon un parcours dans le sens direct (indirect selon sa "parité").

### 2.1 Une méthode naïve de construction

Pour simplifier, on regarde d'abord le cas où le domaine analysé est convexe (donc ayant un seul contour polygonal), Figure 1 (à gauche), puis celui où le do-

maine est non convexe, possédant un seul contour polygonal et enfin le cas d'un domaine quelconque.

### 2.1.1 Domaine convexe

Dans ce cas, l'idée est triviale. Pour alléger les notations, on omet l'indice  $j$  (de fait,  $j = 1$  puisque, ici, le contour ne possède qu'une seule composante connexe). On considère les triplets formés par trois points consécutifs non colinéaires. Comme le domaine est convexe, (au moins) un tel triplet existe toujours. Soit  $[S_i, S_{i+1}, S_{i+2}]$ , le triplet analysé. Comme la surface orientée du triangle formé par ce triplet,  $Det(S_{i+1} - S_i, S_{i+2} - S_i)$ , est positive (ci-dessus, on a supposé, sans perte de généralité, que le contour était orienté de manière à assurer cette positivité), on peut construire le triangle  $(S_i, S_{i+1}, S_{i+2})$ . Alors, d'une part, le nombre de segments du contour du polygone décroît de un et, d'autre part, le point  $S_{i+1}$  disparaît de la liste. Comme le polygone résultant reste convexe (car tout sous-ensemble ordonné de  $(S_i)$  forme un polygone convexe), il est toujours possible d'enlever un point de la liste des points du contour courant. Par suite, l'algorithme converge vers un triangle et une solution existe.

Notons que le choix d'un triplet possible (et la construction du triangle correspondant) est, en général, multiple et, par suite, des solutions différentes peuvent être obtenues. Dans cet ordre d'idées, le tri (dynamique) des triplets en fonction de l'angle formé en  $S_{i+1}$  permet de sélectionner le triplet ayant l'angle le plus petit et d'assurer ainsi un certain niveau de contrôle sur la qualité des triangles construits.

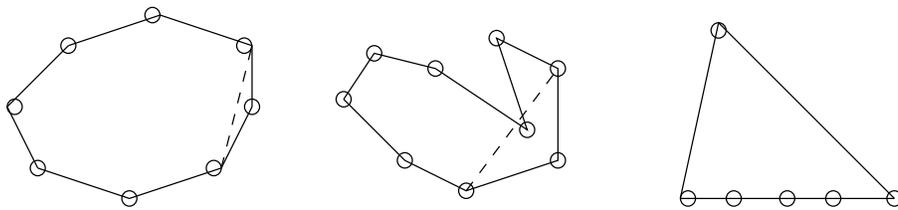


FIG. 1 – À gauche, le cas d'un polygone convexe. Au milieu et à droite, deux polygones non convexes.

### 2.1.2 Domaine non convexe simple

Le cas d'un domaine simple arbitraire sans trou (généralement non convexe dont la frontière polygonale n'a qu'une composante connexe) demande une analyse plus fine. À la différence du cas précédent, il existe au moins un sommet réflexe où l'angle formé par les deux arêtes incidentes en ce sommet vu de l'intérieur du domaine est strictement plus grand que  $\pi$ . Un tel sommet peut gêner la construction proposée précédemment, Figure 1 (au milieu). En effet, ce sommet peut tomber dans un triangle formé par un triplet qui est *a priori* acceptable pour le schéma décrit ci-dessus.

L'idée est donc de dresser la liste des sommets réflexes puis de revenir à la méthode ci-dessus en l'adaptant. En effet, valider un triplet nécessite de vérifier explicitement qu'il ne contient aucun sommet réflexe.

Plus précisément, on montre qu'il existe au moins un triplet (un indice  $i$ ) tel que :

- $Det(S_{i+1} - S_i, S_{i+2} - S_i) > 0$ , la surface orientée du triangle  $(S_i, S_{i+1}, S_{i+2})$  est positive,
- ce triangle ne contient aucun sommet réflexe.

**Preuve :** La preuve utilise le fait que tout polygone simple est triangulable sans ajout de points autres que ses sommets. Pour un polygone simple fermé, le nombre de triangles est  $n - 2$  où  $n$  est le nombre de sommets du polygone. Le nombre d'arêtes de peau étant  $n$ , il existe au moins deux triangles qui possèdent deux arêtes de peau.

Un triplet satisfaisant les deux critères nécessaires étant identifié, le triangle correspondant est construit, la liste des points est mise à jour et le processus est itéré. Notons que le traitement d'un triplet peut rendre non-réflexe un sommet initialement réflexe (vis à vis du contour "actif" restant).

Une autre construction consiste à trouver un triplet "positif" et à examiner s'il contient un ou plusieurs sommets réflexes. S'il ne contient aucun tel sommet, le triangle est formé et, par suite, le nombre d'arêtes du polygone décroît. Dans le cas contraire, parmi tous les sommets (du polygone courant) contenus dans le triangle  $(S_i, S_{i+1}, S_{i+2})$ , on considère celui qui est réflexe et qui est le plus proche, par exemple, du segment  $S_i, S_{i+1}$ . On forme avec ce segment et ce sommet un triangle valide. En effet, ce triangle ne contient aucun sommet du polygone courant.

L'introduction de ce triangle divise le domaine à trianguler en deux sous-domaines disjoints dont chacun contient une frontière polygonale dont le nombre d'arêtes est strictement inférieur au nombre d'arêtes du polygone courant.

### 2.1.3 Domaine quelconque

Dans ce cas, la frontière du domaine est composée de plusieurs polygones simples de forme quelconque. Il suffit d'appliquer la dernière méthode en remarquant que cela conduira à relier deux composantes lorsque le point trouvé n'appartient pas à la même composante que les extrémités de l'arête utilisée.

**Remarque.** Notons, et ce sera là une différence notable avec le cas tridimensionnel, que la solution ne nécessite pas l'ajout de points. Les sommets des triangles du maillage construit ne sont autres que les points du contour initial.

## 2.2 Une méthode partant de la triangulation de Delaunay

On peut<sup>1</sup> définir une boîte, par exemple carrée, englobant les  $S_i^j$ . En premier, un algorithme de triangulation de Delaunay appliqué aux  $S_i^j$  et aux quatre sommets de la boîte ci-dessus permet de construire un maillage en triangles de cette boîte. Ce maillage ne contient pas, en général, tous les segments (d'extrémités parmi les  $S_i^j$ ) du contour donné, néanmoins, la simple utilisation de bascules<sup>2</sup> d'arêtes permet de recréer tous ces segments qui se retrouvent alors comme arête de triangle, Figure 2. Par suite, il est facile d'identifier les triangles intérieurs au polygone et ainsi, supprimant les triangles extérieurs, on obtient un maillage du polygone initial, assurant donc le résultat cherché. Ici, également, la solution est obtenue sans ajout de points internes.

**Remarque.** L'idée sous-jacente est de faire diminuer (via les bascules) le nombre de triangles intersectés par le segment correspondant à une arête manquante. Comme ceci n'est pas toujours vrai (une bascule laissant inchangé ce nombre), le résultat

---

1. ceci permet de simplifier l'écriture de l'algorithme mais n'est pas strictement nécessaire.

2. Une autre méthode consiste à utiliser la méthode naïve localement sur chaque polygone formé par l'ensemble des triangles intersectés par un segment manquant.

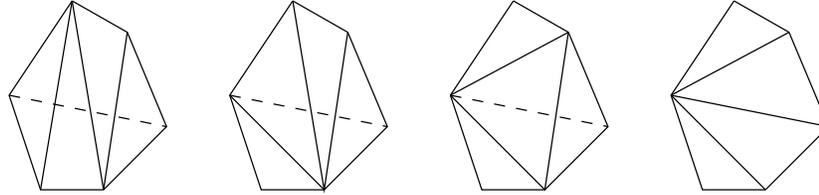


FIG. 2 – Bascules successives pour faire apparaître une arête.

est obtenu en basculant de manière aléatoire les arêtes candidates à bascule dans le cas où plusieurs bascules sont *a priori* possibles.

### 2.3 Une méthode par subdivision

Cette méthode suit le principe qui sera proposé pour la trois dimensions. Elle est exposée ici car elle est très facile à comprendre (en deux dimensions). La méthode par subdivision reprend la première étape de la méthode précédente. La triangulation de Delaunay ainsi construite ne contient pas, en général, tous les segments initiaux. Un tel segment manque (*i.e.*, n'est pas une arête d'éléments) car il existe des arêtes du maillage actuel qui le coupent. On va introduire les points d'intersection correspondants afin de forcer une partition du segment traité puis on va supprimer les points ainsi ajoutés pour retrouver le segment initial comme arête.

**Trouver une partition en arêtes d'un segment donné.** On considère une contrainte manquante. Ses extrémités sont des sommets du maillage courant. Partant de l'une de ses extrémités,  $A$ , on cherche la première arête du maillage courant intersectée. On calcule le point d'intersection correspondant,  $P_1$ , puis on l'insère dans le maillage courant, Figure 3. Pour ce faire, on traite les deux triangles partageant l'arête intersectée. Le premier est constitué du sommet  $A$  et de l'arête intersectée, le second de cette arête et d'un troisième point, le point opposé à cette arête commune. La construction consiste simplement à subdiviser ces deux triangles. Le premier est cassé en deux en tirant  $AP_1$ , le second est cassé également en deux en joignant  $P_1$  et le point opposé à l'arête commune de la configuration de départ. Il est donc clair que l'arête  $AP_1$  est une arête du maillage ainsi modifié.

On considère maintenant les deux triangles, issus du découpage du second triangle de départ et on cherche, parmi leurs arêtes, celle qui est coupée par le segment

à contraindre. De la sorte soit on définit un point  $P_2$ , nouvelle intersection à introduire, soit on trouve une arête joignant  $P_1$  à  $B$ , l'autre extrémités de la contrainte. Dans ce dernier cas, la partition cherchée existe. Sinon, on répète la même construction.

Par conséquent, introduire les points intersections des arêtes courantes avec le segment traité permet, par l'opération locale triviale décrite ci-dessus, de faire apparaître ce segment sous la forme d'une subdivision constituée par des arêtes du maillage ainsi modifié. Appliqué à tous les segments de la contrainte donnée, cette simple construction assure l'existence, sous la forme de partitions, de toutes ces contraintes.

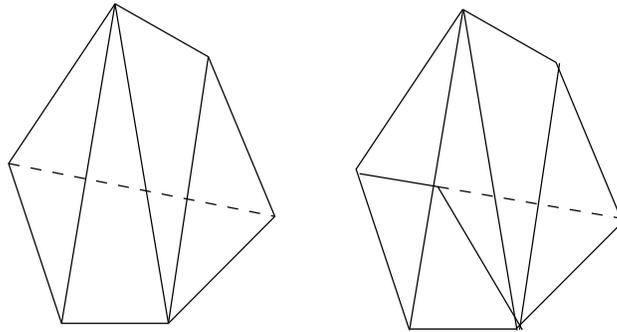


FIG. 3 – L'arête à forcer (à gauche), l'introduction du premier point d'intersection détecté et la formation du premier segment de la partition de l'arête cherchée.

**Éliminer les points ajoutés pour retrouver les contraintes initiales.** Ensuite, tous les segments manquants ayant été traités, les points ajoutés lors de leur subdivision sont éliminés et, comme résultat, le maillage cherché est construit, sans points autres que les points initiaux. L'élimination des points d'une subdivision consiste en plusieurs étapes :

- diviser le polygone formé par l'ensemble des triangles intersectés par le segment contraint en deux polygones d'intérieur disjoints vis à vis de ce segment,
- pour chaque polygone, faire
  - trier les sommets bord de ce polygone autres que les points d'intersection introduits sur ce segment et que ses extrémités, selon leur distance à ce segment,

- déconnecter ces sommets bord selon ce tri jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'un,
- remplacer le faisceau ainsi formé par un triangle ayant le segment contraint comme arête.

Déconnecter un sommet bord revient à supprimer toutes les arêtes joignant ce sommet aux points d'intersection. Pour supprimer un sommet  $S$  de ce polygone, la méthode consiste à définir la région polygonale s'appuyant sur le segment polygone et délimitée par :

- l'arête bord du polygone joignant le sommet,  $S$ , et son prédécesseur,  $S^-$  (par exemple, à gauche),
- celle joignant  $S$  et son successeur,  $S^+$  (donc à droite),
- celle joignant  $S$  au point intersection à l'extrême gauche sur le segment contraint,
- celle joignant  $S$  au point intersection à l'extrême droite sur le segment contraint.

Cette région est nécessairement convexe, donc il est possible de basculer toutes ses arêtes internes (joignant  $S$  aux intersections sur le segment) sur  $S^-$  ou  $S^+$ . De la sorte,  $S$  ne reste connecté qu'à  $S^-$  et  $S^+$ . Par exemple, pour basculer ces arêtes sur  $S^-$ , il suffit d'appliquer des bascules d'arêtes de gauche à droite.

## 2.4 Complexité

La méthode naïve, dans le cas général, est en  $\mathcal{O}(n(n+r))$  où  $n$  est le nombre de sommets du polygone bord et  $r$  est le nombre de sommets réflexes. Néanmoins, dans le cas convexe, la complexité est linéaire, *i.e.*, en  $n$ .

La méthode deux a la complexité de l'algorithme de triangulation de Delaunay et celle de la phase de bascule d'arêtes donc cette dernière, quadratique dans le pire des cas (autant de bascules que d'arêtes pour chaque arête manquante). Cette complexité est celle de la méthode qui construit une triangulation de Delaunay à partir d'une triangulation quelconque.

La dernière méthode a la complexité de sa phase de partition-élimination, complexité qui sera analysée plus tard (voir plus bas, en particulier la Figure 7).

### 3 Existence d'un maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire

Le problème, en trois dimensions, se formule comme :

- la donnée d'un maillage triangulaire de la surface d'un polyèdre arbitraire,
- la question de savoir s'il existe un maillage tétraédrique de ce polyèdre s'appuyant exactement sur les triangles de la surface de ce domaine.

Ce problème est connu comme étant *NP*-complet. Ceci ne veut pas dire qu'il n'existe pas de maillage (en effet, de nombreuses méthodes existent qui construisent, le plus souvent avec succès, ces maillages, même dans des cas très peu favorables) mais que le coût de la construction n'est pas garanti en temps polynomial. De plus, à l'inverse de la deux dimensions, on sait, qu'en général, il n'existe pas de maillage sans points internes (les points de Steiner). Avant de discuter d'une méthode de construction, on va présenter deux exemples qui mettent en évidence une difficulté particulière.

#### 3.1 Le prisme de Schönhardt et le polyèdre de Chazelle

Le premier exemple montre que même une géométrie simple peut, afin de pouvoir être maillée, imposer la création d'un point (de Steiner) interne. Il montre aussi la difficulté pratique pour trouver la position de ce point. Le second exemple, quant à lui, illustre la difficulté à borner le nombre d'éléments nécessaires à la triangulation d'un domaine quelconque.

**Le prisme de Schönhardt.** Ce polyèdre est un simple cylindre à base triangulaire comportant 6 sommets et 8 faces triangulaires, [14]. La face inférieure est un triangle tout comme la face supérieure. Les trois faces latérales sont des quadrangles coupés en deux triangles chacuns. Prenons le cas d'un prisme droit, Figure 4, alors, selon la découpe des faces latérales (qui sont planes), il existe un maillage en tétraèdres (de trois éléments) immédiat à trouver ou ce maillage n'existe pas (l'un de ses éléments serait exactement de volume nul, cas que nous excluons dans nos applications). Toutefois, ajouter un simple point interne lève cette impossibilité, on obtient alors 8 tétraèdres (un par face de peau). La clé de la construction est que toutes les

faces du bord du prisme sont visibles de ce point. De plus, choisir un tel point est facile car tout point interne au prisme convient.

Tordons ce prisme, la base est fixée et on tourne la face du dessus autour de l'axe du cylindre en assurant que le prisme reste valide (sans auto-intersection). La difficulté est alors de trouver un point, interne au polyèdre, qui soit visible de ses 8 faces. En théorie, tant que le prisme reste valide (pas d'auto-intersection de ses faces), il existe un noyau de visibilité (un polyèdre intersection des demi-espaces délimités par les faces) non vide et tout point de ce noyau donne la solution. En pratique, toutefois, trouver ce point peut se révéler numériquement délicat.

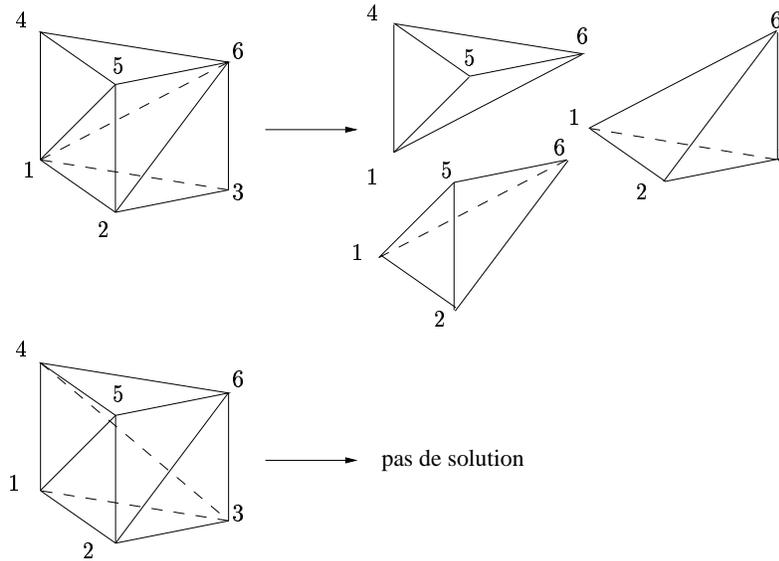


FIG. 4 – Le polyèdre de Schönhardt : triangulation contrainte d'un prisme régulier conduisant à une décomposition valide (sans ajout de point interne) ou donnant une configuration impossible à trianguler, à moins d'ajouter un point interne.

**Le polyèdre de Chazelle.** Ce polyèdre, Figure 5, est défini comme un parallélépipède rectangle tel que  $x$  et  $y$  varient de  $-1$  à  $n + 1$  (soit une longueur de  $n + 2$ ,  $n$  entier) et tel que  $-2n < z < 2n^2$  délimitant ainsi les faces supérieures et inférieures. Ces faces contiennent chacune  $n + 1$  encoches régulièrement espacées.

Les encoches, au dessus, sont formées d'une arête rentrante parallèle à l'axe des  $y$  incidente à deux faces presque verticales. Ces encoches ont leur arête inférieure appartenant à l'hyperbole  $z = xy + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Au dessous, les encoches ont leur arête rentrante parallèle à l'axe des  $x$  et définie par  $z = xy$ , voir [4].

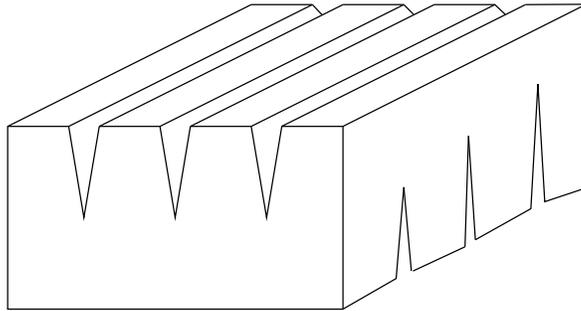


FIG. 5 – Le polyèdre de Chazelle : sa géométrie montrant la disposition des encoches. Pour faciliter la lecture de la figure, on a mis trois encoches seulement et l'échelle n'est pas respectée.

Il est connu (et démontré dans plusieurs références, [4], [1], entre autres) que la triangulation de ce polyèdre nécessite un nombre quadratique d'éléments dès lors que  $\varepsilon < \frac{1}{n^2}$ . Ceci est lié au fait que la proximité des faces inférieures et supérieures des encoches imposent que les régions visibles de part et d'autre sont de volume de l'ordre de  $\varepsilon$ .

### 3.2 Polyèdre arbitraire

Un polyèdre arbitraire est un domaine qui peut localement comprendre, outre des régions présentant des propriétés de régularité (alignement, coplanarité, cocyclicité, cosphéricité, ...), des configurations du type des deux cas particuliers décrits ci-dessus et, par suite, mailler un tel domaine peut se révéler délicat et/ou coûteux.

## 4 Méthode directe et méthode basée sur Delaunay

La méthode directe, telle que vue en deux dimensions, ne s'applique pas dans le cas d'un polyèdre arbitraire (*i.e.*, non convexe) comme le montre l'exemple de la Figure 4.

L'extension de la seconde méthode, triangulation de Delaunay et généralisation de l'opérateur de bascule d'arêtes a été étudiée dans de (pas si) nombreuses références, par exemple [8]. L'idée est de construire la triangulation d'une boîte englobante en insérant par un algorithme de triangulation de Delaunay les 8 points de cette boîte et les points de l'ensemble  $S_i^j$ . Ceci fait, on a une triangulation de la boîte introduite dans laquelle certaines des faces du polyèdre donné n'existent pas (n'ont pas été formées bien que leurs sommets soient des sommets de la triangulation actuelle). Des bascules de faces (entre deux tétraèdres adjacents) et des bascules d'arêtes généralisées (dans le polyèdre formé des tétraèdres partageant une telle arête) couplées, le cas échéant, avec la création de points de Steiner (voir, ci-dessus, l'exemple du prisme) permettent de régénérer les faces manquantes. Ces faces étant présentes dans la triangulation résultante de la boîte introduite, il est facile de classer les tétraèdres de cette triangulation et d'éliminer ceux qui ne font pas partie du polyèdre initial.

Dans [3], on a montré que, en théorie et abstraction faite des problèmes numériques, l'algorithme esquissé ci-dessus donne une solution. En pratique, une telle solution existe dans la plupart des cas concrets. Il est cependant facile de construire des exemples pour lesquels l'algorithme numérique (traduction sur ordinateur de l'algorithme théorique) ne conduit pas à la recréation de toutes les faces manquantes, rendant ainsi impossible la définition correcte du polyèdre cherché. Notons que de tels cas correspondent à des situations où la frontière du polyèdre est maillée de manière assez grossière (choc de taille violent entre mailles géométriquement voisines, l'effet "porc-épic", propre aux méthodes de type Delaunay, effet bien connu).

## 5 Une méthode constructive montrant l'existence d'une solution

Dans cette section, on propose une méthode, d'apparence simple, qui permet de traiter tous les cas, y compris ceux mentionnés ci-dessus. La méthode de construction proposée comprend trois étapes :

- 1. la construction d'une triangulation de Delaunay s'appuyant sur les points de la frontière du polyèdre,
- 2. la recherche des faces (de la surface initiale) manquantes dans cette triangulation, la construction des points intersections de ces faces avec les faces courantes et l'insertion de ces points d'intersection via un processus local,
- 3. la suppression des points ajoutés ci-dessus afin de retrouver le maillage initial du bord du polyèdre.

Ces trois étapes font l'objet des sections qui suivent.

### 5.1 Triangulation de Delaunay

Les points du contour (sommets des triangles de la surface du polyèdre) sont insérés, un à un, par un algorithme de triangulation de Delaunay. Pour simplifier, on construit en premier une boîte englobant tous les points et c'est cette boîte (convexe) qui est triangulée. La triangulation obtenue ne contient pas, en général, comme face d'éléments, tous les triangles initiaux. Par suite, il n'est pas possible d'extraire du maillage de la boîte un maillage du polyèdre donné.

### 5.2 Partition des faces frontières du polyèdre

Une face de donnée manque car il existe une ou plusieurs arêtes (faces) du maillage courant qui la coupent. On va alors découper ces arêtes (faces) en introduisant les points d'intersection trouvés, [3]. On traite en premier, une à une, les arêtes manquantes puis on considérera, une à une, les faces manquantes. Une arête de la donnée manque car :

- elle est coupée par des faces du maillage courant,
- elle est coupée par des arêtes du maillage courant.

En introduisant les points d'intersection de l'arête cherchée avec les faces du maillage, on modifie localement le maillage en découpant les deux tétraèdres partageant la face intersectante en six tétraèdres. De même, en introduisant les points d'intersection de l'arête cherchée avec les arêtes du maillage, on modifie localement le maillage en découpant les tétraèdres partageant l'arête intersectante en tétraèdres. Ceci revient à casser la coquille correspondante (l'ensemble des tétraèdres enroulés autour de cette arête) en deux sous-coquilles. Répété pour toutes les arêtes manquantes, ce processus assure que ces arêtes existent maintenant dans le maillage courant sous la forme d'une partition.

On examine alors si les faces induites par cette partition forment localement une partition des faces initiales correspondantes. Il reste alors, en général, des cas où il manque un "morceau" de la face initiale (si on regarde face par face). Ceci est lié au fait qu'il existe une ou plusieurs arêtes du maillage courant qui coupent l'intérieur de la face initiale contrainte. Comme ci-dessus, on introduit les points d'intersection entre ces arêtes et l'intérieur du polygone correspondant au bord de la face initiale. Ceci revient simplement à casser les coquilles correspondantes en deux. Après traitement de toutes les faces initiales, on obtient ainsi un maillage dans lequel toutes les faces initiales existent soit inchangées, soit sous la forme d'une partition. Par suite, le domaine est maillé (après avoir éliminé les tétraèdres extérieurs).

### 5.3 Contrainte des faces frontières du polyèdre

Dans l'étape précédente, on a construit un maillage du domaine mais, ce faisant, on a ajouté des points sur les faces (arêtes) initiales du maillage de surface donné. On va montrer que l'on peut supprimer ces points soit en les *supprimant* du maillage soit en les *enlevant* de la peau du domaine (c'est-à-dire en les bougeant). Ceci assurera l'existence d'un maillage contenant les faces initiales (et non plus, seulement, une partition de celles-ci). Pour simplifier et sans perte de généralité, on suppose que les faces données séparent le domaine à mailler de l'extérieur (ce qui revient à dire que le polyèdre à mailler n'a qu'une seule composante connexe).

**Suppression d'un point d'une face.** Soit  $P$  un point introduit sur une face  $F$  donnée initialement et soit  $\mathcal{B}_P$  la boule de  $P$  (l'ensemble des tétraèdres ayant  $P$  comme sommet). Comme la face  $F$  existe partitionnée, il existe dans la boule  $\mathcal{B}_P$

un ensemble de tétraèdres,  $\mathcal{B}_P^{in}$ , entièrement contenue dans le demi-espace contenant le domaine qui, de fait, est l'intersection de  $\mathcal{B}_P$  avec ce demi-espace. Cette "demi-boule"<sup>3</sup> a comme faces externes :

- i) les faces formant la partition de  $F$  qui constitue un polygone quelconque dans le plan de  $F$ ,
- ii) les faces hors les précédentes qui sont internes au domaine.

Comme cette demi-boule existe, le point  $P$  est visible de toutes les faces de ce dernier type. Il existe donc un polyèdre de volume strictement positif contenant  $P$  constituant le noyau de visibilité des faces de type ii). Par conséquent, on peut bouger  $P$  en n'importe quelle position inclus dans ce noyau. Ce point est alors tel que :

- les faces de type ii) sont visibles de  $P$ ,
- le point  $P$  voit également le plan de  $F$ . Comme le polygone défini ci-dessus est triangulable en triangles, le point  $P$  est visible de tous ces triangles.

Il en résulte que la demi-boule traitée a été remplacée par une boule valide. En conclusion, on a enlevé un point de la partition de  $F$ , itérant le raisonnement, on peut supprimer, un à un, tous les sommets introduits dans cette partition.

**Suppression d'un point d'une arête.** Il reste à enlever les points du bord de cette partition, qui sont les points que l'on a ajouté sur une arête initiale. Le principe de la méthode est le même. La différence réside dans le fait que l'arête initiale est partagée par deux faces initiales,  $F_1$  et  $F_2$ , qui peuvent ne pas être coplanaires. On se restreint à ce cas, une arête est partagée par deux faces. Les autres cas, une arête n'appartient qu'à une face (face flottante), ou appartient à plus de deux faces, seront discutés dans la Partie 2 de ce papier, [2]. Sous cette hypothèse, on peut comme ci-dessus trouver une demi-boule,  $\mathcal{B}_P^{in}$ , entièrement contenue dans le demi-espace contenant le domaine. Cette boule a comme faces externes :

- i) les faces formant la partition de  $F_1$  qui constitue un polygone quelconque dans le plan de  $F_1$ ,
- ii) les faces formant la partition de  $F_2$  qui constitue un polygone quelconque dans le plan de  $F_2$ ,
- iii) les faces hors les précédentes qui sont dans le domaine.

---

3. Que nous appelons ainsi par commodité bien que ce ne soit pas une boule au sens de la définition exacte de cette entité.

Comme cette demi-boule existe, le point  $P$  est visible de toutes les faces de ce dernier type. Il existe donc un polyèdre de volume strictement positif autour de  $P$ . Par conséquent, on peut bouger  $P$  en n'importe quelle position inclus dans ce noyau. Ce point est tel que :

- les faces de type iii) sont visibles de  $P$ ,
- le point  $P$  voit également le plan de  $F_1$  et celui de  $F_2$ . Comme les deux polygones définis ci-dessus sont triangulables en triangles, le point  $P$  est visible de tous ces triangles.

On a donc construit une boule valide pour le point  $P$  ainsi bougé. En conclusion, on a enlevé un point du bord de la partition de  $F_1$  et  $F_2$ . Itérant le raisonnement, on peut supprimer, un à un, tous les sommets introduits dans cette partition d'arête.

**Conclusion.** En appliquant les deux méthodes ci-dessus, on a montré qu'il était possible de supprimer tous les points introduits en les bougeant vers l'intérieur du domaine. Le maillage final contient donc des points internes mais, surtout, contient les faces initiales. D'un point de vue pratique, remarquons que certains points ajoutés peuvent disparaître purement et simplement suite à des fusions judicieuses de points.

**Remarque.** Notons que les points qu'il n'a pas été possible de supprimer et qui, de ce fait, on été "poussés" vers l'intérieur du domaine ne sont autres que des points de Steiner "potentiels" (nécessaires à l'obtention d'un maillage par le procédé appliqué). Pour finir, notons également que, parmi ces points, ceux "poussés" vers l'extérieur du domaine seront éliminés naturellement lors de la phase de définition de ce dernier.

## 6 Complexité

### 6.1 Complexité en deux dimensions

Pour analyser la complexité de cette méthode, nous revenons au cas de la deux dimensions avant de discuter le cas tridimensionnel. Notons, en préliminaire, que la méthode par partition en deux dimensions n'a pas d'intérêt pratique (puisque des

méthodes plus directes donnent le résultat cherché), elle ne donne que des indications qui seront utiles pour la trois dimensions.

Pour analyser la complexité de la méthode par partition-élimination, on va regarder le pire des cas. La question est alors de définir un tel cas. Il s'agit en effet de trouver un cas de cette nature qui soit effectivement réalisable. L'intuition dicte que ce cas est du genre "toutes les arêtes courantes sont coupées par toutes les contraintes". Cependant, un tel cas n'est pas réalisable. En effet, si une contrainte (par exemple la première) coupe toutes les arêtes courantes, il est intuitif que ceci ne peut pas être vrai pour l'ensemble des autres contraintes !

**Le pire des cas.** On peut construire un exemple relativement réaliste, Figure 6, qui est tel qu'il y a  $n$  arêtes courantes et  $m$  arêtes contraintes manquantes, chacune coupant les  $n$  arêtes actuelles. Pour avoir une idée d'un tel cas, on prend un rectangle (plus long que large) et on distribue (de manière équidistante, par exemple) des points sur ses côtés en nombre égal sur chacun. En ajustant la largeur du rectangle, il est clair que les arêtes de Delaunay formées joignent les points du "haut" à ceux du "bas". Supposant que les arêtes cherchées (les  $m$  manquantes) soient dans l'autre sens, alors les  $n$  arêtes formées coupent toutes les arêtes cherchées et on a ainsi un exemple (parmi d'autres) d'un des pire des cas.

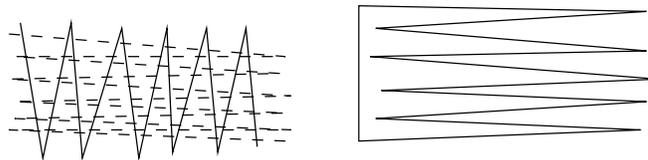


FIG. 6 – Un exemple raisonnable du pire des cas en deux dimensions. Principe synthétique (à gauche), les arêtes de Delaunay sont en traits pleins, les arêtes désirées sont en traits pointillés. Un cas particulier (à droite) présentant cette particularité lorsque l'on met un grand nombre de points sur les lignes supérieure et inférieure du bord de ce polygone.

**Analyse du processus de partition.** Ici, on va couper les arêtes pour reconstruire les partition cherchées, *i.e.*, on ne supprime pas les points ajoutés. On considère

comme première arête manquante, l'arête du "haut". Sur cette arête, on rajoute  $n$  points. Cette arête possède donc  $n_0 = n$  points ajoutés. À partir de ces nouveaux points, on ajoute au pire (cas d'un éventail, sinon la moitié suffit)  $n$  arêtes nouvelles qui coupent les autres arêtes manquantes (celles qui sont "au dessous"). Ainsi, sur la seconde arête manquante, on a  $n_1 = n_0 + n$  points ajoutés. Passant à l'arête suivante, on ajoute  $n_2 = n_1 + \frac{n}{2}$  points et ainsi de suite. Pour le calcul de complexité, on va prendre  $n_2 = n_1 + n$ , qui est du même ordre, et ainsi de suite. Le nombre de points ajoutés est donc :

$$n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}.$$

Soit encore :

$$n + n + n + n + 2n + \dots + n + (m - 1)n$$

donc de l'ordre de :

$$mn + \frac{m(m-1)n}{2} = \mathcal{O}(m^2 n).$$

Pour  $n$  et  $m$  du même ordre, on trouve une complexité de l'ordre de  $n^3$ .

**Analyse du processus de partition-élimination.** Ici, on va couper les arêtes pour reconstruire les partition cherchées, puis, une partition étant effectuée, on supprime les points ajoutés. On considère comme première arête manquante, l'arête du "haut". Sur cette arête, on rajoute  $n$  points. Cette arête possède donc  $n_0 = n$  points ajoutés et réalise la partition cherchée. Par fusion de points (suppression d'arêtes), on supprime les  $n$  points ajoutés. On considère alors la seconde contrainte. Il est facile de voir que son traitement est identique, on ajoute donc au plus  $n$  points. Une fois cette seconde contrainte traitée, on élimine de la même manière ces, au plus,  $n$  points. On traite ainsi les  $m$  segments initiaux.

En terme de points ajoutés (temporairement), la complexité est de l'ordre de  $mn$ , donc de  $n^2$  si  $m = n$ . La complexité est donc en  $n^2$ , en nombre de points, valeur à laquelle, il faut ajouter le coût de l'élimination de ces points. Si on suppose ce coût du même ordre, (*i.e.*,  $n$  opérations pour enlever  $n$  points), l'algorithme reste globalement avec une complexité de l'ordre de  $n^2$ .

**Analyse d'une méthode de type diviser pour regner.** Par un choix judicieux de la première arête manquante traitée, on sépare le problème en deux. Pour la première arête manquante, on rajoute  $n$  points donc  $n$  arêtes coupantes nouvelles, mais,

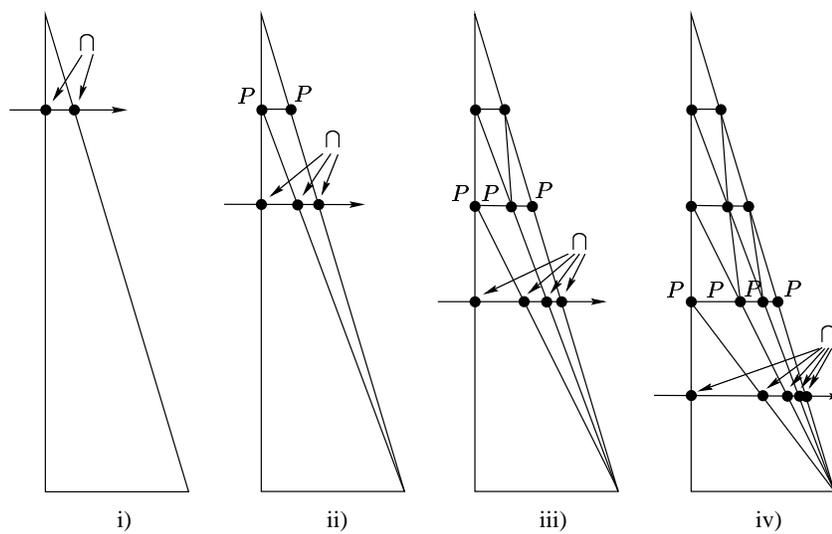


FIG. 7 – Analyse de la complexité en deux dimensions. De gauche à droite, i) un triangle de Delaunay et son intersection avec la première arête manquante, ii) l'introduction par remaillage local des deux points d'intersection  $P$  et la création de nouvelles intersections avec l'arête manquante suivante, iii) et iv), la propagation du phénomène, i.e., la création de nouvelles intersections à chaque remaillage local.

comme ci-dessus, la moitié sont dans le demi-plan “au dessus” et l’autre moitié dans le demi-plan “au-dessous”. Il est clair qu’itérer ce procédé en traitant, à chaque itération, l’arête manquante séparant le sous-problème local en deux conduit à une complexité du même ordre que ci-dessus avec une constante meilleure. Toutefois, en pratique, le choix de l’arête pertinente n’est pas trivial (cf. plus bas un moyen de tenter de se rapprocher de cette méthode en évitant, en moyenne, de se trouver dans le cas des méthodes précédentes).

**Conséquences sur une éventuelle implémentation.** Nous discutons ici des résultats ci-dessus en pensant à la trois dimensions (puisque, comme indiqué auparavant, en deux dimensions, la méthode par partition n’a pas de légitimité pratique).

Le but est donc de voir comment on pourrait implémenter la méthode par partition. Pour cela, plusieurs idées peuvent être avancées :

- à l’évidence, minimiser la valeur de  $m$  et ainsi, même dans le pire des cas, minimiser le coût. Pour ce faire, on ne se lance dans la méthode par partition qu’après avoir utilisé d’autres méthodes de forçage d’arêtes de coût moins élevé.
- éviter le pire des cas, c’est-à-dire, la création, en cascade, de points sur toutes les autres (ou la moitié des) arêtes manquantes. Deux méthodes peuvent alors être mise en avant :
  - traiter les arêtes manquantes en aléatoire,
  - supprimer un maximum des points ajoutés sur une arête, après son traitement pour minimiser cet effet de cascade (supprimer un point, par fusion de points et, donc, suppression d’arêtes) empêche la création d’une nouvelle arête intersectant potentiellement les arêtes non déjà traitées.

Ainsi, ces quelques détails d’implémentation doivent, dans la plupart des cas, permettre de ramener la méthode par partition à un coût très raisonnable. Par suite, ces idées seront appliquées, dans leur extension naturelle, au cas de la trois dimensions.

## 6.2 Complexité en trois dimensions

Comme en deux dimensions, le pire des cas n’est pas évident à définir. On cherche donc un cas de complexité (*a priori*) élevée qui soit, néanmoins, réalisable.

**Le pire des cas.** Dans cet esprit, on peut construire, comme en deux dimensions, un exemple qui est tel qu'il y a  $n$  faces courantes et  $n$  faces manquantes (c'est-à-dire le même ordre de grandeur,  $m = n$ ). Cet exemple correspond à un cas représentatif relativement réaliste du pire des cas. Pour avoir une idée d'un tel cas, on prend un parallélépipède rectangle (plus long et large que haut) et on distribue (de manière uniforme, par exemple) des points sur ses faces inférieure et supérieure en nombre égal sur chacune, Figure 8. On met également des points sur deux faces latérales opposées formant ainsi, dans des plans horizontaux, deux faces triangulaires. On peut, de la sorte, définir un certain nombre de telles faces. Alors, en ajustant la hauteur du domaine, il est clair que les faces de Delaunay formées joignent les points du "haut" à ceux du "bas". Supposant, comme cela a été fait par construction, que les faces cherchées soient dans l'autre sens (dans le plan horizontal), alors les faces formées coupent toutes les faces cherchées et on a ainsi un exemple (parmi d'autres) du cas de la nature cherchée.

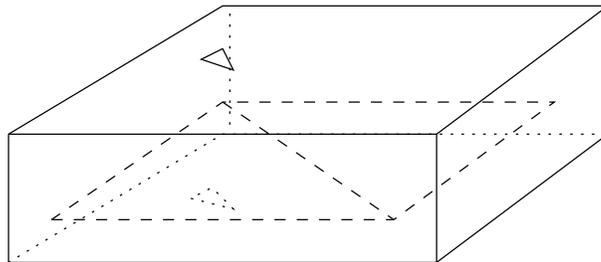


FIG. 8 – Un exemple particulier du cas le pire en trois dimensions. On met un grand nombre de points sur les faces supérieure et inférieure de ce parallélépipède (on ne montre que deux des petites faces triangulaires ainsi définies) et on impose des faces dans des plans parallèles à ces deux faces (on montre l'un de ces plans et les deux triangles correspondants).

**Analyse rapide.** Pour fixer les idées, on regarde le cas où le maillage de la face supérieure du domaine (resp. inférieure) correspond à une grille uniforme ayant  $n + 1$  points dans une direction et  $n + 1$  points dans l'autre. On a ainsi  $2n^2$  petits triangles sur la face du dessus (resp. du dessous). Comme les connexions sont faites entre ces triangles, le nombre de faces traversant de part en part le domaine est de l'ordre de  $n^2$ . Il y a donc de l'ordre de  $n^2$  intersections avec les deux premières

faces horizontales rencontrées (celles du plan le plus en haut par exemple) et il y a autant d'intersections avec les autres faces horizontales des plans horizontaux successifs (que l'on peut choisir au nombre de  $m = n$ ). Si on introduit sur le premier plan ces intersections, on construit un sous-maillage des deux faces incriminées qui est du même ordre, en nombre de triangles, que celui du haut du domaine. Ce faisant, on réintroduit de nouvelles intersections avec les faces des plans successifs restants. Par suite, on retrouve comme en deux dimensions, pour des intersections d'arêtes, un processus, qui à chaque étape, rajoute des intersections sur un nombre de faces qui augmente à chaque traitement. Le résultat est donc, au mieux et sans essayer d'affiner, aussi mauvais qu'en deux dimensions. Rien que pour les arêtes (*i.e.*, on n'essaye que de forcer les partitions d'arêtes), on est en  $n^4$ ,  $n^3$  par plan, par exemple  $y = \text{constante}$ , multiplié par  $n$ , le nombre de plans). Si, les arêtes étant partitionnées comme indiqué, les faces initiales sont partitionnées de manière adéquate, on reste en  $n^4$ . Dans le cas où il manque des sous-faces (*i.e.*, il existe encore des arêtes du maillage courant qui coupent les sous-faces construites), alors le découpage se poursuit et la complexité augmente.

**En pratique.** On sait d'après l'étude sommaire indiquée ci-dessus que le cas le pire a une complexité mauvaise. Néanmoins, nous avons implémenté cette méthode en partant de l'hypothèse que le cas le pire (ou similaire) ne nous intéressait pas et que les cas concrets, même très compliqués, ne conduisaient pas à un cas de cette nature. Les résultats confirment cette analyse et montrent que les maillages construits le sont en des temps raisonnables. Pour illustrer cette conclusion, nous allons montrer un exemple représentatif des situations concrètes qui nous ont été proposées (d'autres exemples seront donnés dans la Partie 2 de ce papier, [2]).

**Remarque.** L'élimination des points ajoutés lors des partitions est, d'une part, nettement plus délicate qu'en deux dimensions (fusion de points pour la suppression d'arêtes) et, d'autre part, pas toujours réalisable (les points de Steiner). Néanmoins, éliminer les points au vol permet, lorsque cela est possible, d'éviter l'effet de cascade déjà mentionné et la complexité n'est pas dégradée autant que le cas le pire semble l'indiquer.

## 7 Un exemple d'application

L'exemple choisi, Figure 9, est un cas typique où la proximité de faces de taille disparate complique la tâche d'un mailleur classique (et/ou le prend en défaut). Le domaine, un terrain, est formé de six faces, les faces latérales sont verticales, la face du dessous (à droite) est plane et maillée à l'aide de deux triangles seulement. La face supérieure (à gauche), le terrain, est maillée finement. Cet exemple permet d'illustrer la façon dont procède la méthode par partition discutée dans ce papier.

La Figure 10 montre, à gauche, le maillage construit sur les deux triangles de la face inférieure, une fois les points d'intersection introduits par modification locale. Il faut noter, dans cet exemple, que ces nombreuses intersections sont liées au fait qu'il y a des points (artificiels) situés dans le demi-espace limité par les deux faces du dessous autre que celui contenant les faces du dessus du domaine. Cette même figure, à droite, montre que ce maillage peut être optimisé et décimé afin de supprimer certains des points ajoutés lors de la partition. Tous les points ajoutés n'ont pas, à ce stade, été supprimés (ou poussés hors de la peau), car il s'agit ici d'une phase rapide d'optimisation (décimation) n'utilisant que des opérateurs locaux standards (bouges de points et fusions d'arêtes répétés).

Pour obtenir le résultat final, d'autres opérateurs plus puissants (fusion de plusieurs arêtes en simultané, en particulier) ont été nécessaires permettant alors de retrouver les deux triangles initiaux. Ce maillage final est illustré sur la Figure 11. À gauche, de fait, on retrouve le même dessin que sur la partie droite de la Figure 9, à droite on montre une coupe du maillage final où l'on voit la nature des tétraèdres construits.

Le maillage de la surface du domaine contient 6665 points et 13326 triangles. Le maillage volumique final comprend 9689 points (dont seulement 22 points de Steiner, les autres points internes ayant été générés normalement lors du processus de maillage) et 35454 tétraèdres. Il a été construit en 36 secondes (HP PA8600-552Mhz). Le nombre de points de Steiner est donc réduit à 22. Il s'agit des points que l'on a été amené à introduire dans le processus de partition et qui n'ont pas pu être éliminés (ils n'ont été que bougés). Notons que ce maillage n'est en aucun cas un maillage permettant d'effectuer un calcul par éléments finis (le but des mailleurs classiques, en général), sa qualité (celle de ses éléments) est, à l'évidence inappropriée. Par suite, ce type de construction a d'autres buts.

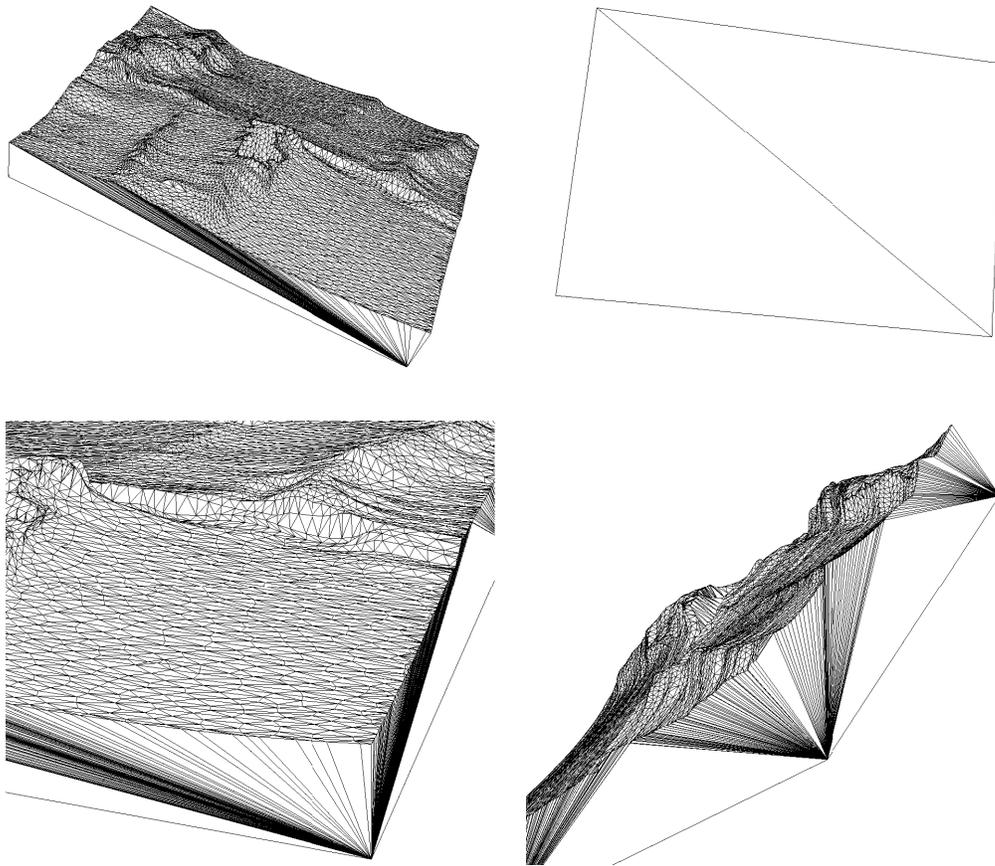


FIG. 9 – La face du haut de ce domaine est maillée finement (en haut, à gauche) tandis que sa face inférieure n'est recouverte qu'avec deux triangles (en haut, à droite). Les faces latérales présentent un faisceau d'arêtes formant des angles très petits (en bas). Ces quatre vues du maillage de la peau du polyèdre considéré montrent jusqu'à quel point un objet mal discrétisé est néanmoins traité avec succès par la méthode.

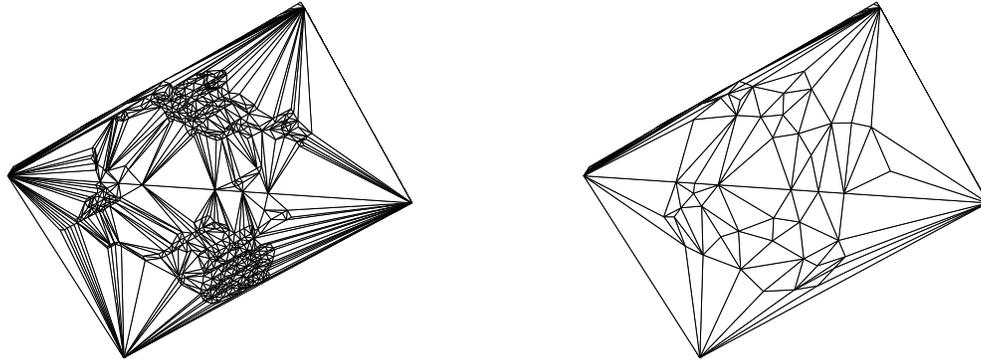


FIG. 10 – Les deux triangles du bas une fois leur partition effectuée (à gauche) et après une première optimisation (à droite) rapide n'ayant pas permis de supprimer tous les points introduits. Poursuivant la méthode de suppression de ces points, on va obtenir le résultat escompté (figure suivante).

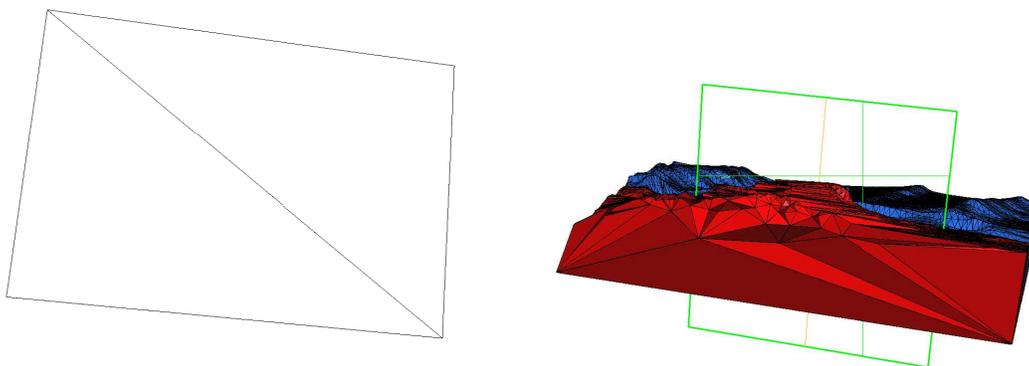


FIG. 11 – Les deux triangles du bas (à gauche) ont été retrouvés. Une coupe du maillage (à droite) permettant de voir les tétraèdres construits.

## 8 Conclusion

Nous avons montré qu'il était possible de mailler un polyèdre arbitraire défini par un maillage de sa frontière en assurant que les faces de cette frontière étaient préservées.

Nous avons, pour cette méthode de construction du maillage d'un polyèdre arbitraire basée sur une partition des contraintes non satisfaites suivie de l'élimination de cette partition, un exemple parfait d'une méthode dont la complexité est telle qu'envisager son implémentation (et son utilisation) est *a priori* illusoire. Néanmoins, cette même implémentation, une fois réalisée, s'est montrée efficace pour traiter des configurations délicates en des temps tout à fait raisonnables. Ainsi, outre les aspects théoriques directs (existence et complexité) et indirects (construction automatique de points de Steiner), une application pratique est possible et se trouve être appropriée pour traiter des problèmes de construction de maillage que les méthodes plus classiques ne sont pas à même de résoudre. D'autres applications potentielles, plus ou moins directes, seront décrites dans la Partie 2 de ce papier, [2], qui décrit la méthode de construction esquissée ici, indique les problèmes numériques rencontrés et présente de nombreux exemples.

Par ailleurs, d'un point de vue abstrait (et vraisemblablement sans applications pratiques, à ce jour), nous avons établi que cette méthode de forçage par partition-élimination s'étend aux polyèdres de dimension quelconque.

## Références

- [1] J.D. BOISSONNAT ET M. YVINEC, *Géométrie Algorithmique*, Ediscience, Paris, 1995. Also as *Algorithmic Geometry*, Cambridge University Press, 1997.
- [2] P.L. GEORGE, H. BOROUCAKI ET E. SALTEL, Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire. Partie 2 : Construction et exemples, *RR INRIA*, n° 4398, 2002.
- [3] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE AND S.H. LO, Boundary enforcement by facet splits in Delaunay based mesh generation, in *7th Inter. Conf. on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, Whistler, BC, Canada, sept., 203-221, 2000.
- [4] B. CHAZELLE, Convex partitions of polyhedra: A lower bound and worst-case optimal algorithm, *SIAM J. Comput.*, **13**(3), 488-507, 1984.
- [5] B. CHAZELLE AND L. PALIOS, Triangulating a nonconvex polytope, *Discrete Comput. Geom.*, **5**, 505-526, 1990.
- [6] B. CHAZELLE, Triangulating a simple polygon in linear time, *Discrete Comput. Geom.*, **6**, 485-524, 1991.
- [7] C. HAZLEWOOD, Approximating constrained tetrahedrizations, *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, **10**, 67-87, 1993.
- [8] P.L. GEORGE, F. HECHT AND E. SALTEL, Automatic mesh generator with specified boundary, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, **92**, 269-288, 1991.
- [9] A. LIU AND M. BAIDA How far flipping can go towards 3D conforming/constrained triangulation, in proc. 9<sup>th</sup> International Meshing Roundtable, 307-315, 2000.
- [10] M. MURPHY, D.M. MOUNT AND C.W. GABLE, A point-placement strategy for conforming Delaunay tetrahedralization, in proc. 11<sup>th</sup> ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 67-74, 2000.
- [11] PH. P. PEBAY Delaunay-admissibilité a priori en dimensions 2 et 3, *Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie*, Paris, 2000.
- [12] F.P. PREPARATA AND M.I. SHAMOS, Computational geometry, an introduction, Springer-Verlag, 1985.
- [13] J. RUPPERT AND R. SEIDEL, On the difficulty of triangulating three-dimensional nonconvex polyhedra, *Discrete Comput. Geom.*, **7**, 227-253, 1992.
- [14] E. SCHÖNHARDT, Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern, *Mathematisches Annalen*, **98**, 309-312, 1928.
- [15] N.P. WEATHERILL AND O. HASSAN, Efficient three-dimensional Delaunay triangulation with automatic point creation and imposed boundary constraints, *Int. j. numer. methods eng.*, **37**, 2005-2039, 1994.



---

Unité de recherche INRIA Rocquencourt  
Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399