



**HAL**  
open science

# Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire : Partie 2 : Construction et exemples

Paul-Louis George, Houman Borouchaki, Eric Saltel

► **To cite this version:**

Paul-Louis George, Houman Borouchaki, Eric Saltel. Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire : Partie 2 : Construction et exemples. [Rapport de recherche] RR-4398, INRIA. 2002. inria-00072190

**HAL Id: inria-00072190**

**<https://inria.hal.science/inria-00072190>**

Submitted on 23 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

***Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire.  
Partie 2 : Construction et exemples***

P.L. George, H. Borouchaki et E. Saltel

**N° 4398**

13 mars 2002

THÈME 4



*R*  
***rapport  
de recherche***





## **Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire. Partie 2 : Construction et exemples**

P.L. George, H. Borouchaki\* et E. Saltel

Thème 4 — Simulation et optimisation  
de systèmes complexes  
Projet Gamma

Rapport de recherche n° 4398 — 13 mars 2002 — 35 pages

### **Résumé :**

La Partie 1 de ce papier a décrit une méthode de construction permettant de mailler en simplexes un polyèdre arbitraire. L'existence et le coût de la construction proposée ont été analysés. Dans cette seconde partie, la méthode de construction est décrite en détail. Les différentes techniques utilisées sont présentées. Les problèmes numériques sont mentionnés et quelques exemples significatifs (académiques ou concrets) d'application sont montrés.

**Mots-clés :** Maillage d'un polyèdre, Triangulation, Delaunay, Partition de Faces

\* UTT,GSM-LASMIS (et INRIA, Projet Gamma),  
Université de Technologie de Troyes,  
BP 2060, 10010 Troyes Cedex, France.  
email: houman.borouchaki@utt.fr

# **Simplicial mesh of an arbitrary polyhedron.**

## **Part 2 : Construction and application examples**

### **Abstract:**

Part 1 of this paper described a method to constructing a simplicial mesh of any polyhedron. Issues related to the existence of such a mesh were discussed and the corresponding complexity was analysed. In this part, the construction method is described with a special attention paid to the various techniques involved in the method. Numerical problems are also discussed and a number of academic and concrete application examples are given.

**Key-words:** Mesh of a polyhedron, Triangulation, Delaunay, Facet Partitioning

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Description de la méthode de construction</b>	<b>5</b>
2.1	Mailleur classique . . . . .	6
2.2	Partition des arêtes à contraindre . . . . .	6
2.3	Partition des faces à contraindre . . . . .	7
2.4	Suppression des points ajoutés lors des partitions . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Détection et calcul des intersections</b>	<b>8</b>
3.1	Intersection arête-arête ou arête-face . . . . .	8
3.2	Intersection face-arête ou face-face . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Opérateurs d'insertion d'un point</b>	<b>10</b>
4.1	Insertion locale . . . . .	10
4.1.1	Insertion sur une face . . . . .	10
4.1.2	Insertion sur une arête . . . . .	11
4.2	Insertion globale . . . . .	11
4.2.1	Insertion de Delaunay . . . . .	11
4.2.2	Insertion de Delaunay contrainte . . . . .	12
4.2.3	Insertion généralisée . . . . .	12
4.3	Problèmes numériques . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Opérateurs de suppression d'un point</b>	<b>14</b>
5.1	Suppression d'arêtes par fusion de points . . . . .	15
5.2	Suppression par insertion . . . . .	15
5.3	Suppression des points et points de Steiner . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Méthode de construction du maillage des polygones</b>	<b>20</b>
6.1	Polygone lié à un point d'une face . . . . .	20
6.2	Polygone lié à un point d'une arête . . . . .	20
6.3	Description de la méthode de suppression d'un point d'une face . . . . .	21
6.4	Description de la méthode de suppression d'un point d'une arête . . . . .	22

<b>7</b>	<b>Tétraèdres de volume négatif</b>	<b>22</b>
7.1	Déplacement d'un point (libre) . . . . .	23
7.2	Opérateurs topologiques . . . . .	24
7.3	Insertion de points . . . . .	25
<b>8</b>	<b>Méthode de construction, point de vue global</b>	<b>25</b>
<b>9</b>	<b>Exemples</b>	<b>26</b>
<b>10</b>	<b>Conclusions</b>	<b>33</b>

## 1 Introduction

On se donne un polyèdre arbitraire défini par un maillage en triangles de sa surface. L'existence d'un maillage simplicial de ce polyèdre tel que chaque triangle de sa peau se retrouve comme face d'un de ses tétraèdres (maillage contraint) a été établie dans [1]. La preuve d'existence résulte du fait que l'on a décrit une méthode de construction du maillage cherché. Ce papier revient sur cette méthode de construction du point de vue pratique.

## 2 Description de la méthode de construction

La méthode de construction est, au moins dans son principe, relativement simple. En particulier, en deux dimensions, elle est tout à fait facile tant à comprendre qu'à programmer. Elle comprend plusieurs étapes. En premier lieu, on construit un maillage s'appuyant sur tous les points de la donnée (les points du maillage de la surface du polyèdre). Cette construction utilise (dans notre approche) une méthode de type Delaunay. À l'issue de cette première étape, on dispose, i) soit d'un maillage qui satisfait le critère demandé (toutes les faces de la surface se retrouvent en tant que face de tétraèdres) ou, ii) d'un maillage dans lequel certaines contraintes (arêtes ou faces initiales non formées) ne se retrouvent pas comme arête ou face de tétraèdres.

Ainsi, le cas qui nous intéresse ici est celui où il manque des arêtes et des faces. Une arête manquante est un segment qui est intersecté par des arêtes et/ou des faces des tétraèdres du maillage courant. Ces intersections sont calculées et les points correspondants sont insérés dans le maillage courant de telle sorte que l'on retrouve toutes les arêtes initiales sous la forme d'une partition. Si à ce stade, les faces initiales ne se retrouvent pas dans le maillage courant (telles quelle ou sous la forme d'une partition), on applique le même principe aux faces manquantes. Une face manquante est un triangle qui est intersecté par des arêtes et/ou des faces du maillage courant. Ces intersections sont calculées et les points correspondants sont insérés dans le maillage courant. À l'issue de ces insertions, on a construit un maillage qui contient exactement les faces initiales, éventuellement découpées.



La contrainte à respecter nous a amené, en général, à ajouter des points sur la surface initiale. Une troisième étape est alors nécessaire qui permet de supprimer ces points. De la sorte, on retrouve la contrainte initiale dans le maillage final.

En conclusion, on a trois étapes, une étape “classique”, une étape de partition et une étape de suppression. L’objet des sections suivantes est de décrire ces différentes étapes qui, une fois réalisées, permettent de retrouver la situation d’un problème de construction de maillage standard.

## 2.1 Maillage classique

La partie classique de la méthode suit la méthode automatique de construction de maillage décrite dans [5] et [6]. Il s’agit d’une méthode de maillage basée sur l’utilisation d’un algorithme de triangulation de type Delaunay. Les points initiaux sont insérés, un à un, permettant de construire une triangulation. Cette triangulation ne contient pas, en général, les contraintes initiales. Par suite, un algorithme de forçage de ces contraintes est appliqué. Il consiste, par un jeu de bascules de faces, de bascules généralisées d’arêtes et d’ajouts éventuels de points (dits de Steiner) de retrouver, “intactes”, les arêtes et faces de la contrainte.

Dans le cas qui nous intéresse, on suppose que la méthode précédente ne parvient pas au résultat cherché. Autrement dit, il n’a pas été possible de régénérer toutes les arêtes et/ou faces initiales. La seconde étape de la méthode consiste alors à traiter ces éléments manquants par le biais d’une partition. Pour simplifier la construction, on considère d’abord les arêtes manquantes, ensuite, on regardera les faces manquantes, s’il en est.

## 2.2 Partition des arêtes à contraindre

On traite, une à une, les arêtes manquantes. Une arête de la donnée manque car :

- elle est coupée par une ou plusieurs faces du maillage courant,
- elle est coupée par une ou plusieurs arêtes du maillage courant.

En introduisant les points d’intersection du segment correspondant à l’arête cherchée avec les arêtes et faces du maillage courant, on modifie localement ce maillage.

Si l’intersection tombe sur une face, son insertion revient à découper les deux tétraèdres partageant cette face intersectante en six tétraèdres (voir plus bas).

Si l'intersection se fait avec une arête, de même on va introduire ce point en modifiant localement le maillage courant. Ceci se fait en découpant les tétraèdres partageant l'arête intersectante en tétraèdres. On subdivise alors la coquille correspondante (l'ensemble des tétraèdres enroulés autour de cette arête) en deux sous-coquilles (voir plus bas).

L'idée est que chacune de ces étapes élimine une face ou une arête de l'ensemble des faces et arêtes intersectant une contrainte.

Répété pour toutes les arêtes manquantes, ce processus assure que ces arêtes existent maintenant dans le maillage courant sous la forme d'une partition.

### 2.3 Partition des faces à contraindre

On examine si les faces induites par cette partition (d'arêtes) forment localement une partition des faces initiales correspondantes.

On regarde les cas où il manque un "morceau" d'une ou plusieurs faces initiales. Si on traite face par face, une face manque s'il existe une ou plusieurs arêtes du maillage courant qui la coupent (qui coupent le triangle correspondant à cette face manquante). Plus précisément, il existe un polygone qui recouvre le bord de la face initiale ou un contour qui est celui de la face initiale duquel on enlève-ajoute les arêtes voulues des sous-faces ayant été formées lors de la partition des arêtes ci-dessus.

Comme ci-dessus, on introduit les points d'intersection entre ces arêtes et un tel polygone. Ceci revient simplement à casser les coquilles correspondantes en deux. Après traitement de toutes les faces initiales, on obtient ainsi un maillage dans lequel toutes les faces initiales existent soit inchangées, soit sous la forme d'une partition.

### 2.4 Suppression des points ajoutés lors des partitions

Afin de retrouver exactement les faces initiales, il faut supprimer l'ensemble des points qui ont été ajoutés lors des partitions effectuées auparavant. Dans [1], on a montré que certains de (ou tous) ces points pouvaient être supprimés. L'opérateur de base pour supprimer un point est la fusion de points résultant en la suppression d'une arête (voir plus bas) sous contrainte. Cependant d'autres opérateurs plus puissants seront également employés afin de supprimer un maximum de points.

Dans le cas où un point ne peut pas être supprimé, on va le pousser (éventuellement en le dédoublant) de façon à le (les) décoller de la surface initiale qui, de ce fait, sera obtenue à l'issue du processus. Plus bas, on décrit cette méthode en notant que les points ainsi poussés ne sont autres que des points de Steiner.

### 3 Détection et calcul des intersections

Quand une intersection arête-arête, arête-face, face-face ou face-arête existe, il convient, i) de la détecter et, ii) de calculer sa position. En effet, le point correspondant doit être inséré dans le maillage courant donc il faut en connaître la position (et non pas seulement savoir qu'il y a intersection).

#### 3.1 Intersection arête-arête ou arête-face

On considère le segment correspondant à une arête contrainte non formée dans le maillage courant. Soit  $A$  l'une de ses extrémités. On analyse l'ensemble des tétraèdres ayant  $A$  comme sommet (la *boule* de  $A$ ). On regarde si  $AB$  coupe une face ou une arête de l'un de ces tétraèdres. Pour ce faire, on considère la face de l'élément analysé opposée au sommet  $A$ , que l'on désigne par  $(\alpha\beta\gamma)$ . Avec  $A$ ,  $B$  et cette face on peut déterminer 3 tétraèdres virtuels enroulés autour de  $AB$ . L'analyse du signe du volume de ces trois éléments permet de savoir si  $AB$  coupe la face  $(\alpha\beta\gamma)$ .

Dans un tel cas, on calcule, via ces trois volumes, les coordonnées barycentriques du point intersection par rapport à cette face. On en déduit les coordonnées du point d'intersection.

Si  $P$  est ce point (notons le  $P_i$ ,  $i = 1$  au départ), on l'insère immédiatement dans le maillage et on itère le procédé en faisant jouer le rôle de  $A$  par  $P$  (en incrémentant  $i$ ). Ceci se poursuit tant que le point  $B$  n'est pas sommet du tétraèdre analysé. En effet, dans un tel cas, le traitement de l'arête  $AB$  est terminé. Cette arête existe alors sous la forme de la partition suivante :

$$AB = AP_1 \cup P_1P_2 \cup \dots \cup P_nB,$$

où  $n$  est le nombre de tétraèdres intersectés par le segment  $AB$ .

La façon de réaliser l'insertion de ces points  $P_i$ , de manière à former une partie de  $AB$ , est discutée plus bas.

### 3.2 Intersection face-arête ou face-face

L'intersection d'une face manquante avec une arête ou une face courante est plus délicate à trouver. Une fois les arêtes initiales découpées, certaines faces ou parties de faces existent dans le maillage. Il reste deux cas différents qui, toutefois, se traitent de la même manière. Une face initiale n'est pas formée alors que ses trois arêtes (initiales) existent ou une face initiale n'est pas formée tandis que la partition de ses arêtes a induit la formation de tout ou partie des sous-faces la partitionnant.

Dans ce dernier cas (l'autre étant une occurrence particulière de cette situation), on va examiner si la face initiale est déjà recouverte par des sous-faces. Une méthode brutale est de tourner autour des sous-arêtes issues du découpage des trois arêtes de la face initiale en rescençant parmi les faces rencontrées possédant cette arête celles qui font partie de la découpe cherchée. Quand des sous-faces sont trouvées, leurs arêtes sont mises en pile et on tourne autour des arêtes de cette pile tant que cette dernière n'est pas vide. De la sorte, deux cas sont possibles :

- la face initiale est recouverte. Il existe une partition en sous-faces de cette face.
- la face initiale n'est pas recouverte.

Ce dernier cas est celui que nous allons examiner maintenant. En considérant les sous-faces découvertes et en les enlevant de la face initiale, on définit ainsi un polygone bord d'un "trou". Cette pathologie existe car il y a encore une ou plusieurs arêtes qui coupe(nt) ce polygone (pour le plan de la face initiale).

Pour trouver les arêtes ou faces qui coupent ce polygone, on utilise le même principe que ci-dessus. On examine les arêtes bord du polygone. Les coquilles de ces arêtes sont analysées. Pour un élément d'une coquille, on regarde si les arêtes (autres que celles génératrices d'une telle coquille) coupent la face initiale. Dans un tel cas, on met en pile les arêtes coupantes et on examine cette pile tant qu'elle n'est pas vide. À l'issue de cette procédure, on dispose d'un paquet d'arêtes qui ont une intersection avec la face initiale. Les points d'intersection sont calculés puis insérés.

Dans [1], on a montré que l'insertion de toutes ces intersections résultait en la création d'un ensemble de tétraèdres dont les faces contenaient un sous ensemble formant la partition cherchée de la face en cours de traitement.

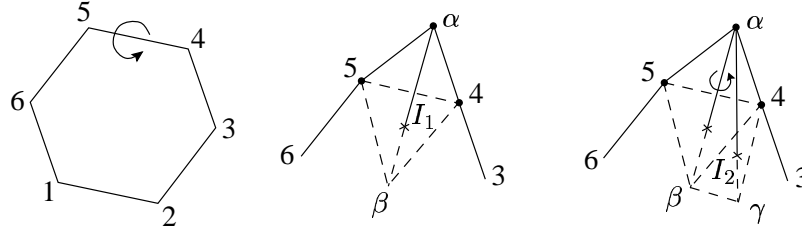


FIG. 1 – Schéma pour la recherche des arêtes qui coupent un polygone via la construction d'une pile. Les arêtes 12, 23, 34, 56 et 61 sont empilées au départ. Lors du traitement de l'arête 45 que l'on dépile, on rencontre le tétraèdre  $45\alpha\beta$  dont l'arête  $\alpha\beta$  coupe le plan de la face initiale au point noté  $I_1$ , cette nouvelle arête est donc mise en pile. Lors du traitement de cette arête (quand on arrive à son rang dans la pile), on découvre un autre élément dont l'arête  $\alpha\gamma$  coupe le plan en  $I_2$ , cette arête est alors mise en pile, etc.

## 4 Opérateurs d'insertion d'un point

Pour insérer un point (ici, un point d'intersection), on dispose de deux méthodes. L'une est purement locale et consiste en une découpe, basée sur un (ou plusieurs) motifs prédéfinis, des éléments affectés par l'insertion. L'autre est globale (bien que d'incidence locale en général) et fait appel à un algorithme de triangulation de Delaunay ou à l'une de ses variantes.

### 4.1 Insertion locale

D'après ce qui précède, l'insertion d'un point se fait soit sur une face, soit sur une arête.

#### 4.1.1 Insertion sur une face

Si  $(\alpha\beta\gamma)$  est la face (du maillage courant) contenant un point à insérer, il existe deux tétraèdres, par exemple  $A\alpha\beta\gamma$  et  $\alpha\beta\gamma B$ , qui partagent cette face. Introduire un point  $P$  sur  $(\alpha\beta\gamma)$  revient à construire les six tétraèdres suivants :

$$\alpha AP\beta, \beta AP\gamma, \gamma AP\alpha, \alpha PB\beta, \beta PB\gamma \text{ et } \gamma PB\alpha.$$

### 4.1.2 Insertion sur une arête

Si  $(\alpha\beta)$  est l'arête (du maillage courant) contenant un point à insérer, il existe des tétraèdres, en nombre quelconque, disons  $n$ , partageant cette arête. Cet ensemble d'éléments enroulés autour de  $(\alpha\beta)$  est appelé *coquille*. Par commodité, cette coquille peut s'écrire :

$$M_i\alpha\beta M_{i+1} \text{ pour } i = 1, n \text{ avec } M_{n+1} = M_1.$$

Insérer un point  $P$  sur  $(\alpha\beta)$  revient alors à construire les tétraèdres suivants :

$$M_i\alpha P M_{i+1} \text{ et } M_i P \beta M_{i+1} \text{ pour } i = 1, n \text{ avec } M_{n+1} = M_1,$$

ce qui revient à remplacer la coquille  $(\alpha\beta)$  par les coquilles  $(\alpha P)$  et  $(P\beta)$ .

## 4.2 Insertion globale

Pour des raisons numériques (voir plus bas), nous allons aussi considérer une méthode d'insertion globale. On rappelle en premier l'algorithme d'insertion d'un point dans une triangulation de Delaunay par la méthode incrémentale. On donne ensuite le cas d'une triangulation contrainte avant de généraliser cette méthode.

### 4.2.1 Insertion de Delaunay

Via quelques hypothèses non restrictives, si  $\mathcal{T}_i$  est la triangulation de Delaunay s'appuyant sur  $i$  points et si  $P$  est un point à insérer (par exemple le point  $i + 1$ ) contenu dans  $\mathcal{T}_i$ , alors la triangulation  $\mathcal{T}_{i+1}$  s'appuyant sur ces  $i + 1$  points est obtenue via la construction, Figure 2, à gauche :

$$\mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{T}_i - \mathcal{C}_{i+1} + \mathcal{B}_{i+1},$$

dans cette construction on a :

- $\mathcal{C}_{i+1}$  la *cavité* du point  $P$ . Cette cavité est l'union des tétraèdres de  $\mathcal{T}_i$  dont la boule ouverte circonscrite contient  $P$ .
- $\mathcal{B}_{i+1}$  la *boule* du point  $P$ . Cette boule est formée des tétraèdres obtenus en joignant  $P$  aux faces externes de  $\mathcal{C}_{i+1}$ .

Du point de vue théorique, le résultat est que si  $\mathcal{T}_i$  est de Delaunay alors  $\mathcal{T}_{i+1}$  l'est aussi. Du point de vue numérique, cela est moins sûr. Néanmoins la propriété intéressante est que, toujours en théorie,  $P$  est visible des faces externes de la cavité assurant ainsi la validité de la construction de la boule invoquée dans le processus. Encore, ici, du point de vue numérique, cette propriété n'est pas garantie. Par suite, la méthode d'insertion incrémentale est utilisée, dans son principe, mais est contrôlée de façon à garantir l'obtention d'un maillage juste (volumes positifs). Notons, comme on le verra plus bas, que ce contrôle implique que le fait que  $\mathcal{T}_i$  soit de Delaunay ou non n'a pas réellement d'importance.

#### 4.2.2 Insertion de Delaunay contrainte

Le processus ci-dessus sert à construire des triangulations. Notre problème est de construire des maillages. Ceci change quelque peu de point de vue. *A minima* un maillage est une triangulation contrainte. Par suite, nous allons contraindre la construction précédente. Il suffit simplement de brider la construction de la cavité.

Pour obtenir cette cavité, dans le cas triangulation et avec l'hypothèse faite, il faut trouver le ou les tétraèdres qui contiennent le point  $P$ . Cet ensemble est la *base* de  $P$ . La cavité est alors initialisée avec cette base puis est enrichie récursivement en y ajoutant tout tétraèdre voisin d'un de ses éléments dont la boule circonscrite contient le point  $P$ .

Prendre en compte une contrainte, une face pour simplifier, revient à suivre la même méthode mais en ne considérant pas comme voisins deux tétraèdres séparés par une face contrainte. Comme ci-dessus, il n'est pas crucial que la triangulation soit de Delaunay.

#### 4.2.3 Insertion généralisée

L'insertion généralisée, Figure 2, à droite, est une extension de la méthode ci-dessus qui, d'une part, ne suppose rien sur  $\mathcal{T}_i$  et, d'autre part, permet de rajouter des contraintes, par exemple de nature métrique, à satisfaire.

Le fait de ne pas supposer que  $\mathcal{T}_i$  est Delaunay ne change pas vraiment le problème (comme déjà indiqué). Le résultat de l'insertion sera juste (mais non Delaunay) dès lors que le critère de visibilité mentionné ci-dessus est satisfait.

Ajouter de nouvelles contraintes est alors facile. Il suffit de vérifier que la cavité résultante reste valide. Dans cet ordre d'idée, rien n'empêche d'ajouter un tétraèdre à la cavité si cette dernière reste valide bien que ce tétraèdre ne soit pas trouvé via un critère de boule circonscrite. On peut également tolérer la perte d'un point non strictement nécessaire en mettant dans la cavité tous les tétraèdres partageant ce point (ce qui est strictement impossible en sélectionnant ces tétraèdres via un critère de boule vide dans une triangulation de Delaunay).

### 4.3 Problèmes numériques

Compte tenu du type d'applications envisagé et compte tenu des degrés de liberté qui sont les nôtres, il est à attendre un certain nombre de problèmes numériques. Les exemples que nous voulons être capable de traiter correspondent à des géométries mal discrétisées susceptibles de mettre en défaut un mailleur classique. Parmi les pathologies évidentes que nous allons rencontrer, on aura i) la présence dans un voisinage petit de faces de tailles très disparates (l'effet "porc épïc"), ii) la présence d'angles (entre arêtes de face) très petits, iii) la présence de faces triangulaires très allongées (ce qui induit le même effet sur certains angles), etc. Pour ce qui est de nos degrés de liberté, il faut que les maillages produits soient manipulables "en aveugle" par le monde extérieur. Ceci empêche tout recours à des systèmes internes de calculs particuliers (précision infinie, arithmétique particulière, ...).

Un cas immédiat de problèmes numériques liés à la nature des applications visées est donné par l'exemple, *a priori* trivial, suivant (qui est représentatif de l'une opérations dont nous avons besoin). Si  $AB$  est une arête du maillage courant et si on a détecté que cette arête est intersectée par une arête à contraindre, alors, voir ci-dessus, on calcule la position du point  $P$ , réputé être le point d'intersection cherché.

En principe, si

$$P = \omega A + (1 - \omega) B,$$

avec  $\omega$  entre 0 et 1, alors  $P$  est sur  $AB$ . Numériquement cela est faux. La question est de savoir si ceci est gênant ou non. En pratique, ce que nous cherchons à faire c'est l'insertion de ce point, ou d'un point qui l'approche. Si on est capable d'insérer le point (approximatif), alors on obtiendra le résultat cherché. L'arête  $AB$  sera remplacée par  $AP \cup PB$  qui, bien que  $AP$  et  $BP$  ne soient pas strictement alignés, donne une solution acceptable à notre problème. De plus, même si  $P$  est mal positionné, on va par la suite le supprimer (voir plus bas). Par conséquent le seul but



est ici de pouvoir garantir que l'insertion de ce point  $P$  produit un maillage valide, quitte à ce que sa position ne soit pas exacte.

**Limitation.** D'après la discussion précédente, une limitation (numérique) de la méthode réside dans sa capacité à insérer un point. En particulier, si un algorithme local échoue, un algorithme global sera employé. Si celui-ci échoue, alors on dira que l'on n'est pas capable, sous les hypothèses (fortes) que l'on s'est données, de traiter l'exemple considéré.

Le lecteur se reportera aux exemples présentés plus bas pour observer que la limitation introduite ci-dessus n'est que très rarement une cause d'échec. Dans l'ensemble des exemples que nous avons traité, un seul (à ce jour) met la méthode en échec à cause de cette limitation.

## 5 Opérateurs de suppression d'un point

En découpant les faces et arêtes contraintes, on a introduit des points d'intersection. L'étape suivante consiste donc à supprimer ces points afin de retrouver exactement les contraintes initiales.

*A priori*, il y a deux opérateurs permettant de supprimer un point dans un maillage tétraédrique, l'un basé sur le fait qu'un sommet de *degré* 4, *i.e.*, partagé par 4 éléments seulement, est directement supprimable, l'autre basé sur la suppression d'arête via la fusion de leurs extrémités.

Le premier opérateur ne s'applique pas ici comme il est facile de voir. En effet, si  $P$  est le point à supprimer,  $P$  appartient nécessairement à une arête ou une face initiale. La configuration de 4 tétraèdres autour de  $P$  indique clairement qu'un point de degré 4 ne peut pas appartenir à une telle entité, par suite, l'opérateur de destruction via les boules de 4 ne s'applique pas. Nous allons donc discuter de l'opérateur basé sur la suppression d'arêtes par fusion de points. Ensuite, nous décrirons un opérateur plus puissant.

## 5.1 Suppression d'arêtes par fusion de points

Soit  $AB$  une arête initiale et soient  $AP_1, P_1P_2, \dots, P_nB$  la partition de cette arête après insertion des  $P_i$ . Les  $P_i$  sont alignés sur  $AB$  (aux erreurs numériques près). Considérant l'arête  $P_iP_{i+1}$ , la fusion envisagée consiste à :

- fusionner  $P_i$  en  $P_{i+1}$ ,
- ou fusionner  $P_{i+1}$  en  $P_i$ ,
- ou encore fusionner  $P_i$  et  $P_{i+1}$  sur un troisième point autre, situé sur  $AB$  entre  $P_i$  et  $P_{i+1}$ . La fusion faite, ce point pourra s'appeler à nouveau  $P_i$ .

Notons que le premier (resp. dernier) point  $P_i$  peut fusionner sur  $A$  (resp.  $B$ ) mais que ces deux points, eux, sont imposés.

La validation, du point de vue métrique, d'une fusion par arête s'effectue de la façon suivante :

- on considère la boule de  $P_i$  et celle de  $P_{i+1}$ ,
- on élimine de l'union de ces deux boules la coquille de  $P_iP_{i+1}$ ,
- on affecte les coordonnées de  $P_i$  à  $P_{i+1}$  et on valide la boule de  $P_{i+1}$  (hormis les éléments partageant les deux points),
- ou, en cas d'échec, on affecte les coordonnées de  $P_{i+1}$  à  $P_i$  et on valide la boule de  $P_i$  (hormis les éléments de la coquille commune),
- ou, en cas d'échec, on cherche un point  $P$  entre  $P_i$  et  $P_{i+1}$ , on affecte ses coordonnées tant à  $P_i$  qu'à  $P_{i+1}$ , on remplace  $P_i$  et  $P_{i+1}$  par  $P$  et on valide la boule de  $P$ .

Cette algorithm, bien qu'efficace, ne permet pas toujours de réaliser la fusion désirée (voir plus bas).

## 5.2 Suppression par insertion

Pour supprimer les points ajoutés sur une face initiale, il est aisé d'utiliser l'algorithme précédent. Il suffit de l'appliquer aux arêtes des sous-faces. Néanmoins, comme indiqué, on ne peut pas arriver à supprimer tous les points présents. Un algorithme plus puissant est possible que nous décrivons maintenant.

Supprimer un point via un processus d'insertion est une approche qui peut paraître paradoxale. On supprime un point en insérant un autre point ! En pratique, l'idée est de faire décroître le nombre de points ajoutés lors des partitions. Ainsi si

on insère un point en en supprimant au moins deux, on aura, au final, supprimé un point. Cet opérateur est principalement utile pour enlever les points ajoutés sur les faces initiales lorsque des fusions par arêtes n'ont pas réussi à le faire.

Cet opérateur est en effet plus puissant que la fusion dans la mesure où il y a moins de contrainte. Pour s'en assurer, prenons le cas d'une face où il reste deux points internes que la fusion par arêtes n'a pas pu supprimer. Ce dernier opérateur n'a pu que tenter de mettre l'un de ces points sur l'autre ou de définir un point tiers remplaçant les deux points en question. Ce faisant, le point solution reste contraint à rester sur l'arête existante tandis que l'opérateur présent permet de choisir comme solution un point non contraint par cette arête. Par suite, il y a plus de liberté dans le choix et cette méthode est plus puissante. Dans le cas où il reste au moins trois points, formant une sous face, les fusions par arête imposent la recherche de points solutions situés sur les arêtes de cette sous face alors que l'opérateur par insertion supprime cette contrainte, en particulier, un point situé dans les trois boules des points en présence peut être la solution cherchée.

Toutefois, la mise en œuvre de cet opérateur de suppression par insertion est relativement technique. Reprenant le cas ci-dessus, avec trois points notés  $A$ ,  $B$  et  $C$ , l'algorithme par insertion consiste à définir une cavité qui englobe au moins les boules de  $A$ ,  $B$  et  $C$ , afin de faire disparaître ces trois points, tout en trouvant un point visible du bord de cette cavité, point contraint à être sur le plan de la face initiale. L'algorithme à utiliser ici est clairement du type "insertion généralisée".

### **5.3 Suppression des points et points de Steiner**

L'application répétée de fusions par arêtes et de suppressions par insertion ne permet pas toutefois de supprimer tous les points ajoutés. La raison est double. Il y a une cause d'ordre théorique et une cause d'ordre numérique. Du point de vue théorique, voir le cas du prisme de Schönhardt, [1], qui est un exemple simple montrant que la suppression d'un point n'est pas toujours possible. Du point de vue numérique, on peut également avoir des refus. Notons, que la vraie raison d'un refus n'est pas facile à identifier. Quoi qu'il en soit, un point qu'il est impossible de supprimer va être "enlevé" de sa contrainte (face ou arête de face) et de ce fait, on peut, en principe recouvrer ces entités. Par abus de langage, de tels points seront dits de Steiner.

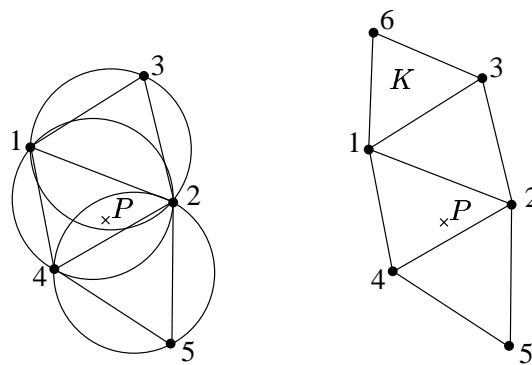


FIG. 2 – Schéma de principe d'un cas d'insertion généralisée. À gauche, le point  $P$ , à insérer, est dans le triangle 142, ce triangle est donc mis dans la cavité de  $P$ . Les disques circonscrits à ses voisins 123 et 452 contiennent  $P$ , ses deux éléments sont mis dans la cavité de  $P$ . Il n'y a pas d'autres éléments violant le critère de Delaunay, la cavité de  $P$  est donc réduite aux trois éléments montrés sur le dessin et l'insertion de  $P$  est faite selon la méthode de Delaunay. À droite, on ajoute le triangle  $K$  qui bien que ne violant pas le critère de Delaunay est tel que ses arêtes 16 et 36 sont visibles de  $P$ . L'insertion de  $P$  avec cette cavité de quatre éléments résulte en un maillage valide mais non Delaunay.

La méthode utilisée pour enlever ces points de leur contrainte a été décrite dans la Partie 1 de ce papier. Néanmoins, pour faciliter la lecture, nous la rappelons brièvement ici en ajoutant des précisions de nature pratique.

**Suppression d'un point d'une face.** Soit  $P$  un point introduit sur une face  $F$  donnée initialement et soit  $\mathcal{B}_P$  la boule de  $P$ . Comme la face  $F$  existe sous forme partitionnée, il existe dans la boule  $\mathcal{B}_P$ , un ensemble de tétraèdres,  $\mathcal{B}_P^{in}$ , entièrement contenue dans le demi-espace contenant le domaine qui, de fait, est l'intersection de  $\mathcal{B}_P$  avec ce demi-espace. Cette "demi-boule"<sup>1</sup> a comme faces externes :

- i) les faces formant la partition de  $F$  qui constituent un polygone quelconque dans le plan de  $F$  et
- ii) les faces hors les précédentes qui sont internes au domaine.

Comme cette demi-boule existe, le point  $P$  est visible de toutes les faces de ce dernier type. Il existe<sup>2</sup> donc un polyèdre (le noyau de visibilité) de volume strictement positif contenant  $P$ . Par conséquent, on peut bouger  $P$  en n'importe quelle position incluse dans ce noyau. Ce point est alors tel que :

- les faces de type ii) sont visibles de  $P$ ,
- le point  $P$  voit également le plan de  $F$ . Comme le polygone défini ci-dessus est triangulable en triangles (voir plus bas), le point  $P$  voit tous ces triangles.

Il en résulte que la demi-boule traitée a été remplacée par une boule valide. En conclusion, on a enlevé un point de la partition de  $F$ , itérant le raisonnement, on peut supprimer, un à un, tous les sommets introduits dans cette partition.

**Remarque.** On a supposé ici que les faces données séparaient le domaine de son extérieur (d'où la seule demi-boule  $\mathcal{B}_P^{in}$ ). Plus généralement, si une face limite deux composantes connexes, il faut considérer deux telles demi-boules, l'une d'un côté, l'autre de l'autre, mais le même raisonnement s'applique à chacune de ces demi-boules.

---

1. Que nous appelons ainsi par commodité bien que ce ne soit pas une boule au sens de la définition exacte de cette entité.

2. Le point  $P$ , centre d'une boule valide peut toujours être bougé en maintenant la validité de sa boule. En effet, un tel point serait "bloqué" uniquement s'il était dans le même plan que l'une des faces externes de sa boule. Ce cas étant exclu, il existe nécessairement un noyau de visibilité non vide dans lequel  $P$  est libre de se déplacer.

**Suppression d'un point d'une arête.** Il reste à enlever les points du bord de cette partition, qui sont les points que l'on a ajoutés sur une arête initiale (bord d'une face initiale). Le principe de la méthode est le même. La différence réside dans le fait que l'arête initiale peut être membre d'une face initiale ou être partagée par deux ou plusieurs de ces faces initiales.

On va décrire, en premier, le cas où l'arête en question n'est partagée que par deux faces,  $F_1$  et  $F_2$ , qui peuvent ne pas être coplanaires. Néanmoins, on peut comme ci-dessus trouver une demi-boule,  $\mathcal{B}_P^{in}$ , entièrement contenue dans le demi-espace contenant le domaine. Cette boule a comme faces externes :

- i) les faces formant la partition de  $F_1$  qui constituent un polygone quelconque dans le plan support de  $F_1$
- ii) les faces formant la partition de  $F_2$  qui constituent un polygone quelconque dans le plan support de  $F_2$
- iii) les faces hors les précédentes qui sont dans le domaine.

Comme cette demi-boule existe, le point  $P$  est visible de toutes les faces de ce dernier type. Il existe donc un polyèdre (le noyau de visibilité) de volume strictement positif autour de  $P$ . Par conséquent, on peut bouger  $P$  en n'importe quelle position incluse dans ce noyau. Ce point est tel que :

- les faces de type iii) sont visibles de  $P$ ,
- le point  $P$  voit également le plan support de  $F_1$  et celui support de  $F_2$ . Comme les deux polygones définis ci-dessus sont triangulables en triangles (voir plus bas), le point  $P$  est visible de tous ces triangles.

On a donc construit une boule valide pour le point  $P$  ainsi bougé. En conclusion, on a enlevé un point du bord de la partition de  $F_1$  et  $F_2$ . Itérant le raisonnement, on peut supprimer, un à un, tous les sommets introduits dans cette partition d'arête.

**Arête non “manifold”.** Le cas où l'arête initiale est commune à plus de deux faces (arête non “manifold”) se traite comme le cas décrit ci-dessus. Il suffit de définir autant de “demi”-boules que nécessaire, en tournant autour de l'arête à l'intérieur du domaine.

Le cas où l'arête initiale n'appartient qu'à une seule face (par conséquent, cette face est flotante) est également à prendre en compte.

Pour être exhaustif, il peut aussi se présenter le cas où l'arête est elle-même flottante (n'appartient à aucune face).

## 6 Méthode de construction du maillage des polygones

La suppression des points des faces et des arêtes nécessite la construction d'un maillage en triangles des polygones formés par l'intersection de la boule du point en question avec la face (resp. les faces partageant l'arête) support de ce point. Mailler un polygone plan (dans le plan d'une face initiale) est *a priori* facile (voir par exemple [1]), néanmoins, on est ici en trois dimensions.

### 6.1 Polygone lié à un point d'une face

Le polygone à mailler (à partir de la donnée de son contour) est plan (dans le plan de sa face génératrice). Il ne comprend qu'une seule composante connexe mais peut être non convexe (sommets du bord alignés ou sommet(s) réflexe(s)). Un algorithme purement "plan" ne suffit pas car il faut définir une orientation. Pour ce faire, on va utiliser un tétraèdre du maillage courant s'appuyant sur une arête bord de ce polygone. De la sorte, une orientation cohérente est définie qui permet les tests de positivité nécessaires à la construction.

### 6.2 Polygone lié à un point d'une arête

Le polygone à mailler (à partir de la donnée de son contour) est de fait formé de deux sous-polygones (cas où son arête génératrice n'est partagée que par deux faces). Chaque sous-polygone est plan (dans le plan de sa face génératrice). Il ne comprend qu'une seule composante connexe mais peut être non convexe (sommets du bord alignés, il n'y a pas de sommet strictement réflexe). Un algorithme purement plan ne suffit pas car il faut définir une orientation. Pour ce faire, on va utiliser un tétraèdre du maillage courant s'appuyant sur une arête bord de ce polygone. De la sorte, une orientation cohérente est définie. Dans ce cas, les tests de positivité *a priori* nécessaires à la construction ne sont pas utiles car les sommets bords du polygone traités sont des points d'arêtes (on suppose, pour cela, que les points des faces ont été au préalable supprimés). Par suite, trois points consécutifs sont alignés

s'ils appartiennent à la même arête initiale et, dans le cas contraire, ils forment un triangle valide. Autrement dit, il n'y a plus de tests sur les coordonnées des points en présence (et plus de problèmes numériques !) mais seulement des tests de nature topologique (appartenance à une arête initiale).

**Autres cas.** Le cas où l'arête en question n'est pas partagée par deux faces (*i.e.*, n'est que sur une face contrainte (face flottante) ou est partagée par plus de deux faces contraintes ou, encore, est elle-même flottante (n'appartient à aucune face contrainte), conduit à des algorithmes sensiblement différents. Pour une seule face, il faut en effet trouver, parmi les faces de la triangulation actuelle, un ensemble de faces qui peuvent être considérées comme le pendant des faces contraintes connues de manière à retrouver le cas manifold. Pour plus de deux faces, il faut, parmi les faces contraintes partageant l'arête, identifier les différents polygones induits. Enfin, si l'arête est flottante, il faut considérer les coquilles relatives à sa partition.

### 6.3 Description de la méthode de suppression d'un point d'une face

Soit  $P$  un point d'intersection ajouté sur une face initiale. On note  $\mathcal{B}_P$  sa boule. Par construction, l'intersection de cette boule avec le plan de la face initiale définit un polygone de ce plan. Ce polygone est formé par les arêtes des faces externes de la boule appartenant au plan de la face. La boule  $\mathcal{B}_P$  est formée de deux "demi-boules",  $\mathcal{B}_P^+$  et  $\mathcal{B}_P^-$  qui sont formées des tétraèdres de  $\mathcal{B}_P$  situés de part et d'autre du plan de la face. Supprimer le point  $P$  se fait alors en plusieurs étapes :

- le point  $P$  est formellement dédoublé en deux points,  $P^+$  et  $P^-$ ,
- les éléments de  $\mathcal{B}_P^+$  sont modifiés en bougeant le point  $P^+$ ,
- les éléments de  $\mathcal{B}_P^-$  sont modifiés en bougeant le point  $P^-$ ,
- le polygone résultant de la trace de  $\mathcal{B}_P$  sur le plan de la face est maillé comme expliqué ci-dessus, principalement en formant des triangles à partir de trois sommets consécutifs adéquats de son bord,
- ce maillage est connecté d'une part avec  $P^+$  et d'autre part avec  $P^-$ .

Par suite le polyèdre correspondant à la boule initiale  $\mathcal{B}_P$  est remaillé et le point  $P$  a disparu. Appliqué à chaque tel point  $P$ , cette méthode permet de supprimer, un par un, l'ensemble de ces points.



## 6.4 Description de la méthode de suppression d'un point d'une arête

À l'issue de la suppression des points des faces, on est dans la situation où il ne reste, parmi les points d'intersection ajoutés, que les points construits sur les arêtes des faces initiales. Supprimer ces points se fait formellement de la même manière (on va supposé pour simplifier que les arêtes sont "manifold", partagée par deux faces seulement). On note de même  $P$  un tel point et  $\mathcal{B}_P$  sa boule. Par construction, l'intersection de cette boule avec les plans des deux faces initiales partageant l'arête initiale commune permet de définir un polygone dont une partie est dans le plan de la première face et l'autre dans le plan de la seconde face. La boule  $\mathcal{B}_P$  est donc formée de deux "demi"-boules,  $\mathcal{B}_P^+$  et  $\mathcal{B}_P^-$  qui comprennent les tétraèdres de  $\mathcal{B}_P$  situés de part et d'autre des plans des deux faces. Supprimer le point  $P$  se fait alors en :

- dédoublant  $P$  en deux points,  $P^+$  et  $P^-$ ,
- modifiant les éléments de  $\mathcal{B}_P^+$  en bougeant le point  $P^+$ ,
- modifiant les éléments de  $\mathcal{B}_P^-$  en bougeant le point  $P^-$ ,
- maillant le polygone défini par la trace de  $\mathcal{B}_P$  sur les plans des deux faces. Ce polygone comprend deux composantes séparées par l'arête commune et chacune d'entre elles est maillée comme expliqué ci-dessus, principalement en formant des triangles à partir de trois sommets consécutifs adéquats de son bord,
- connectant ces deux maillages d'une part avec  $P^+$  et d'autre part avec  $P^-$ .

Par suite le polyèdre correspondant à la boule initiale  $\mathcal{B}_P$  est remaillé et le point  $P$  a disparu. Appliqué à chaque tel point  $P$ , cette méthode permet de supprimer, un par un, l'ensemble de ces points.

## 7 Tétraèdres de volume négatif

Dans les schémas ci-dessus (pour simplifier, on prend un cas manifold, les arêtes de la contrainte sont partagée exactement par deux faces de la contrainte), on a formellement construit deux points,  $P^+$  et  $P^-$ . D'un point de vue pratique, il est difficile de construire effectivement ces points, par suite, on initialise ces deux points en les positionnant en  $P$  (ils sont donc confondus). De la sorte, les tétraèdres ayant  $P^+$

et  $P^-$  comme sommet sont de volume exactement nul (en pratique, certains sont de volume strictement négatif). Afin d'obtenir un maillage juste, il convient de rendre strictement positifs tous les éléments du maillage. Ce problème rejoint l'étude réalisée dans [3] qui consiste, en partant d'un maillage topologiquement correct mais métriquement faux de construire un maillage juste. Plusieurs opérateurs sont utilisés à cette fin, des opérateurs métriques (la topologie restant fixe) et des opérateurs topologiques (les positions des sommets restant inchangées).

## 7.1 Déplacement d'un point (libre)

L'opérateur le plus simple consiste à bouger les points. Utilisé pour optimiser un maillage (juste), cet opérateur est ici utilisé pour supprimer les éléments de volume négatifs. Dans le cas classique, la fonction coût qui est optimisée est une mesure de qualité. Ici, il faut choisir une fonction différente car il peut y avoir des tétraèdres négatifs dans les boules considérées.

Si  $V_i$  désigne le volume du tétraèdre  $i$  de la boule  $\mathcal{B}_P$  du point  $P$ , l'algorithme de bougé est le suivant :

- Cas 1) tous les  $V_i$  sont positifs (certains pouvant être nuls), la fonction coût est une fonction de qualité classique,
- Cas 2) au moins un  $V_i$  est négatif, la fonction coût est

$$\sum_i |V_i|,$$

et le but est de minimiser cette valeur. En effet, dès qu'un volume est négatif, la somme ci-dessus est plus grande que le vrai volume du domaine. Cette fonction coût, préconisée dans [3], est ici modifiée. On ne prend en effet que les tétraèdres de volumes négatifs et c'est la somme des valeurs absolues de ces seuls volumes qui est minimisée.

Le bougé du cas 2) permet de rendre positif les volumes, le cas 1) permet, quant à lui, d'améliorer la qualité des éléments.

Cet opérateur de déplacement est, en pratique, efficace dans la plupart des cas, néanmoins, il ne permet pas de rendre juste (positif) toutes les boules rencontrées. D'autres opérateurs sont alors nécessaires et, globalement, une combinaison de tous les opérateurs disponibles sera employée.

## 7.2 Opérateurs topologiques

La bascule d'arête généralisée est un opérateur connu utilisé dans de nombreuses méthodes d'optimisation de maillages, [4]. Dans notre cas, on va l'appliquer pour rendre positif un maillage topologiquement juste et métriquement faux. L'idée, comme ci-dessus, est de piloter les bascules non pas pour augmenter une qualité mais pour minimiser la somme des valeurs absolues des volumes (voir ci-dessus) intervenant dans une telle bascule (la coquille de l'arête correspondante).

Il est à noter une pathologie particulière aux maillages ayant des éléments négatifs. Une bascule, dans ce cas, peut construire un élément existant déjà (le maillage devient alors topologiquement faux). Par suite, il faut ajouter une contrainte lors de l'application d'une bascule pour empêcher une telle création, Figure 3, en deux dimensions (un cas tridimensionnel conduirait à un dessin illisible).

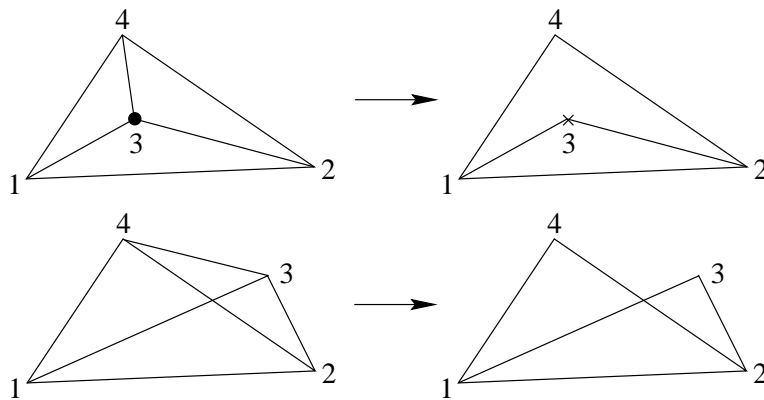


FIG. 3 – Un exemple bidimensionnel simple où une bascule d'arête forme un élément qui existait déjà. En haut, la bascule de l'arête 43, commune aux triangles 134 et 324, forme les triangles 124 et 123. Ce dernier triangle (oubions le fait qu'il est négatif) existe déjà, la bascule est donc topologiquement invalide. En bas, on a le même exemple mais le point 3 est tel que le triangle 324 est négatif. Basculer l'arête 34 donne bien deux nouveaux triangles de surface positive mais reforme le triangle 123, cette bascule est donc topologiquement invalide.

Un autre opérateur topologique intéressant est la fusion par arête. Ici, encore, un test explicite est nécessaire pour prévenir la construction d'un élément pré-existant.

### 7.3 Insertion de points

Dans [3], il est démontré que les opérateurs décrits ci-dessus ne conduisent pas toujours à une solution valide. Par suite, insérer un point est aussi une opération à prendre en compte pour assurer le résultat cherché qui fera partie de la combinaison d'opérateurs utilisés.

## 8 Méthode de construction, point de vue global

Dans cette section, on regroupe l'ensemble des étapes vues auparavant puis on décrit la fin de la méthode. Les étapes déjà mentionnées concernent successivement :

- la création d'une boîte englobant l'ensemble des points connus au départ (essentiellement les sommets des faces données),
- l'utilisation d'un algorithme de Delaunay contraint pour insérer ces points dans la boîte précédemment définie,
- le forçage des contraintes par une méthode "classique",
- la recherche des contraintes non présentes à l'issue de la phase ci-dessus,
- la partition des arêtes contraintes manquantes en introduisant les points d'intersection détectés,
- la partition des faces contraintes manquantes à ce stade en introduisant les points d'intersection détectés,
- la suppression des points ajoutés ou leur décollement des contraintes.

À ce stade, le polyèdre initial est bien décrit (sa frontière maillée existe dans le maillage de la boîte introduite). Par ailleurs, ce maillage est vide au sens où il n'y a pas de points internes (autres que les points de Steiner éventuellement construits auparavant). Il reste donc à poursuivre la construction en ajoutant des points internes si nécessaire puis en optimisant le maillage résultant. Ainsi, on poursuit la construction, [5], en :

- éliminant les tétraèdres extérieurs au domaine (ne gardant que ceux des composantes connexes internes au domaine),
- construisant par une méthode idoine des points internes jusqu'à saturation du domaine,
- insérant ces points (via, ici, une méthode de Delaunay contrainte),

- optimisant le maillage résultant par bougé de points (pour les points internes) et bascules généralisées.

On obtient ainsi un maillage dont la qualité (la pire, celle de son plus mauvais élément) est liée à celle des faces données et fonction de la place disponible (du volume du domaine), c'est-à-dire de la possibilité ou non de trouver, pour une face de qualité donnée, un quatrième point permettant de construire le tétraèdre "optimal" relatif à cette face. Sur cette notion de qualité, il faut noter que les points  $P^+$  et  $P^-$  introduits peuvent contraindre le maillage et conduire à des qualités relativement médiocres.

## 9 Exemples

Dans cette section, nous allons donner quelques exemples de domaines traités par cette méthode ainsi que les statistiques correspondantes.

Le premier exemple, Figure 4, est un terrain dont la partie supérieure est maillée finement, les faces latérales sont maillées de façon "géométrique" (sans considération de qualité, *i.e.*, seulement pour obtenir une description de la forme (ici des plans) en minimisant le nombre de points, de fait sans ajouter de points sur les faces). La face du dessous de ce domaine est maillée par deux triangles seulement (d'où la difficulté).

Le second exemple, Figure 5, correspond à un polyèdre défini par sa surface maillée. Ici encore, le maillage de la surface est fait sans considération de qualité et un nombre minimal de triangles est présent de manière à décrire la géométrie. Les troisième et quatrième exemples, Figures 6 et 8, sont de même nature. Les surfaces données sont de très piètre qualité.

Notons que ces trois exemples ont été choisis dans le dépôt "drexel" dont l'adresse est [edge.mcs.drexel.edu](http://edge.mcs.drexel.edu) qui collecte un ensemble de cas mal décrits au sens des éléments finis et, de ce fait, constitue une source d'exemples particulièrement instructifs.

Enfin, le dernier exemple est représentatif des descriptions géométriques usuellement utilisées dans le cadre des simulations des semi-conducteurs. Cet exemple nous a été fourni par le biais du contrat européen MAGIC-FEAT qui a permis de financer en partie cette étude.

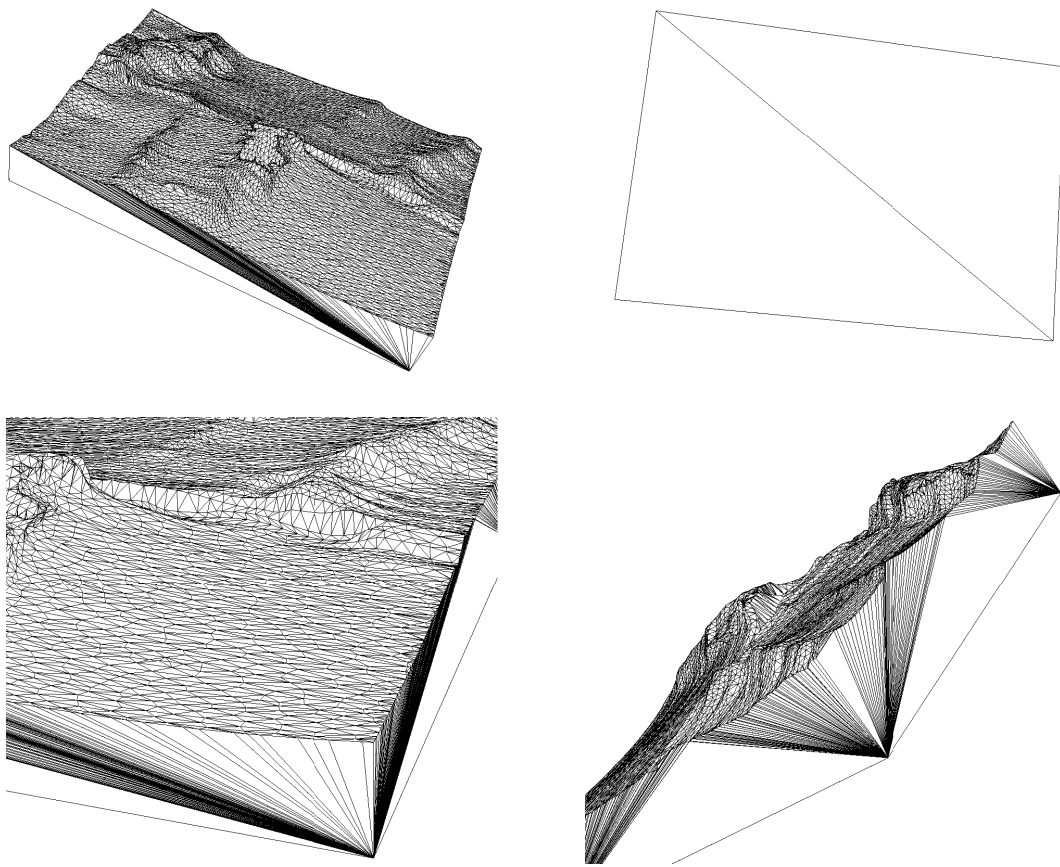


FIG. 4 – Exemple 1, un terrain défini par une face très finement maillée, une face recouverte de deux triangles seulement et des faces présentant des faisceaux d'arêtes formant des angles très petits.

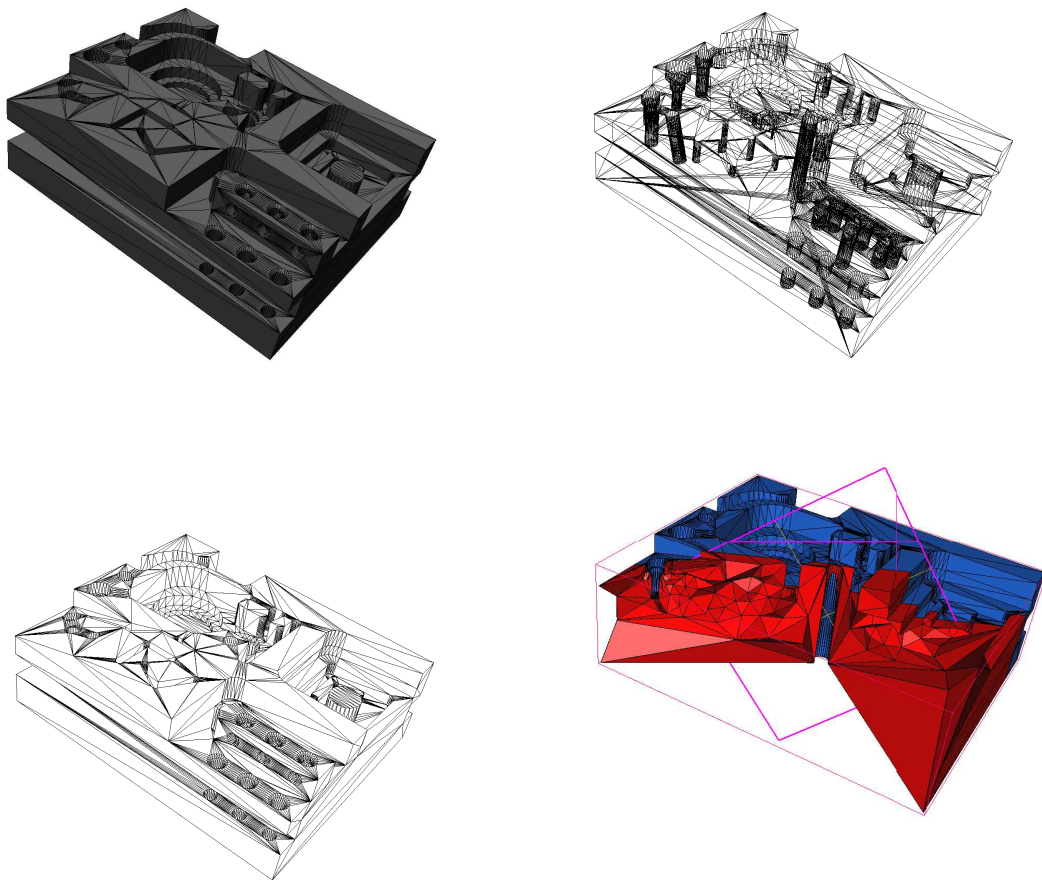


FIG. 5 – Exemple 2, trois vues de la géométrie et une coupe du maillage tétraédrique construit qui s'appuie sur les faces de cette définition géométrique.

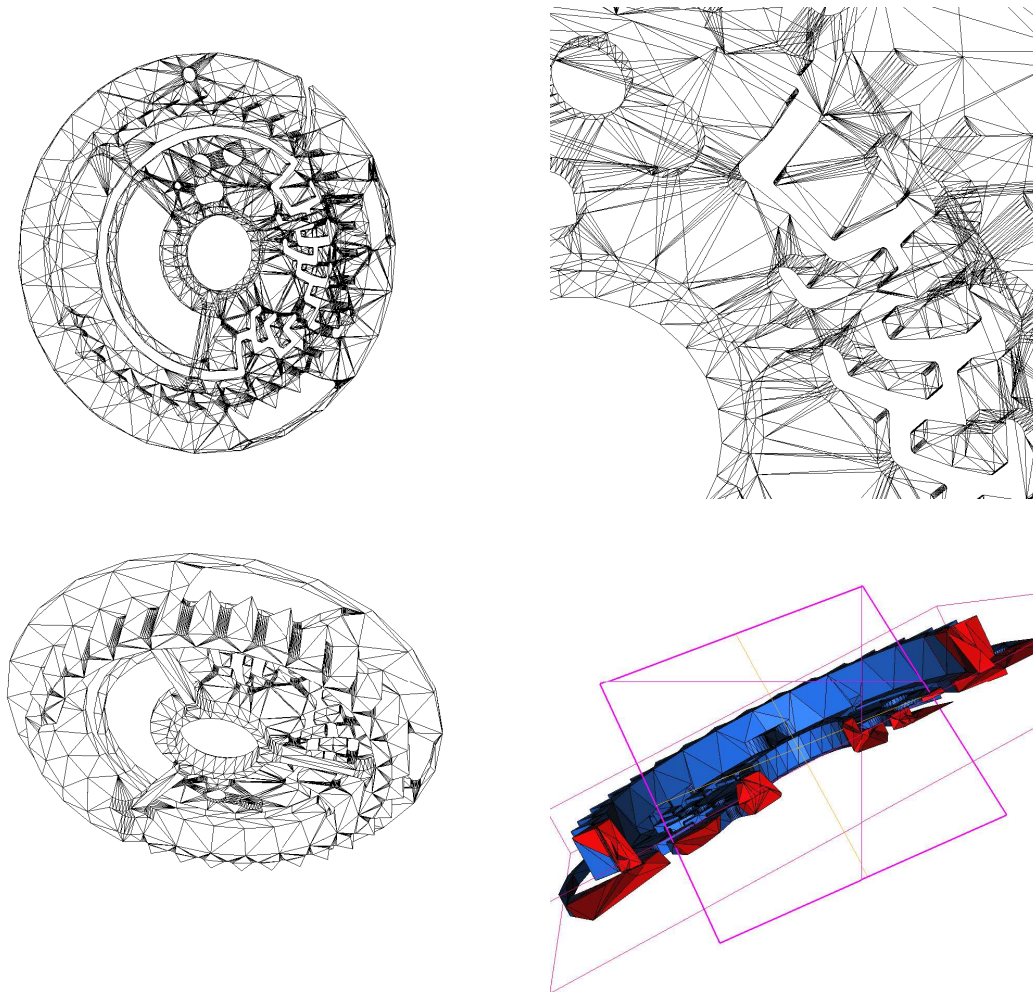


FIG. 6 – Exemple 3, trois vues de la géométrie et une coupe du maillage tétraédrique construit qui s'appuie sur les faces de cette définition géométrique.



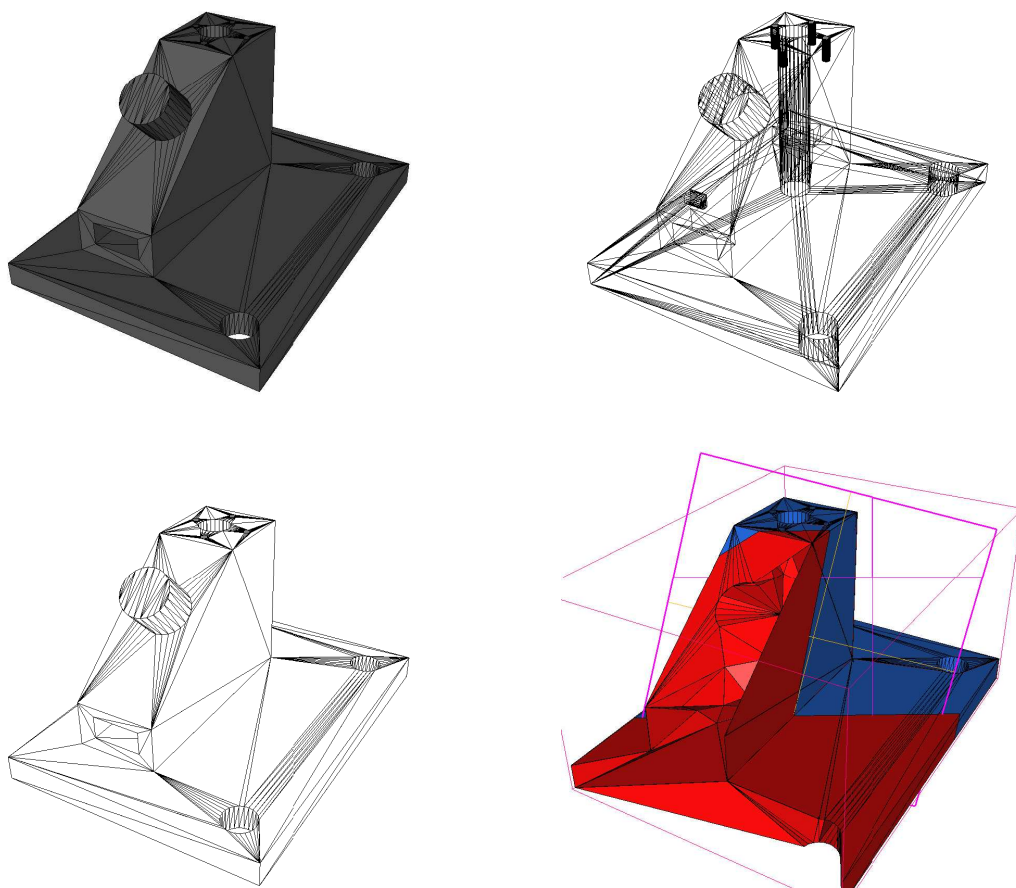


FIG. 7 – Exemple 4, trois vues de la géométrie et une coupe du maillage tétraédrique construit qui s'appuie sur les faces de cette définition géométrique.

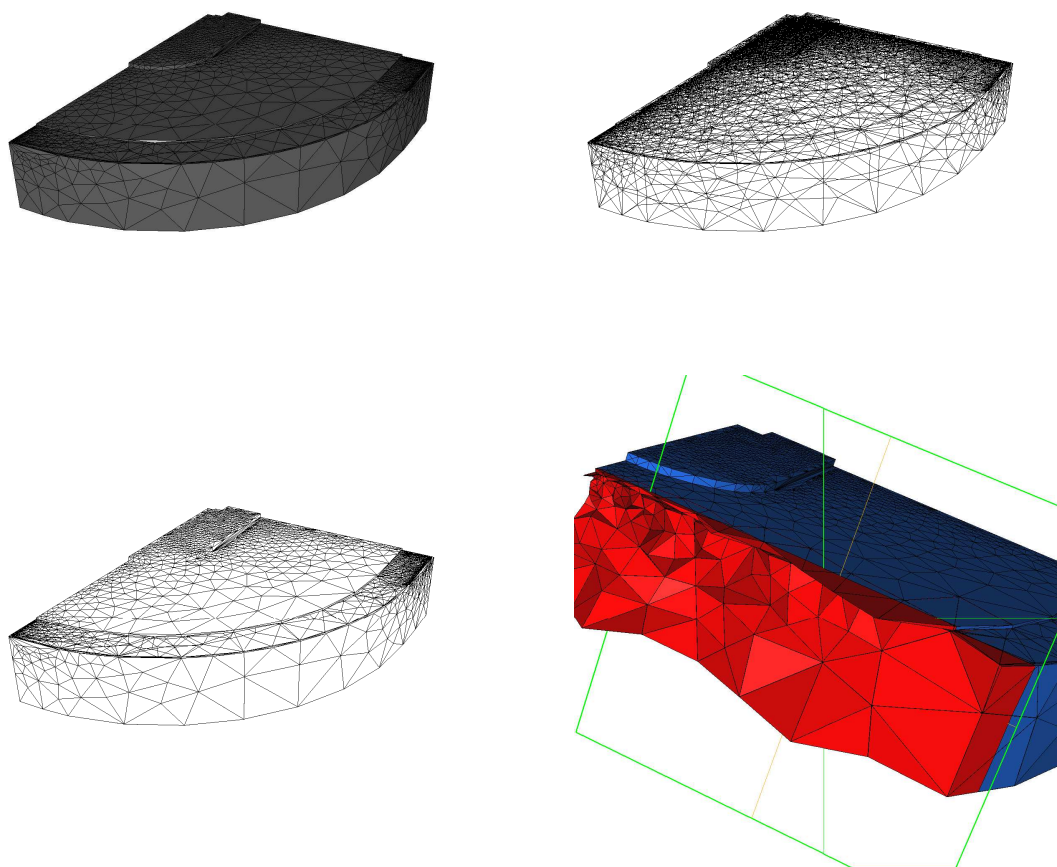


FIG. 8 – Exemple 5, trois vues de la géométrie et une coupe du maillage tétraédrique construit qui s'appuie sur les faces de cette définition géométrique.

Dans le Tableau 1, on reporte quelques valeurs significatives liées aux quatre exemples montrés qui sont représentatif de cas délicats. Le nombre de faces initiales est noté  $f_{aini}$ , le nombre d'arêtes initiales est  $ar_{ini}$ . Le nombre de faces non formées à l'issue de la phase classique de la méthode est  $f_{aper}$ . Le nombre d'arêtes non formées est  $ar_{per}$ . On désigne par  $np_{aret}$  et  $np_{face}$  le nombre de points d'intersection rajoutés sur les arêtes et les faces lors de la phase de partition.

Le maillage final, Tableau 2, comprend  $np_{ste}$  points de Steiner,  $ne$  tétraèdres et  $np$  sommets. Le temps de construction (en secondes) est  $C_{pu}$ . Enfin on indique par  $Target$  la qualité cible et par  $Q$  la qualité du maillage construit. La qualité cible est celle du meilleur tétraèdre qu'il est possible de construire en s'appuyant sur la plus mauvaise face de la surface donnée en entrée. La qualité du maillage est celle de son plus mauvais élément. La mesure de qualité retenue, pour un élément, est le rapport de forme,  $Q = \alpha \frac{h}{\rho}$  où  $h$  est la longueur de l'arête la plus longue de l'élément et  $\rho$  le rayon de sa sphère inscrite. Cette mesure varie de 1 (via le coefficient de normalisation  $\alpha$ ) à l'infini. Plus la valeur est grande, plus le tétraèdre est dégénéré.

-	$f_{aini}$	$ar_{ini}$	$f_{aper}$	$ar_{per}$	$np_{face}$	$np_{aret}$
Ex 1 (rw)	13326	19989	7	4	106	6
Ex 2 (mohne)	5560	8340	12	9	80	30
Ex 3 (thru-mazewheel)	5622	8433	1	0	3	0
Ex 4 (cami1)	932	1398	7	7	27	13
Ex 5 (try5.2)	13482	20119	6	3	120	11

Tableau 1: Statistiques sur les exemples présentés. Bilan sur les faces et arêtes manquantes et les points d'intersection temporairement ajoutés.

Les nombres de faces et d'arêtes perdues (à l'issue de la phase classique de forçage) restent faibles. Autrement dit, la méthode ne s'active que de façon marginale pour traiter les pathologies que la méthode classique n'a pas pu convenablement considérer. Le nombre de points d'intersection ajoutés sur les arêtes puis sur

les faces est ici relativement peu élevé. Nous avons toutefois traité des cas où ce nombre dépasse le millier (pour une seule face !).

-	$npste$	$ne$	$np$	$Target$	$Q$	$Cpu$
Ex 1 (rw)	22	35423	9686	24664	25971	36
Ex 2 (mohne)	41	16946	4233	627	781	54
Ex 3 (thru-mazewheel)	16	8367	3154	73	253	20
Ex 4 (cami1)	14	1734	554	734	755	11
Ex 5 (try5.2)	10	56775	10806	530	1059	61

Tableau 2: Statistiques sur les exemples présentés. Bilan sur les maillages construits.

La qualité atteinte,  $Q$ , est le plus souvent sensiblement plus mauvaise que la qualité visée,  $Target$ , ceci est lié aux points de Steiner (dédoublés) qui contraignent le maillage. Un moyen simple d'obtenir néanmoins un maillage de qualité (où  $Q$  est voisin de  $Target$ ) est d'optimiser le maillage via un nouvel appel au mailleur. Dans ce cas, le mailleur agit comme optimiseur (cf. les dernières étapes de la méthode générale de construction).

Le temps de construction doit pouvoir être amélioré (il s'agit ici d'une implémentation qui peut être améliorée, on a privilégié la robustesse à la vitesse).

Le nombre de points de Steiner (issus soit de la phase classique soit de la phase de partition) reste raisonnable. Est-il optimal (*i.e.*, minimal), rien ne permet de l'affirmer. Ici, encore, le souci a été la robustesse et un certain contrôle de qualité qui peut empêcher la destruction d'un tel point si, bien que valide, le maillage résultant se dégrade trop en terme de qualité.

## 10 Conclusions

On a proposé une méthode de construction d'un maillage tétraédrique d'un domaine arbitraire décrit par un maillage de sa peau. La méthode s'applique, dans ses limites (numériques), à des cas où la peau maillée est de piètre qualité (en particulier pour des applications en éléments finis et pour la notion de qualité d'élément sous-jacente).

Les applications (éventuellement détournées) de tout ou partie de cette méthode sont multiples et peuvent concerner plusieurs domaines comme :

- le traitement de géométries définies par un maillage de surface de type STL en particulier,
- la détection et correction de surface auto-intersectante,
- la possibilité de conformiser (rendre conforme) un maillage,
- la possibilité de recoller deux maillages non conformes,
- etc.

Par contre, envisager une application de type éléments finis (volumes finis) basées sur un maillage de surface très piètre qualité reste illusoire. Le maillage construit dans ce cas est en effet juste mais ne satisfait pas, en général aux critères de qualité nécessaires à ce type d'application. Pour finir, notons que cette méthode appliquée à un cas où une méthode de forçage classique échoue pour très peu de faces est un moyen d'assurer la création d'un maillage juste en traitant ainsi les quelques entités non formées directement. Dans ce cas, on évite les inconvénients de la méthode (existence éventuelle de mauvais éléments puisque très peu de points d'intersection, potentiellement gênant, sont nécessaires) et on obtient une méthode de maillage de robustesse illimitée (la seule limite étant numérique).

## Références

- [1] H. BOROUCAKI ET P.L. GEORGE, Maillage simplicial d'un polyèdre arbitraire. Partie 1 : Existence et coût, *RR INRIA*, n° 4397, 2002.
- [2] H. BOROUCAKI, P.L. GEORGE AND S.H. LO, Boundary enforcement by facet splits in Delaunay based mesh generation, in *7th Inter. Conf. on Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, Whistler, BC, Canada, 203-221, 2000.
- [3] TH. COUPEZ, Grandes transformations et remaillage automatique, Thèse ENSMP, CEMEF, Sophia Antipolis, 1991.
- [4] P.J. FREY ET P.L. GEORGE, Maillages. Applications aux éléments finis, Hermes, Paris, 1999.
- [5] P.L. GEORGE, Improvement on Delaunay based 3D automatic mesh generator, *Finite Elements in Analysis and Design*, **25**(3-4), 297-317, 1997.
- [6] P.L. GEORGE, F. HECHT AND E. SALTEL, Automatic mesh generator with specified boundary, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, **92**, 269-288, 1991.
- [7] A. LIU AND M. BAIDA How far flipping can go towards 3D conforming/constrained triangulation, in proc. 9<sup>th</sup> International Meshing Roundtable, 307-315, 2000.



---

Unité de recherche INRIA Rocquencourt

Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis : 2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

---

Éditeur

INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

<http://www.inria.fr>

ISSN 0249-6399